יואל גבע
לא מתפשרים.

פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשפ"ד , 2024 , מועד א', שאלון: 35372

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. משוואת הישר AD **היא** $y=-2x+4$.

הקודקוד D **נמצא על ציר ה-** y **ולכן** $x_D=0$ **, ועל הישר** $y=-2x+4$ **ו-** $\boxed{D(0,4)}$.

הקודקוד A **נמצא על ציר ה-** x **, ולכן** $y_A=0$.

$$0=-2x+4$$
$$2x=4 \quad /:2$$
$$x=2 \quad \rightarrow \boxed{A(2,0)}$$

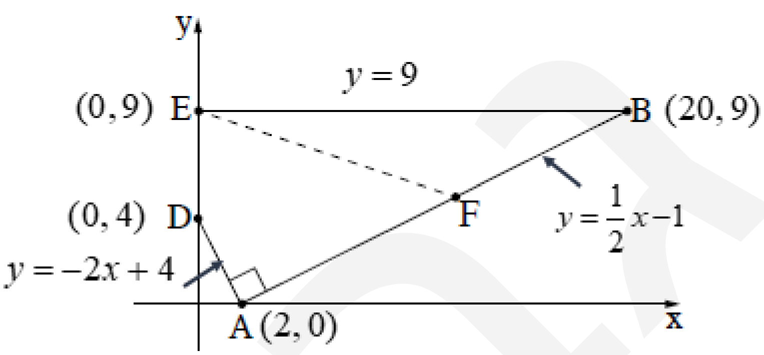
תשובה: $A(2,0)$, $D(0,4)$.

ב. נתון כי הצלע AD **מאונכת לצלע** AB **, כאשר** $m_{AD}=-2$.

$m_{AD}\cdot m_{AB}=-1 \rightarrow m_{AB}=+\frac{1}{2}$, **(שיפוע הופכי לנגדי).**

נמצא את משוואת הצלע AB **, על-פי** $m_{AB}=\frac{1}{2}$ **, ו-** $A(2,0)$.

$$y-0=\frac{1}{2}(x-2)$$
$$\boxed{y=\frac{1}{2}x-1} .$$



תשובה: משוואת הצלע AB **היא** $y=\frac{1}{2}x-1$.

ג. הצלע BE **מקביל לציר ה-** x **, לכן** $y_B=y_E=9$ **(משוואת הצלע** BE **היא** $y=9$) .

נציב $y=9$ **במשוואת הישר** $y=\frac{1}{2}x-1$.

$$9=\frac{1}{2}x-1$$
$$10=\frac{1}{2}x \quad /:(\frac{1}{2})$$
$$x=20 \quad \rightarrow \boxed{B(20,9)}$$

תשובה: $B(20,9)$.

ד. נתון כי $m_{\mathrm{EF}} = -\frac{1}{3}$.

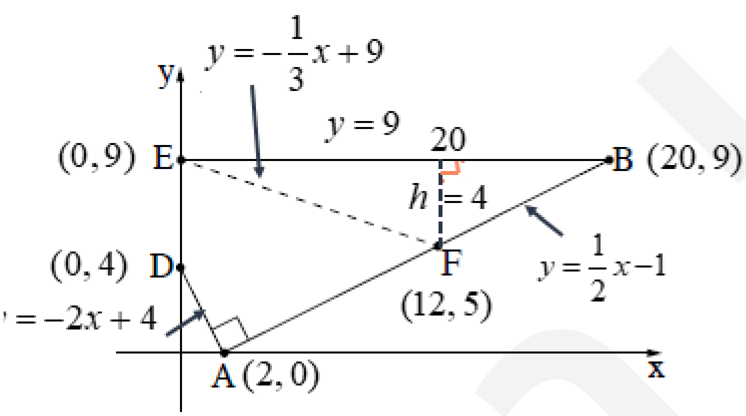
(1) נמצא את משוואת הישר EF **, על-פי** $m_{\mathrm{EF}} = -\frac{1}{3}$ **, ו-** $\mathrm{E}(0,9)$.

$$y - 9 = -\frac{1}{3}(x - 0)$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{3}x + 9} .$$

תשובה: משוואת הישר EF **היא** $y = -\frac{1}{3}x + 9$.

(2) הנקודה F **היא נקודת החיתוך בין** AB **ל-** EF.



$$\mathrm{F}\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = -\frac{1}{3}x + 9 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x - 1 = -\frac{1}{3}x + 9$$

$$\frac{5}{6}x = 10 \quad / : (\frac{5}{6})$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 12 \\ y = \frac{1}{2} \cdot 12 - 1 = 5 \end{array}\right\} \boxed{\mathrm{F}(12,5)}$$

תשובה: $\mathrm{F}(12,5)$.

ה. נחשב את שטח המשולש EBF .

לצלע EB **, המקבילה לציר ה-** x **יש גובה המאונך לציר ה-** x .

$$\mathrm{EB} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{E}} = 20 - 0 = 20$$

$$h = 9 - 5 = 4$$

$$S_{\Delta \mathrm{EBF}} = \frac{\mathrm{BD} \cdot h}{2} = \frac{20 \cdot 4}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta \mathrm{EBF}} = 40}$$

תשובה: שטח המשולש EBF **הוא** 40 .

התחום האפור מתקבל ממערכת אילוצים של מפעל,

שמייצר x סוכריות ו– y מסטיקים בדקה.

א. נסמן ב- x את מספר הסוכריות שהמפעל מייצר בדקה,

וב- y את מספר המסטיקים שהמפעל מייצר בדקה.

משוואת הישר BC היא $y=x+4$, ולכן $\mathrm{B}(0,4)$.

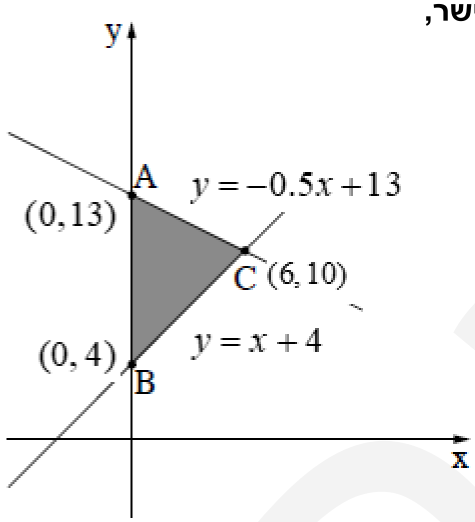
הנקודה $(0,0)$ נמצאת מתחת לישר, כאשר השטח האפור הוא מעל לישר,

ולכן האילוץ המתאים הוא $y \geq x+4$.

משוואת הישר AC היא $y=-0.5x+13$, ולכן $\mathrm{A}(0,13)$.

הנקודה $(0,0)$ נמצאת מתחת לישר, כאשר השטח האפור הוא מתחת לישר,

ולכן האילוץ המתאים הוא $y \leq -0.5x+13$.



$x, y \geq 0$ כמובן, ובהתאם ניתן לרשום את מערכת האילוצים המתאימה

$$\begin{cases} y \geq x+4 \\ y \leq -0.5x+13 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

תשובה: מערכת האילוצים I מתאימה לבעיה זו.

ב. על כל סוכריה המפעל מרוויח 2 שקלים, ועל כל מסטיק הוא מרוויח שקל אחד .

(1) תשובה: פונקציית המטרה היא $f(x,y)=2x+y$.

(2) נבנה טבלה שתסייע במענה לשאלה – מתי הרווח יהיה מקסימלי (הגבוה ביותר).

נמצא את שיעורי הנקודה C .

$$\begin{cases} y=x+4 \\ y=-0.5x+13 \end{cases}$$

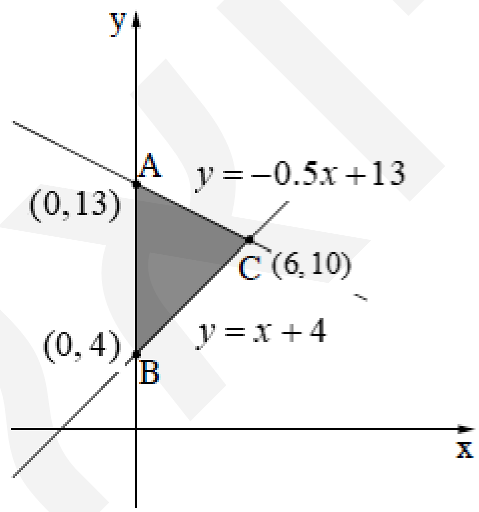
$$x+4=-0.5x+13$$

$$1.5x=9 \quad /:1.5$$

$$x=6$$

$$y=6+4=10 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{C}(6,10)}$$

	$f(x,y)=2x+y$
$A(0,13)$	$f(0,13)=2\cdot 0+13=13$
$B(0,4)$	$f(0,4)=2\cdot 0+4=4$
$C(6,10)$	$f(6,10)=2\cdot 6+10=22$



הערך המקסימלי של פונקציית המטרה הוא 22 שקלים.

תשובה: המפעל צריך לייצר 6 סוכריות ו- 10 מסטיקים בדקה, כדי שהרווח שלו יהיה מקסימלי.

ד. נבדוק האם אפשרי שהמפעל מייצר 5 סוכריות ו- 5 מסטיקים בדקה .

האילוץ הראשון הוא $y \geq x+4$, ולכן לא ייתכן ש- $y=x=5$.

תשובה: לא ייתכן שהמפעל מייצר 5 סוכריות ו- 5 מסטיקים בדקה .

.

שטחי דירות בעיר מסוימת מתפלגים נורמלית
לפנינו גרף ההתפלגות הנורמלית
ועליו נתונים על שטחי דירות במטרים רבועים (מ"ר).

א. ההפרש בין כל שנת לשנת בגרף של התפלגות נורמלית הוא $\frac{1}{2}$ סטיית תקן.

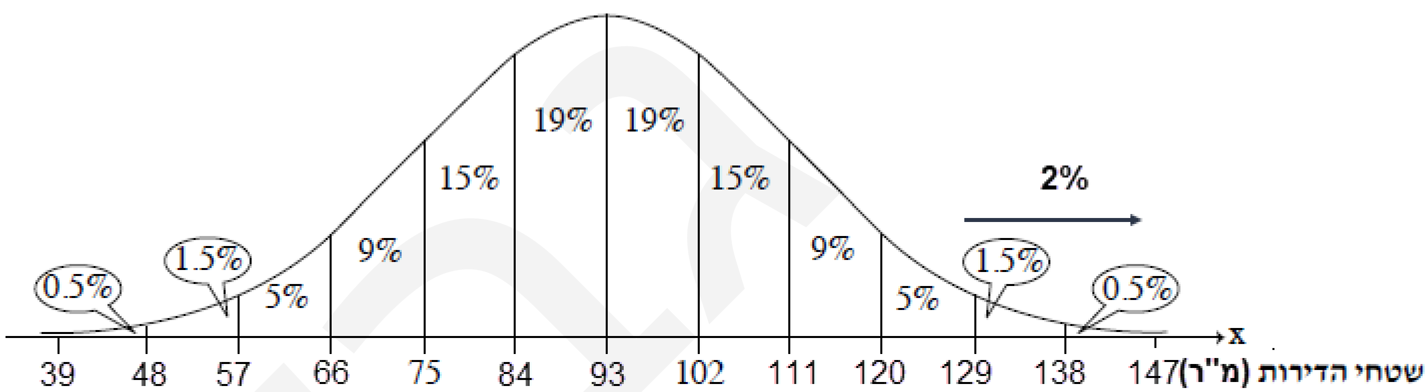
לכן, המרחק בין דירה בשטח של 102 מ"ר לדירה בשטח של 75 מ"ר הוא של 1.5 סטיות תקן $3\cdot\frac{1}{2}=$.

$27=75-102$ **, ומכאן שסטיית תקן אחת היא 18 מ"ר** $=27:1.5$ **, וחצי סטיית תקן הוא 9 מ"ר** $=18:2$.

הממוצע קטן בחצי סטיית תקן מדירה בשטח של 102 מ"ר, ולכן הוא 93 מ"ר $=102-9$.

תשובה: סטיית התקן היא 18 מ"ר $=s$ **, וממוצע שטחי הדירות הוא 93 מ"ר** $=\bar{x}$.

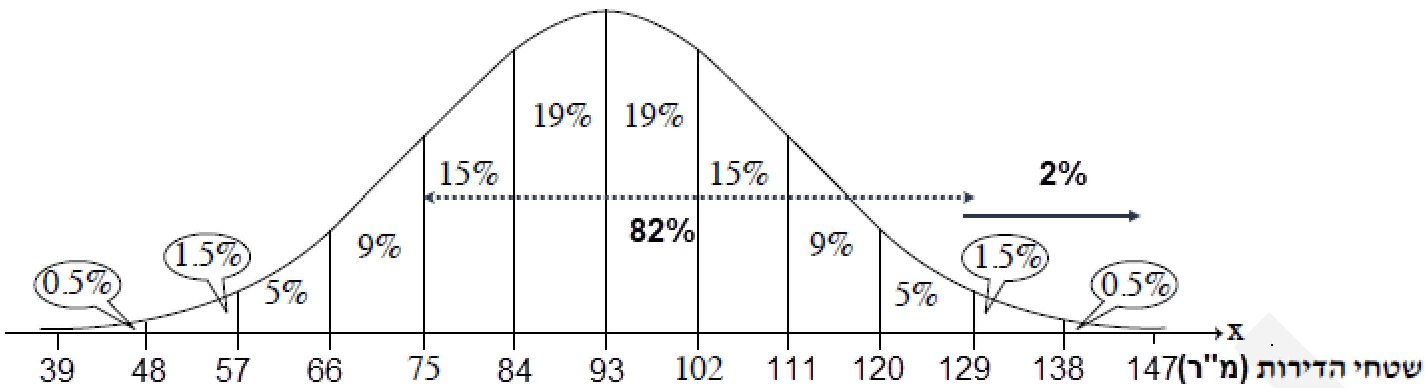
ב. נשלים את שטחי הדירות על הציר האופקי, על פי חצי סטיית תקן שהוא 9 מ"ר.



נחשב את האחוז המצטבר של הדירות ששטחן <u>גדול</u> מ - 129 מ"ר: $0.5\%+1.5\%=2\%$.

לכן, אחוז הדירות ששטחן קטן מ- 129 מ"ר הוא : $100\%-2\%=98\%$.

תשובה: שטחן של 98% מהדירות גדול מ- 129 מ"ר.



ג. בעיר זו יש $26{,}000$ **דירות .**

נחשב את האחוז המצטבר של השירות ששטחן גדול מ- 75 **מ"ר וקטן מ-** 129 **מ"ר.**

$15\% + 19\% + 19\% + 15\% + 9\% + 5\% = 82\%$.

אם נכפול את ההסתברות $(82\% = \frac{82}{100} = 0.82)$ **במספר הדירות** $(n = 26{,}000)$

נמצא את מספר הדירות המתאים: $0.82 \cdot 26{,}000 = 21{,}320$.

פתרון חלופי: **אחוז אחד מ-** $26{,}000$ **דירות הוא** 260 **דירות** $= 26{,}000 : 100$.

82% **הם** $21{,}320$ **דירות** $= 82 \cdot 260$.

תשובה: על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, ל- $21{,}320$ **דירות בעיר זו יש מקום חניה אחד.**

ד. נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$.

נמצא את שטח הדירה עם ציון תקן 2.4 :

$$2.4 = \frac{x - 93}{18} \quad / \cdot 18$$

$$43.2 = x - 93$$

$$\boxed{x = 136.2}$$

דירה עם שטח של 136.2 **מ"ר היא ללא מקום חניה אחד (אולי שניים...).**

פתרון חלופי: **דירה בשטח של** 129 **מ"ר נמצאת במרחק של** 2 **סטיות תקן מהממוצע,**

כלומר עם ציון תקן 2 **, ולכן דירה עם ציון תקן של** 2.4 **היא כבר בשטח שגדול מ-** 129 **מ"ר.**

תשובה: לדירה בעיר זו, שציון התקן שלה הוא 2.4**, אין מקום חניה אחד.**

נדב זרק אבן כלפי מעלה.

הפונקציה הריבועית $y=-5x^2+16x+2$

מתארת במטרים את הגובה של האבן מעל הקרקע (ציר ה- y)

כפונקציה של הזמן בשניות (ציר ה- x)

א. נתונה הפרבולה $y=-5x^2+16x+2$ **.**

גובה האבן ברגע הזריקה, מסומן בנקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y **.**

בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **, נקבל** $y=2$ **.**

תשובה: גובה האבן מעל הקרקע ברגע הזריקה הוא 2 **מטר.**

ב. שיעור ה- x **של קדקוד הפרבולה,** $y=-5x^2+16x+2$ **, מתקבל על ידי הנוסחה** $x=-\frac{b}{2a}$ **.**

לכן, $x_{\text{KODKOD}}=\frac{-16}{2\cdot(-5)}=\frac{-16}{-10}=1.6$ **, משמע לאחר** 1.6 **שניות האבן מגיעה לגובה המקסימלי.**

$y_{\text{KODKOD}}=-5\cdot1.6^2+16\cdot1.6+2=14.8$ **, משמע, הגובה המקסימלי הוא** 14.8 **מטרים.**

תשובה: לאחר 1.6 **שניות האבן מגיעה לגובה המקסימלי של** 14.8 **מטרים.**

ג. גובה של 14 **מטרים משמעו** $y=14$ **.**

נציב $y=14$ **במשוואת הפרבולה.**

$$14=-5x^2+16x+2$$

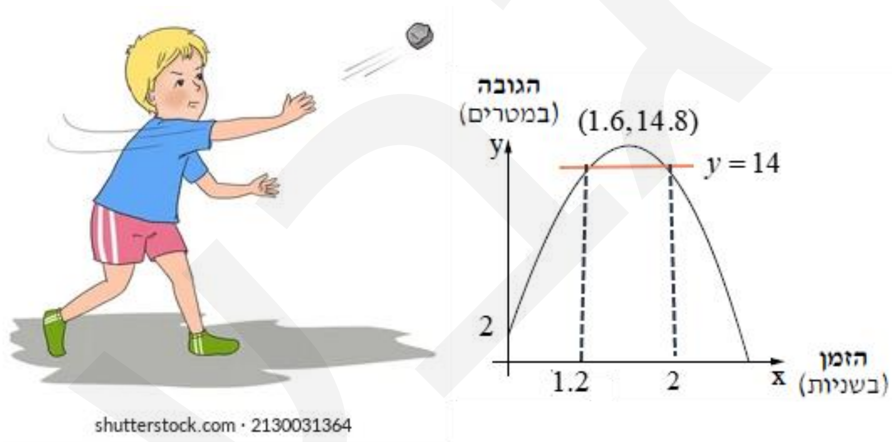
$$0=-5x^2+16x-12$$

$$x_{1,2}=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4\cdot(-5)\cdot(-12)=16}}{2\cdot(-5)}$$

$$x_{1,2}=\frac{-16\pm4}{-10}$$

$$x_1=\frac{-16+4}{-10}=\frac{-12}{-10}=1.2$$

$$x_2=\frac{-16-4}{-10}=\frac{-20}{-10}=2$$



תשובה: לאחר 1.2 **שניות, וגם לאחר** 2 **שניות, היה גובה האבן** 14 **מטרים.**

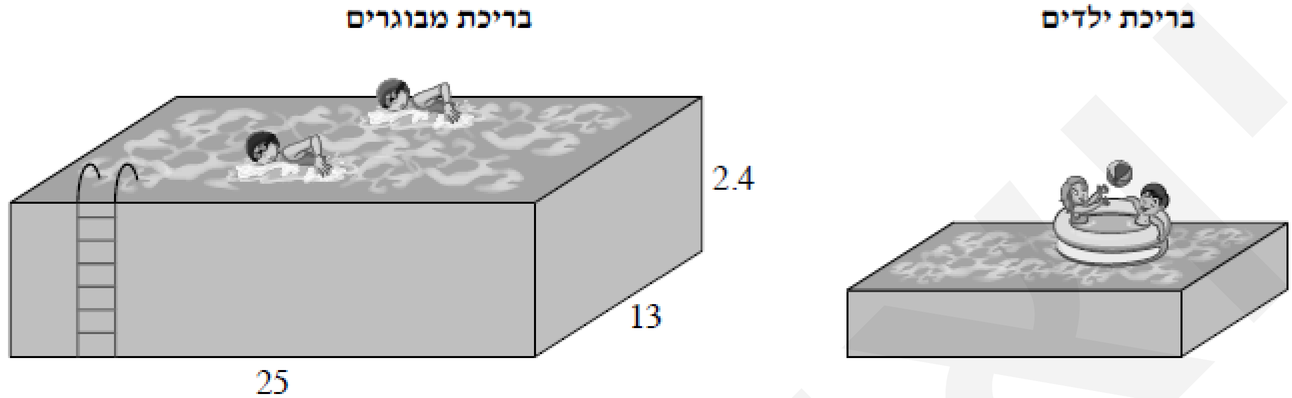
ד. נמצא את גובה האבן כעבור 4 **שניות. נציב** $x=4$ **:** $y=-5\cdot4^2+16\cdot4+2=-14$ **.**

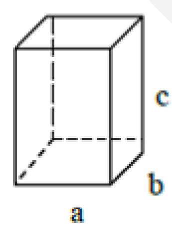
משמע האבן כבר פגעה בקרקע, כי הגובה אינו יכול להיות שלילי (אלא אם כן נפלה לבור).

תשובה: כעבור 4 **שניות מרגע הזריקה האבן כבר הגיעה לקרקע.**

במרכז ספורט יש שתי בריכות: בריכת מבוגרים ובריכת ילדים.

כל בריכה היא בצורת תיבה שבסיסה מלבן (ראו סרטוט)



נפח (V)	שטח פנים (F)	שטח מעטפת (M)	סרטוט	הגוף
$V = a \cdot b \cdot c$	$F = M + 2ab$ $F = 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$	M = סכום שטחי הפאות הצדדיות $M = 2(a \cdot c + b \cdot c)$		<u>תיבה</u> שמקצועות הבסיס שלה הן a ו- b והמקצוע הצדדי שלה הוא c

א. נחשב את נפח בריכת המבוגרים , שצורתה תיבה.

נפח תיבה, שמקצועות הבסיס שלה הם a **ו-** b, **והמקצוע הצדדי הוא** c ,

הוא $V = a \cdot b \cdot c$.

נפח הבריכה הוא $V = 25 \cdot 13 \cdot 2.4 = 780$ **מ"ק** .

תשובה: נפח בריכת המבוגרים הוא 780 **סמ"ק.**

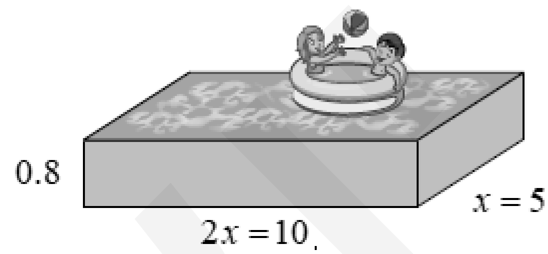
ב. שטח הקירות החיצוניים הוא שטח המעטפת של הבריכה (של התיבה).

$M = 2 \cdot (25 \cdot 2.4 + 13 \cdot 2.4) = 182.4$ **מ"ר** .

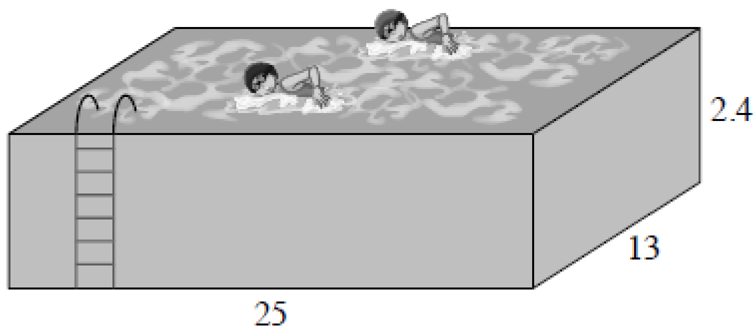
או: שני קירות, ששטחם $2 \cdot 25 \cdot 2.4 = 120$ **מ"ר , ועוד שני קירות ששטחם** $2 \cdot 13 \cdot 2.4 = 62.4$ **מ"ר** .

תשובה: השטח שסיידו הוא 182.4 **מ"ר.**

בריכת ילדים



בריכת מבוגרים



ג. הגובה של בריכת הילדים הוא $\frac{1}{3}$ מן הגובה של בריכת המבוגרים, כלומר 0.8 מטר $2.4:3=$.

תשובה: הגובה של בריכת הילדים הוא 0.8 מטר.

ד. אחת מצלעות הבסיס של בריכת הילדים גדולה פי 2 מן הצלע האחרת של בסיס בריכת הילדים.

נסמן ב- x את אורך הצלע הקטנה (מטרים), ובהתאם $2x$ הוא אורך הצלע הגדולה (מטרים).

הנפח של בריכת הילדים הוא 40 מ"ק.

$$40 = x \cdot 2x \cdot 0.8$$

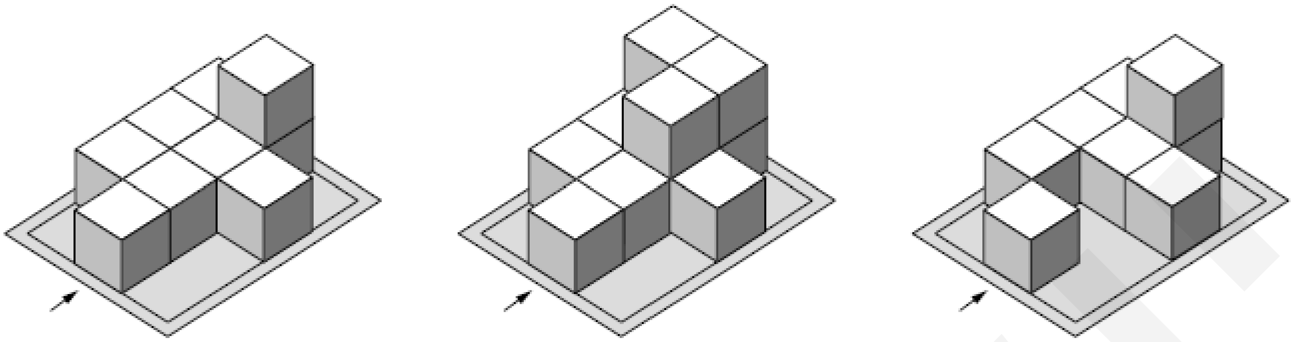
$$40 = 1.6x^2 \quad / :1.6$$

$$25 = x^2 \quad \sqrt{\ }$$

$$\boxed{x = 5} \quad \leftarrow x > 0$$

$$\boxed{2x = 10}$$

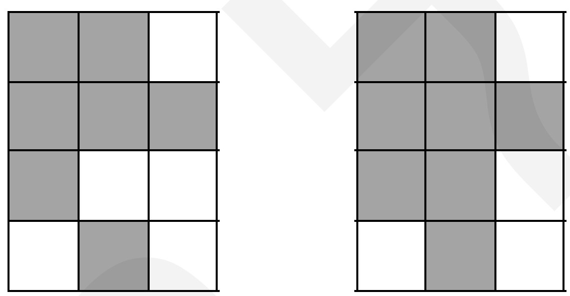
תשובה: אורכי צלעות הבסיס של בריכת הילדים הם 5 מטרים ו- 10 מטרים.



מבנה 3   מבנה 2   מבנה 1

לפנינו סרטוט של מבנה מקוביות זהות.

החץ בסרטוט מסמן את המבט מלפנים.



תרשים II   תרשים I

אלו תרשימים של שני מבטים מלמעלה, המתארים את המבנים

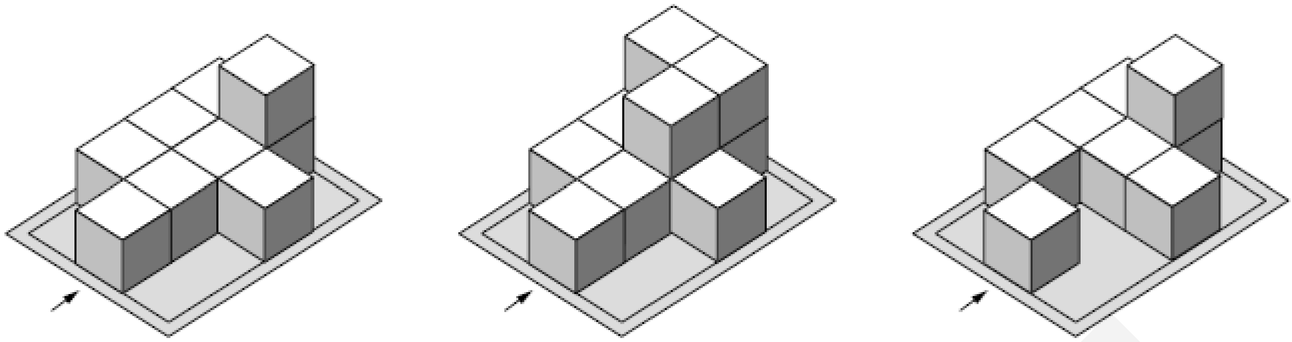
א. במבנה 1 יש קוביות בשורה הראשונה באמצע, בשנייה משמאל,

בכל השורה השלישית וברביעית בשתי המשבצות משמאל , ולכן מתאים לו תרשים II .

במבנים 2 ו- 3 יש קוביות באמצע השורה הראשונה, בשתי המשבצות השמאליות בשורה השנייה,

בכל השורה השלישית ובשתי המשבצות השמאליות בשורה הרביעית, ולכן מתאים להם תרשים I .

תשובה: מבנה 1 - תרשים II , מבנים 2 ו- 3 - תרשים I .



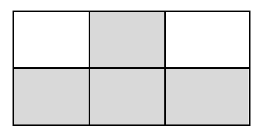
מבנה 1 מבנה 2 מבנה 3

ב. תרשים מספרים, מראה כמה קוביות יש בכל משבצת, כאשר מסתכלים ממבט לפנים.
בלוח, שבסרטוט, יש שתי שורות וארבעה טורים.

1	2	0
1	1	1
1	1	0
0	1	0

תשובה: תרשים המספרים של מבנה 3 , מעל.

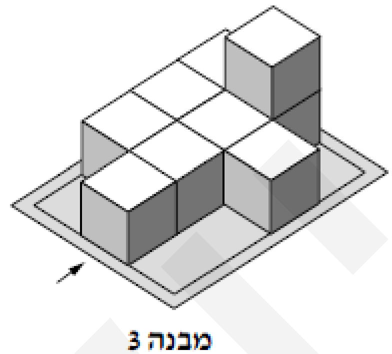
ג. במבט מלפנים של מבנה 3 רואים מימין לשמאל גובה של קובייה אחת, שתי קוביות וקובייה אחת.

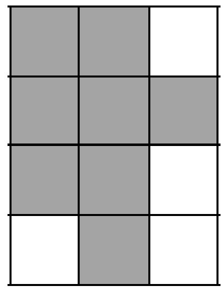


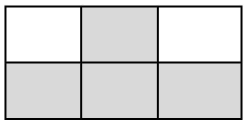
תשובה: סרטטנו מבט לפנים של מבנה 3 , מעל.

ד. למבנה 3 הוסיפו את מספר הקוביות המקסימלי שמאפשר גם למבט למעלה וגם למבט שלפנים, להישאר ללא שינוי.

נציג מחדש את שלושת המבטים הקיימים







תמונת המבנה **מבט מלמעלה** **מבט מלפנים**

(1) ניתן להוסיף קוביות רק במשבצות המסומנות באפור במבט מלמעלה, מבלי להוסיף גובה במבט מלפנים.

לכן, ניתן להוסיף שלוש קוביות בטור האמצעי, בשלוש המשבצות הראשונות.

תשובה: הוסיפו 3 קוביות למבנה 3 .

(2) בהתאם תרשים המספרים המתאים (מוקפים במסגרת השינויים).

1	2	0
1	$\boxed{2}$	1
1	$\boxed{2}$	0
0	$\boxed{2}$	0

תשובה: תרשים המספרים של מבנה 3 , מעל.