

פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשפ"ד , 2024 , מועד א', שאלון: 35471

תודה מייוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. משקלי התינוקות שנולדים בעיר מסוימת מתפלגים נורמלית. המשקל הממוצע של התינוקות שנולדים בעיר זו הוא 3.4 ק"ג \bar{x} .

96.41% מהתינוקות נולדים במשקל נמוך מ- 5.02 ק"ג.

נמצא את ציון התקן המתאים בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

$$p(x < 5.02) = 0.9641 \rightarrow z = 1.8$$

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$.

$$1.8 = \frac{5.02 - 3.4}{s}$$

$$1.8s = 1.62$$

$$\boxed{s = 0.9}$$

תשובה: סטיית התקן, של משקלי התינוקות, היא 0.9 ק"ג.

ב. אורי נולד במשקל נמוך ממשקלם של 9% מן התינוקות שנולדים בה.

כלומר, הוא שוקל יותר מ- $100\% - 9\% = 91\%$ מן התינוקות שנולדים בעיר.

$$p = 0.91 \rightarrow z = 1.34$$

$$1.34 = \frac{x - 3.4}{0.9} \quad / \cdot 0.9$$

$$1.206 = x - 3.4$$

$$\boxed{x = 4.606}$$

תשובה: המשקל שבו נולד אורי הוא 4.606 ק"ג.

ג. משקל הנמוך מ- 1.5 ק"ג נחשב למשקל נמוך מאוד לתינוק שנולד.

(1) נחשב את ציון התקן עבור $x = 1.5$, ובהתאם את האחוז המבוקש.

$$z = \frac{1.5 - 3.4}{0.9} = \frac{-1.9}{0.9} = -2.11$$

$$z = -2.11 \rightarrow p(z < -2.11) = 0.0174 = \boxed{1.74\%}$$

תשובה: 1.74% מהתינוקות נולדים במשקל נמוך מאוד בעיר זו.

(2) בשנה מסוימת נולדו בעיר זו 20,000 תינוקות.

$$. 0.0174 \cdot 20,000 = 348 \text{ תינוקות}$$

תשובה: 348 תינוקות נולדים במשקל נמוך מאוד בעיר זו, בשנה המסוימת,

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית.

- ד שחר נולד בעיר אחרת, באותו המשקל שבו נולד אורי, כלומר במשקל של 4.606 ק"ג.
- משקל התינוקות בעיר שבה נולד שחר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 0.8 ק"ג $s = 0.8$.
- משקל הלידה של שחר ומשקל הלידה של אורי הם בעלי אותו ציון תקן, כלומר $z = 1.34$.

$$1.34 = \frac{4.606 - \bar{y}}{0.8} / 0.8$$

$$1.072 = 4.606 - \bar{y}$$

$$\boxed{\bar{y} = 3.534}$$

תשובה: המשקל הממוצע של התינוקות, בעיר שבה נולד שחר, הוא 3.534 ק"ג.

א. דן ערך מחקר, בו בדק את הקשר בין אחוז הגידול השנתי של האוכלוסייה (המשתנה x) ובין אחוז הילדים בני 0–14 באותן מדינות (המשתנה y).
האוכלוסייה שנבדקה היא אוכלוסייתן של 12 מדינות.

דן קיבל את התוצאות הבאות: ממוצע אחוז הגידול הוא $\bar{x} = 0.465$, עם סטיית תקן $S_x = 0.683$, ומקדם מתאם $r = 0.871$ (מקדם מתאם חיובי וחזק, $0.7 < r < 1$).

דן מצא כי משוואת ישר הרגרסיה היא: $y = 11.3x + 16.3$.

(1) ישר הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים.

$$\bar{y} = 11.3 \cdot 0.465 + 16.3 = 21.55$$

תשובה: הממוצע של אחוז הילדים באותן מדינות הוא 21.55.

(2) $m = r \cdot \frac{S_y}{S_x}$, כאשר על פי משוואת ישר הרגרסיה $m = 11.3$.

$$11.3 = 0.871 \cdot \frac{S_y}{0.683}$$

$$11.3 = 1.2753 S_y \quad /: 1.2753$$

$$S_y = 8.86$$

תשובה: סטיית התקן של אחוז הילדים באותן מדינות היא 8.86.

ב. במדינה מסוימת נתון כי גודל האוכלוסייה נשאר קבוע (אין גידול שנתי באוכלוסייה שלה).

כלומר במדינה זו, $x = 0$, ועל פי ישר הרגרסיה $y = 16.3$.

הערה – נניח כי מדינה זו היא חלק מהמדינות שנבדקו, אם כי הדבר לא מצוין במפורש בשאלה.
תשובה: על פי ישר הרגרסיה, אחוז הילדים במדינה זו הוא 16.3.

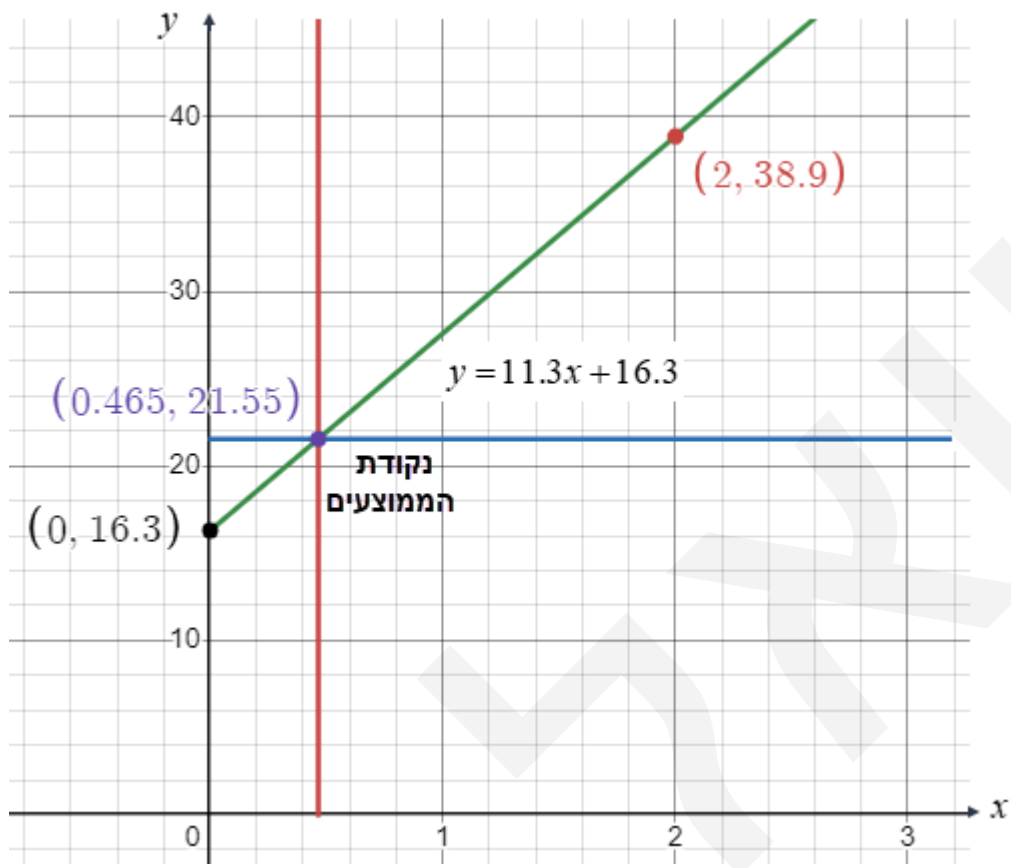
ג. במדינה נוספת, אחוז הגידול השנתי של האוכלוסייה הוא $x = 2$.

נציב $x = 2$ במשוואת ישר הרגרסיה: $y = 11.3 \cdot 2 + 16.3 = 38.9$.

אומנם מקדם המתאם הוא גבוה, אבל לא דטרמיניסטי ($r = 0.871 \neq 1$), ולכן זה רק ניבוי.

תשובה: לא ניתן להסיק כי אחוז הילדים במדינה זו הוא בדיוק 38.9.

העשרה



א. נבנה עץ אפשרויות מתאים, למשחק הקליעה למטרה של חנן.

נחשב את ההסתברות, שחנן החטיא בניסיון הראשון וקלע בניסיון השני.

$$P(\text{yes}, \text{no}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{16} = \frac{7}{40}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{7}{40}$.

ב. (1) נחשב את ההסתברות שחנן קלע פעם אחת לפחות.

המאורע המשלים הוא: פעמיים לא קלע.

$$P(\text{at least 1 good}) = 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{16} = \frac{31}{40}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{31}{40}$.

(2) נחשב את ההסתברות

שחנן קלע פעם אחת בדיוק,

אם ידוע שקלע פעם בדיוק.

אלו המסלולים הירוקים, מבין המסלולים האדומים.

$$\begin{aligned} P(1 \text{ good exactly} / \text{at least 1 good}) &= \\ &= \frac{P(1 \text{ good exactly} \cap \text{at least 1 good})}{P(\text{at least 1 good})} = \\ &= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{16}}{\frac{31}{40}} = \frac{\frac{3}{8} + \frac{7}{40}}{\frac{31}{40}} = \frac{\frac{15}{40} + \frac{7}{40}}{\frac{31}{40}} = \frac{22}{31} \end{aligned}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{15}{31}$.

ג. גם לדני יש שני ניסיונות קליעה, כאשר ההסתברות לקליעה היא בשניהם p (מאורעות בלתי תלויים).

נתון כי ההסתברות שדני יקלע פעם אחת בדיוק שווה להסתברות שחנן יקלע פעם אחת בדיוק.

בתת סעיף ב-2 מצאנו כבר (במונה) את ההסתברות שחנן יקלע פעם אחת בדיוק $\frac{3}{8}$.

$$p \cdot (1-p) + (1-p) \cdot p = \frac{3}{8}$$

$$p - p^2 + p - p^2 = 0.375$$

$$0 = 2p^2 - 2p + 0.375$$

$$\boxed{p = \frac{1}{4}, p = \frac{3}{4}}$$

תשובה: $p = \frac{1}{4}, p = \frac{3}{4}$.

א. משוואת האלכסון AC היא $y = -2x + 8$, ששיפועו (-2) .

האלכסונים בטרפז שלנו מאונכים זה לזה, על פי הנתון,

לכן שיפוע האלכסון BD הופכי ונגדי והוא $\frac{1}{2}$.

הנקודה M היא מפגש אלכסוני הטרפז, ונמצאת על ציר ה-y,

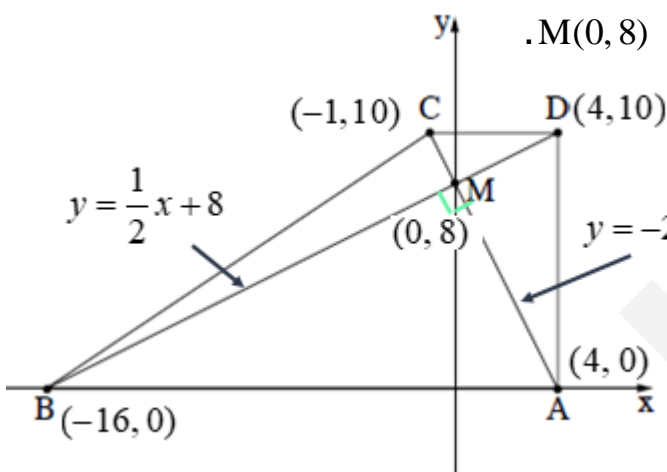
והאלכסון AC שמשוואתו $y = -2x + 8$, ולכן שיעוריה $M(0, 8)$.

נמצא את משוואת האלכסון BD, בעזרת $m_{BD} = \frac{1}{2}$ ו- $M(0, 8)$.

$$y - 8 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 8}$$

תשובה: משוואת הישר BD היא $y = \frac{1}{2}x + 8$.



ב. הנקודות A ו-B נמצאות על ציר ה-x, ולכן $y_A = y_B = 0$.

נציב $y = 0$ במשוואת האלכסון AC: $y = -2x + 8$.

$$0 = -2x + 8 \rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4 \rightarrow \boxed{A(4, 0)}$$

נציב $y = 0$ במשוואת האלכסון BD: $y = \frac{1}{2}x + 8$.

$$0 = \frac{1}{2}x + 8 \rightarrow -\frac{1}{2}x = 8 \rightarrow x = -16 \rightarrow \boxed{B(-16, 0)}$$

, $x_D = x_A = 4$ כי $\sphericalangle DAC = 90^\circ$ והצלע AD מאונכת לציר ה-x,

ולכן $y_D = \frac{1}{2} \cdot 4 + 8 = 10$, כלומר $D(4, 10)$.

, $y_C = y_D = 10$ כי $\sphericalangle CDA = 90^\circ$, והצלע CD מאונכת לציר ה-y,

$$10 = -2x + 8 \rightarrow 2x = -2 \rightarrow x = -1 \rightarrow \boxed{C(-1, 10)} \text{ ולכן}$$

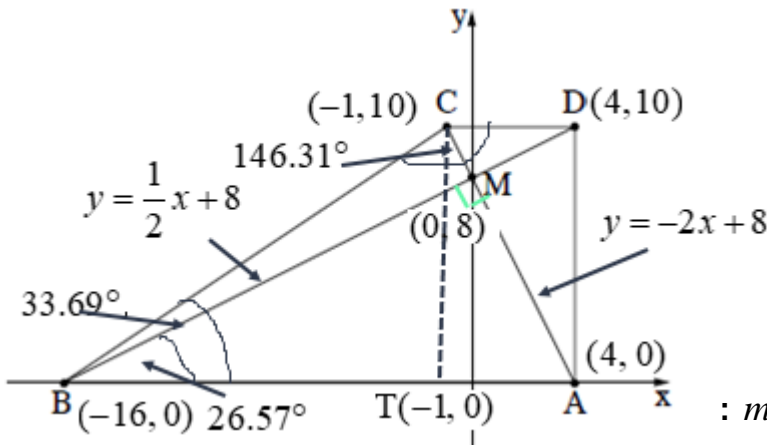
תשובה: $D(4, 10)$, $C(-1, 10)$, $B(-16, 0)$, $A(4, 0)$.

ג. ונעבור לטריגונומטריה.

(1) נראה איך ניתן לחשב את $\sphericalangle ABD$ בשתי דרכים.

הישר BD עולה ולכן מתקיים הקשר $m = \tan \alpha$: $\frac{1}{2} = \tan \sphericalangle ABD \rightarrow \boxed{\sphericalangle ABD = 26.57^\circ}$

או, ב- $\triangle ABD$.



$$\tan \sphericalangle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\sphericalangle ABD = 26.57^\circ}$$

תשובה: $\sphericalangle ABD = 26.57^\circ$.

(2) נחשב, תחילה, את $\sphericalangle CBA$ בשתי דרכים.

הישר BC עולה ולכן מתקיים הקשר $m = \tan \alpha$

$$m_{BC} = \frac{10-0}{-1+16} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \tan \sphericalangle CBA \rightarrow \boxed{\sphericalangle CBA = 33.69^\circ}$$

או, ב- $\triangle BCT$, כאשר הורדנו מהנקודה C את CT אנך לציר ה-x (T(-1, 0)).

$$\tan \sphericalangle CBT = \frac{CT}{BT} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\sphericalangle CBT = 33.69^\circ}$$

זוויות סמוכות על שוקי הטרפז משלימות ל- 180° , ולכן $\sphericalangle BCD = 180^\circ - 33.69^\circ = 146.31^\circ$

תשובה: $\sphericalangle BCD = 146.31^\circ$.

ד. לצלע CD, שאורכה 5, יש גובה חיצוני לקודקוד D שאורכו 10.

$$S_{\Delta BCD} = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$$

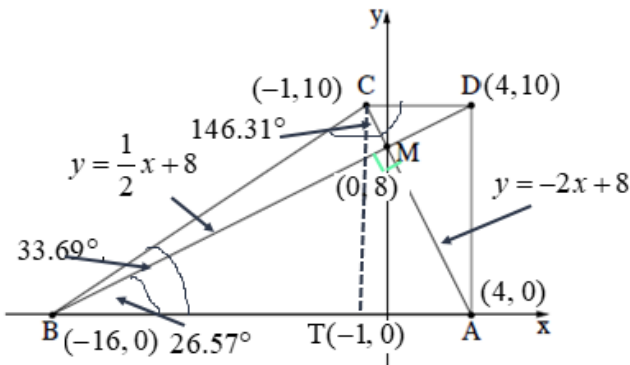
דרך חלופית

$$CB = \sqrt{(10-0)^2 + (-1+16)^2} = \sqrt{325}$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{CD \cdot CB \cdot \sin \angle BCD}{2}$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{5 \cdot \sqrt{325} \cdot \sin 146.31^\circ}{2} \approx 25$$

תשובה: שטח המשולש BCD הוא 25.



תודה לשי חנני

יש עוד שתי דרכים, נרשם בקצרה

$$S_{\Delta BCD} = S_{ABCD} - S_{\Delta ABD}$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{BD \cdot CM}{2}$$

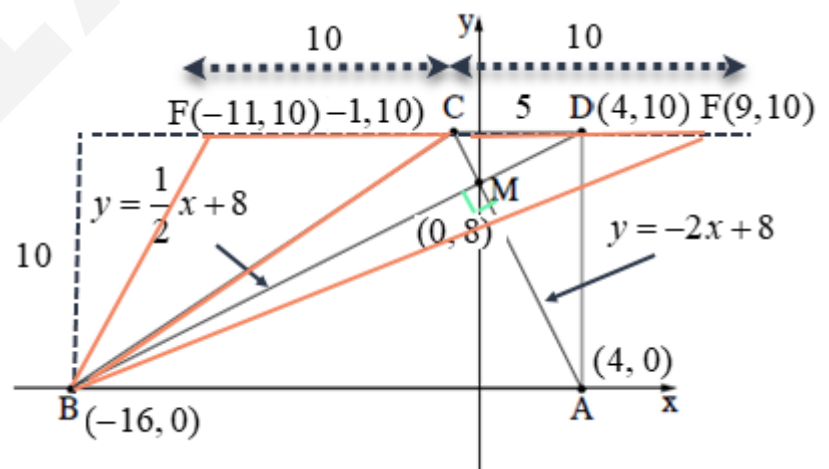
ה. הנקודה F נמצאת על הישר $y = 10$,

כך שהגובה לקודקוד D יהיה תמיד באורך 10.

שטח המשולש BFC יהיה גדול פי 2 משטח המשולש BCD,

אם $CF = 2CD$, כלומר אם "נלך" מהנקודה $C(-1, 10)$

10 יחידות ימינה, או שמאלה.



תשובה: $F(-11, 10)$ או $F(9, 10)$.

א. משוואת המשיק למעגל בנקודה D היא $4x + 3y = 40$.

המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה A, ולכן $x_A = 0$.

$$4 \cdot 0 + 3y = 40 \rightarrow 3y = 40$$

$$y = 13\frac{1}{3} \rightarrow \boxed{A(0, 13\frac{1}{3})}$$

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B, ולכן $y_B = 0$.

$$4x + 3 \cdot 0 = 40 \rightarrow 4x = 40$$

$$x = 10 \rightarrow \boxed{B(10, 0)}$$

$$AB = \sqrt{(0-10)^2 + (13\frac{1}{3}-0)^2} = \sqrt{\frac{2500}{9}} = 16\frac{2}{3}$$

תשובה: אורך הקטע AB הוא $16\frac{2}{3}$.

ב. $MD = MO$ (רדיוסים שווים במעגל)

$BD = BO$ (שני משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה)

OMDB דלתון (שני זוגות שונים של צלעות סמוכות שוות)

תשובה: הוכחנו כי המרובע OMDB הוא דלתון.

ג. (1) $\angle ADM = \angle AOB = 90^\circ$, כי רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה והצירים מאונכים זה לזה.

$\angle A = \angle A$ (זווית משותפת)

ומכאן ש- $\triangle ADM \sim \triangle AOB$, על פי משפט דמיון זווית זווית.

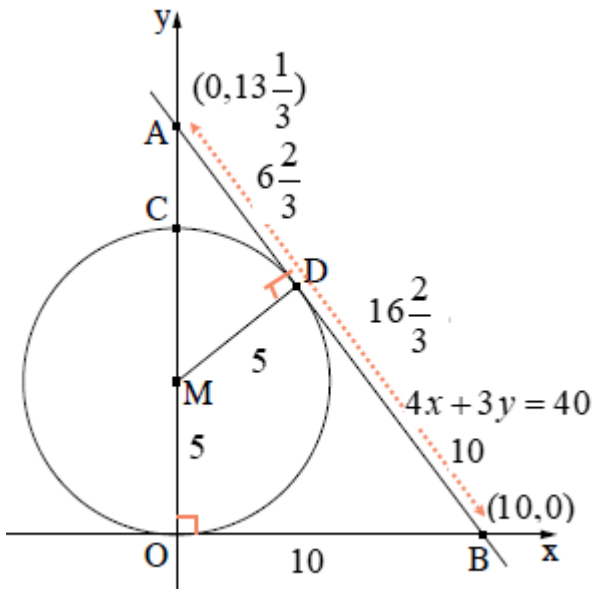
תשובה: הוכחנו ש- $\triangle ADM \sim \triangle AOB$.

$$(2) \frac{AD}{AO} = \frac{AM}{AB} = \frac{DM}{OB} \quad (\text{יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים}).$$

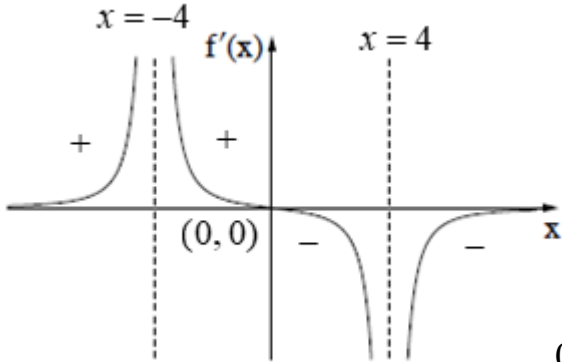
$$. AD = 16\frac{2}{3} - 10 = 6\frac{2}{3} \text{ ולכן } , BD = BO = 10$$

$$. MD = 5 \text{ ולכן } , \frac{6\frac{2}{3}}{13\frac{1}{3}} = \frac{AM}{16\frac{2}{3}} = \frac{DM}{10} = \frac{1}{2}$$

תשובה: רדיוס המעגל הוא 5.



- א. הגרף המצורף מתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ של $f(x)$.
 בהתאם לנתון תחום ההגדרה של $f'(x)$ ושל $f(x)$ הוא $x \neq \pm 4$.
 בהתאם לסימני הנגזרת, ניתן לבנות טבלת עליה-ירידה.



x		-4		0		4	
$f'(x)$	+		+	0	-		-
מסקנה	↗		↘	מקס	↘		↘

תשובה: $x=0$ מקסימום.

- ב. תשובה: עלייה $-4 < x < 0$ או $x < -4$, ירידה $x > 4$ או $0 < x < 4$.

- ג. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y = 2$.

$$\text{I. } \frac{x^2}{x^2+16} + 1 \quad \text{II. } \frac{x^2}{x^2-16} + 2 \quad \text{III. } \frac{x^2}{x^2-16} + 1$$

שלושת המחבורים השמאליים, בכל אחד מהביטויים, שואפים ל-1 כאשר $x \rightarrow \infty$,
 ביטוי I ו-III נקבל ש- $y = 2$ אסימפטוטה אופקית בגלל המחבור הימני.

תחום ההגדרה של ביטוי I הוא כל x , ושל שני הביטויים האחרים הוא $x \neq \pm 4$.
 ולכן הביטוי המתאים הוא ביטוי III.

תשובה: ביטוי III מייצג את הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x^2-16} + 1$.

- ד. נמצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

$$\text{ציר } y : x=0 \rightarrow \boxed{(0,1)} \quad f(0) = \frac{0^2}{0^2-16} + 1 = 1$$

$$\frac{x^2}{x^2-16} + 1 = 0$$

$$\text{ציר } x : y=0 \quad \cdot x^2 + x^2 - 16 = 0$$

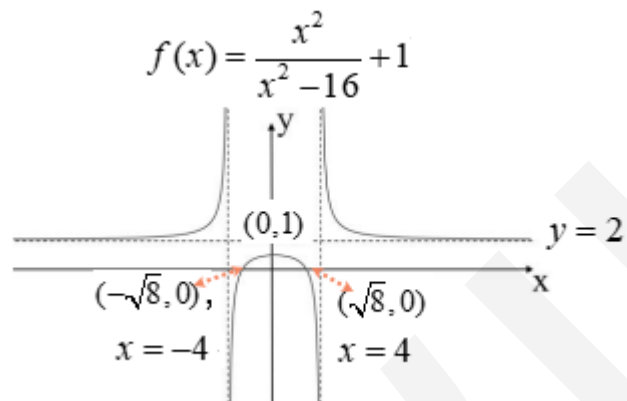
$$2x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

תשובה: $(-\sqrt{8}, 0)$, $(\sqrt{8}, 0)$, $(0, 1)$.

ה. בהתאם לנקודות הקיצון (0,1) מקסימום, האסימפטוטות האנכיות $x = -4$ ו- $x = 4$ והאופקית $y = 2$,

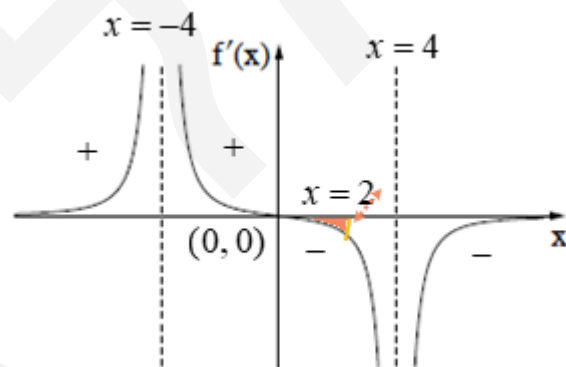
נקודות החיתוך עם הצירים $(-\sqrt{8}, 0)$, $(\sqrt{8}, 0)$, $(0,1)$ ותחומי העלייה והירידה -

נסרטט את גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16} + 1$.



תשובה: השרטוט מעל.

ד. נסמן את השטח המבוקש, כולל הישר $x = 2$.



$$S = \int_0^2 (0 - f'(x)) dx = -f(x) \Big|_0^2$$

$$\begin{aligned} x=2: & -f(2) = -\left(\frac{2^2}{2^2-16} + 1\right) = -\frac{2}{3} \\ x=0: & -f(0) = -1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x=2: \\ x=0: \end{aligned}} \right\} S = -\frac{2}{3} - (-1) \rightarrow \boxed{S = \frac{1}{3}}$$

תשובה: גודל השטח הוא $\frac{1}{3}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{-2x+10}$.

בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$$-2x+10 \geq 0$$

$$-2x \geq -10 \quad /: (-2 < 0)$$

$$\boxed{x \leq 5}$$

תשובה: $x \leq 5$.

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$ ונקבל את הנקודה $(0,0)$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$ ונקבל את הנקודות $(0,0)$, $(5,0)$.

תשובה: $(0,0)$, $(5,0)$.

ג. נמצא את שיעורי כל נקודות הקיצון ונקבע את סוגן. $(5,0)$ בהכרח נקודת קיצון קצה.

$$f'(x) = 2x\sqrt{-2x+10} + x^2 \frac{-1}{\sqrt{-2x+10}}$$

$$f'(x) = \frac{2x(-2x+10) - x^2}{\sqrt{-2x+10}}$$

$$f'(x) = \frac{-4x^2 + 20x - x^2}{\sqrt{-2x+10}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-5x^2 + 20x}{\sqrt{-2x+10}}}$$

$$0 = -5x^2 + 20x = 5x(-x+4) \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0), x=4 \rightarrow (4, 16\sqrt{2})$$

$$f'(3) > 0, f'(5) < 0 \rightarrow \boxed{(4, 16\sqrt{2}), \max}$$

$$f'(-1) < 0, f'(1) > 0 \rightarrow \boxed{(0,0), \min}$$

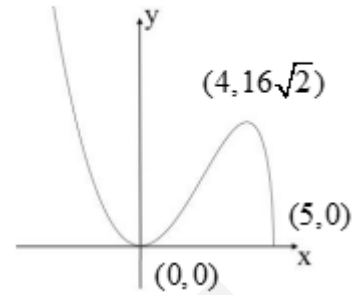
כיוון שהפונקציה יורדת מנקודת המקסימום לנקודת הקצה $(5,0)$,

הרי שנקודת הקצה היא נקודת מינימום.

תשובה: $(5,0)$ מינימום, $(4, 16\sqrt{2})$ מקסימום, $(0,0)$ מינימום.

ד. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

$$f(x) = x^2 \cdot \sqrt{-2x+10}$$



תשובה: הסרטוט מעל.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - c$.

זו הזזה אנכית, c יחידות כלפי מטה, כי c הוא פרמטר חיובי, של הפונקציה $f(x)$, ללא שינוי בתחום ההגדרה ותחומי עלייה וירידה.

נתון כי הישר $y = 20$, שהוא פונקציה קבועה עם שיפוע אפס, משיק לגרף הפונקציה $g(x)$.

מכאן שנקודת ההשקה היא כאשר $g'(x) = f'(x) = 0$.

על פי סעיף ג, זה מתקיים עבור $x = 0$, ועבור $x = 4$.

כיוון שההזזה היא כלפי מטה, אז מדובר בנקודת המקסימום $(4, 16\sqrt{2})$.

$$16\sqrt{2} - c = 20$$

$$16\sqrt{2} - 20 = c$$

$$\boxed{c = 2.627}$$

תשובה: $c = 2.627$.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{9}{1-x} + 2$, המוגדרת לכל $x \neq 1$, והסרטוט שלה.

$x = 1$ מאפס את המכנה במחובר השמאלי, ולא את המונה,

לכן הישר $x = 1$ אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x .

כאשר $x \rightarrow \infty$ המחובר השמאלי שואף ל- 0 , ולכן $f(x) \rightarrow 0 + 2 = 2$,

ו- $y = 2$ אסימפטוטה המאונכת לציר ה- y .

תשובה: $x = 1, y = 2$.

ב. הפונקציה שיש להביא למינימום היא היקף המלבן ABCD.

נסמן $A(t, \frac{9}{1-t} + 2)$ נקודה על גרף הפונקציה, ברביע השני.

AB מקביל לציר ה- x , ולכן $AB = x_B - x_A = 1 - t$

AD מקביל לציר ה- y , ולכן $AD = y_A - y_D = \frac{9}{1-t} + 2 - 2 = \frac{9}{1-t}$

$$P_{ABCD} = 2AB + 2AD$$

$$P_{ABCD} = 2(1-t) + 2\left(\frac{9}{1-t}\right)$$

$$P_{ABCD} = 2 - 2t + \frac{18}{1-t}$$

$$P' = -2 + \frac{0 - 18 \cdot (-1)}{(1-t)^2}$$

$$P' = -2 + \frac{18}{(1-t)^2}$$

$$0 = -2 + \frac{18}{(1-t)^2}$$

$$\frac{18}{(1-t)^2} = 2$$

$$9 = (1-t)^2$$

$$3 = 1-t \rightarrow \boxed{t = -2} \quad -3 = 1-t \rightarrow \cancel{t = 4} \quad \leftarrow t < 0$$

$$P'(-3) = -\frac{7}{8} < 0, P'(-1) = \frac{5}{2} > 0 \rightarrow \text{Min}$$

$$f(-2) = \frac{9}{1-(-2)} + 2 = 5 \rightarrow \boxed{A(-2, 5)}$$

תשובה: $A(-2, 5)$, עבורה היקף המלבן מינימלי.

ג. $3 \cdot 3 = 9$ הוא (למעשה, התקבל ריבוע) $AD = 5 - 2 = 3$, $AB = 1 - (-2) = 3$.

תשובה: שטח המלבן, שהיקפו מינימלי, הוא 9.

