פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ד,2024 , שאלון: 35482, מועד ב', גרסה 06

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

<u>סדרות</u>

1. נתונה סדרה חשבונית A שאיבריה הם: $a_1, a_2, a_3 \ldots$ ובה 25 איברים.

נתון: $a_{13} = 20$, הפרש הסדרה הוא 6 .

א. מצאו את a_1 .

ב. מצאו את סכום האיברים שנמצאים במקומות האי־זוגיים בסדרה.

נתונה סדרה חשבונית B שאיבריה הם: $b_1, b_2, b_3 \ldots$ וגם בה 25 איברים. האיבר הראשון בסדרה הוא 2 .

נסמן את הפרש הסדרה B ב־ d .

מכל איברי הסדרות A ו־ B בונים סדרה חשבונית חדשה שאיבריה הם: $a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3, \ldots$.

ג. **(1)** מצאו את האיבר הראשון של הסדרה החדשה.

(2) הביעו באמצעות d את הפרש הסדרה החדשה.

(3) נתון כי סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 3,250 .

מצאו את d .

נוסחת האיבר הכללי:

(א) $a_{13} = a_1 + 12d$

$20 = a_1 + 12 \cdot 6$

$$\boxed{a_1 = (-52)}$$

ב. מצאו את סכום האיברים שנמצאים במקומות האי־זוגיים בסדרה.

נוסחת סכום n האיברים הראשונים בסדרה חשבונית:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

עבור המקומות האי־זוגיים בסדרה:

I איבר $= (-52)$

הפרש $= 2d = 12$

כמות האיברים $= \frac{n+1}{2} = \frac{25+1}{2} = 13$

$$S_{13} = \frac{13}{2}\left[2\cdot(-52) + (13-1)\cdot 12\right]$$

13 מקומות אי זוגיים

הסכום הוא:

$$\boxed{S = 260}$$

נתונה סדרה חשבונית B שאיבריה הם: ... b_1 , b_2 , b_3 וגם בה 25 איברים. האיבר הראשון בסדרה הוא 2.

נסמן את הפרש הסדרה B ב־ d.

מכל איברי הסדרות A ו־ B בונים סדרה חשבונית חדשה שאיבריה הם: ... , $a_1 + b_1 ,\ a_2 + b_2 ,\ a_3 + b_3$.

ג. **(1)** מצאו את האיבר הראשון של הסדרה החדשה.

(2) הביעו באמצעות d את הפרש הסדרה החדשה.

(3) נתון כי סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 3,250.

מצאו את d.

(1) $a_1 + b_1 = -52 + 2$

$\boxed{a_1 + b_1 = (-50)}$ האיבר הראשון בסדרה החדשה:

(2) הסדרה חשבונית, ולכן נחסיר את האיבר הראשון מהאיבר השני:

$$a_2 + b_2 - (a_1 + b_1) =$$

$$\underbrace{a_2 - a_1}_{6} + \underbrace{b_2 - b_1}_{d} =$$

$$6 + d = \boxed{6 + d}$$

הפרש הסדרה החדשה:

(3) נתון כי סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 3,250 .

מצאו את d .

(3) $S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$

נציב בנוסחת סכום n האיברים הראשונים:

איבר I $= (-50)$

הפרש הסדרה $= 6+d$

כמות איברים $= 25$

$$3{,}250 = \frac{25}{2}\left[2\cdot(-50) + (25-1)(6+d)\right]$$

נחלק ב- $\frac{25}{2}$:

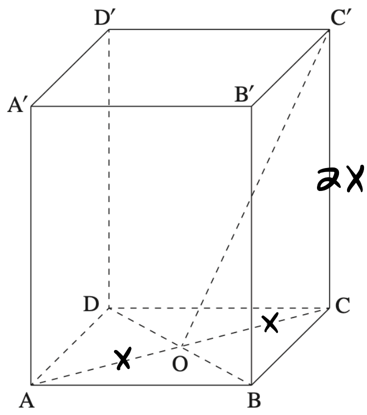
$$260 = -100 + 24(6+d)$$

$$360 = 24(6+d) \quad /:24$$

$$15 = 6+d$$

$$\boxed{d = 9}$$

<u>טריגונומטרייה במרחב</u>



2. בסרטוט שלפניכם תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע.

אלכסוני הבסיס $ABCD$ נפגשים בנקודה O.

נתון כי גובה התיבה שווה לאלכסון הבסיס.

א. מצאו את גודל הזווית שבין הקטע OC' לבין הבסיס $ABCD$.

נתון כי אורך הקטע OC' הוא $\sqrt{125}$.

ב. (1) חשבו את שטח המשולש $BC'D$.

(2) חשבו את שטח המעטפת של התיבה.

ג. הנקודה M היא אמצע הקטע $A'D'$, והנקודה P היא אמצע הקטע AD.

(1) חשבו את אורך הקטע BP.

(2) מצאו את גודל הזווית שבין הקטע BM לבין הבסיס $ABCD$.

(א)

נסמן $AO=x$ ונזכיר כי אלכסונים בריבוע חוצים זה את זה:

$$AO = OC = x$$

$$CC' = AC = 2x$$

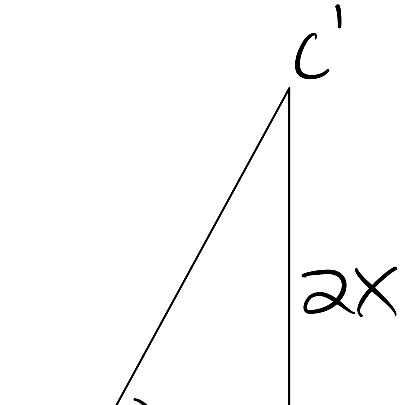
$\underline{\Delta OCC'}$:

$$\tan(\alpha) = \frac{CC'}{CO}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{2x}{x}$$

$$\tan(\alpha) = 2$$

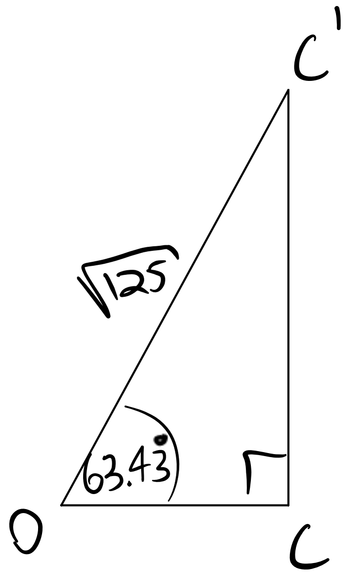
$$\boxed{\alpha = 63.43^\circ}$$



ב. **(1)** חשבו את שטח המשולש $BC'D$.

(2) חשבו את שטח המעטפת של התיבה.

$$OC' = \sqrt{125}$$

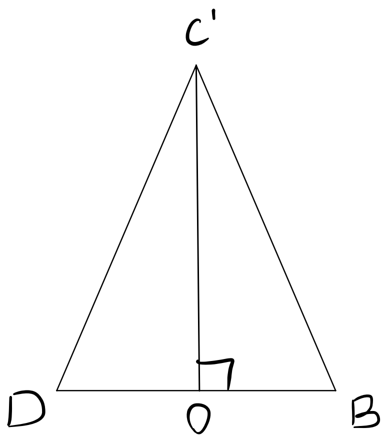


$\underline{\Delta OCC':}$ $\quad \sin(63.43^\circ) = \frac{CC'}{\sqrt{125}}$

$$CC' = 10$$

$$CC' = BD = 10$$

$\underline{\Delta BC'D:}$



$$S_{\Delta BC'D} = \frac{C'O \cdot BD}{2}$$

$$S_{\Delta BC'D} = \frac{\sqrt{125} \cdot 10}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta BC'D} = 25\sqrt{5}}$$

(מב)

$$S_{(\text{מעטפת})} = S_{ABB'A'} \cdot 4$$

$$S_{(\text{מעטפת})} = AB \cdot BB' \cdot 4$$

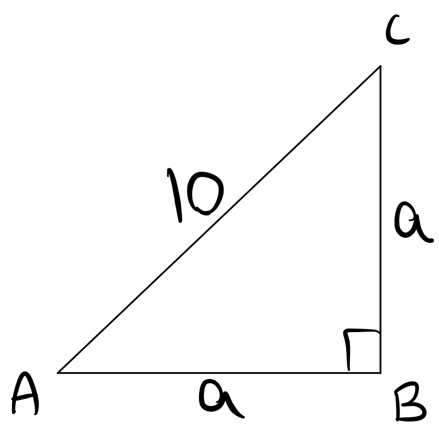
<u>ΔABC :</u>

$$a^2 + a^2 = 10^2$$

$$2a^2 = 100$$

$$a^2 = 50$$

$$a = 5\sqrt{2}$$



$$AB = 5\sqrt{2} \,,\quad BB' = 10$$

$$S_{(\text{מעטפת})} = 5\sqrt{2} \cdot 10 \cdot 4$$

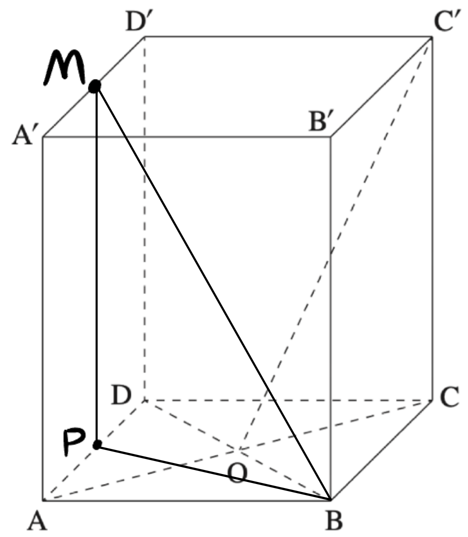
$$\boxed{S_{(\text{מעטפת})} = 200\sqrt{2}}$$

ג. הנקודה M היא אמצע הקטע $A'D'$, והנקודה P היא אמצע הקטע AD.

(1) חשבו את אורך הקטע BP.

(2) מצאו את גודל הזווית שבין הקטע BM לבין הבסיס ABCD.

(ג,1)



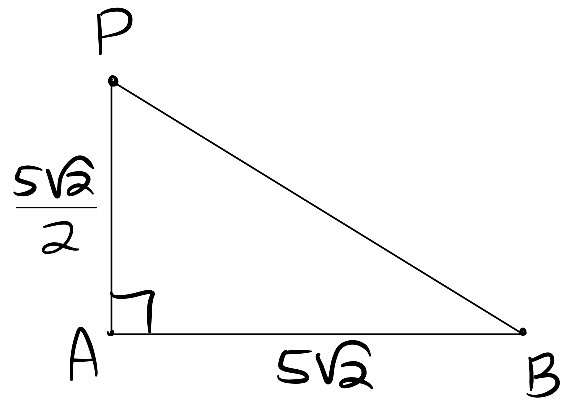
$$AD = 2AP$$

$$5\sqrt{2} = 2AP$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} = AP$$

$\underline{\Delta ABP:}$

משפט פיתגורס:



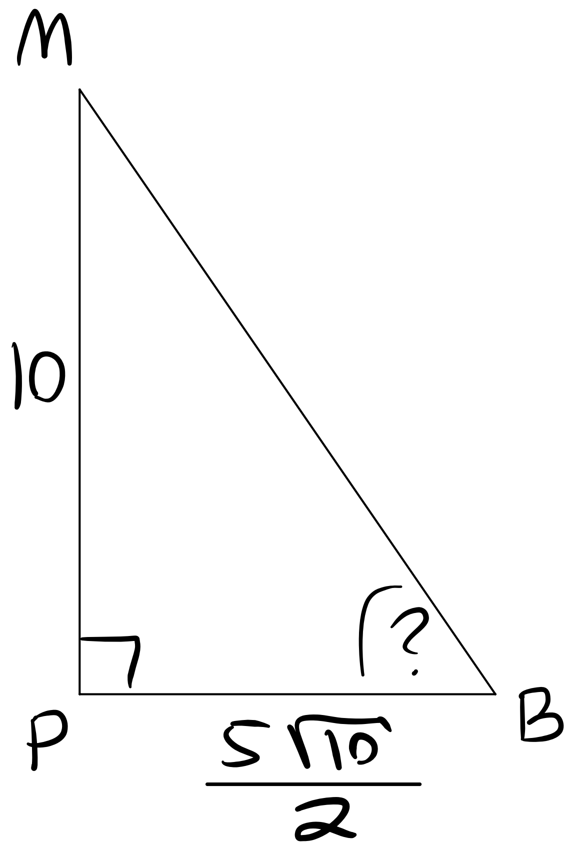
$$BP^2 = AP^2 + AB^2$$

$$BP^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2$$

$$BP^2 = \frac{125}{2}$$

$$\boxed{BP = \frac{5\sqrt{10}}{2}}$$

(2ג)



$\underline{\Delta BPM:}$

$$\tan(\measuredangle MBP) = \frac{MP}{BP}$$

$$\tan(\measuredangle MBP) = \frac{10}{\frac{5\sqrt{10}}{2}}$$

$$\tan(\measuredangle MBP) = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

$$\boxed{\measuredangle MBP = 51.67^\circ}$$

שאלה 3

נתונה הפונקצייה $f(x)=(\cos x)^2-2\sin x-2$, המוגדרת בתחום $0\le x\le 2\pi$.

א. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את תחום החיוביות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $-f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=-f(x)-1$.

ה. קבעו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x . נמקו את קביעתכם.

פתרון

א. נק' קיצון פנימיות: נגזיר:

$f(x)=(\cos x)^2-2\sin x-2$

$f'(x)=2\cos x\cdot(-\sin x)-2\cos x$

נשווה את הנגזרת לאפס:

$f'(x)=0$

$2\cos x\cdot(-\sin x)-2\cos x=0$

$-2\cos x\cdot(\sin x+1)=0$

$\cos x=0$ או $\sin x+1=0 \quad /-1$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $\quad$ $\sin x=-1$

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$

ובתחום: $0<x<2\pi$

$x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ או $x=\frac{3\pi}{2}$

ובסה"כ: $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

נערוך טבלה עבור סימני הנגזרת בתחומים השונים:

x	0	$<x<$	$\frac{\pi}{2}$	$<x<$	$\frac{3\pi}{2}$	$<x<$	2π
סימן הנגזרת $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f עולה/יורדת	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min

$$f'(x) = -2\cos x(\sin x+1)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{4}+1\right) = -\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) < 0$$

$$f'(\pi) = -\sin 2\pi - 2\cos\pi = 2 > 0$$

$$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin 3.5\pi - 2\cos 1.75\pi = 1-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1-\sqrt{2} < 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2\sin\frac{\pi}{2} - 2 = -4$$

$$\boxed{\left(\frac{\pi}{2}, -4\right) \text{min}}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)^2 - 2\sin\frac{3\pi}{2} - 2 = 0$$

$$\boxed{\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) \text{max}}$$

את סוג הקיצון בקצות התחום נסיק לפי סוג נק' הקיצון הפנימיות
(ורציפות הפונקציה f):

$f(0) = (\cos 0)^2 - 2\sin 0 - 2 = -1$

$\boxed{(0,-1)\ max}$

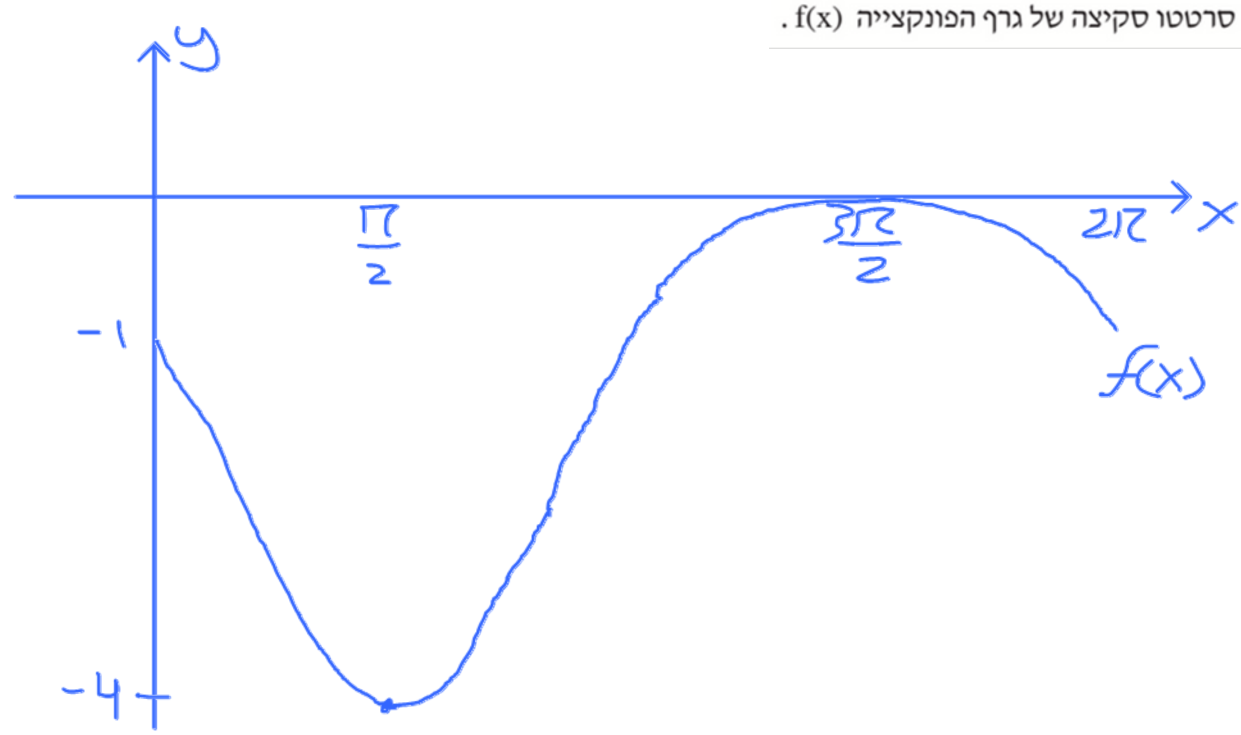
(כי אחריה יש נק' מינימום)

$f(2\pi) = (\cos 2\pi)^2 - 2\sin 2\pi - 2 = -1$

$\boxed{(2\pi,-1)\ min}$

(כי לפניה יש נק' מקסימום)

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

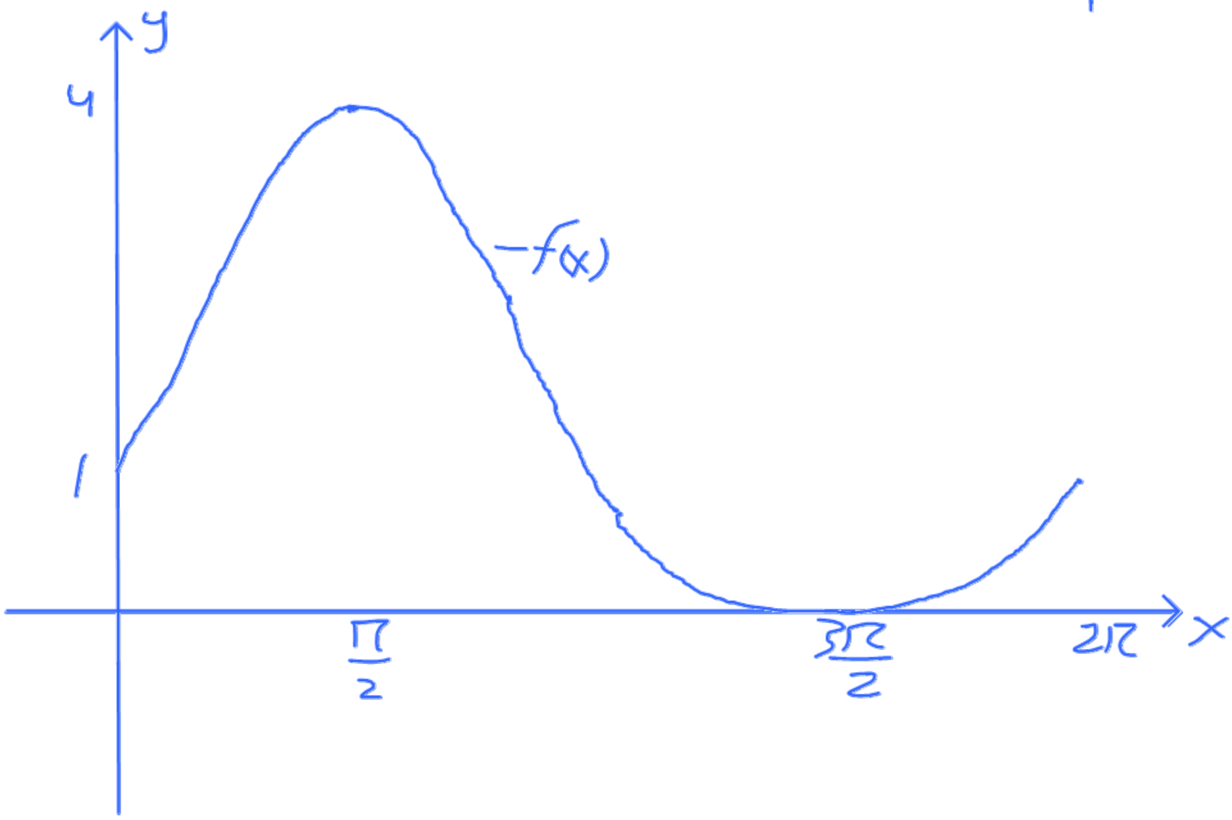


ג. מצאו את תחום החיוביות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

התחומים בהם f עולה (ממש),
הם התחומים בהם f' חיובית.
לפי חקירה קודמת f עולה בתחום $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$.
מסקנה: תחומי החיוביות של הנגזרת f': $\boxed{\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}}$

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $-f(x)$.

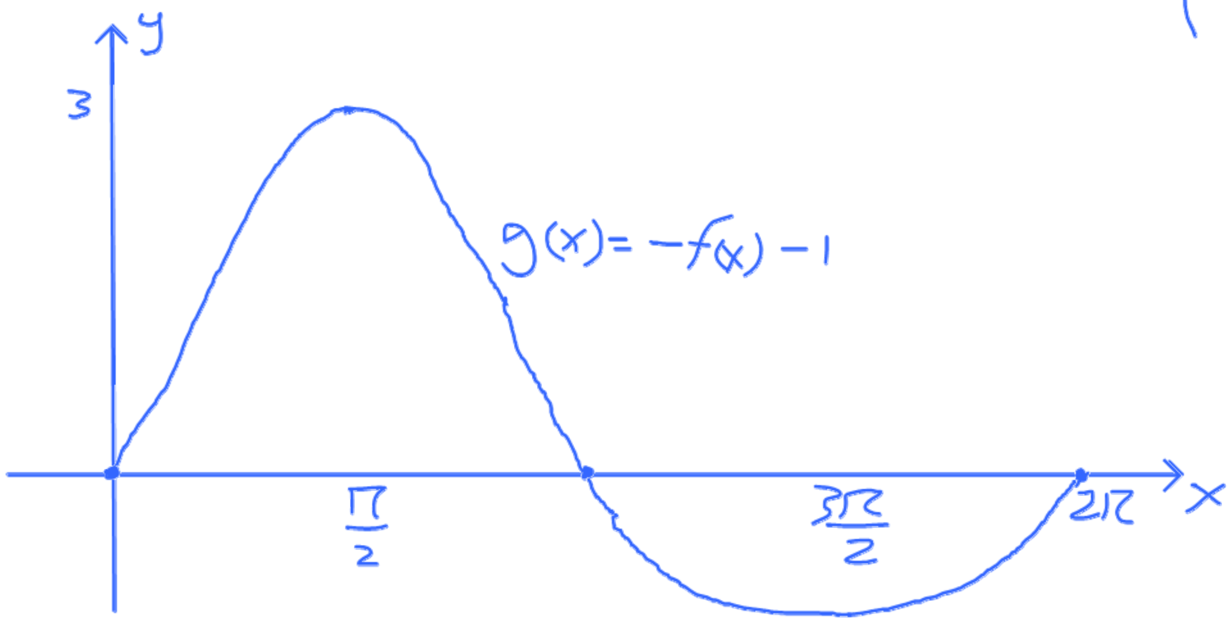
גרף הפונקציה $-f(x)$ מהווה שיקוף של גרף $f(x)$ ביחס לציר ה-x.
לכן לפי גרף $f(x)$: גרף $-f(x)$:



נתונה הפונקצייה $g(x) = -f(x) - 1$.

ה. קבעו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה־ x . נמקו את קביעתכם.

גרף הפונקציה $g(x)=-f(x)-1$ שווה הזזה של גרף $-f(x)$ יחידה אחת בכוון השלילי של ציר ה-y.
לכן ולפי גרף $-f(x)$: גרף $g(x)$:



לפי גרף $g(x)$ נוכל לקבוע כי יש לנו:
שלוש נקודות משותפות עם ציר ה-x

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{(ax-1)}}{x^2}$, a הוא פרמטר.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המאונכת לציר ה־ x .

(3) הסבירו מדוע הפונקציה $f(x)$ חיובית, בעבור כל x בתחום ההגדרה שלה.

נתון כי הנקודה $\left(-1, \frac{1}{e^3}\right)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=2$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ג–ד.

ג. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+k$, k הוא פרמטר.

נתון כי לישר $y=-4e$ ולגרף הפונקציה $g(x)$ יש בדיוק שתי נקודות משותפות.

ד. מצאו את הערך של k .

פתרון

א) (1) נבדוק לאילו ערכי x המכנה מתאפס.

$x^2=0$

$x=0$

$\Downarrow$

תחום הגדרה: $x\neq0$

(2) כאשר $x=0$ המכנה מתאפס, והמונה לא מתאפס

ולכן אסימפטוטה אנכית: $x=0$

נתון $f(x) = \frac{e^{(ax-1)}}{x^2}$

הביטוי $e^{(ax-1)}$ חיובי לכל x

הביטוי x^2 חיובי לכל x בתחום ההגדרה.

מכאן, $f(x) = \frac{\text{ביטוי חיובי}}{\text{ביטוי חיובי}} \Leftarrow f(x) = \underset{\text{חיובי}}{\text{ביטוי}}$ לכל x בתחום ההגדרה.

הערה: מכיוון שגרף הפונקציה f(x) נמצא כולו מעל ציר ה-x.

ד) נתון: הנקודה $(-1, \frac{1}{e^3})$ נמצאת על גרף הפונקציה f(x).

אם נקודה נמצאת על גרף של פונקציה הרי שעיעוריה מקיימים את משוואת הגרף.

נציב את הנקודה במשוואת הגרף.

$$f(x) = \frac{e^{(ax-1)}}{x^2}$$

$$(-1, \frac{1}{e^3}) \xrightarrow{\text{הצבה}} \frac{1}{e^3} = \frac{e^{(a\cdot(-1)-1)}}{(-1)^2}$$

המשך: בעמוד הבא...

$$\frac{1}{e^3} = \frac{e^{-a-1}}{1}$$

ניעזר בחוק חזקה $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$ [illegible] [illegible],

ונקבל:

$$e^{-3} = e^{-a-1}$$

$$\Downarrow$$

$$-3 = -a-1$$

$$a = -1+3$$

$$a = 2$$

נציב $a=2$ בפונקציה $f(x)$, ונקבל:

$$f(x)=\frac{e^{2x-1}}{x^2}$$

כעת על למציאת נקודות הקיצון, נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת לאפס.

נעזר בנוסחאות:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\left(e^{f(x)}\right)'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$f(x)=\frac{e^{2x-1}}{x^2}\qquad e^{2x-1} \rightarrow e^{2x-1}\cdot 2=2e^{2x-1}\qquad x^2 \rightarrow 2x$$

$$f'(x)=\frac{2e^{2x-1}\cdot x^2-e^{2x-1}\cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^{2x-1}\cdot\left(2x^2-2x\right)}{x^4}$$

1.

$$\frac{e^{2x-1}\cdot(2x^2-2x)}{x^4}=0 \quad /\cdot x^4$$

$$\underbrace{e^{2x-1}}\cdot\underbrace{(2x^2-2x)}=0$$

$e^{2x-1}=0$ או $2x^2-2x=0$

$\underbrace{2x}\underbrace{(x-1)}=0$

אין פתרון (כי מעריכי תמיד חיובי.)

$2x=0 \quad /:2$ $\qquad$ $x-1=0$

$\cancel{x=0}$ $\qquad$ $x=1$

נפסל, לא בתחום ההגדרה.

נמצא את שיעור ה-y של הנקודה.

$$f(x)=\frac{e^{2x-1}}{x^2}$$

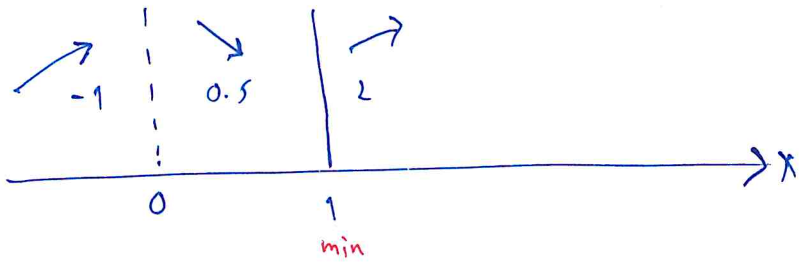
$(1,\ )$

$$f(1)=\frac{e^{2\cdot1-1}}{1^2}$$

$f(1)=e$

$(1,e)$

נעבור כעת לטבלת עלייה וירידה לפי הצבת הנקודות שהתקבלו: היא עולה ויורדת,
ולאחר מכן היא עולה.



$$f'(x)=\frac{e^{2x-1}\cdot(2x^2-2x)}{x^4}$$

ונבחין: e^{2x-1} ו-x^4 חיוביים לכל x בתחום ההגדרה,
ולכן לקביעת סימן הנגזרת, מספיק להציב בסוגריים בלבד.

$f'(-1)=2\cdot(-1)^2-2(-1)=4$ (חיובי) תחום עלייה

סוגריים בלבד

$f'(0.5)=2\cdot(0.5)^2-2\cdot(0.5)=-0.5$ (שלילי) תחום ירידה

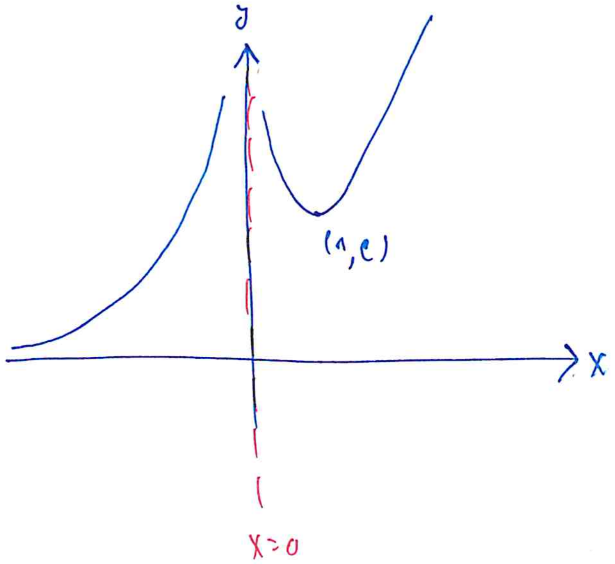
סוגריים בלבד

$f'(2)=2\cdot 2^2-2\cdot 2=4$ (חיובי) תחום עלייה

סוגריים בלבד

min $(1,e)$

ז) (2)



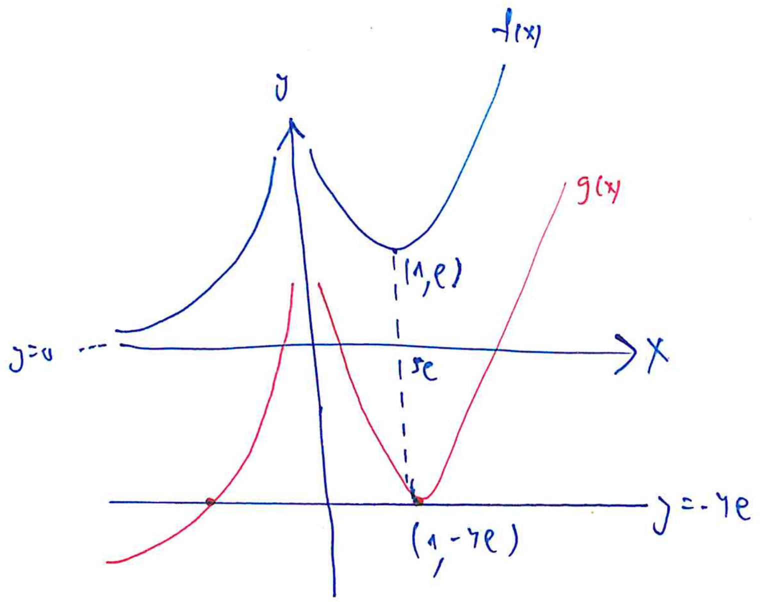
הערה:

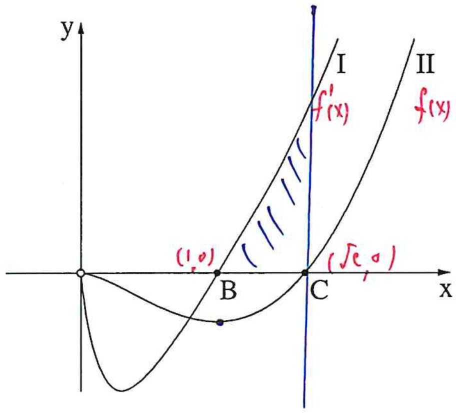
משמאל לציר ה-y, הנגזרת עולה, תמיד (הסבר רשום בסעיף ה (ג)), ועבור ערכי x שליליים וקטנים, ערכי הנגזרת שואפים לאפס, ולכן מתקבל הגרף שמשמאל לציר ה-y.

ג) $g(x)=f(x)+k$, k-פרמטר.

שימו לב כי $g(x)$ היא הזזה אנכית של $f(x)$ ב-k יחידות.
נראה כי לישר $y=-2e$ ולגרף הפונק' $g(x)$ יש בדיוק שתי נקודות משותפות.
לכן נראה שכדי שזה יקרה יש להזיז את $f(x)$ $3e$ יחידות למטה, ומכאן ש- $k=-3e$.

המחשה:





5. בסרטוט שלפניכם מתוארים שני גרפים, I ו־ II .

אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$, והאחר מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א. קבעו איזה מן הגרפים I , II מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
נמקו את קביעתכם.

נתון: $f(x) = x^2 \cdot (2\ln(x) - 1)$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה על פי הגרף.

הנקודה B היא נקודת החיתוך של גרף I עם ציר ה־ x ,
והנקודה C היא נקודת החיתוך של גרף II עם ציר ה־ x .

ג. מצאו את אורך הקטע BC .

דרך הנקודה C העבירו ישר המקביל לציר ה־ y .

ד. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף I , על ידי הישר המקביל לציר ה־ y ועל ידי ציר ה־ x (השטח שברביע הראשון).

פתרון

א) כאשר $f(x)$ עולה, $f'(x)$ חיובית
כאשר $f(x)$ יורדת, $f'(x)$ שלילית
ונקודת הקיצון של $f(x)$, $f'(x)$ חותכת את ציר ה-x.

ולכן,
$f(x)$ - II
$f'(x)$ - I

בנקודה $x=x_B$ לגרף II יש קיצון וגרף I מתאפס.
כאשר $x>x_B$ גרף II עולה וגרף I חיובי
כאשר $0<x<x_B$ גרף II יורד וגרף I שלילי.

נתון:

$$f(x) = x^2 \cdot (2\ln(x) - 1)$$

ג) (1) יש לדרוש שהביטוי שבתוך ה-ln (הארגומנט) יהיה חיובי,

ולכן תחום ההגדרה: $x>0$.

(2) למציאת נק' הקיצון יש לגזור ולהשוות ל-0.

ניעזר בנוסחאות:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{2x} \cdot \underbrace{(2\ln(x) - 1)}_{2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2}{x}}$$

$$f'(x) = 2x \cdot (2\ln(x) - 1) + x^2 \cdot \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = 4x\ln(x) - 2x + 2x$$

$$f'(x) = 4x \cdot \ln x$$

$4x \cdot \ln x = 0$

$4x = 0$ או $\ln x = 0$

$\cancel{x = 0}$

פסול, לא בתחום ההגדרה.

$\log_e x = 0$

$\Downarrow$

$x = e^0 = 1$

נמצא את שיעור ה-y.

$f(x) = x^2 \cdot (2\ln(x) - 1)$

$(1, \ )$

$f(1) = 1^2 \cdot (2\ln(1) - 1)$

$f(1) = -1$

$(1, -1)$

על סמך הגרף הנתון ניתן לדעת כי לפונקציה יש מינימום.

תשובה: $\min(1, -1)$

ג) לפי הנקודות חיתוך: עם ציר ה-x נראה ש f(x) יש נקודה ימינה.
ל f(x) יש ימינה רק ב $x=1$.
מכאן $B(1,0)$

נקודה C היא נקודת החיתוך של f(x) עם ציר ה-x.

$f(x)=x^2\cdot(2\ln(x)-1)$

$f(x)=0$: $0=\underbrace{x^2}\cdot\underbrace{(2\ln(x)-1)}$

$x^2=0$

$\cancel{x=0}$

נפסל, לא
בתחום ההגדרה

$2\ln(x)-1=0$

$2\ln(x)=1 \quad /:2$

$\ln(x)=\frac{1}{2}$

$\log_e x=\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$\Downarrow$

$C=(\sqrt{e},0)$

$BC=x_C-x_B=\sqrt{e}-1=0.649$

$BC=0.649$

ג)

$$S=\int_{1}^{\sqrt{e}} f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_{1}^{\sqrt{e}}=f(\sqrt{e})-f(1)=0-(-1)=1$$

תשובה: $S=1$