

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

תוכנית חדשה

- א. משך הבחינה: ארבע שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
- פרק ראשון – שאלות קצרות
 - פרק שני – סדרות והסתברות
 - פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
 - פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
- יש לענות על ארבע שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.
- $100 = 25 \times 4$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.
 - שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
- ד. הוראות מיוחדות:
- אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
- יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה. כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

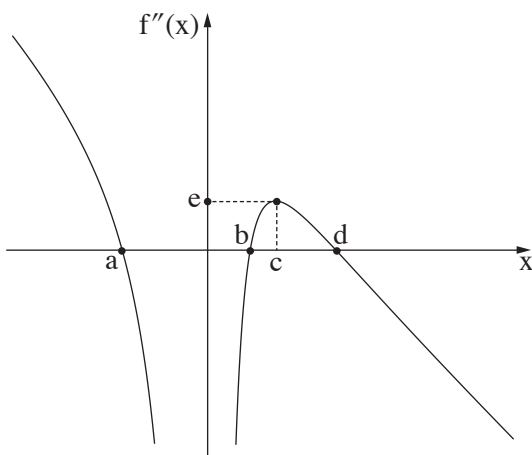
ענו על ארבע מן השאלות 1-8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 25 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שני מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי:

$$4 + 13 + \dots + \frac{5n^2 + 3n}{2} = \frac{n(n+1)(5n+7)}{6}$$



ב. נתונות הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$, המוגדרות לכל $x \neq 0$.

בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

לגרף הפונקצייה $f''(x)$ יש שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- x ,

ושיעוריהן הם $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(d, 0)$.

הנקודה (c, e) היא נקודת הקיצון של הפונקצייה $f''(x)$.

(1) הביעו באמצעות a, b, c, d, e , אם יש צורך,

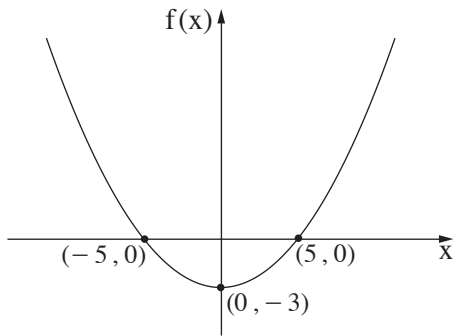
את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקצייה $h(x)$, המקיימת: $h'(x) = f''(x) - e$.

הפונקצייה $h(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$.

(2) מצאו כמה נקודות קיצון וכמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $h(x)$ (אם יש כאלה).

נמקו את תשובתכם.



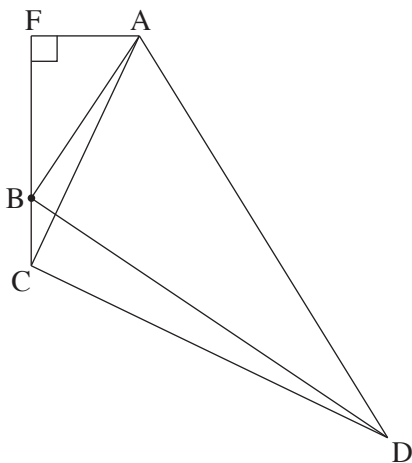
ג. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$, ועליו כתובים כל שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x ושיעורי נקודת המינימום שלה. הפונקצייה מוגדרת לכל x . נתונות הפונקציות: $h(x) = |f(x)| + m$, $g(x) = |f(x) + m|$. m הוא פרמטר, $0 < m < 2$.
 (1) הביעו באמצעות m , אם יש צורך, את שיעורי נקודת המקסימום של הפונקצייה $g(x)$.

(2) הביעו באמצעות m , אם יש צורך, את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $h(x)$, וקבעו את סוגן.

(3) לפניכם שתי טענות, II-I. קבעו בעבור כל טענה אם היא נכונה או אינה נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ חיוביות לכל ערך של x .

II. לכל ערך של m בתחום $0 < m < 2$ מתקיים שהישר $y = m + \frac{1}{2}$ חותך כל אחת מן הפונקציות $g(x)$ ו- $h(x)$ בשלוש נקודות.



ד. המרובע ABCD הוא בר חסימה במעגל, כך ש-AD הוא קוטר במעגל.

הנקודה F נמצאת על המשך הצלע CB, כך ש- $FB \perp FA$, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

(1) הוכיחו: $\triangle ACD \sim \triangle AFB$.

נתון: $\angle BDA = 24^\circ$.

(2) מצאו את היחס בין שטח המשולש ACD ובין שטח המשולש AFB.

פרק שני – סדרות והסתברות

2. הסדרה A היא סדרה הנדסית שאיבריה הם a_1, a_2, a_3, \dots ומנתה היא q , $-1 < q < 0$. נתון: $a_1 = 1$.

הסדרה B מוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$.

- א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q .
- ב. לפניכם שלוש טענות III-I. קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.
- I. הסדרה A לא עולה ולא יורדת.
- II. הסדרה B היא סדרה עולה.
- III. האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A יוצרים סדרה עולה.

נתון: הסדרה B היא סדרה איך-סופית שסכומה הוא $\frac{1}{8}$.

ג. מצאו את ערכו של q .

נתונה סדרה הנדסית נוספת C, המוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

נתון: $c_3 + c_4 + \dots + c_m = 44,307$, הוא מספר טבעי.

ד. מצאו את הערך של m .

3. בחידון יש 5 שאלות. ההסתברות לענות נכון על כל אחת מן השאלות היא P.

ידוע כי ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 4 שאלות לכל היותר היא 0.83193.

א. מצאו את P.

ב. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 3 שאלות בדיוק.

מספר הנקודות הניתן לכל שאלה זהה למספר השאלה. כלומר מתמודד שענה נכון על שאלה 1, מקבל נקודה אחת.

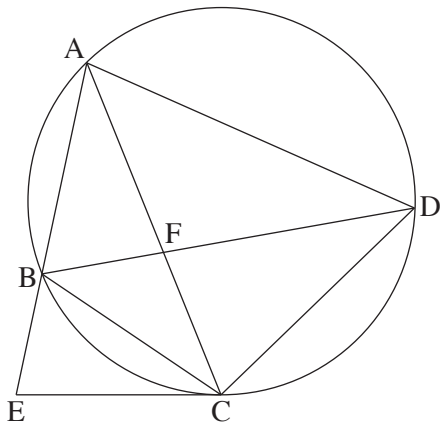
מתמודד שענה נכון על שאלה 2 מקבל שתי נקודות, וכן הלאה.

ג. מצאו את ההסתברות שמתמודד יצבור 14 נקודות לפחות.

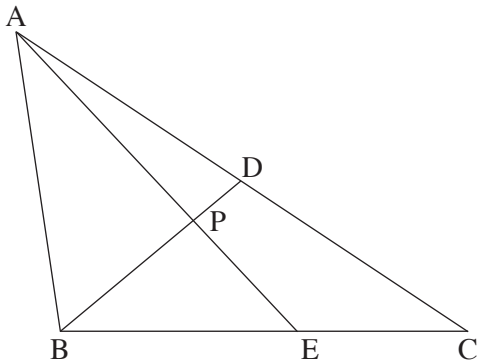
ד. מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יצבור 6 נקודות בדיוק.

ה. ידוע כי אחינועם ענתה נכון על 3 שאלות בדיוק. מצאו את ההסתברות שהיא צברה 6 נקודות בדיוק.

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. המרובע ABCD חסום במעגל. אלכסוני המרובע נחתכים בנקודה F. המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך המיתר AB בנקודה E (ראו סרטוט). נתון: $AB = CB$.
- א. הוכיחו: $\angle EBC = 2 \cdot \angle BDC$.
- נתון: AC חוצה את זווית ECD,
- $$\frac{CD}{CF} = \frac{7}{4}$$
- ב. (1) הוכיחו: $AC = AD$.
- (2) מצאו את היחס $\frac{AD}{CD}$.
- (3) מצאו את היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש CBF.
- נסמן את שטח המשולש ABF ב-S.
- ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AEC.



5. במשולש ABC, BD הוא תיכון לצלע AC. הנקודה E נמצאת על הצלע BC. במשולש ABE ו-BD נחתכים בנקודה P (ראו סרטוט). נתון: $BP = 3 \cdot PD$.
- נסמן: $AB = k$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.
- א. הביעו באמצעות α , β ו-k את אורכי הקטעים AP ו-BP.
- נתון כי AE ו-BD מאונכים זה לזה, וכי שטח המשולש ABD הוא $\frac{1}{4}k^2$.
- ב. מצאו את גודל הזווית α .
- ג. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEB.
- ד. מצאו את אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC, כך שמתקיים $\angle ABC = 90^\circ$. הביעו את תשובתכם באמצעות k.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{4x}{(x^2 - a)^2}$, a הוא פרמטר חיובי. ענו על סעיפים א-ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.
- א.** (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
 (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.
- ב.** סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- $g(x)$ היא פונקצייה המקיימת $g'(x) = f(x)$. גרף הפונקצייה $g(x)$ עובר בנקודה $(0, 0)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.
- ג.** מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקצייה $g(x)$.
- ד.** (1) מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.
 (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ שמצאתם בתת-סעיף ד(1).
- $h(x)$ היא פונקצייה המוגדרת כך: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו התחום.
- ה.** (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקצייה $h(x)$.
 (2) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקצייה $h(x)$.

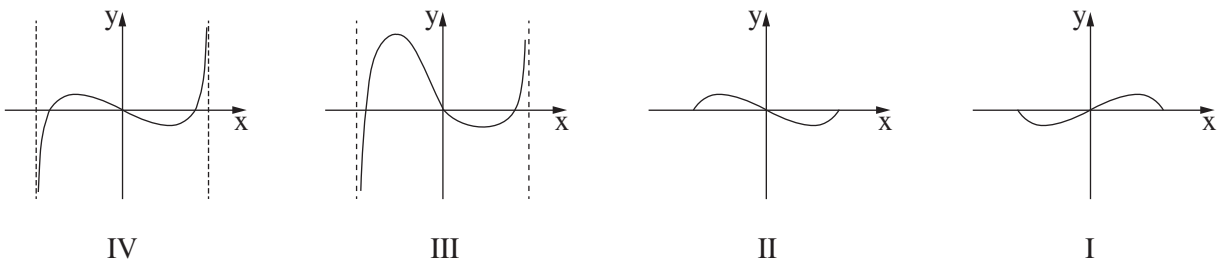
7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \cos x - \sqrt{\cos x}$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) הראו כי הפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה זוגית.
- (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
- (4) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

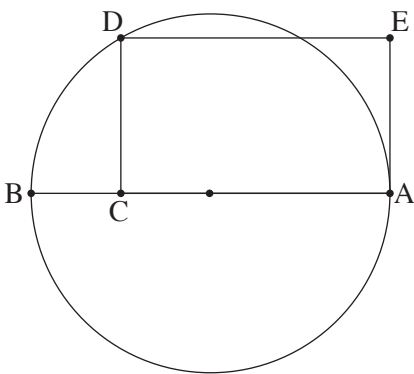
ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



- נתונה הפונקצייה $g(x) = k - f(x)$, הוא פרמטר חיובי. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום. נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום בין 0 ל- $\frac{\pi}{2}$.
- נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי הישרים $x = \frac{\pi}{2}$ ו- $x = -\frac{\pi}{2}$ הוא $10 \cdot S$.
- ה. הביעו את k באמצעות S .



8. הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R , מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל מסמנים נקודה D , כך שהקטע CD מאונך לקטע AB . הקטע AC גדול מ- R . דרך הנקודה D מעבירים ישר שמקביל לקוטר AB . דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל. הישר המקביל והמשיק נחתכים בנקודה E . נסמן: $AC = x$.
- א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן $ACDE$ מקסימלי.
 - הנקודה F נמצאת על הצלע DE .
 - ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו- AFE .

בהצלחה!