פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ד , 2024 , מועד א', שאלון:35572

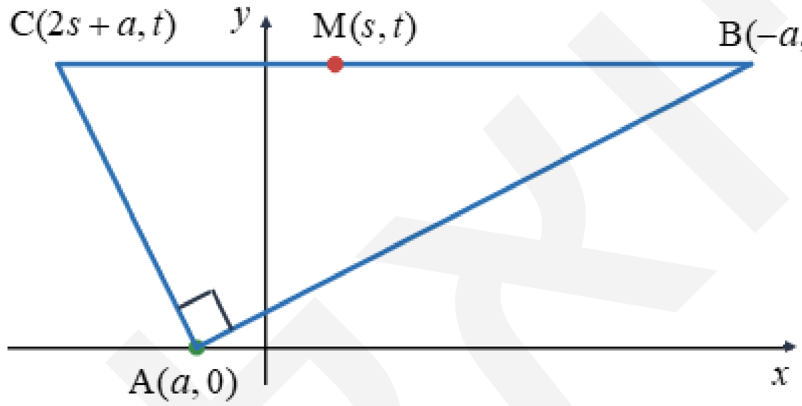
תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. נתון: $A(a,0)$ **(**$a \neq 0$**, פרמטר)** , $x_B = -a$ **, ו-** $\sphericalangle BAC = 90°$ **, כאשר** BC **מקביל לציר ה-** x .

נסמן $M(s,t)$ **נקודה על המקום הגיאומטרי, כאשר היא אמצע הצלע** BC .

כיוון ש- BC **מקביל לציר ה-** x **, הרי ש-** $y_B = y_C = y_M = t$ **ו-** $x_B = -a$ **ומכאן ש--** $B(-a,t)$.

$M(s,t)$ **היא אמצע הצלע** BC**, ולכן** $\frac{x_C + (-a)}{2} = s \quad \rightarrow x_C = 2s + a$ **ומכאן ש-** $C(2s+a,t)$.



נשתמש בנוסחת מכפלת השיפועים שווה ל (-1) **כי** $\sphericalangle BAC = 90°$.

$$m_{CA} \cdot m_{BA} \cdot = -1$$

$$\frac{t-0}{2s+a-a} \cdot \frac{t-0}{-a-a} = -1$$

$$t^2 = 2a \cdot 2s$$

$$\boxed{y^2 = 4ax}$$

וזאת הפרבולה $y^2 = 4ax$ **, שהמוקד שלה הוא** $(a,0)$ **, והמדריך שלה הוא** $x = -a$.

תשובה: הפרבולה $y^2 = 4ax$ **, שהמוקד שלה הוא** $(a,0)$ **, והמדריך שלה הוא** $x = -a$ ..

הערה: **ניתן להסיק מיידית על המקום הגיאומטרי לפי ההגדרה הבסיסית של פרבולה קנונית.**

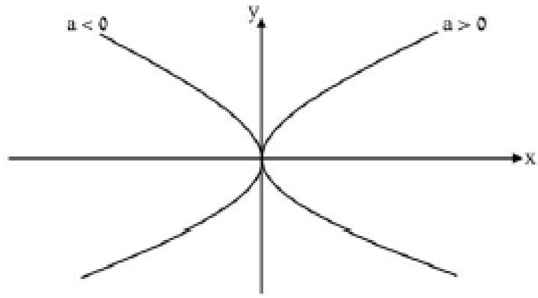
הנקודה M **נמצאת במרחק מנקודה קבועה** $(a,0)$ **ששווה למרחק מישר** $x = -a$

(המקביל לציר ה- y **, כי** MB **מקביל לציר ה-** x **), לפי המשפט התיכון ליתר שווה למחצית היתר ב-** ΔBAC .

לכן המוקד הוא $(a,0)$**, המדריך הוא** $x = -a$ **, והפרבולה המתקבלת היא** $y^2 = 4ax$.

תודה למורה שהציע פתרון זה.

ב. כיוון שאין מידע על סימן הפרמטר a , הרי שמתקבלות שתי פרבולות קנוניות.



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. הנקודה $\mathrm{M}(s,t)$ **נמצאת על הפרבולה** $y^2=4ax$ **ולכן** $\mathrm{M}(\frac{t^2}{4a},t)$.

משוואת ℓ **המשיק לפרבולה היא** $yy_0=p(x+x_0)$ **,ולכן :** $m_\ell=\frac{p}{y_0}=\frac{2a}{t}$.

$$m_{\mathrm{AC}}=\frac{t-0}{2s+a-a}=\frac{t}{2\cdot\frac{t^2}{4a}}=\frac{2a}{t}$$

קבלנו ששיפוע המשיק ℓ **שווה לשיפוע** AC **, ולכן הישרים מקבילים.**

תשובה: הוכחנו כי הישר ℓ **מקביל לישר** AC.

ד. הקודקוד $\mathrm{B}(-a,t)$ **נמצא על הישר** $x=-2$ **ולכן** $a=2$ **, וגם** $\mathrm{B}(-2,t)$ **, ו-** $\mathrm{A}(2,0)$.

עבור $a=2$ **, הפרבולה היא** $y^2=8x$.

$\mathrm{AM}=10$ **ומכיוון שהמרחק מהמוקד שווה למרחק מהמדריך, הרי ש-** $x_{\mathrm{M}}=-2+10=8$

ו- $\mathrm{M}(8,8)$ **כי היא ברביע הראשון.**

בהתאם: $\mathrm{B}(-2,8)$ **ו-** $\mathrm{C}(18,8)$ **על פי נוסחת אמצע קטע.**

תשובה: $\mathrm{B}(-2,8)$ **,** $\mathrm{C}(18,8)$.

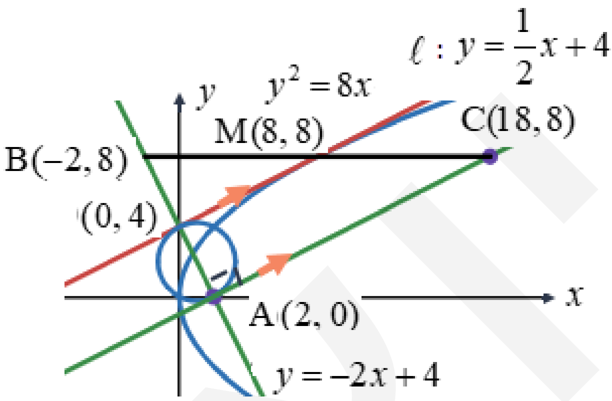
ה. דרך הקודקוד $A(2,0)$, שהוא גם מוקד הפרבולה $y^2=8x$, העבירו מעגל.

המעגל משיק לשני הישרים המקבילים ℓ ו- AC.

המשיק ℓ יוצא מהנקודה $M(8,8)$ שהיא אמצע הצלע BC, ומקביל לצלע AC

מכאן שהמשיק ℓ הוא קטע אמצעים ב- ΔABC . ==תודה למורה דוד צחור==

כאשר קוטר המעגל מונח על הישר שעליו נמצאת הצלע AB, כי $\sphericalangle BAC=90°$.



- מרכז המעגל, אמצע הקוטר, מחלק את הצלע AB ביחס $3:1$.

ומרכז המעגל הוא $(1,2) \leftarrow (\frac{1\cdot(-2)+3\cdot 2}{4},\frac{1\cdot 8+3\cdot 0}{4})$

- או: נקודת ההשקה השנייה, אמצע הקטע AB, היא $(0,4) \leftarrow (\frac{-2+2}{2},\frac{8+0}{2}) = \frac{x_B+x_A}{2}$

ומרכז המעגל, אמצע הקוטר, הוא $(1,2) \leftarrow (\frac{0+2}{2},\frac{4+0}{2})$

<u>דרך אחרת:</u>

$m_{AC}=\frac{2a}{t}=\frac{2\cdot 2}{8}=\frac{1}{2}$, ולכן שיפוע הקוטר הוא (-2) , כשהוא עובר בנקודה $(2,0)$.

ומשוואת הקוטר היא : $y=-2x+4 \leftarrow y-0=-2(x-2)$.

משוואת המשיק ℓ היא: $y=\frac{1}{2}x+4 \leftarrow y-8=\frac{1}{2}(x-8)$

נקודת ההשקה השנייה היא: $(0,4) \leftarrow \left.\begin{cases} y=-2x+4 \\ y=\frac{1}{2}x+4 \end{cases}\right\} x=0$

ומרכז המעגל, אמצע הקוטר, הוא $(1,2) \leftarrow (\frac{0+2}{2},\frac{4+0}{2})$

תשובה: שיעורי מרכז המעגל הם $(1,2)$.

א. נתונים הישר $\ell: \underline{x} = (-1, 5, -11) + t\cdot(m-1, 5-m, -2)$ **, והמישור** $\pi: 3x + my + (m+6)z + 4 = 0$ **.**

התנאי להקבלת ישר למישור הוא שווקטור הכוון שלו מאונך לנורמל של המישור (ואין להם נקודה משותפת).

נראה שתנאי זה אינו מתקיים.

$$(m-1, 5-m, -2)(3, m, m+6) = 3m - 3 + 5m - m^2 - 2m - 12 = -m^2 + 6m - 15$$
$$-m^2 + 6m - 15: \quad \Delta = 6^2 - 4(-1)(-15) = -24 < 0$$

קיבלנו שהמכפלה הסקלרית היא ביטוי ריבועי, שהדיסקרימננטה שלו שלילית, ולכן אינו מתאפס.

ולכן התנאי להקבלת ישר למישור אינו מתקיים.

תשובה: הראינו כי לכל ערך של m **הישר** ℓ **אינו מקביל למישור** π **.**

.

ב. נתון כי הישר $\ell: \underline{x} = (-1, 5, -11) + t\cdot(m-1, 5-m, -2)$ **, ניצב למישור** $\pi: 3x + my + (m+6)z + 4 = 0$ **.**

מכאן שווקטור הכיוון של הישר והנורמל של המישור תלויים זה בזה (אחד הוא כפולה של השני).

$$(3, m, m+6) = p(m-1, 5-m, -2)$$
$$\begin{cases} 3 = p(m-1) \\ m = p(5-m) \\ m+6 = -2p \to \boxed{m = -2p-6} \end{cases}$$
$$3 = p(-2p-6-1)$$
$$2p^2 + 7p + 3 = 0$$
$$p = -0.5 \quad , \quad p = -3$$
$$p = -0.5 \quad \to m = -5 \quad \to -5 = -0.5\cdot(5+5) \quad \to -5 = -5 \quad \to \boxed{m = -5}$$
$$p = -3 \quad \to m = 0 \quad \to 0 = -3\cdot(5-0) \quad \to 0 \neq -15 \quad \to \cancel{m = 0}$$

תשובה: $m = -5$.

ג. נציב $m=-5$ **: והישר הוא** $\ell: \underline{x}=(-1,5,-11)+t\cdot(3,-5,1) \quad \rightarrow \ell: \underline{x}=(-1,5,-11)+t\cdot(-6,10,-2)$,

והמישור הוא $\pi: 3x-5y+z+4=0$ **.**

נקודה טיפוסית על הישר: $(-1+3t, 5\text{-}5t, -11+t)$ **.**

נציב אותה במשוואת המישור, לקבלת נקודת החיתוך של הישר עם המישור, הנקודה A **.**

$$
\begin{aligned}
&3(-1+3t)-5(5-5t)-11+t+4=0\\
&-3+9t-25+25t-7+t=0\\
&35t=35\\
&\boxed{t=1} \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{A}(2,0,-10)}
\end{aligned}
$$

תשובה: $\mathrm{A}(2,0,-10)$ **.**

ד. לפנינו טענה: "קיים מישור אחד המכיל את הישר ℓ **ועובר דרך הנקודה** $(5,-5,-9)$**".**

ישר ונקודה שלא על הישר פורסים מישור יחיד.

נבדוק האם הנקודה $(5,-5,-9)$ **נמצאת על הישר** ℓ **,**

שנקודה טיפוסית עליו היא $(-1+3t, 5\text{-}5t, -11+t)$ **.**

$$
\begin{cases}
-1+3t=5 \quad \rightarrow 3t=6 \quad \rightarrow t=2\\
5-5t=-5 \quad \rightarrow -5t=-10 \quad \rightarrow t=2\\
-11+t=-9 \quad \rightarrow t=2
\end{cases}
$$

קיבלנו שעבור $t=2$ **שלוש המשוואות מתקיימות, ולכן הנקודה** $(5,-5,-9)$ **נמצאת על הישר** ℓ **.**

תשובה: הטענה אינה נכונה, כי הנקודה נמצאת על הישר ולכן יש אינסוף מישורים,

שמכילים את הישר ℓ **ואת הנקודה** $(5,-5,-9)$ **שעליו.**

א. $z=x+yi$ **, מספר מרוכב (** x,y **ממשיים).**

נראה שהמקום הגיאומטרי של כל הנקודות (x,y) **במישור גאוס**

המקיימות: $|6-\bar{z}-8i|^2-|10i|=|9+12i|$ **הוא מעגל.**

$$|6-(x-yi)-8i|^2-10=\sqrt{9^2+12^2}$$

$$|(6-x)+(y-8)i|^2-10=15$$

$$(6-x)^2+(y-8)^2=25$$

$$\boxed{(x-6)^2+(y-8)^2=25}$$

וזה המעגל $(x-6)^2+(y-8)^2=25$ **, שמרכזו** $M(6,8)$ **ורדיוסו** 5.

תשובה: הראינו כי המקום הגיאומטרי הוא מעגל.

ב. הנקודה $M(6,8)$ **היא מרכז המעגל.**

z_A **מייצג את הנקודה** A **,** z_M **מייצג את הנקודה** $M(6,8)$ **,**

כך ש- $\arg(z_A)=\arg(z_M)$ **(יש להם את אותה זווית), ו-** $2|z_A|=|z_M|$ **.**

$M(6,8)$ **ברביע הראשון כך ש-** $0°<\arg(z_A),\arg(z_M)<90°$.

<u>פתרון קצר</u>

כיוון שהארגומנטים שווים ו- $2|z_A|=|z_M|$ **, הרי שהנקודה** A **היא אמצע הקטע** OM **,**

ושיעוריה הם $\boxed{A(3,4)} \rightarrow (\frac{0+6}{2},\frac{0+8}{2})$ **.**

<u>פתרון ארוך</u>

$$|z_M|=\sqrt{6^2+8^2}=10 \quad \rightarrow |z_A|=5$$

$$\tan\theta_M=\frac{8}{6} \quad \rightarrow \theta_M=53.13° \quad \leftarrow 1st\ quadrant$$

$$|z_A|=5,\ \theta_A=53.13°$$

$$z_A=5cis\,53.13° \quad \rightarrow \boxed{z_A=3+4i}$$

תשובה: $A(3,4)$.

ג. נתונה סדרה הנדסית $z_1, z_2, z_3, ...$ **, כאשר** $z_1 = z_A = 3+4i$ **ו-** $z_5 = z_M = 6+8i$

$$q^4 = \frac{z_5}{z_1} = \frac{6+8i}{3+4i} = \frac{2(3+4i)}{3+4i} = 2$$

$$q^4 = 2cis\,0° \quad \to q = \sqrt[4]{2}cis\,90°k$$

$$q = \sqrt[4]{2}, \quad \sqrt[4]{2}cis\,90° = \sqrt[4]{2}\,i, \quad \sqrt[4]{2}cis\,180° = -\sqrt[4]{2}\,, \quad \sqrt[4]{2}cis\,270° = -\sqrt[4]{2}i$$

תשובה: מנת הסדרה היא אחת מארבע האפשרויות הבאות

$\sqrt[4]{2}, \quad \sqrt[4]{2}cis\,90° = \sqrt[4]{2}\,i, \quad \sqrt[4]{2}cis\,180° = -\sqrt[4]{2}\,, \quad \sqrt[4]{2}cis\,270° = -\sqrt[4]{2}\,i$ **.**

ד. נחשב את הסכום של $z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + ... + z_{10} \cdot \overline{z_{10}}$ **.**

$z \cdot \overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2 = |z|^2$ **, כלומר,** $z_n \cdot \overline{z_n} = |z_n|^2$ **.**

נראה שהסכום המבוקש הוא סכום של סדרה הנדסית.

$$\frac{z_{n+1} \cdot \overline{z_{n+1}}}{z_n \cdot \overline{z_n}} = \frac{|z_{n+1}|^2}{|z_n|^2} = \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|^2 = |q|^2 = \left|\sqrt[4]{2}cis\,90°k\right|^2 = (\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}$$

ולכן זו סדרה הנדסית, שהאיבר הראשון בה הוא $|z_1|^2 = 5^2 = 25$ **, מנתה היא** $\sqrt{2}$ **ובה** 10 **איברים.**

הערה כנימוק: זה לא משנה איזה ערך של q **מסעיף ג הצבנו, כי כל הערכים המוחלטים של 4 האפשרויות שמצאנו שווים זה לזה.**

הערה נוספת: לא נדרש להוכיח בבחינת הבגרות ש- $\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ **.**

אבל, אם יבקשו, אז הכי פשוט בצורה הבאה: $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2} = \left|\frac{r_1}{r_2}\right| = \left|\frac{r_1}{r_2}cis(\alpha_1 - \alpha_2)\right| = \left|\frac{r_1 cis(\alpha_1)}{r_2 cis(\alpha_2)}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

$$S_{10} = \frac{25 \cdot (\sqrt{2}^{10} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \frac{775}{\sqrt{2} - 1} \approx 1{,}871.02$$

אפשר גם : $S_{10} = \frac{775}{\sqrt{2}-1} = \frac{775(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{775(\sqrt{2}+1)}{2-1} = 775(\sqrt{2}+1) \approx 1{,}871.02$

תשובה: הסכום המבוקש הוא $775(\sqrt{2}+1) \approx 1{,}871.02$ **.**

א. נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{a-x^2}{e^x}$ **ו-** $g(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$**, המוגדרות לכל** x**.** a **הוא פרמטר.**

נמצא את הערך של a **שבעבורו** $f(x)=g'(x)$ **לכל ערך של** x**.**

$$g'(x)=\frac{2(x+1)e^x-e^x\cdot(x+1)^2}{(e^x)^2}$$

$$g'(x)=\frac{(x+1)(2-(x+1))}{e^x}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{(x+1)(1-x)}{e^x}}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{1-x^2}{e^x}}$$

קל לראות שעבור $a=1$ **מתקיים** $f(x)=g'(x)$**.**

תשובה: בעבור $a=1$ **מתקיים** $f(x)=g'(x)$ **לכל ערך של** x**.**

ב. נתונות הפונקציות $f(x)=g'(x)=\frac{1-x^2}{e^x}$ **ו-** $g(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$**, המוגדרות לכל** x**.**

(1) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $f(x)=0$ **ונקבל** $(1,0)$ **ו-** $(-1,0)$**.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ו-** $\rightarrow(0,1)$ $f(0)=\frac{1-0^2}{e^0}=1$**.**

תשובה: נקודות החיתוך של $f(x)$ **עם הצירים הן:** $(1,0)$**,** $(-1,0)$**,** $(0,1)$**.**

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $g(x)=0$ **ונקבל** $(-1,0)$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ו-** $\rightarrow(0,1)$ $g(0)=\frac{(0+1)^2}{e^0}=1$

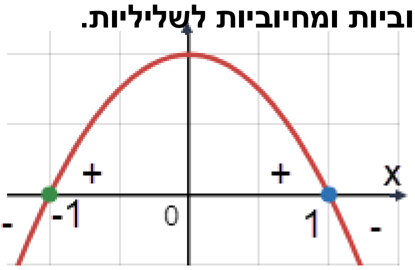
תשובה: נקודות החיתוך של $g(x)$ **עם הצירים הן:** $(1,0)$**,** $(0,1)$**.**

(3) נמצא את נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות.

עבור $g(x)$ **:** $f(x)=g'(x)$ **ולכן** $g'(x)=0$ **עבור** $x=\pm1$ **.**

המכנה של $g'(x)=\frac{1-x^2}{e^x}$ **חיובי, ולכן סימני הנגזרת נקבעים בהתאם לסימני המונה.**

המונה הוא ביטוי ריבועי של פרבולה הפוכה, שעוברת משליליות לחיוביות ומחיוביות לשליליות.



$x=-1$ **מינימום, ולכן** $(-1,0)$ **היא נקודת מינימום.**

$x=1$ **מקסימום,** $g(1)=\frac{(1+1)^2}{e^1}=\frac{4}{e}$ **ולכן** $(1,\frac{4}{e})$ **מקסימום.**

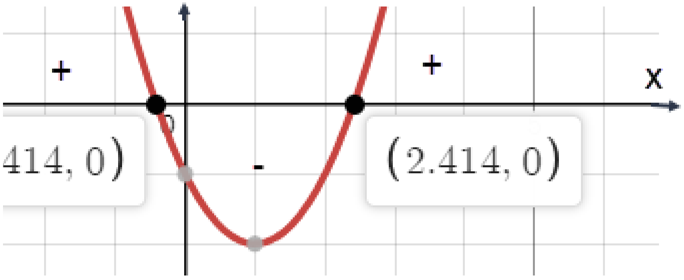
עבור $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{-2xe^x-e^x\cdot(1-x^2)}{(e^x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x-1+x^2}{e^x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{e^x}}$$

$$x^2-2x-1=0 \quad \rightarrow x=1\pm\sqrt{2}$$



הפרבולה, שקובעת את סימני הנגזרת, היא ישרה ועוברת מחיוביות לשליליות ומשליליות לחיוביות.

$x=1-\sqrt{2}$ **מקסימום, ולכן** $(1-\sqrt{2},1.25)$ **היא נקודת מקסימום.**

$x=1+\sqrt{2}$ **מינימום, ולכן** $(1+\sqrt{2},-0.43)$ **היא נקודת מקסימום.**

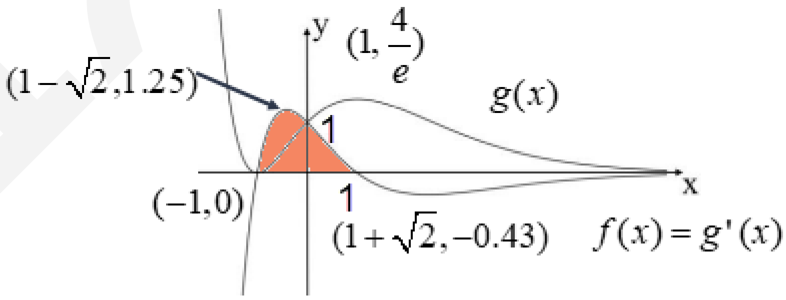
תשובה: עבור $f(x)$ **-** $(1+\sqrt{2},-0.43)$ **מינימום,** $(1-\sqrt{2},1.25)$ **מקסימום,**

עבור $g(x)$ **-** $(1,\frac{4}{e})$ **מקסימום,** $(-1,0)$ **מינימום.**

(5) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נשים לב שעבור $x\rightarrow+\infty$ **שתי הפונקציות שואפות לאפס, ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

כמו כן, בנקודות החיתוך של $f(x)=g'(x)$ **עם ציר ה-** x **ל-** $g(x)$ **נקודות קיצון**



תשובה: הסרטוט מעל (כולל סימון השטח עבור סעיף ד).

ד. נחשב את השטח שבין $f(x)$ **לציר ה-** x **(צבוע באדום/כתום).**

נשים לב ש- $f(x)=g'(x)$ **ולכן הפונקציה הקדומה של** $f(x)$ **היא** $g(x)+c$.

$$S=\int_{-1}^{1}(f(x)-0)\,dx=g(x)\Big]_{-1}^{1}=g(1)-g(-1) \quad \rightarrow=\frac{4}{e}-0 \quad \rightarrow \boxed{S=\frac{4}{e}}$$

תשובה: השטח שבין $f(x)$ **לציר ה-** x **הוא** $\frac{4}{e}$.

נכתב ע"י עפר ילין

ה. נחשב את הערך של הביטוי $\int_1^2\left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^4}\cdot(\frac{x^2-1}{e^x})\right)dx$ **, בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.**

נשים לב ש- $\frac{1}{g^2(x)}=\frac{1}{\left(\frac{(x+1)^2}{e^x}\right)^2}=\frac{1}{\frac{(x+1)^4}{e^{2x}}}=\frac{e^{2x}}{(x+1)^4}$,

וכמו כן $-g'(x)=-f(x)=-\frac{1-x^2}{e^x}=\frac{x^2-1}{e^x}$.

$$\int_1^2\left(\frac{1}{g^2(x)}\cdot(-g'(x))\right)dx=\int_1^2\left(-\left(g(x)\right)^{-2}\cdot g'(x)\right)dx=-\frac{\left(g(x)\right)^{-1}}{-1}\Big]_1^2=\frac{1}{g(x)}\Big]_1^2$$

$$\int_1^2\left(-\frac{1}{g^2(x)}\cdot g'(x)\right)dx=\frac{1}{g(x)}\Big]_1^2$$

$$x=2:\quad \frac{1}{g(2)}=-\frac{1}{\frac{(2+1)^2}{e^2}}=\frac{e^2}{9}$$

$$x=1:\quad \frac{1}{g(1)}=-\frac{1}{\frac{4}{e}}=\frac{e}{4}$$

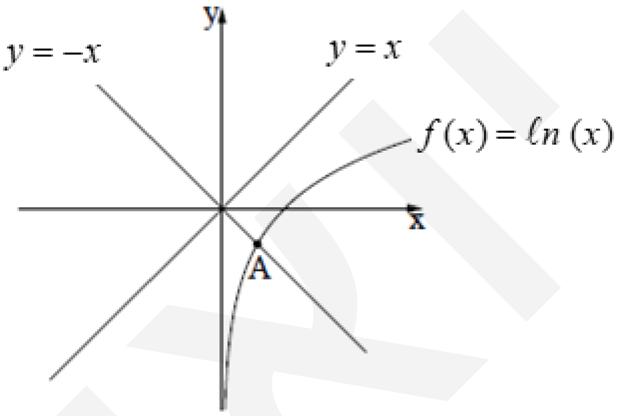
$$\boxed{\int_1^2(-\frac{1}{g^2(x)}\cdot g'(x)dx=\frac{e^2}{9}-\frac{e}{4}\approx 0.141}$$

תשובה: ערך הביטוי $\int_1^2\left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^4}\cdot(\frac{x^2-1}{e^x})\right)dx$ **הוא** $0.141\approx\frac{e^2}{9}-\frac{e}{4}$.

א. בשרטוט נתונים הגרפים של $f(x)=\ell n\,(x)$, המוגדרת בתחום $x>0$.

והישרים $y=x$ ו- $y=-x$.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של $f(x)$ עם $y=-x$, כאשר נסמן $x_A=a$.



נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\ell n\,(x)-x}{\ell n\,(x)+x}$

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס, ולכן $x\neq a \;\;\rightarrow \;\; \ell n\,(x)\neq -x$, על פי הגרפים הנתונים.

כמו כן $x>0$ כי הביטוי שבתוך הפונקציה הלוגריתמית צ"ל חיובי.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x>0,\, x\neq a$.

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $g(x)=0$ ונקבל $\ell n\,(x)=x$.

אולם, לפי הגרפים הנתונים, אין פתרון למשוואה (כי הגרפים אינם נחתכים).

תשובה: אין נקודות חיתוך לגרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(3) כאשר $x\rightarrow\infty$, ניתן לראות בגרפים ש- $x\rightarrow\infty$ מהר יותר מאשר $\ell n\,(x) \;\;\rightarrow\infty$,

ולכן המנה שואפת ל- -1 ו- $y=-1$ $(x\rightarrow+\infty)$ אסימפטוטה אופקית לימין.

אפשר לראות גם על ידי הצבה: $g(10{,}000)=\dfrac{\ell n\,(10{,}000)-10{,}000}{\ell n\,(10{,}000)+10{,}000}=-0.998$,

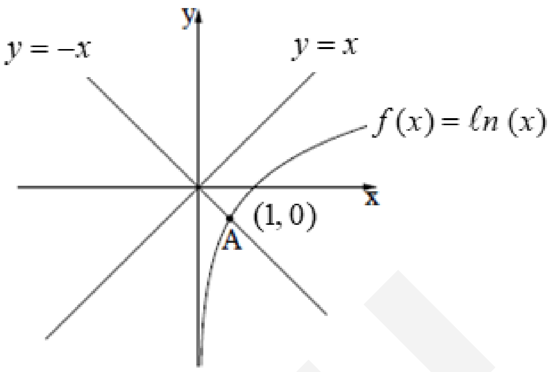
ונגיע לאסימפטוטה האופקית בירידה, ובקעירות כלפי מעלה.

(הערה – אין צורך לנמק בבחינת הבגרות, רק לרשום את התשובה הנכונה.)

תשובה: האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x של הפונקציה $g(x)$ היא $y=-1$ $(x\rightarrow+\infty)$

ב. $x_A = a$ **על פי הנתון, כאשר הנקודה** A **ברביע הרביעי ולכן** $a > 0$.

כמו כן $f(x) = \ell n(x)$ **חותכת את ציר ה-** x **בנקודה** $(1, 0)$ **שמימין לנקודה** A**, ולכן גם** $a < 1$.



תשובה: הסברנו מדוע $0 < a < 1$.

ג. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של $g(x) = \dfrac{\ell n(x) - x}{\ell n(x) + x}$ **ואת תחומי העלייה והירידה שלה.**

(1) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון.

$$g'(x) = \frac{(\frac{1}{x} - 1)(\ell n(x) + x) - (\frac{1}{x} + 1)(\ell n(x) - x)}{(\ell n(x) + x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{(1 - x)(\ell n(x) + x) - (1 + x)(\ell n(x) - x)}{x(\ell n(x) + x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\ell n(x) + x - x\ell n(x) - x^2 - \ell n(x) + x - x\ell n(x) + x^2}{x(\ell n(x) + x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{2x(1 - \ell n(x))}{x(\ell n(x) + x)^2}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{2(1 - \ell n(x))}{(\ell n(x) + x)^2}}$$

$$1 - \ell n(x) = 0 \quad \to \ell n(x) = 1 \quad \to x = e \quad \to (e, \frac{1-e}{1+e})$$

נשים לב שהביטוי שקובע את סימן הנגזרת בתחום $x > 0$ **הוא הביטוי** $1 - \ell n(x)$.

כיוון ש- $\ell n(x) - 1$ **חיובי עבור** $x > e$ **ושלילי בתחום** $0 < x < e$,

אז $1 - \ell n(x)$ **שלילי עבור** $x > e$ **וחיובי בתחום** $0 < x < e$.

מכאן ש- $(e, \dfrac{1-e}{1+e})$ **מקסימום, כי הנגזרת עוברת מחיובית לשליליות, והפונקציה מעלייה לירידה.**

תשובה: נקודת הקיצון של $g(x)$ **היא** $(e, \dfrac{1-e}{1+e})$ **מקסימום.**

(2) נזכור שתחום ההגדרה של $g(x)$ הוא $x>0,\ x\neq a$, כאשר $0<a<1$.

כפי שהראינו בתת הסעיף הקודם, הנגזרת חיובית בתחום וכן הפונקציה עולה.

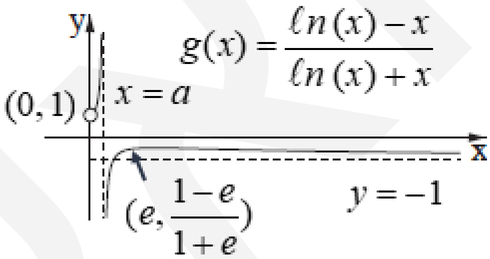
תשובה: עלייה $a<x<e$ או $0<x<a$, ירידה $x>e$.

ד. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=\dfrac{\ell n\,(x)-x}{\ell n\,(x)+x}$.

$x=a$ מאפס מכנה ולא מונה ולכן הישר $x=a$ הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה $g(x)$.

כאשר $x\to 0$ מימין, הפונקציה שואפת לערך הביטוי $\dfrac{\ell n\,(x)}{\ell n\,(x)}=1$ והגרף שואף לנקודה הריקה $(0,1)$.

אפשר לראות גם על ידי הצבה: $g(0.01)=1.004$,



תשובה: הסרטוט מעל.

ה. נתונה הפונקציה $h(x)=e^{g(x)}$.

תחום ההגדרה נשאר $x>0,\ x\neq a$.

$h(x)>0$ לכל x בתחום ההגדרה.

כאשר $x\to+\infty$: $h(x)\to e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ ו- $y=\dfrac{1}{e}$ $(x\to+\infty)$ אסימפטוטה אופקית לימין.

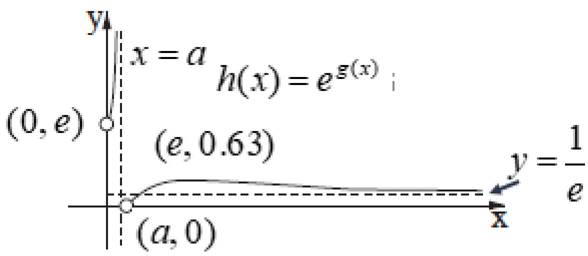
כאשר $x\to 0$ מימין : $h(x)\to e^{1}=e$ והגרף שואף לנקודה הריקה $(0,e)$.

אסימפטוטה אנכית ללא שינוי $x=a$ כאשר שואפים אליה משמאל,

אבל כאשר שואפים אליה מימין, אז $g(x)\to-\infty$ ו- $h(x)\to e^{-\infty}\to 0$,

והגרף יתחיל בעלייה מהנקודה הריקה $(a,0)$ (בתחום $a<x<e$) .

אין שינוי בתחומי עלייה וירידה, כי $h'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)$, ונקודת המקסימום היא $(e,e^{\frac{1-e}{1+e}})=(e,0.63)$.



תשובה: הסרטוט מעל.