פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ד, 2024, מועד א', שאלון: 35572

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. נתון מעגל I **שמשוואתו** $(x-3)^2+(y-4)^2=9$ **, שמרכזו בנקודה** $\mathrm{K}(3,4)$ **ורדיוסו** 3.

נתון מעגל II **שמשוואתו** $(x+5)^2+(y-2)^2=1$ **, שמרכזו בנקודה** $\mathrm{L}(-5,2)$ **ורדיוסו** 1.

נסמן $\mathrm{M}(s,t)$ **, נקודה על המקום הגיאומטרי, כאשר** MA,MB **משיקים לשני המעגלים.**

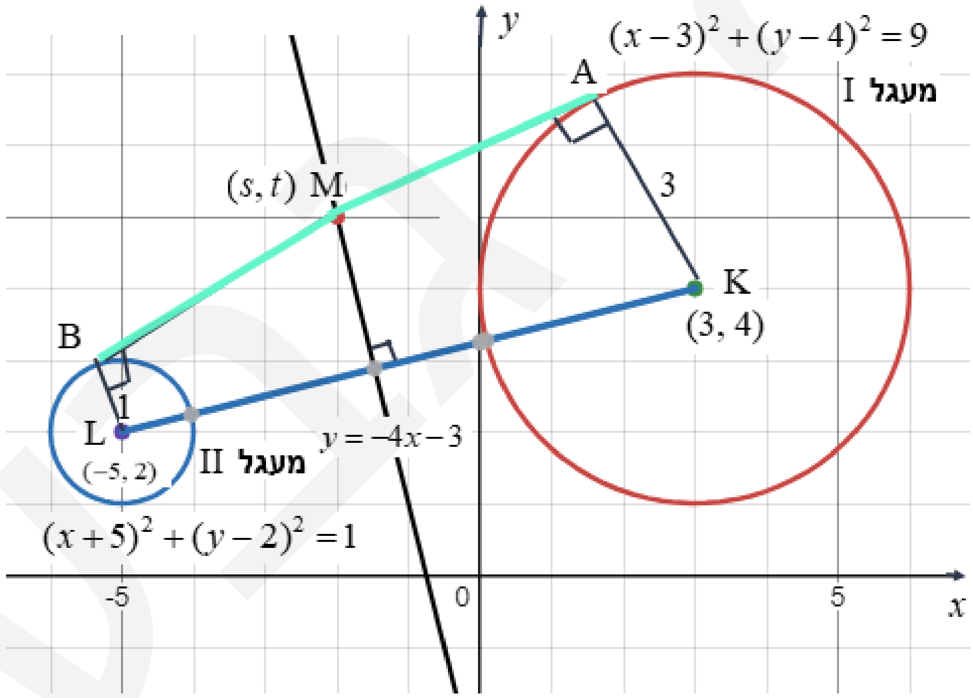
על פי הנתון $\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$.

כיוון שרדיוס המעגל מאונך למשיק בנקודת ההשקה,

הרי שעל פי משפט פיתגורס:

$$\sqrt{(s-3)^2+(t-4)^2-3^2}=\sqrt{(s+5)^2+(t-2)^2-1^2}$$
$$s^2-6s+9+t^2-8t+16-9=s^2+10s+25+t^2-4t+4-1$$
$$-16s-4t=12 \quad /:4$$
$$-4s-t=3$$
$$\boxed{y=-4x-3}$$

תשובה: הראינו כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות M **הוא קו ישר, ומשוואתו היא** $y=-4x-3$.



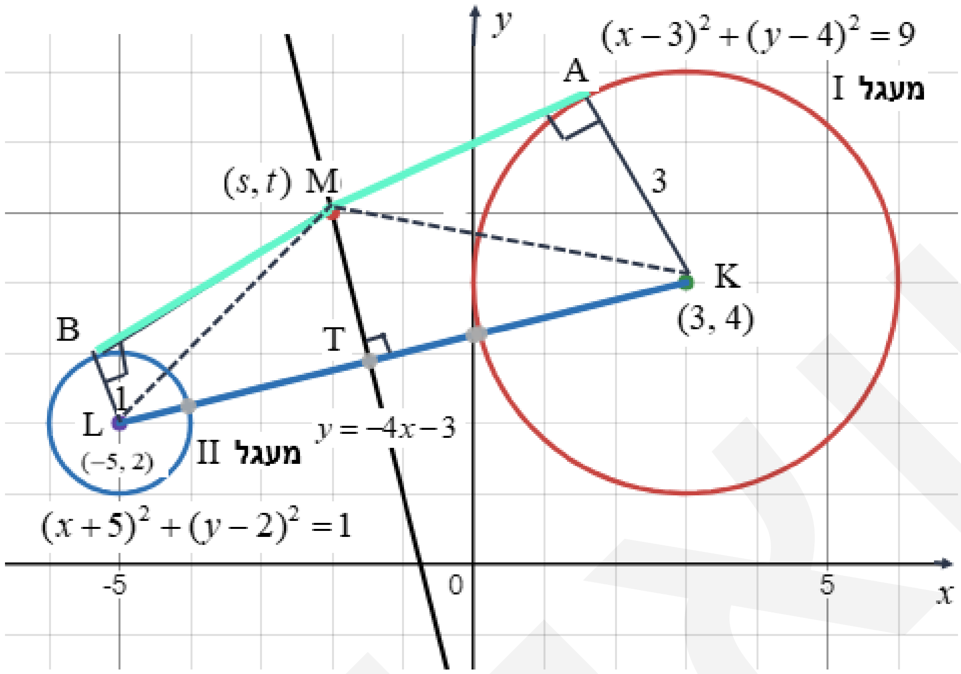
ב. (1) נראה כי הישר $y=-4x-3$ **מאונך לקטע המרכזים** KL .

$$m_{\mathrm{KL}}=\frac{4-2}{3+5}=\frac{1}{4}$$
$$-4\cdot m_{\mathrm{KL}}=-4\cdot\frac{1}{4}=-1$$

ולכן הישרים מאונכים על פי תנאי ניצבות.

תשובה: הראינו כי הישר $y=-4x-3$ **מאונך לישר** KL.

(2) נראה בשתי דרכים שאין נקודה M **שמתקיימים עבורה** $ML = MK$.



- **אם** $ML = MK$ **אז** ΔMLK **שווה שוקיים, ולכן הגובה** MT **לבסיס הוא גם תיכון.**

אמצע KL: $(-1,3) \leftarrow (\frac{-5+3}{2}, \frac{2+4}{2})$,

וקל לראות שהנקודה $(-1,3)$ **לא נמצאת על המקום הגיאומטרי** $y=-4x-3$.

- $MA = MB$ **כידוע.**

$$\left.\begin{array}{l}(MK)^2 = (MA)^2+9 \\ (ML)^2 = (MB)^2+1 \\ MA = MB\end{array}\right\} MK \neq ML$$

תשובה: לא קיימת נקודה M **שמתקיימים עבורה** $ML = MK$.

ג. נתון כי בעבור אחת מן הנקודות M **, הנמצאת <u>מעל</u> הישר** KL **, שטח המשולש** KLM **הוא** 9 **.**

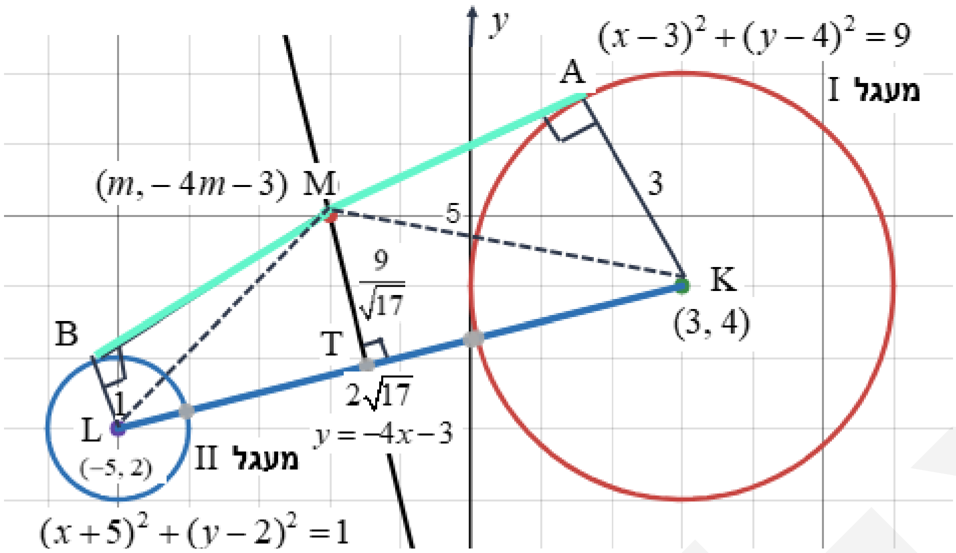
נסמן $\mathrm{M}(m,-4m-3)$ **, כי הנקודה נמצאת על הישר** $y=-4x-3$ **.**

$$\mathrm{KL}=\sqrt{(-5-3)^2+(2-4)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

$$S_{\Delta \mathrm{KLM}}=\frac{\mathrm{KL}\cdot d_{\mathrm{M}_{KL}}}{2}$$

$$\frac{18}{2\sqrt{17}}=d_{\mathrm{M}_{KL}}$$

$$d_{\mathrm{M}_{KL}}=\frac{9}{\sqrt{17}}$$



נמצא את משוואת הישר KL

$$y-2=\frac{1}{4}(x+5)$$

$$4y-8=x+5$$

$$-x+4y-13=0$$

נתון שהנקודה $\mathrm{M}(m,-4m-3)$ **, נמצאת מעל הישר** $\mathrm{KL}:-x+4y-13=0$ **,**

ולכן המרחק חיובי כי "דאגנו" ש $\mathrm{B}=4>0$ **(המקדם של** y **).**

$$\frac{9}{\sqrt{17}}=+\frac{-m+4(-4m-3)-13}{\sqrt{(-1)^2+4^2}} \quad /\cdot\sqrt{17}$$

$$9=-m-16m-12-13$$

$$17m=-34$$

$$m=-2 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{M}(-2,5)}$$

תשובה: $\mathrm{M}(-2,5)$ **.**

ד. הנקודה $\mathrm{M}(-2,5)$ **, שברביע השני, נמצאת על הפרבולה** $y^2=2px$ **, ולכן** $p<0$ **.**

$$5^2=2p\cdot(-2)$$

$$\boxed{p=-6.25}$$

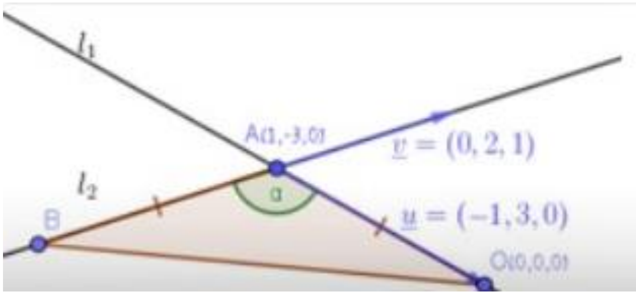
משוואת משיק לפרבולה בנקודה שעל הפרבולה היא $yy_0=p(x+x_0)$

$$y\cdot 5=-6.25(x-2)$$

$$5y=-6.25x+12.5$$

$$\boxed{y=-1.25x+2.5}$$

תשובה: משוואת המשיק לפרבולה בנקודה $\mathrm{M}(-2,5)$ **היא** $y=-1.25x+2.5$ **.**



תודה למורה דוד צחור על האיור המקסים

א. נתונים הישרים $\ell_1 : \underline{x} = t(-1, 3, 0)$ **, ו-** $\ell_2 : \underline{x} = (1, -3, 0) + m(0, k, 1)$.

קל לראות שעבור $m = 0$ **ו-** $t = -1$ **נקבל את שיעורי נקודת החיתוך בין שני הישרים:** $A(1, -3, 0)$.

תשובה: $A(1, -3, 0)$.

ב. $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ **כאשר** α **היא הזווית (החדה) בין שני הישרים** .

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{|(-1,3,0)(0,k,1)|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+k^2+1^2}}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{5} = \frac{|0+3k+0|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{k^2+1^2}} \qquad / \cdot 5\sqrt{10}\sqrt{k^2+1}$$

$$\frac{6\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{5}} = |3k| \qquad (\,)^2 \qquad \to test$$

$$7.2(k^2+1) = 9k^2$$

$$1.8k^2 = 7.2$$

$$k = \pm 2$$

$$\frac{6\sqrt{(\pm 2)^2+1}}{\sqrt{5}} \stackrel{?}{=} |3\cdot(\pm 2)| \quad \to 6 = 6 \quad \to o.k.$$

תשובה: $k = \pm 2$.

ג. נציב $k=2$ **והישרים הם** $\ell_1 : \underline{x} = t(-1,3,0)$ **, ו-** $\ell_2 : \underline{x} = (1,-3,0) + m(0,2,1)$ **.**

נמצא את משוואת המישור π **, המכיל את שני הישרים** ℓ_1 **ו-** ℓ_2 **.**

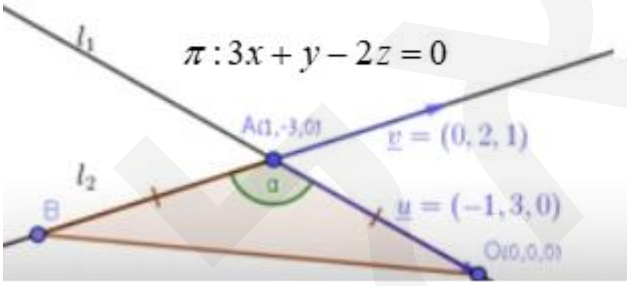
מכיוון שהישר $\ell_1 : \underline{x} = t(-1,3,0)$ **עובר בראשית, ומוכל במישור** π **,**

אז ראשית הצירים נמצאת גם במישור זה ו- $d=0$ **במשוואת המישור.**

ההצגה הפרמטרית של המישור היא: $\underline{x} = (1,-3,0) + m(0,2,1) + t(-1,3,0)$ **.**

$$\left.\begin{array}{l} (a,b,c)\cdot(-1,3,0)=0 \quad \to -a+3b=0 \quad \to a=3b \quad \to b=1\,,\ a=3 \\ (a,b,c)\cdot(0,2,1)=0 \quad \to 2b+c=0 \quad \to c=-2 \qquad \swarrow \end{array}\right\} a=3,\ b=1,\ c=-2 \ .$$

תשובה: משוואת המישור היא: $\pi : 3x + y - 2z = 0$ **.**



ד. הנקודה B **נמצאת על הישר** ℓ_2 **, הנקודה** O **היא ראשית הצירים .**

המשולש AOB **הוא שווה שוקיים, כך ש-** AO = AB **.**

נסביר מדוע המשולש AOB **נמצא במישור** π **.**

- **הנקודה** B **נמצאת על הישר** ℓ_2 **, שמוכל במישור** π **, ולכן** B **במישור זה.**
- **הנקודה** A **היא נקודת החיתוך של הישרים** ℓ_1 **ו-** ℓ_2 **, המוכלים במישור, ולכן גם** A **במישור.**
- **הנקודה** O **נמצאת על הישר** ℓ_1 **, שמוכל במישור** π **, ולכן** O **במישור זה.**

  או כפי שאמרנו קודם O **במישור כי הוא עובר בראשית.**

מכאן ששלוש הנקודות נמצאות במישור, ולכן המשולש נמצא במישור.

תשובה: הסברנו מדוע המשולש AOB **נמצא במישור** π **.**

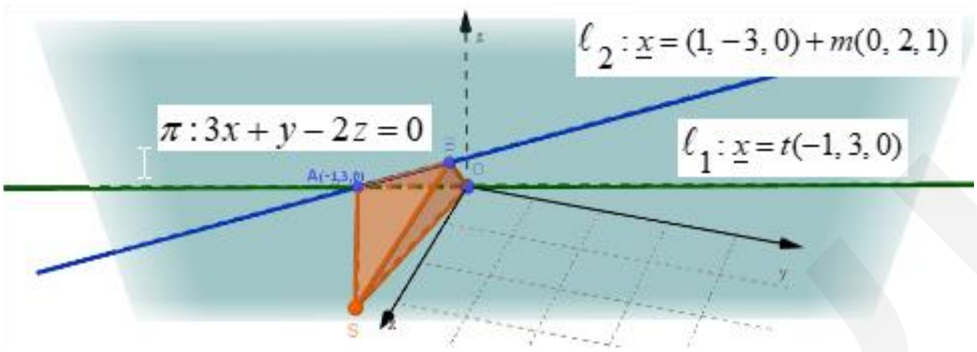
.

ה. מן הנקודה $A(1,-3,0)$ **מעלים אנך למישור** $\pi: 3x+y-2z=0$,

ולכן משוואת הנורמל AS **היא** $\underline{x}=(1,-3,0)+n(3,1,-2)$.

על הנורמל מ- A **מסמנים את הנקודה** S**, ולכן** $SA=\sqrt{(3n)^2+n^2+(-2n)^2}=\sqrt{14n^2}=\pm n\sqrt{14}$.

נתון: נפח הפירמידה $ASOB$ **הוא** $\frac{14\sqrt{2}}{3}$.



תודה למורה דוד צחור על האיור המקסים

AS **הוא הגובה לבסיס של** ΔAOB **שווה השוקיים.**

$AO=\sqrt{1^2+(-3)^2+0^2}=\sqrt{10}$ **, ולכן גם** $AB=\sqrt{10}$.

$\cos\sphericalangle OAB=\frac{3\sqrt{2}}{5}$ **, ולכן** $\sin\sphericalangle OAB=+\sqrt{1-(\frac{3\sqrt{2}}{5})^2}=\frac{\sqrt{7}}{5}$ $\rightarrow$ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

$$S_{\Delta AOB}=\frac{AO\cdot AB\cdot \sin\sphericalangle OAB}{2}=\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{7}}{5}}{2}=\sqrt{7}$$

$$V_{SAOB}==\frac{S_{\Delta AOB}\cdot AS}{3}$$

$$\frac{14\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{7}\cdot(\pm n\sqrt{14})}{3}$$

$$2=\pm n$$

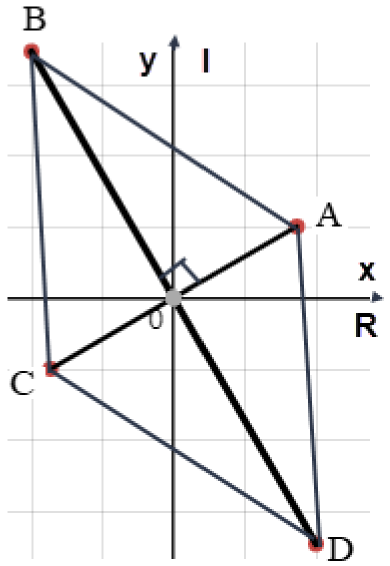
$$n=\pm 2$$

נקודה טיפוסית על $AS: \underline{x}=(1,-3,0)+n(3,1,-2)$ **היא** $(1+3n,-3+n,-2n)$.

עבור $n=2$ **נקבל** $S(7,-1,-4)$

עבור $n=-2$ **נקבל** $S(-5,-5,4)$

תשובה: $S(7,-1,-4)$, $S(-5,-5,4)$.



א. אלכסוני המעוין $ABCD$ **נפגשים בראשית הצירים.**

המספר המרוכב z **מייצג את הקודקוד** A .

נתון $BD = 2AC$.

אלכסוני המעוין חוצים זה את זה, ולכן $|z_B| = |z_D| = 2|z_A| = 2|z_C|$.

אלכסוני המעוין מאונכים זה לזה,

לכן במעבר מקודקוד לקודקוד נגד כיוון השעון,

הארגומנט (הזווית) גדל ב- $90°$ **או פי** i.

נשים לב שהקודקודים הנגדיים הם מספרים נגדיים.

תשובה: $z_B = 2i\,z$, $z_C = -z$, $z_D = -2i\,z$.

ב. נסמן $z = r\,cis\theta$.

(1) נרשום הצגה קוטבית לארבעת המספרים ההופכיים.

$$z_B = 2i\,z = 2i \cdot rcis\theta = 2r\,cis(\theta + 90°)$$

$$z_C = -rcis\theta = r\,cis(\theta + 180°)$$

$$z_D = -2i\,z = -2i \cdot rcis\theta = 2r\,cis(\theta - 90°)$$

נזכיר $\frac{1}{cis\,\alpha} = \frac{cis\,0°}{cis\,\alpha} = cis\,(-\alpha)$.

תשובה: $\frac{1}{z_A} = \frac{1}{r}cis\,(-\theta)$, $\frac{1}{z_B} = \frac{1}{2r}cis\,(-\theta - 90°)$,

$\frac{1}{z_C} = \frac{1}{r}cis\,(-\theta - 180°)$, $\frac{1}{z_D} = \frac{1}{2r}cis\,(-\theta + 90°)$.

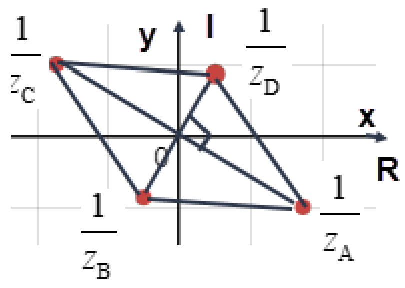
(2) גם במרובע, שנוצר על ידי ארבעת המספרים ההופכיים, האלכסונים חוצים זה את זה.

לכן המרובע, הוא מקבילית.

גם הזווית שבין האלכסונים עדיין ישרה – ומכאן שהמרובע הוא מעוין,

ושטחו שווה למחצית מכפלת האלכסונים.

$$S = \frac{\frac{2}{r} \cdot \frac{1}{r}}{2} = \frac{1}{r^2}$$



תשובה: שטח המרובע שנוצר על ידי קודקודים אלו הוא $\frac{1}{r^2}$.

ג. נתונה המשוואה $w^{11}=\bar{w}$ ($w\neq 0$ מספר מרוכב).

נפתור את המשוואה $w^{11}=\bar{w}$

$$(r\ cis\ \theta)^{11}=r\ cis\ (-\theta)$$
$$r^{11}cis\ 11\theta=rcis\ (-\theta) \quad /:rcis\ (-\theta)\neq 0$$
$$r^{10}cis12\theta=1$$
$$\boxed{r=1}\ ,\ 12\theta=360°k \quad \rightarrow \theta=30°k$$

התקבלו 12 פתרונות, המהווים סדרה הנדסית שמנתה $cis\ 30°$.

כיוון שמספר הפתרונות 12 הוא זוגי, הרי שיש כאן 6 זוגות של מספרים נגדיים.

סכום כל שני מספרים נגדיים הוא 0, וזה גם סכום הסדרה.

א/: נוסחת הסכום של סדרה הנדסית היא $S_{12}=\dfrac{a_1(q^{12}-1)}{q-1}$.

$q^{12}-1=(cis\ 30°)^{12}-1=cis\ 360°-1=1-1=0$ **, ולכן הסכום הוא 0 .**

תשובה: סכום הפתרונות של המשוואה הוא 0 .

ד. פתרונות המשוואה $w^{11}=\bar{w}$, כלומר הסדרה הנדסית בת 12 איברים,

שאיברה הראשון הוא 1 ומנתה $cis\ 30°$,

מייצגים מצולע ששטחו שווה לשטח שנמצאנו בתת-סעיף ב(2) ל- $\dfrac{1}{r^2}$.

במצולע המשוכלל 12 צלעות שוות, וניתן לחלק אותו ל- 12 משולשים שווי שוקיים,

שרדיוסם 1 עם זווית ראש בת $30°$.

שטח המצולע הוא $12\cdot\dfrac{1\cdot 1\cdot\sin 30°}{2}=3$

בהתאם, $r>0 \leftarrow \quad \dfrac{1}{r^2}=3 \quad \rightarrow \boxed{r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

תשובה: $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x-b}{(e^x-4)^2}$ **(** $b>0\,,b\neq 4$ **פרמטר).**

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

$$(e^x-4)^2\neq 0$$
$$e^x\neq 4 \quad \to x\neq \ell n\,4$$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **היא** $x\neq \ell n\,4$.

(2) נמצא את משוואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

כאשר $x\to+\infty$ **אז** $e^x\to+\infty$ **ובהתאם** $f(x)\to\frac{e^x}{e^{2x}}\to 0$ **ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

כאשר $x\to-\infty$ **אז** $e^x\to 0^+$ **, ו-** $f(x)\to\frac{0-b}{(0-4)^2}\to-\frac{b}{16}$ **, ו-** $y=-\frac{b}{16}$ **אסימפטוטה אופקית.**

$x=\ell n\,4$ **מאפס מכנה ולא מונה, ולכן הישר** $x=\ell n\,4$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $y=0$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** y **, עבור** $x\to+\infty$ **(אסימפטוטה אופקית לימין).**

$y=-\frac{b}{16}$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** y **, עבור** $x\to-\infty$ **(אסימפטוטה אופקית לשמאל).**

$x=\ell n\,4$ **אסימפטוטה אנכית לציר ה-** x .

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל:**

$$e^x=b \quad \to x=\ell n\,b \quad \to(\ell n\,b,0) .$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ו-** $f(0)=\frac{e^0-b}{(e^0-4)^2} \quad \to(0,\frac{1-b}{9})$.

תשובה: נקודות החיתוך של $f(x)$ **עם הצירים הן:** $(\ell n\,b,0)$ **,** $(0,\frac{1-b}{9})$.

ב. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=\ell n12$.

$$f(x)=\frac{(e^x-b)}{(e^x-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(e^x-4)^2-2(e^x-4)\cdot e^x\cdot(e^x-b)}{(e^x-4)^2}$$

$$0=12\cdot(12-4)^2-2(12-4)\cdot12\cdot(12-b)\quad /:12\quad\leftarrow f'(\ell n12)=0\,,\,e^{\ell n12}=12$$

$$0=64-16(12-b)\quad /:16$$

$$12-b=4$$

$$\boxed{b=8}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{e^x-8}{(e^x-4)^2}}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(e^x-4)^2-2(e^x-4)\cdot e^x\cdot(e^x-8)}{(e^x-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(e^x-4)(e^x-4-2e^x+16)}{(e^x-4)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^x\cdot(e^x-4)(-e^x+12)}{(e^x-4)^2}}$$

נקודת הקיצון היחידה (לא היה בנתון, ולכן וידאנו) היא $(\ell n12,\frac{1}{16})$, ועל פי האסימפטוטה

האופקית מימין $y=0$,ונקודת החיתוך עם ציר ה- x משמאל $(\ell n8,0)$ - היא נקודת מקסימום.

הערה – האסימפטוטה האופקית לשמאל היא $y=-0.5$, $(0,-\frac{7}{9})$ נקודת חיתוך עם ציר ה- y .

תשובה: $b=8$, מקסימום.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

(1) על-פי תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$: $x \neq \ell n\,4$.

בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

$f(x) \neq 0$

$x \neq \ell n\,8$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ **היא** $x \neq \ell n\,8$, $x \neq \ell n\,4$.

(2) נבדוק את כל המקומות שבהם הקשר בין $f(x)$ **ל-** $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **משמעותי, מעבר לנדרש בסעיף זה.**

- **תחומי חיוביות שליליות ללא שינוי, רק ערכי ה-** y **הופכיים, למעט כאשר** $f(x)=0$.
- **ל-** $g(x)$ **אין נקודות חיתוך עם ציר ה-** x , **ו-** $(0,-1\frac{2}{7})$ **נקודת חיתוך עם ציר ה-** y .
- **תחומי עלייה וירידה מתחלפים. אפשר להבין זאת גם מ-** $g'(x)=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$,

  ולכן $(\ell n 12,16)$ **נקודת מינימום של** $g(x)$.
- **פונקציות שקשורות בתבנית** $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **נחתכות עבור** $y=\pm 1$, **כי** $f^2(x)=1 \;\; \rightarrow \;\; g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

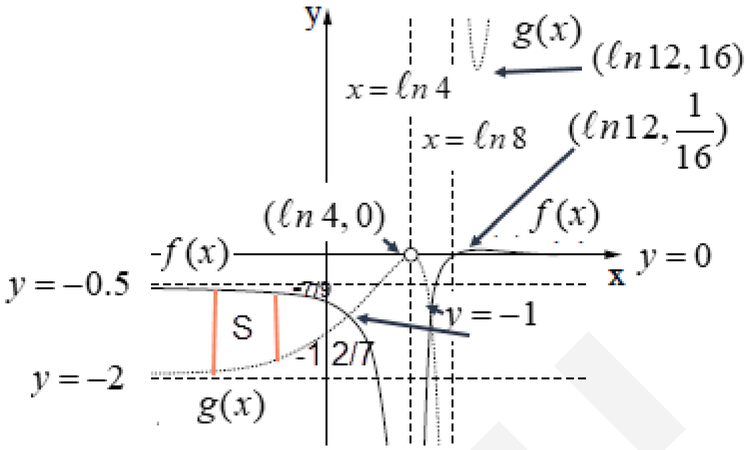
  במקרה שלנו רק עבור $y=-1$ **כי** $f(x) \leq \frac{1}{16}$ **(יעזור לסעיף ה).**
- **כאשר** $f(x) \rightarrow 0$ **אז** $g(x) \rightarrow \pm\infty$, **ולכן עבור** $g(x)$:

  אין אסימפטוטה אופקית לימין, ו- $x=\ell n\,8$ **אסימפטוטה אנכית.**
- **כאשר** $f(x) \rightarrow -\frac{1}{2}$ **אז** $g(x) \rightarrow -2$ **ו-** $y=-2$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל** .
- **כאשר** $f(x) \rightarrow -\infty$ **אז** $g(x) \rightarrow 0^-$,

  ולכן עבור $g(x)$: $(\ell n\,4,0)$ **נקודת אי רציפות סליקה ("חור").**

תשובה: האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ **המאונכות לצירים הן** $x=\ell n\,8$, $y=-2$ $(x \rightarrow -\infty)$.

ד. נסרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ ו- $g(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל (כולל סימון השטח עבור סעיף ו).

ה. כפי שהסברנו בתת סעיף ג(2) הגרפים של הפונקציות נחתכים כאשר $y=-1$,

כי $f(x)\le\frac{1}{16}$ (שתי נקודות חיתוך, מסומנות בסקיצה בחיצים).

תשובה: שיעור ה- y של נקודות החיתוך בין הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ הוא (-1) .

ו. נבחן את ערך האינטגרל $\int_{-2}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx$.

בתחום $-2\le x\le -1$ מתקיים $f(x)>g(x)$ ולכן ערך האינטגרל חיובי.

השטח המתאים, מסומן בסקיצה ב- S , חסום בין שתי האסימפטוטות האופקיות $y=-0.5$ ו- $y=-2$,

ובין שני האנכים $x=-1$ ו- $x=-2$, ולכן קטן יותר ממלבן שממדיו הם $1\frac{1}{2}\times 1$ ושטחו $1\frac{1}{2}$.

תשובה: הערך של האינטגרל $\int_{-2}^{-1}\left(f(x)-g(x)\right)dx$ קטן מ- $1\frac{1}{2}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x\left((\ell n\,x)^2-2\ell n\,x+2\right)$ **, המוגדרת בתחום** $x>0$.

נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

$$f'(x)=(\ell n\,x))^2-2\ell n\,x+2+\frac{x\cdot(2\ell n\,x-2)}{x}$$
$$f'(x)=(\ell n\,x))^2-2\ell n\,x+2+2\ell n\,x-2$$
$$\boxed{f'(x)=(\ell n\,x)^2}$$

נשים לב שהנגזרת היא אי-שלילית, ולכן הפונקציה עולה בתחום $x>0$ **,**
כאשר בנקודה שבה $x=1$ **היא נקודת פיתול (כי ל** $f'(x)$ **יש נקודת קיצון).**

תשובה: עבור $f(x)$ **עלייה בתחום** $x>0$**, ירידה אף** x .

ב. נבדוק האם יש נקודות פיתול נוספות .

$$\boxed{f''(x)=\frac{2\ell n\,x}{x}}$$
$$\ell n\,x=0 \;\;\to x=1 \;\;\to \boxed{(1,2)}$$

ל- $f'(x)$ **יש נקודת מינימום** $(1,0)$ **ולכן היא יורדת בתחום** $0<x<1$ **ועולה בתחום** $x>1$ **,**
ולכן $f(x)$ **קעורה כלפי מטה** $(\cap)$ **בתחום** $0<x<1$ **וקעורה כלפי מעלה** $(\cup)$ **בתחום** $x>1$,
כאשר הנקודה שבה $x=1$ **היא נקודת פיתול.**

תשובה: עבור $f(x)$ **נקודת הפיתול היא** $(1,2)$**.**

ג. בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $f(x)=0$.

אולם, שני הגורמים בפונקציה $f(x)=x\left((\ell n\,x))^2-2\ell n\,x+2\right)$ **חיוביים לכל** $x>0$.

תשובה: עבור $f(x)$ **חיוביות** $x>0$**, שליליות אף** x**.**

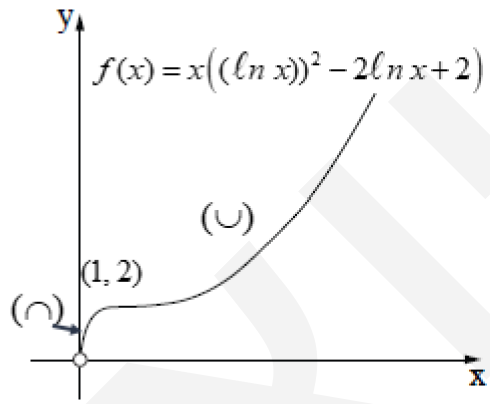
ד. (1) **שתי הצבות מומלצות לפני סרטוט הגרף של** $f(x)$.

כאשר $x \to 0^+$ **, נציב** $x = 0.00001$ **ונקבל** $f(0.00001) = 1.57 \cdot 10^{-3} \to 0$,

והגרף מתחיל בנקודה ריקה בראשית.

כאשר $x \to +\infty$ **, נציב** $x = 10,000$ **ונקבל** $f(100,000) = 684,097 \to +\infty$.

נזכור שהפונקציה עולה, חיובית, עם פיתול בנקודה $(1,2)$ **כאשר השיפוע בה הוא** 0 .



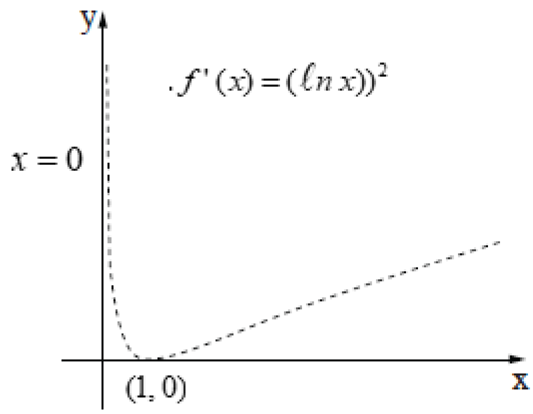
תשובה: השרטוט מעל.

(2) **שתי הצבות מומלצות לפני סרטוט הגרף של** $f'(x) = (\ell n\, x))^2$.

$f'(0.00001) = 132 \to +\infty$ **, והישר** $x = 0$ **אסימפטוטה אנכית.**

$f'(100,000) = 132 \to +\infty$ **והגרף מסתיים בעלייה מתונה.**

נזכור שלפונקציית הנגזרת יש נקודת מינימום $(1,0)$ **והיא אי-שלילית.**



תשובה: הסרטוט מעל.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=(\ell n\, x)^2-4$ **, שהיא הזזה אנכית** 4 **יחידות כלפי מטה של** $f'(x)$ **.**

כתוצאה מכך נקבל שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x **, והשטח המבוקש יהייה מתחת לציר ה-** x **.**

$$(\ell n\, x))^2-4=0$$
$$(\ell n\, x))^2=4$$
$$\ell n\, x=2 \quad \rightarrow x=e^2$$
$$\ell n\, x=-2 \quad \rightarrow x=\frac{1}{e^2}$$

$$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{e^2}\left(0-\left((\ell n\, x)^2-4\right)\right)dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^{e^2}\left(-(\ell n\, x)^2+4\right)dx=$$

$$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{e^2}\left(-f'(x)+4\right)dx=-f(x)+4x=\Big]_{\frac{1}{e^2}}^{e^2}$$

$$x=e^2: \quad -f(e^2)+4e^2=-2e^2+4e^2=2e^2$$

$$x=\frac{1}{e^2}: \quad -f(\frac{1}{e^2})+4\cdot\frac{1}{e^2}=-\frac{10}{e^2}+4\cdot\frac{1}{e^2}=-\frac{6}{e^2}$$

$$\boxed{S=2e^2+\frac{6}{e^2}}$$

תשובה: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ **ועל ידי ציר ה-** x **הוא** $2e^2+\frac{6}{e^2}$.

ו. נתונה הפונקציה $h(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ **, כלומר** $h(x)=\frac{(\ell n\, x))^2-2\ell n\, x+2}{x}$ **, המוגדרת בתחום** $x>0$ **.**

הן המונה והן המכנה חיוביים לכל x **בתחום ההגדרה, ולכן הפונקציה חיובית.**

מכאן שהשטח בינה לבין $g(x)$ **שווה לסכום השטחים של כל אחת מהן עם ציר ה-** x **.**

נמצא את השטח שבין $h(x)$ **לבין ציר ה-** x **בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.**

$$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{e^2}\left(\frac{(\ell n\, x)^2-2\ell n\, x+2}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^{e^2}\left(\frac{(\ell n\, x)^2}{x}-\frac{2\ell n\, x}{x}+\frac{2}{x}\right)dx=$$

$$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{e^2}\left[(\ell n\, x)^2\cdot\frac{1}{x}-2\ell n\, x\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{x}\right]dx$$

$$S=\frac{(\ell n\, x)^3}{3}-\cancel{2}\cdot\frac{(\ell n\, x)^2}{\cancel{2}}+2\ell n\,|x|=\Big]_{\frac{1}{e^2}}^{e^2}$$

$$x=e^2: \quad \frac{2^3}{3}-2^2+2\cdot 2=\frac{8}{3} \qquad x=\frac{1}{e^2}: \quad \frac{(-2)^3}{3}-(-2)^2+2\cdot(-2)=-\frac{8}{3}-8$$

$$S=\frac{8}{3}-(-\frac{8}{3}-8) \quad \rightarrow \boxed{S=13\frac{1}{3}}$$

תשובה: השטח המוגבל על ידי שני הגרפים של $f(x)$ **ו-** $g(x)$ **,**

ועל ידי האנכים בנקודות החיתוך של $g(x)$ **עם ציר ה-** x **, הוא** $2e^2+\frac{6}{e^2}+13\frac{1}{3}$.