

שימו לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון שני

הוראות

א. משך הבחינה: שלוש שעות.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים, ובהם חמש שאלות.

פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים

פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

יש לענות על שלוש שאלות לבחירתכם – $3 \times 33\frac{1}{3} = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים

בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

ענו על שלוש מן השאלות 1-5 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שימו לב: אם תענו על יותר משלוש שאלות, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – גאומטרייה אנליטית, וקטורים, טריגונומטרייה במרחב, מספרים מרוכבים

1. נתון מעגל I שמשוואתו $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$, ומרכזו בנקודה K. נתון מעגל II שמשוואתו $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 1$, ומרכזו בנקודה L. הנקודה A נמצאת על מעגל I, והנקודה B נמצאת על מעגל II. מעבירים משיק למעגל I דרך הנקודה A ומשיק למעגל II דרך הנקודה B. שני המשיקים נחתכים בנקודה M.
 - א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M המקיימות $MA = MB$ הוא קו ישר, ומצאו את משוואתו.
 - ב. (1) הראו כי הישר שאת משוואתו מצאתם בסעיף א והישר KL מאונכים זה לזה.
 - ב. (2) האם קיימת נקודה M שמתקיים בעבורה $ML = MK$? נמקו את תשובתכם.
- נתון כי בעבור אחת מן הנקודות M, הנמצאת מעל הישר KL, שטח המשולש KLM הוא 26.
 - ג. מצאו את שיעורי הנקודה M.
 - הנקודה M שמצאתם בסעיף ג נמצאת על הפרבולה $y^2 = 2px$, p הוא פרמטר.
 - ד. מצאו את משוואת המשיק לפרבולה בנקודה M.

2. נתונים שני ישרים l_1 ו- l_2 . לפניכם הצגה פרמטרית של כל אחד מן הישרים.

$$l_1: \underline{x} = t(-1, 3, 0)$$

$$l_2: \underline{x} = (1, -3, 0) + m(0, k, 1)$$

k הוא פרמטר.

הנקודה A היא נקודת החיתוך של הישרים l_1 ו- l_2 .

א. מצאו את שיעורי הנקודה A.

נסמן ב- α את הזווית בין הישרים l_1 ו- l_2 .

ב. מצאו את הערך של k שבעבורו מתקיים $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

הציבו $k = 2$, וענו על הסעיפים ג-ה.

המישור π מכיל את הישרים l_1 ו- l_2 .

ג. מצאו את משוואת המישור π .

הנקודה B נמצאת על הישר l_2 , והנקודה O היא ראשית הצירים.

המשולש AOB הוא שווה שוקיים, $AO = AB$.

ד. הסבירו מדוע המשולש AOB נמצא במישור π .

מן הנקודה A מעלים אנך למישור π ומסמנים עליו את הנקודה S.

נתון: נפח הפירמידה SAOB הוא $7\sqrt{2}$.

ה. מצאו את שיעורי הנקודה S (את שתי האפשרויות).

3. במעוין ABCD הקודקוד A נמצא ברביע הראשון, והקודקוד B נמצא ברביע השני במישור גאוס.

אלכסוני המעוין נפגשים בראשית הצירים.

המספר המרוכב z מייצג את הקודקוד A.

נתון: $BD = 2AC$.

א. הביעו באמצעות z את המספרים שמייצגים את הקודקודים B, C ו-D.

נסמן: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

ב. ענו על התת-סעיפים (1) ו-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות r ו- θ אם יש צורך.

(1) כתבו הצגה קוטבית של ארבעת המספרים ההופכיים $(\frac{1}{z}, \dots)$ למספרים המייצגים את קודקודי המעוין.

(2) ארבעת המספרים שמצאתם בתת-סעיף (1) מייצגים קודקודים של מרובע.

מצאו את שטח המרובע שנוצר על ידי קודקודים אלה.

ג. נתונה המשוואה: $w^{11} = \bar{w}$, w הוא מספר מרוכב השונה מ-0.

מצאו את סכום 12 הפתרונות של המשוואה.

פתרונות המשוואה שבסעיף ג מייצגים קודקודים של מצולע ששטחו שווה לשטח המרובע שמצאתם בתת-סעיף (2).

ד. מצאו את הערך של r.

**פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות**

4. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{e^x - b}{(e^x - 4)^2}$, b הוא פרמטר חיובי, $b \neq 4$.
- א. ענו על התת-סעיפים (1)–(3). הביעו את תשובותיכם באמצעות b אם יש צורך.
- (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.
- (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
- נתון כי לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = \ln(12)$.
- ב. מצאו את הערך של b , ואת סוג נקודת הקיצון.
- הציבו בפונקצייה $f(x)$ את הערך של b שמצאתם, וענו על הסעיפים ג–ו.
- נתונה הפונקצייה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
- ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $g(x)$ המאונכות לצירים.
- ד. סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.
- ה. מהו שיעור ה- y של נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$? נמקו את תשובתכם.
- ו. קבעו אם הערך של $\int_{-3}^{-2} (f(x) - g(x)) dx$ קטן או גדול מ- $1\frac{1}{2}$. נמקו את קביעתכם.
5. נתונה הפונקצייה $f(x) = x((\ln(x))^2 - 2\ln(x) + 2)$, המוגדרת בתחום $x > 0$.
- א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- ב. מצאו את שיעורי נקודת הפיתול של הפונקצייה $f(x)$.
- ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
- ד. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- (2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
- נתונות הפונקציות $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, $g(x) = (\ln(x))^2 - 9$, המוגדרות בתחום $x > 0$.
- ה. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .
- ה. דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x העבירו אנכים לציר ה- x .
- ו. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי גרף הפונקצייה $h(x)$ ועל ידי האנכים.

בהצלחה!