

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

תוכנית חדשה

א. משך הבחינה: ארבע שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה ארבעה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – שאלות קצרות

פרק שני – סדרות והסתברות

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על ארבע שאלות, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי.

$100 = 25 \times 4$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על ארבע מן השאלות 1-8, על שאלה אחת לפחות מן הפרק הראשון או השני ועל שאלה אחת לפחות מכל אחד מן הפרקים השלישי והרביעי (לכל שאלה – 25 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – שאלות קצרות

1. ענו על שניים מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משני סעיפים, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. (1) הוכיחו באינדוקציה מתמטית או בדרך אחרת כי השוויון שלפניכם מתקיים בעבור כל n טבעי.

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(2) האם הביטוי $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$ שווה ל- $\frac{n+1}{n}$ בעבור כל n טבעי? נמקו את תשובתכם.

ב. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

נסמן: $\sphericalangle ACB = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

(1) הביעו באמצעות α את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את משולש ABC,

ובין רדיוס המעגל החוסם את משולש AOB.

נתון כי היחס שהבעתם בתת-סעיף (1) שווה ל- $\sqrt{2}$,

וכי הצלע CB משיקה למעגל החוסם את משולש AOB.

(2) הוכיחו כי מרכז המעגל O נמצא על הצלע AC.

ג. נתון כי הפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה אי-זוגית ורציפה המוגדרת לכל x .

לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת מינימום אחת בלבד ובה $x = -\frac{1}{2}$.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x היא בנקודה $(1, 0)$.

(1) סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתון כי הפונקצייה $g(x)$ היא פונקצייה זוגית המוגדרת לכל x .

פונקציית הנגזרת $g'(x)$ מקיימת $g'(x) = -f(x)$.

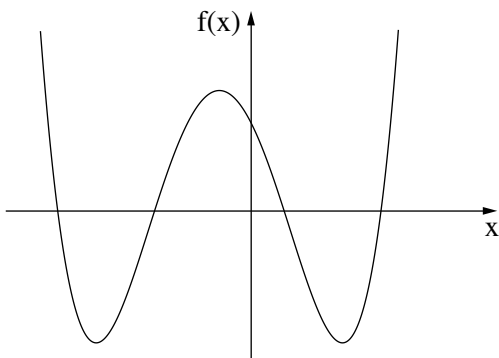
נתון: $g(1) = 2$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות המינימום של הפונקצייה $g(x)$.

(3) לפניכם שני היגדים I-II. קבעו עבור כל היגד אם הוא נכון או לא נכון. נמקו את קביעותיכם.

I. שיעור ה- y של נקודת המקסימום של הפונקצייה $g(x)$ הוא בין 0 ל-2.

II. הפונקצייה $g(x)$ חיובית לכל x .



ד. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת לכל x .

אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

(1) קבעו איזה מן הביטויים מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

נמקו את קביעותכם.

I. $f(x) = x(x - 4)(x + 6)$

II. $f(x) = x(x - 1)(x + 3)(x + 6)$

III. $f(x) = (x - 4)(x - 1)(x + 3)(x + 6)$

IV. $f(x) = (x - 4)(x + 1)(x + 3)(x + 6)$

נתונה הפונקצייה $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

(2) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נתון: $\int_4^7 g(x) dx = k$.

(4) הביעו באמצעות k את הערך של $\int_5^8 [(2 \cdot g(x - 1) + 1)] dx$.

פרק שני – סדרות והסתברות

.2

נתונה סדרה הנדסית שבה $2n + 1$ איברים (n הוא מספר טבעי).

כל איברי הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$ הם חיוביים.

סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים.

נתון כי סכום האיברים שנמצאים אחרי האיבר האמצעי גדול פי 256 מסכום האיברים שנמצאים לפני האיבר האמצעי.

א. מצאו את n .

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אינסופית.

נתון: B היא סדרה אינסופית המקיימת לכל k טבעי $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב-2.

נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב- $\frac{1}{30}$ מסכום האיברים

שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את a_1 .

.3

במחקר שנעשה בקרב תלמידים בבית ספר מסוים נבדק הקשר בין חברות בתנועת נוער ובין התנדבות בקהילה.

80% מן החברים בתנועת נוער מתנדבים בקהילה.

בוחרים באקראי 5 תלמידים שחברים בתנועת נוער (הוצאה עם החזרה).

א. מהי ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתנדב ולפחות תלמיד אחד שאינו מתנדב?

נתון כי 55% מן התלמידים אינם חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים, ו- $\frac{1}{12}$ מן התלמידים שאינם חברים

בתנועת נוער מתנדבים.

ב. כמה אחוזים מן התלמידים חברים בתנועת נוער?

במחקר השתתפו 100 תלמידים סך הכול.

ג. כמה מן התלמידים חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים?

ד. בוחרים באקראי 3 מן התלמידים שאינם מתנדבים (הוצאה ללא החזרה).

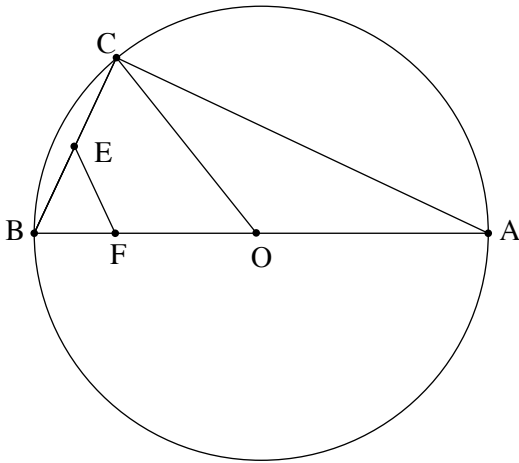
(1) מהי ההסתברות שהתלמיד הראשון שנבחר חבר בתנועת נוער ושני התלמידים שנבחרו אחריו אינם חברים

בתנועת נוער?

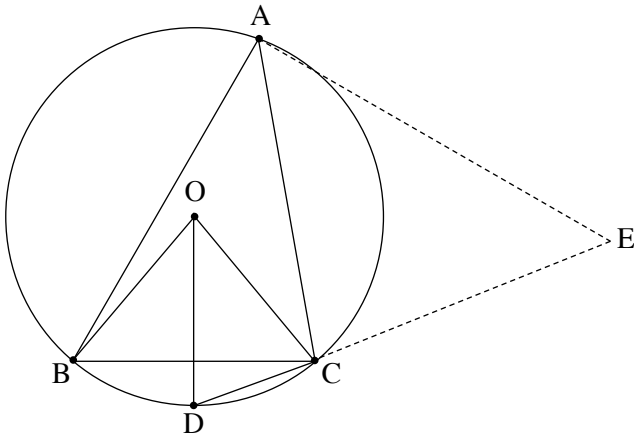
(2) מהי ההסתברות שאחד מן התלמידים שנבחרו חבר בתנועת נוער והשניים האחרים אינם חברים בתנועת נוער אם

ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר אינו חבר בתנועת נוער?

פרק שלישי – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש- AB הוא קוטר במעגל.
 הנקודה E נמצאת על הצלע BC, הנקודה F נמצאת על הקטע BO, כמתואר בסרטוט.
 נתון כי המרובע CEFO הוא בר חסימה במעגל.
א. הוכיחו: $EF = EB$.
 המעגל החוסם את המרובע CEFO חותך את הצלע AC בנקודה D כך ש- ED מקביל ל- AB.
ב. (1) הוכיחו כי המרובע EDOB הוא מקבילית.
 (2) הוכיחו: $OD \perp AC$.
 הישר ℓ משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC.
ג. הוכיחו כי הישר ℓ משיק למעגל החוסם את המרובע CEFO.



5. משולש ABC חד זוויות חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
 הנקודה D היא אמצע הקשת הקטנה BC, כמתואר בסרטוט.
 נתון: $\angle ABC = 60^\circ$.
 נסמן: $\angle BAC = \alpha$.
א. הביעו באמצעות R ו- α את שטחי המשולשים ABC ו- ODC.
 נתון כי היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ODC הוא $2\sqrt{3} \sin(80^\circ)$.
ב. מצאו את הערך של α .
 הנקודה E נמצאת על המשך המיתר DC כך ש- $\angle CAE = 50^\circ$, כמתואר בסרטוט.
ג. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החסום במשולש ACE.

פרק רביעי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x-1}{(x-a)^3}$, המוגדרת בתחום $x \neq a$, הוא פרמטר שונה מ-0.

א. ענו על התת-שעופים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y .

ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה- x , וקבעו את סוגה.

הגרפים 1–4 שבסוף השאלה מתארים את הפונקצייה $f(x)$ בעבור ערכים שונים של a .

ג. התאימו לכל אחד מן הערכים IV–I של a את הגרף המתאים לו, ונמקו את תשובותיכם.

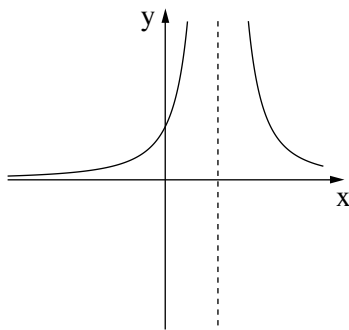
I. $a = -1$ II. $a = 0.5$ III. $a = 1$ IV. $a = 2$

נתונה הפונקצייה $g(x)$, המקיימת $g(x) = f(x) - b$ בעבור הערך של a המתאים לגרף 2. b הוא פרמטר חיובי.

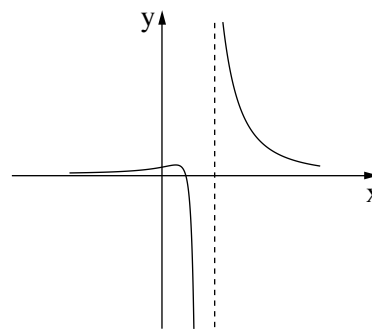
אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x היא $(t, 0)$, $1 < t < 5$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $g(x)$, על ידי הישר $x = t$ ועל ידי הישר $x = 5$ הוא 1.75.

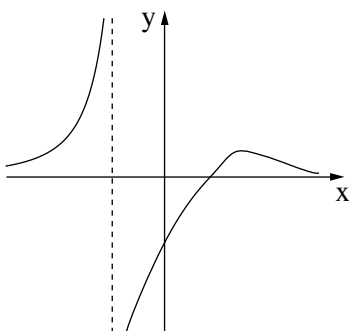
ד. מצאו את הערך של b .



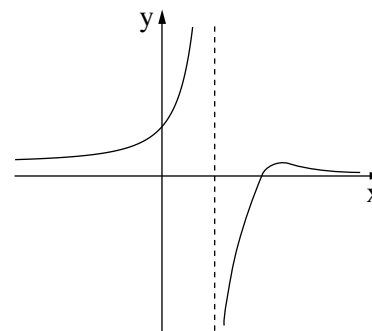
2



1



4



3

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = (b + \cos x) \sin x$, המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$, b הוא פרמטר.

א. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי לגרף הפונקצייה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

ב. לפניכם שלוש אפשרויות III-I לערכים של b .

קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקצייה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם.

$$I. \quad b = 0 \quad II. \quad 0 < b < 1 \quad III. \quad 1 \leq b$$

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$, כאשר $\cos x = \frac{1}{4}$, הוא $\left(-\frac{5}{8}\right)$.

ג. מצאו את הערך של b .

הציבו $b = 1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$ המקיימת $g(x) = (f(x))^2 \cdot f'(x)$. הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

ו. חשבו את השטח ברביע הראשון, המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

8. נתונה הפונקצייה $f(x) = \sqrt{x}$, המוגדרת בתחום $x \geq 0$, ונתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{16}{x^2 + 3}$, המוגדרת לכל x .

א. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

בנקודה $C(t, 0)$ מעבירים אנך לציר ה- x , $t > 0$.

האנך חותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקצייה $g(x)$ בנקודה B.

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC.

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו-BC מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של

הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $k(x) = \frac{8\sqrt{x-4}}{(x-4)^2 + 3}$, המוגדרת בתחום $x \geq 4$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקצייה $k(x)$, וקבעו את סוגה.

נמקו את תשובתכם.

בהצלחה!