פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשפ"ד , 2024 , מועד א', שאלון: 35571

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

נוכיח שהטענה $48+144+288+...+6n(n+2)=n(n+2)(n+4)$ **, נכונה לכל** n **טבעי <u>זוגי</u>.**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=2$ **.**

אגף ימין: $2\cdot(2+2)\cdot(2+4)=48$ **אגף שמאל:** 48

קבלנו שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי <u>זוגי</u> כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $48+144+288+...+6k(k+2)=k(k+2)(k+4)$ **,**

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$ **(הטבעי הזוגי העוקב):**

$48+144+288+...+6k(k+2)+6(k+2)(k+4)=(k+2)(k+4)(k+6)$ **.**

$$\Leftrightarrow \underbrace{48+144+288+...+6k(k+2)}_{\downarrow}+6(k+2)(k+4)=(k+2)(k+4)(k+6)$$

$$\Leftrightarrow \quad k(k+2)(k+4)+6(k+2)(k+4)=(k+2)(k+4)(k+6)$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל (על ידי הוצאת גורם משותף $(k+2)(k+4)$ **.**

$$\Leftrightarrow \quad k(k+2)(k+4)+6(k+2)(k+4)=(k+2)(k+4)(k+6)$$
$$\Leftrightarrow \quad (k+2)(k+4)(k+6)=(k+2)(k+4)(k+6)$$

מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

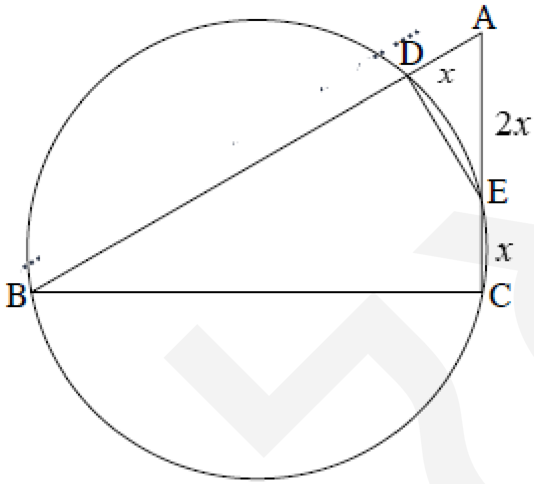
תשובה: הוכחנו שהטענה $48+144+288+...+6n(n+2)=n(n+2)(n+4)$ **, נכונה לכל** n **טבעי <u>זוגי</u>.**

בגרות פד מארס 24 מועד חורף שאלון 35571

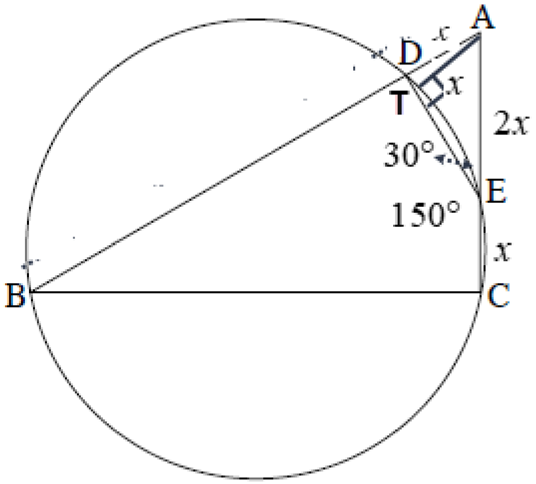
<u>נתונים</u>

1. $BCED$ **חסום במעגל . 2.** $AE = 2CE$ **. 3.** $AD = CE$ **עבור (3) 4.** $\sphericalangle DEC = 150°$

צ"ל: (1) $\Delta AED \sim \Delta ABC$ **(2)** $\frac{AB}{AC}$ **(3) האם** BE **קוטר ?**



הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	5	$\sphericalangle DEC + \sphericalangle B = 180°$	**זוויות נגדיות משלימות ל-** $180°$ **במרובע חסום במעגל**
	6	$\sphericalangle AED + \sphericalangle DEC = 180°$	**זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$
5, 6	7	$\sphericalangle B = \sphericalangle AED$ **(ז)**	
	8	$\sphericalangle A = \sphericalangle A$ **(ז)**	**זווית משותפת**
7, 8	9	$\Delta AED \sim \Delta ABC$	**משפט דמיון זווית זווית**
מ.ש.ל. (1)			
2, 3	10	$AD = CE = x \rightarrow AE = 2x$	**סימון , חישוב**
9, 10	11	$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$	**יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים**
10, 11	12	$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{2x}{x} = \frac{2}{1}$	
מ.ש.ל. (2)			



נוכיח בדרך הסתירה			
הנחה	$\sphericalangle ADE \neq 90°$	**13**	
בניית עזר אנך מ- A **לצלע** DE **(או להמשכה)**	$AT \perp DE, \sphericalangle ATE = 90°$	**14**	
זוויות צמודות משלימות ל- $180°$	$\sphericalangle AED = 30°$	**15**	**4**
במשולש ישר זווית AET **ניצב מול זווית** $30°$ **שווה למחצית היתר**	$AT = x$	**16**	**15 ,14**
	$AT = AD$	**17**	**16 ,10**
במשולש ישר זווית ADT **היתר היא הצלע הארוכה במשולש**	$AT < AD$	**18**	**14**
	סתירה להנחה	**19**	**18 ,17**
	$\sphericalangle ADE = 90°$	**20**	**19 ,13**
זוויות צמודות משלימות ל- $180°$	$\sphericalangle EDB = 90°$	**22**	**21 ,20**
נשען על זווית היקפית ישרה	BE **קוטר**	**23**	**22**
מ.ש.ל. (3)			

פתרון חלופי בטריגונומטריה

$\sphericalangle AED = 30°$ **(זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$ **)**

ΔADE

$$\frac{AD}{\sin \sphericalangle AED} = \frac{AE}{\sin \sphericalangle ADE}$$

$$\sin \sphericalangle ADE = \frac{2x \sin 30°}{x} = 1$$

$$\boxed{\sphericalangle ADE = 90°} \quad \sphericalangle EDB = 90°$$

ולכן BE **הוא קוטר כי נשען על זווית היקפית ישרה.**

תשובה: כן, BE **הוא קוטר.**

שים לב **שלא קיים, בתוכנית הלימודים, משפט הפוך (ולכן נדרשנו להוכיח**
למשפט "אם במשולש ישר זווית יש זווית חדה של $30°$ **אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר"**

(1) נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x ושתיים המאונכות לציר ה- y .

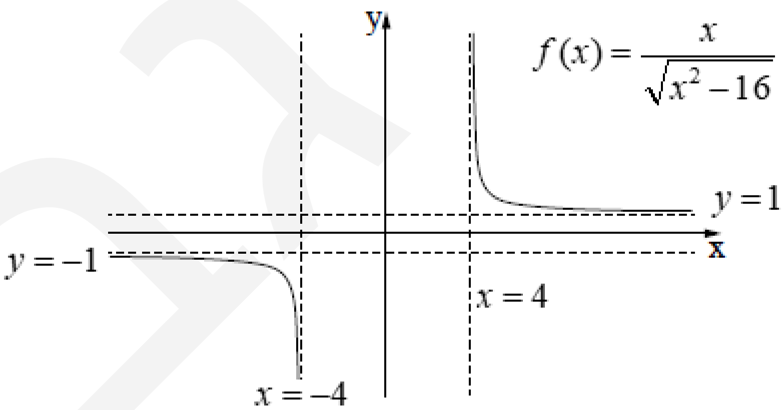
I. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ II. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-16}}$ III. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+16}}$ IV. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}$

תחום ההגדרה של ביטוי I ו- III הוא כל x , ושל II ו- IV הוא $x>4$ או $x<-4$,
ושני הביטויים האחרונים מתאימים לפונקציה עם שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x, $x=4$ ו- $x=-4$.

בביטוי III ו- IV חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה, ולפונקציה המתאימה אין אסימפטוטות אופקיות.
בביטויים I ו- II המונה קובע את סימן הביטוי, ולפונקציות המתאימות תהיינה שתי אסימפטוטות אופקיות:
$y=1 \quad (x\to\infty)$ **ו-** $y=-1 \quad (x\to-\infty)$.

ולכן הביטוי שעונה על כל הדרישות הוא ביטוי II , כלומר $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-16}}$.

תשובה: ביטוי II מתאר את הפונקציה $f(x)$.



(2) נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת גם בתחום $x>4$ או $x<-4$ ומקיימת $g'(x)=f(x)+\frac{5}{3}$.

מכאן שסימני הנגזרת $g'(x)$

קובעים את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

$g'(x)=f(x)+\frac{5}{3}$ היא הזזה $\frac{5}{3}$ יחידות כלפי מעלה של $f(x)$, ללא שינוי בתחום ההגדרה

ובתחומי הירידה, אולם עלינו למצוא את נקודת האפס, שעל פי הציור תהייה בתחום $x<-4$,

כדי למצוא את תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$ גם בתחום זה.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-16}}+\frac{5}{3}=0$$

$$3x+5\sqrt{x^2-16}=0$$

$$3x=-5\sqrt{x^2-16} \quad (\quad)^2 \rightarrow test$$

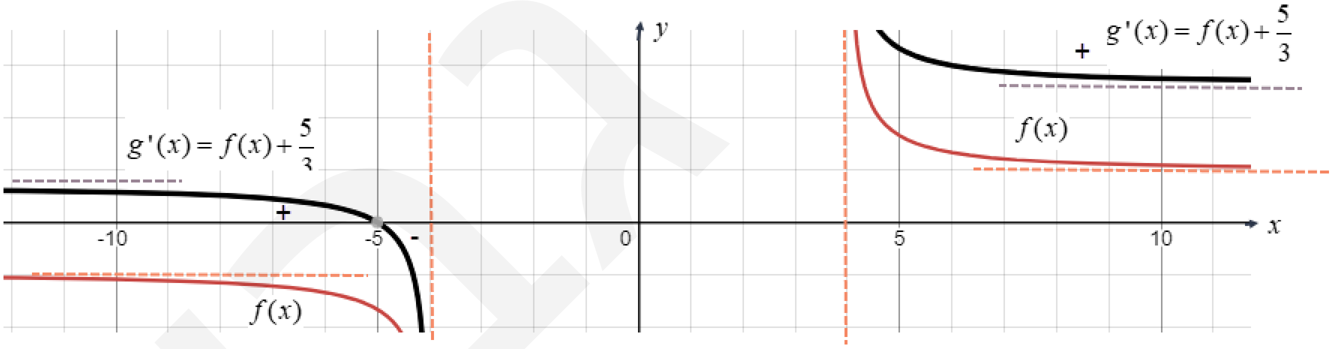
$$9x^2=25(x^2-16)$$

$$-16x^2=-400$$

$$x^2=25$$

$$\cancel{x=5} \quad \leftarrow x<-4$$

$$x=-5: \quad 3(-5)+5\sqrt{(-5)^2-16}\overset{?}{=}0 \quad \rightarrow 0=0\,v \quad \rightarrow x=-5 \quad o.k.$$



תשובה: עבור $g(x)$ עלייה בתחום $x>4$ או $x<-5$ וירידה בתחום $-5<x<-4$.

(1) עבור x_A גרף I עובר מחיוביות לשליליות וגרף II מעלייה לירידה, עם מקסימום בנקודה A .

עבור x_B גרף I עובר משליליות לחיוביות וגרף II מירידה לעלייה, עם מינימום בנקודה B .

עבור x_C גרף I עובר מחיוביות לשליליות וגרף II מעלייה לירידה, עם מקסימום בנקודה C .

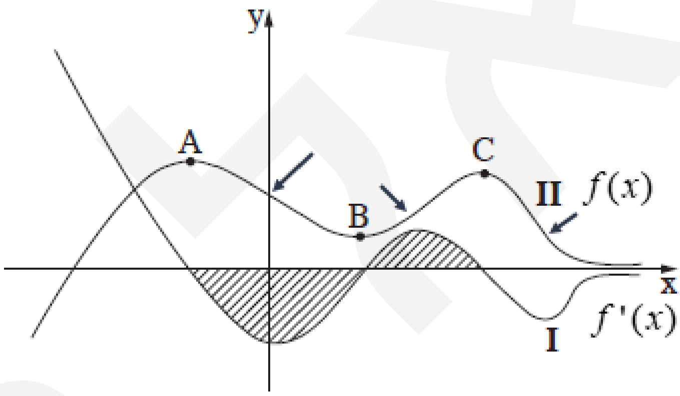
זה כבר מספיק לצורך זיהוי גרף I כגרף של $f'(x)$, ואת גרף II כגרף של $f(x)$.

<u>בנוסף</u>

$f(x)$ קעורה כלפי מטה $\cap$ עבור $x<0$ כאשר $f'(x)$ יורדת בתחום זה.

וניתן לראות את המשך ההשפעה של עלייה וירידה של $f'(x)$,

על הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ או מטה $(\cap)$ של $f(x)$.



תשובה: גרף II מתאר את הפונקציה $f(x)$.

(2) ל- $f'(x)$ יש שלוש נקודות קיצון, שבהן היא עוברת מעלייה לירידה, או מירידה לעלייה,

ועבור אותם שיעורי x מתקבלות נקודות פיתול של $f(x)$, המסומנות בחיצים בסרטוט מעל.

תשובה: ל- $f(x)$ יש 3 נקודות פיתול.

(3) נתון: $f(x_A)=6$, $f(x_B)=2$ וגודל השטח המקווקו שווה ל- 7.

$$\int_{x_A}^{x_B}\left(0-f'(x)\right)dx+\int_{x_B}^{x_C}\left(f'(x)\right)dx=7$$

$$-f(x)\Big]_{x_A}^{x_B}+f(x)\Big]_{x_B}^{x_C}=7$$

$$-f(x_B)-(-f(x_A))+f(x_C)-f(x_B)=7$$

$$-2+6+f(x_C)-2=7$$

$$\boxed{f(x_C)=5}$$

תשובה: $f(x_C)=5$.

א. נתונה סדרה חשבונית A **שבה:** $a_1=-4-4k$ **ו-** $a_3=-16+2k$ **(** k **הוא פרמטר).**

$$-\begin{cases} a_3=-16+2k \\ a_1=-4-4k \end{cases}$$

$$2d=-12+6k$$

$$\boxed{d=3k-6}$$

זהו ביטוי ליניארי, העובר משליליות לחיוביות עבור $k=2$ **.**

תשובה: (1) הסדרה A **עולה עבור** $k>2$ **(2) יורדת עבור** $k<2$ **(3) קבועה עבור** $k=2$**.**

ב. נתון: $a_{17}=-232$**.**

$$a_1+16d=-232$$

$$-4-4k+16(3k-6)=-232$$

$$-4k+48k-96=-228$$

$$44k=-132$$

$$\boxed{k=-3}$$

ולכן הסדרה A **יורדת, כי** $k<2$**.**

תשובה: $k=-3$ **.**

ג. נציב $k=-3$ **ובהתאם בסדרה החשבונית** A **:** $a_1=8$ **ו-** $d_a=-15$**.**

נתונה סדרה חדשה B **שבה:** $b_n=a_n+24n+17$ **.**

נוכיח שהסדרה B **היא סדרה חשבונית.**

$$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}+24(n+1)+17-(a_n+24n+17)$$

$$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}+24n+24+17-a_n-24n-17$$

$$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-a_n+24$$

$$b_{n+1}-b_n=-15+24$$

$$\boxed{b_{n+1}-b_n=9}$$

ולכן זו סדרה חשבונית עולה, כי ההפרש $d_b=9$ **קבוע (אינו תלוי ב-** n **),**

כאשר $b_1=a_1+24\cdot 1+17=8+41=49$**.**

לסיכום: $b_1=49$ **ו-** $d_b=9$**.**

תשובה: הוכחנו שהסדרה B **היא סדרה חשבונית.**

ד. נחשב את הסכום $b_1^{\,2}-b_2^{\,2}+b_3^{\,2}-b_4^{\,2}+\ldots+b_{29}^{\,2}-b_{30}^{\,2}$

$$(b_1+b_2)(b_1-b_2)+(b_3+b_4)(b_3-b_4)+\ldots+(b_{29}+b_{30})(b_{29}-b_{30})=$$
$$(b_1+b_2)(-d_b)+(b_3+b_4)(-d_b)+\ldots+(b_{29}+b_{30})(-d_b)=$$
$$-9\cdot(b_1+b_2+b_3+b_4+\ldots+b_{29}+b_{30})=$$
$$-9\cdot\frac{30\cdot(2\cdot 49+9\cdot 29)}{2}=-48,465$$

תשובה: הסכום של $b_1^{\,2}-b_2^{\,2}+b_3^{\,2}-b_4^{\,2}+\ldots+b_{29}^{\,2}-b_{30}^{\,2}$ **הוא** $-48,465$.

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- מבוגר** $\overline{A}$ **- צעיר**

B **- תומכים בהקמת הפארק** $\overline{B}$ **- לא תומכים בהקמת הפארק**

<u>נתונים ומשמעויות מידיות</u>

נסמן p **- ההסתברות שתושב שנבחר היה צעיר** $(P(\overline{A})=p)$.

נסמן k **- ההסתברות שתושב שנבחר היה תומך** $(P(B)=k)$.

כל התושבים המבוגרים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק,

לכן: $p(A\cap B)=p(A)=1-p$ **ו-** $p(A\cap\overline{B})=0$.

ומכאן ש-: $p(A\cap B)=1-p$ **ו-** $p(\overline{A}\cap B)=k-(1-p)=k+p-1$.

	$\overline{A}$ **צעיר**	A **מבוגר**	
B **- תומך**	$1-p$	$k+p-1$	k
$\overline{B}$ **- לא תומך**	0	$1-k$	$1-k$
	$1-p$	p	1

תשובה: ההסתברות, שתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק, היא $k+p-1$.

ב. (1) $P(\overline{B}/\overline{A})=0.5 \rightarrow P(B/\overline{A})=0.5$

(2) $P(A/B)=\frac{4}{7} \rightarrow P(\overline{A}/B)=\frac{3}{7}$

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{3}{7}=\frac{k+p-1}{k}$$

$$3k=7k+7p-7$$

$$4k=7-7p$$

$$P(B/\overline{A})=\frac{P(B\cap\overline{A})}{P(\overline{A})}$$

$$0.5=\frac{k+p-1}{p}$$

$$0.5p=k+p-1$$

$$k=1-0.5p$$

$$\begin{cases}4k=7-7p\\ k=1-0.5p\end{cases}$$

$$4-2p=7-7p$$

$$\boxed{p=0.6} \rightarrow \boxed{k=0.7}$$

תשובה: $p=0.6$, $k=0.7$.

ג. מצאנו כי ההסתברות לתומכים היא 0.7 וההסתברות לצעירים היא 0.6 .

וגם ההסתברות לתומך מבין הצעירים היא , כבר על פי הנתונים, $P(B/\bar{A})=0.5$ **, וגם** $P(\bar{B}/\bar{A})=0.5$ **.**

ההסתברות שלפחות אחד משׁשת הצעירים שנבחרו על ידי יוסי תומך ואחד מתנגד,

היא המאורע המשלים לאין מתנגדים או אין תומכים.

$$p=1-(0.5^6+0.5^6)=\frac{31}{32}$$

תשובה: ההסתברות, שלפחות אחד משׁשת הצעירים שנבחרו תומך ולפחות אחד מתנגד, היא $\frac{31}{32}$ **.**

ד. יוסי ראיין באקראי 5 תושבים שהשתתפו בסקר .

נחשב את ההסתברות שהמרואיין האחרון היה צעיר (0.6) **<u>וגם</u> שבדיוק 2 מ- 4 האחרים היו צעירים.**

אלו מאורעות בלתי תלויים ולכן נכפול את ההסתברויות.

את $P_4(2)$ **נחשב בעזרת נוסחת ברנולי, כאשר** $p=0.6$, $k=2$, $n=4$.

$$0.6\cdot P_4(2)=$$

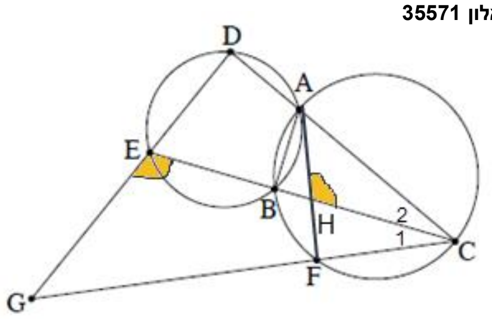
$$0.6\cdot\binom{4}{2}\cdot0.6^2\cdot(1-0.6)^{4-2}=$$

$$0.6\cdot\frac{4!}{2!(4-2)!}\cdot0.6^2\cdot0.4^2$$

$$0.6\cdot6\cdot0.6^2\cdot0.4^2=\frac{648}{3{,}125}$$

תשובה: ההסתברות, שבדיוק 3 מהמרואיינים האלו היו צעירים ושהאחרון היה צעיר, היא $\frac{648}{3{,}125}$ **.**

4



נתונים

עבור ג: 1. $\angle GEC = \angle CHA$.

עבור ד: 2. $\angle CBA = 90°$ **. 3.** $DE = 18$ **. 4.** $CD = 36$

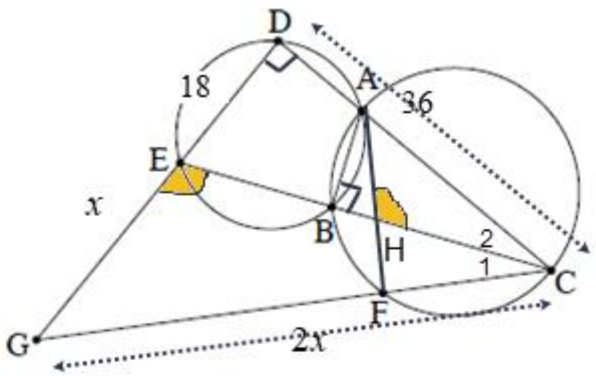
צ"ל: א. $\angle EDA = \angle CBA$ **ב.** $GDAF$ **בר חסימה**

ג. $\frac{GE}{DE} = \frac{CG}{CD}$ **ד.** EG , CG.

הסבר	מס'	טענה	נימוק
	5	$\angle EDA + \angle ABE = 180°$	**סכום זוויות נגדיות** $180°$ **במרובע חסום במעגל**
	6	$\angle CBA + \angle ABE = 180°$	**זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$
6 ,5	7	$\angle EDA = \angle CBA$	
		מ.ש.ל. א	
	8	$\angle AFC = \angle CBA$	**זוויות היקפיות שוות על קשת משותפת** AC
	9	$\angle AFG + \angle AFC = 180°$	**זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$
9 ,8 ,7 ,5	10	$\angle EDA + \angle AFG = 180°$	
10	11	$GDAF$ **בר חסימה**	**סכום זוויות נגדיות** $180°$ **ולכן בר חסימה**
		מ.ש.ל. ב	
	12	$\angle CHA = \angle AFC + \angle C_1$	**זווית חיצונית ל-** ΔAFC **שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שאינן צמודות לה**
	13	$\angle GEC = \angle EDA + \angle C_2$	**זווית חיצונית ל-** ΔCDE **שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שאינן צמודות לה**
8 ,7 ,1	14	$\angle AFC = \angle EDA$	
14 ,13 ,12	15	$\angle C_1 = \angle C_2$	
15	16	$\frac{GE}{DE} = \frac{CG}{CD}$	**משפט חוצה זווית** ΔGDC
		מ.ש.ל ג	

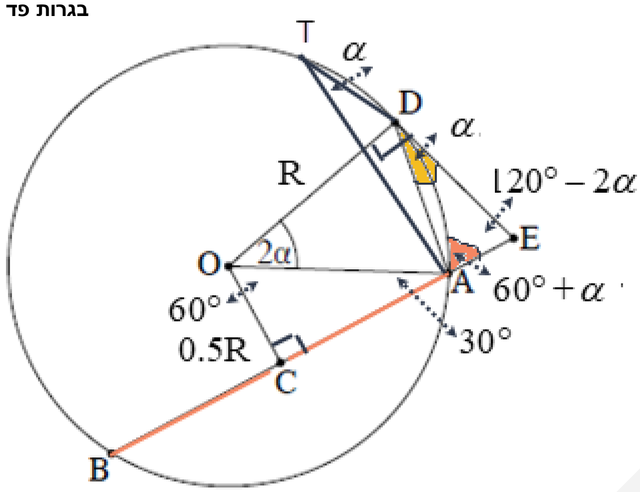
דרך חלופית להוכחת סעיף ג

	12	$\angle CAF + \angle DAF = 180°$	**זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$
11	13	$\angle EGC + \angle DAF = 180°$	**זוויות נגדיות משלימות ל-** $180°$ **במרובע חסום במעגל**
13 ,12	14	$\angle CAF = \angle EGC$	
14 ,1	15	$\angle C_1 = \angle C_2$	**סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔHAC **ו-** ΔGEC
15	16	$\frac{GE}{DE} = \frac{CG}{CD}$	**משפט חוצה זווית** ΔGDC



הסבר	מס'	טענה	נימוק
3, 4, 16	17	$\frac{CG}{36} = \frac{GE}{18} \rightarrow CG = 2GE$	
17	18	$EG = x\ ,\ CG = 2x$	
2, 7	19	$\sphericalangle EDA = 90°$	
3, 4, 18, 19	20	$36^2 + (18+x)^2 = (2x)^2$ $1,296 + 324 + 36x + x^2 = 4x^2$ $0 = 3x^2 - 36x - 1,620$ $\boxed{x = 30}\ ,\ \cancel{x = -18} \leftarrow x > 0$	משפט פיתגורס ΔGDC
18, 20	21	$EG = 30\ ,\ CG = 60$	

מ.ש.ל. ד



א. $\sphericalangle ADE = \alpha$ **(זווית בין משיק למיתר , וזווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת)**

$\sphericalangle ODE = 90°$ **(הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה)**

$\sphericalangle OCA = 90°$ **(קטע שעובר במרכז המעגל וחוצה מיתר גם מאונך לו) .**

$\sphericalangle OAC = 30°$ **(אם ניצב שווה למחצית היתר ב-** ΔOAC **אז הזווית מולו שווה** $30°$**) .**

$\sphericalangle COA = 60°$ **(סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔOAC **) .**

$\sphericalangle COD = 60° + 2\alpha$ **.**

$\sphericalangle E = 120° - 2\alpha$ **(סכום זוויות** $360°$ **במרובע** $DOCE$ **)**

תשובה: $\sphericalangle ODE = 90°$ **,** $\sphericalangle OCA = 90°$ **,** $\sphericalangle COD = 60° + 2\alpha$ **,** $\sphericalangle E = 120° - 2\alpha$**.**

ב. $\sphericalangle ATD = \alpha$ **(זווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת,**

כאשר T **נקודה כלשהי על המעגל)**

(לחילופין ניתן משפט סינוסים ב- ΔAOD **וזהויות בהמשך,**

או להוריד תיכון שהוא גובה וחוצה זווית הראש במשולש שווה שוקיים ΔAOD**)**

$\underline{\Delta ADT}$ **לפי משפט הסינוסים.**

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\boxed{AD = 2R\sin\alpha}$$

$\underline{\Delta ADE}$ **לפי משפט הסינוסים, כאשר** $\sphericalangle DAE = 60° + \alpha$**.**

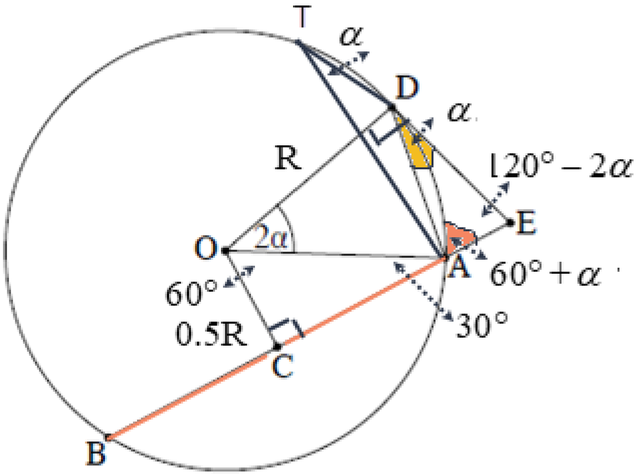
$$\frac{DE}{\sin(60°+\alpha)} = \frac{AD}{\sin(120°-2\alpha)}$$

$$\boxed{DE = \frac{2R\sin\alpha \cdot \sin(60°+\alpha)}{\sin(120°-2\alpha)}}$$

תשובה: $\frac{2R\sin\alpha \cdot \sin(60°+\alpha)}{\sin(120°-2\alpha)}$**.**

ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את ΔAOD הוא $\frac{4}{7}R$. נמצא את α .

$\underline{\Delta ADO}$ לפי משפט הסינוסים.



$$\frac{AD}{\sin 2\alpha} = 2R_{\Delta ADO}$$

$$\frac{2R\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cdot\frac{4}{7}R \quad / : 2R > 0$$

$$7\sin\alpha = 8\sin\alpha\cos\alpha / : 8\sin\alpha > 0$$

$$\frac{7}{8} = \cos\alpha$$

$$\boxed{\alpha = 28.96^\circ}$$

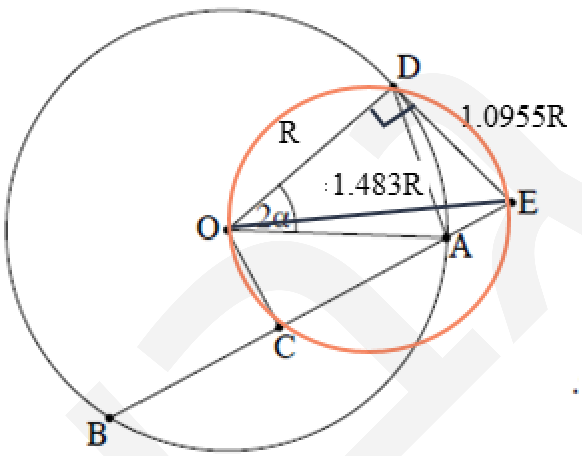
תשובה: $\alpha = 28.96^\circ$.

ד. נציב $\alpha = 28.96^\circ$, ונקבל $DE = 1.0955R$ (לא דומה לסרטוט, אבל זה מה שיש).

כיוון ש- $\sphericalangle ODE = 90^\circ$, אז OE הוא קוטר במעגל החוסם את מרובע $DOCE$ (ע"פ סעיף א) .

$$\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}} = \frac{\pi\cdot(\frac{OE}{2})^2}{\pi R^2} = \frac{(OE)^2}{4R^2}$$

$\underline{\Delta DOE}$ משפט פיתגורס



$$(OE)^2 = (OD)^2 + (DE)^2$$

$$(OE)^2 = R^2 + (1.0955R)^2$$

$$(OE)^2 = 2.2R^2$$

$$\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}} = \frac{2.2R^2}{4R^2}$$

$$\boxed{\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}} = 0.55}$$

תשובה: $\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}} = 0.55$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$.

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי , לכן $x\ge 0$,

והמכנה שונה מ- 0**, ולכן** $x\ne 4 \leftarrow \sqrt{x}\ne 2 \leftarrow \sqrt{x}-2\ne 0$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\ne 4$ **,** $x\ge 0$.

(2) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים.

(ניתן למצוא גם על ידי הצבות, או נימוקים. אין חובה לרשום בעזרת גבולות !, ואין צורך לנמק !!!)

$x=4$ **מאפס מונה ולא מכנה, ולכן הישר** $x=4$ **אסימפטוטה אנכית.**

חזקת המונה קטנה מחזקת המכנה ולכן $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

תשובה: אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y **:** $y=0\,(x\to+\infty)$.

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x **:** $x=4$.

(3) $(0,-1)$ **היא נקודת החיתוך עם ציר ה-** y **, שהיא גם קיצון קצה.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$,

ולכן $(16,0) \leftarrow x=16 \leftarrow \sqrt{x}=4 \leftarrow \sqrt{x}-4=0$.

תשובה: $(0,-1)$ **,** $(16,0)$.

(4) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגן.

$$\boxed{f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}}$$

$$f'(x)=\frac{\dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2\cdot(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-2)^4}$$

$$f'(x)==\frac{\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2-2\sqrt{x}+8)}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-2)^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(\sqrt{x}-2)(-\sqrt{x}+6)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^4}}$$

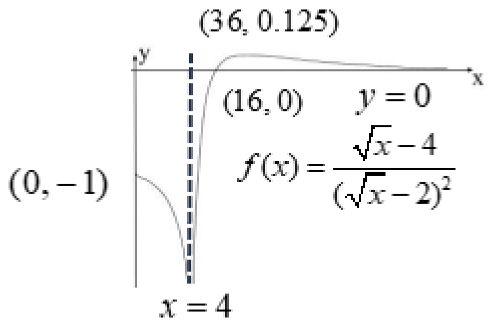
$$-\sqrt{x}+6=0 \quad \rightarrow \sqrt{x}=6 \quad \rightarrow x=36 \quad \rightarrow (36,0.125)$$

$$f'(1)=\frac{-5}{(+)}>0 \quad \searrow \quad \rightarrow \boxed{(0,-1),\max}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(35)&=\frac{0.32}{(+)}>0 \quad \nearrow \\ f'(37)&=\frac{-0.34}{(+)}<0 \quad \searrow \end{aligned}\right\}\boxed{(36,0.125),\max}$$

תשובה: $(36,0.125)$ **מקסימום,** $(0,-1)$ **מקסימום.**

ב. נסרטט את גרף הפונקציה $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$ **(לא בפרופורציה מדויקת על ציר ה-** x **).**



תשובה: הסרטוט מעל.

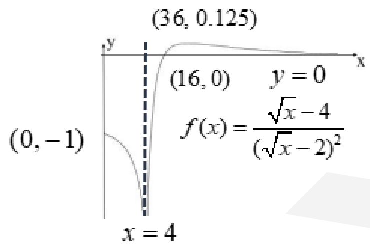
ג. נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x}-2}$ **, המוגדרת כמו הפונקציה** $f(x)$ **בתחום** $x\neq 4$ **,** $x\geq 0$ **.**

$$g'(x)=2\cdot\frac{\sqrt{x}-2-\dfrac{x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-2)^2}$$

$$g'(x)=2\cdot\frac{0.5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)^2}\quad\leftarrow\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}\quad\leftarrow x>0$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}}\quad\rightarrow\boxed{g'(x)=f(x)}$$

תשובה: הראינו שלכל $x>0$ **, בתחום ההגדרה של הפונקציות, מתקיים** $g'(x)=f(x)$ **.**



ד. נבדוק את שתי הטענות.

I. **יש משיק לגרף הפונקציה** $g(x)$ **ששיפועו הוא** 2 **.**

הערך המקסימלי של $f(x)$ **הוא** 0.125 **, המתקבל בנקודת המקסימום המוחלט שלה.**

מכאן שזה גם הערך המקסימלי של $g'(x)$ **ואין ל-** $g(x)$ **משיק ששיפועו הוא** 2 .

תשובה: הטענה אינה נכונה.

II. **לפונקציה** $g(x)$ **יש נקודת פיתול אחת בלבד.**

$g'(x)=f(x)$ **, ולכן ל-** $g'(x)$ **יש נקודת קיצון פנימית אחת בלבד,**

שבו היא עוברת מעלייה, כאשר $g''(x)>0$ **ו-** $g(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $(\cup)$ **,**

לירידה, כאשר $g''(x)<0$ **ו-** $g(x)$ **קעורה כלפי מטה** $(\cap)$ **, ומתקבלת נקודת פיתול שבה** $x=36$ **.**

תשובה: הטענה נכונה.

ה. נחשב את ערך הביטוי $\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot f(x)\,dx$ **, בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$$\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot f(x)\,dx=\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot g'(x)\,dx=\frac{(g(x))^2}{2}\Bigg]_{0.25}^{1}$$

$$\left.\begin{aligned}x=1:&\quad\frac{(g(1))^2}{2}=2\\ x=0.25:&\quad\frac{(g(0.25))^2}{2}=\frac{1}{18}\end{aligned}\right\}2-\frac{1}{18}=1\frac{17}{18}$$

תשובה: $\int_{0.25}^{1} g(x)\cdot f(x)\,dx=1\frac{17}{18}$

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin(x)-a}{\sin(x)+a}$ **(** $a>0$ **פרמטר), המוגדרת לכל** x **המקיים** $\sin(x)\neq -a$ **.**

נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ **משיק לציר ה-** x **<u>בכל</u> נקודות הקיצון שלה.**

כלומר, בכל נקודות הקיצון מתקיים $f'(x)=0$ **וגם** $f(x)=0$ **.**

$$f'(x)=\frac{\cos(x)(\sin(x)+a)-\cos(x)(\sin(x)-a)}{(\sin(x)+a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos(x)\left[\sin(x)+a-(\sin(x)-a)\right]}{(\sin(x)+a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2a\cos(x)}{(\sin(x)+a)^2}$$

$$0=\cos(x)\quad\leftarrow a>0$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

כיוון שמדובר על כל נקודות הקיצון, אז למשל עבור $x=\frac{\pi}{2}$ **,**

- **מונה הנגזרת מחליף סימן עבור** $x=\frac{\pi}{2}$ **, ולכן זה שיעור** x **של נקודת קיצון.**
- **נקבל ש-** $f(x)=0$ **כאשר** $\sin(\frac{\pi}{2})-a=0$ **ולכן** $a=1$ **.**

במקרה זה מתקיים $\sin(x)\neq -a$ **כי** $\sin(\frac{\pi}{2})\neq -1$ **(ולא היה מתקיים עבור** $\sin(\frac{3\pi}{2})=-1$ **).**

תשובה: $a=1$ **.**

ב. נציב $a=1$ **והפונקציה היא** $f(x)=\frac{\sin(x)-1}{\sin(x)+1}$ **ונחקור אותה בתחום** $-2\pi\leq x\leq 2\pi$ **.**

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס, לכן $\sin x\neq -1\quad\rightarrow x\neq\frac{3\pi}{2}+2\pi k$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq -\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ **,** $-2\pi\leq x\leq 2\pi$ **.**

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$\sin x=1\quad\rightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$$

$$(\frac{\pi}{2},0),(-\frac{3\pi}{2},0)\quad\leftarrow x\neq -\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, ונקבל** $(0,-1)$ **.**

תשובה: $(\frac{\pi}{2},0),(-\frac{3\pi}{2},0)$ **,** $(0,-1)$ **.**

(3) נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x <u>בכל</u> נקודות הקיצון שלה.

מכאן שנקודות הקיצון הפנימיות הן: $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$.

ונקודות הקיצון בקצה הן: $(2\pi, -1)$ **ו-** $(-2\pi, -1)$.

נשים לב שהפונקציה $f(x) = \frac{\sin(x) - 1}{\sin(x) + 1}$ **היא אי-חיוביות,**

כי המכנה חיובי בתחום ההגדרה והערך המקסימלי של המונה הוא אפס.

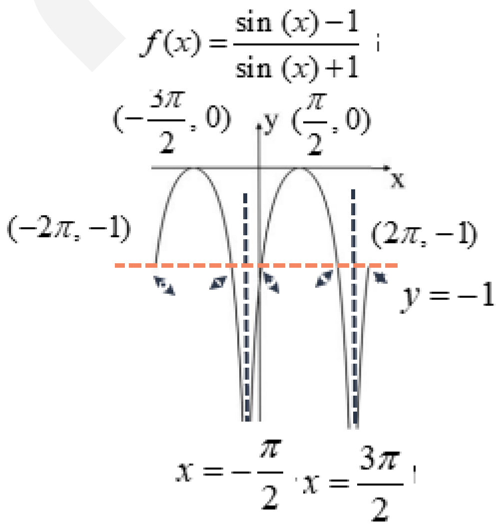
לכן, בהתאם ניתן לקבוע ש- $(\frac{\pi}{2}, 0)$ **ו-** $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ **הן נקודות מקסימום.**

עקב הצורך להיצמד לאסימפטוטה האנכית $x = \frac{3\pi}{2}$ **אז** $(2\pi, -1)$ **היא נקודת מקסימום.**

כאשר $(-2\pi, -1)$ **היא מינימום כי עולים ממנה לנקודת המקסימום** $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$**.**

תשובה: $(2\pi, -1)$ **מקסימום,** $(\frac{\pi}{2}, 0)$ **מקסימום,** $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ **מקסימום,**$(-2\pi, -1)$ **מינימום.**

ג. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ **, כולל שתי האסימפטוטות האנכיות שלה, וסימון הישר** $y = -1$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל.

ד. לישר $y = -1$ **יש חמש נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה** $f(x)$ **, מסומנות בחיצים.**

תשובה: למשוואה $f(x) = -1$ **יש** 5 **פתרונות בתחום הנתון.**

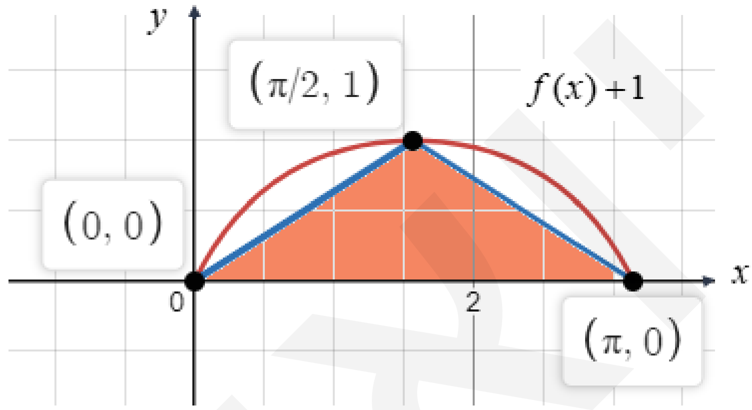
ה. נבדוק את נכונות הטענה $\int_0^{\pi}(f(x)+1)\,dx > \frac{\pi}{2}$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ **קעורה כלפי מטה בתחום** $x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, $-2\pi \le x \le 2\pi$,

ולכן היא קעורה כלפי מטה גם בתחום $0 \le x \le \pi$.

$f(x)+1$ **היא הזזה אנכית ב-** 1 **יחידות כלפי מעלה של** $f(x)$.

מכאן שבתחום זה הגרף ייראה כך (כולל סימון של משולש שחסום בו) :



כיוון שהפונקציה, בתחום $0 \le x \le \pi$ **, היא אי-שלילית,**

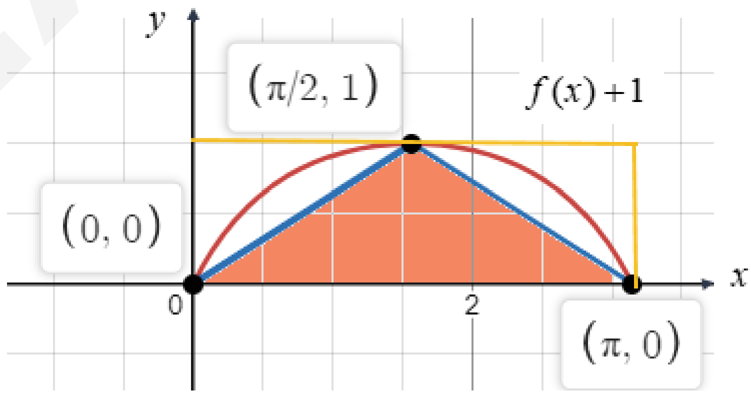
הרי שהאינטגרל המסוים $\int_0^{\pi}(f(x)+1)\,dx$ **מחזיר את השטח שבין הפונקציה לציר ה-** x .

עקב הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ **של** $f(x)$ **ניתן לחסום בעקום משולש, ששטחו הוא** $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi \cdot 1}{2}$.

ולכן הטענה $\int_0^{\pi}(f(x)+1)\,dx > \frac{\pi}{2}$ **היא טענה נכונה.**

תשובה: הטענה נכונה.

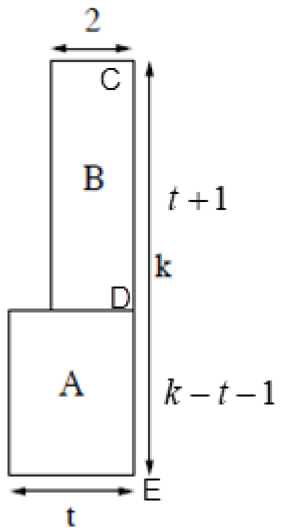
הערה השלמה: **ניתן להראות שיש גם חסם עליון לביטוי.**



ניתן לחסום את העקום במלבן , ששטחו הוא $\pi \cdot 1 = \pi$,

ולכן $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\pi}(f(x)+1)\,dx < \pi$.

הערה נוספת: $f(x)+1 = f(x)-(-1)$ **, ובצורה דומה ניתן לחסום גם בגרף המקורי משולש בשטח** $\frac{\pi}{2}$.



א. $S_B = 2t+2$, **ולכן** $CD = \frac{2t+2}{2} = t+1$.

מכאן ש- $DE = k-(t+1) = k-t-1$.

ושטח המלבן התחתון הוא $S_A = t(k-t-1) = -t^2-kt-t$

תשובה: שטח הגינה A **הוא** $-t^2-kt-t$.

ב. הפונקציה שיש להביא ל*מינימום* היא היחס $f(t) = \frac{S_B}{S_A}$.

נשים לב שהמשתנה הוא t **, כאשר** k **הוא קבוע (פרמטר).**

$$\boxed{f(t) = \frac{2(t+1)}{-t^2+kt-t}}$$

$$f'(t) = 2\cdot\frac{-t+kt-t-(t+1)(-2t+k-1)}{(-t^2+kt-t)^2}$$

$$f'(t) = 2\cdot\frac{-t^2+kt-t-(-2t^2+kt-t-2t+k-1)}{(-t^2+kt-t)^2}$$

$$f'(t) = 2\cdot\frac{-t^2+kt-t+2t^2-kt+t+2t-k+1}{(-t^2+kt-t)^2}$$

$$\boxed{f'(t) = 2\cdot\frac{t^2+2t-k+1}{(-t^2+kt-t)^2}}$$

$$t^2+2t+k+1=0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-k+1)}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4k}}{2} = \frac{-2\pm2\sqrt{k}}{2} = -1\pm\sqrt{k}$$

$$t_1 = -1+\sqrt{k} \quad , \quad t_2 = -1-\sqrt{k}$$.

המונה של הנגזרת הוא של פרבולה ישרה, בעלת מינימום ("צוחקת"),

העוברת משליליות לחיוביות עבור $t=-1+\sqrt{k}$ **,**

ולכן $f(t)$ **עוברת מירידה לעלייה ו-** $t=-1+\sqrt{k}$ **מינימום.**

(נשים לב ש- $t_1=-1+\sqrt{k}$ **חיובי כי** $k>1$ **, ו-** $t_2=-1-\sqrt{k}$ **שלילי ואינו מתאים כי** t **גודל חיובי))**

תשובה: $t=-1+\sqrt{k}$ **, עבורו היחס** $\frac{S_B}{S_A}$ **הוא מינימלי.**

ג. הפונקציה שיש להביא *למקסימום* היא היחס $g(t)=\frac{S_{\mathrm{A}}}{S_{\mathrm{B}}}$.

קל לראות **ש-** $g(t)=\frac{1}{f(t)}$ **, כאשר שתיהן מוגדרות באותו תחום** $t>0$.

טרנספורמציה שכזו הופכת את תחומי העלייה והירידה,

כאשר היא שומרת על ערכי ה- t **בנקודות הקיצון, כאשר סוגן משתנה וערכי הפונקציה מתהפכים.**

ניתן לראות זאת גם על ידי $g'(t)=-\frac{f'(t)}{f^2(t)}$ **, כאשר סימני הנגזרת משתנים,**

אך היא עדיין מתאפסת עבור אותם ערכי t .

תשובה: $t=-1+\sqrt{k}$**, עבורו היחס** $\frac{S_{\mathrm{A}}}{S_{\mathrm{B}}}$ **הוא מקסימלי.**