

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ד, 2024, מועד א', שאלון: 35472

תודה מייוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. מספרים הנוסעים בכל קרון מהווים סדרה חשבונית,
 כי מספר הנוסעים בכל קרון גדול במספר קבוע מאלו שבקרון שלפניו ($d > 0$).
 ברכבת מסוימת יש 11 קרונות.

ביום א' מספר הנוסעים בקרון האחרון (a_{11})

היה גדול פי 3 ממספר הנוסעים בקרון הראשון (a_1), ולכן $a_{11} = 3a_1$.

ביום זה מספר הנוסעים ברכבת היה 220 סך הכול, ולכן $S_{11} = 220$.

$$\begin{cases} a_{11} = 3a_1 \\ S_{11} = 220 \end{cases}$$

$$220 = \frac{11 \cdot (a_1 + a_{11})}{2} \quad / \cdot 2$$

$$440 = 11 \cdot (a_1 + 3a_1)$$

$$440 = 11 \cdot 4a_1 \quad / : 44$$

$$\boxed{a_1 = 10}$$

תשובה: בקרון הראשון היו 10 נוסעים.

ב. הקרון האמצעי, מבין 11 קרונות, הוא הקרון ה- 6 (5 לפניו ו- 5 אחריו).

על פי תכונות של סדרה חשבונית, מספר הנוסעים בו הוא $\frac{220}{11} = 20$.

או, בדרך השמרנית והבטוחה.

$$a_{11} = 3a_1 \rightarrow a_{11} = 3 \cdot 10 = 30$$

$$a_{11} = a_1 + 10d$$

$$30 = 10 + 10d$$

$$\boxed{d = 2}$$

$$a_6 = a_1 + 5d = 10 + 5 \cdot 2 \rightarrow \boxed{a_6 = 20}$$

תשובה: בקרון האמצעי היו 20 נוסעים.

ג. נחשב, בשלוש דרכים, את מספר הנוסעים בקרונות האי-זוגיים.

נרשום בטבלה את נתוני הסדרה.

סדרת האיברים במקומות האי-זוגיים	הסדרה המקורית	
$a_1 = 10$	$a_1 = 10$	A_1
$a_{n+2} - a_n = a_n + 2d - a_n = 2d = 2 \cdot 2 = 4$	$d = 2$	D
6	11	N

$$S_{6 \text{ odd}} = \frac{6[2 \cdot 10 + 4 \cdot (6-1)]}{2}$$

$$S_{6 \text{ odd}} = 3 \cdot (20 + 20)$$

$$\boxed{S_{6 \text{ odd}} = 120}$$

או פשוט: $10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30 = 120$

או על פי תכונות של סדרה חשבונית: $20 \cdot 6 = 120$, כי בקרון האמצעי היו 20 נוסעים.

תשובה: סך הכול היו 120 נוסעים בקרונות האי-זוגיים.

ד. ביום ב' מספר הנוסעים ברכבת היה גדול פי 2 ממספר הנוסעים בה ביום א',

כלומר 440 נוסעים $= 220 \cdot 2$.

ביום זה מספר הנוסעים בכל קרון היה גדול ב-3 ממספר הנוסעים בקרון שלפניו, כלומר $d = 3$.

מספר הנוסעים בקרון הראשון היה 5, כלומר $a_1 = 5$.

נמצא את מספר הקרונות ביום זה.

$$440 = \frac{n[2 \cdot 5 + 3 \cdot (n-1)]}{2} \quad / \cdot 2$$

$$880 = n(10 + 3n - 3)$$

$$880 = n(3n + 7)$$

$$0 = 3n^2 + 7n - 880$$

$$n = 16, n = \frac{55}{3} \leftarrow n \text{ is natural}$$

$$\boxed{n = 16}$$

ביום ב' היו 16 קרונות ברכבת, בהשוואה ליום א' בו היו 11 קרונות, לכן נוספו 5 קרונות $= 16 - 11$.

תשובה: מספר הקרונות שהוסיפו לרכבת ביום ב' הוא 5.

א. נתונה פירמידה $SABCD$, שבסיסה $ABCD$ הוא ריבוע שאורך צלעו הוא 4.

צלעות הריבוע מאונכות זו לזו, ולכן $\underline{u} \perp \underline{v}$.

$$\boxed{\overline{AB} = \underline{u}} \quad |\underline{u}| = 4 \quad \underline{u}^2 = 16$$

$$\boxed{\overline{AD} = \underline{v}} \quad |\underline{v}| = 4 \quad \underline{v}^2 = 16$$

$$\boxed{\overline{AS} = \underline{w}} \quad |\underline{w}| = ? \quad \underline{w}^2 = ?$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{v}$$

נביע את הווקטור \overline{SD} באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} .

$$\overline{SD} = \overline{SA} + \overline{AD}$$

$$\overline{SD} = -\underline{w} + \underline{v}$$

$$\boxed{\overline{SD} = \underline{v} - \underline{w}}$$

תשובה: $\overline{SD} = \underline{v} - \underline{w}$.

ב. נתון $\overline{SD} \cdot \overline{AD} = 0$ ולכן \overline{SD} מאונך ל- \overline{AD} .

נמצא את הערך של $\underline{w} \cdot \underline{v}$.

$$\overline{SD} \cdot \overline{AD} = 0 = 0$$

$$(\underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{v} = 0$$

$$\underline{v}^2 - \underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \quad / \cdot 4$$

$$16 - \underline{v} \cdot \underline{w} = 0$$

$$\boxed{\underline{v} \cdot \underline{w} = 16}$$

תשובה: $\underline{w} \cdot \underline{v} = 16$.

ג. נתון: $\underline{w} \cdot \underline{u} = \underline{w} \cdot \underline{v} = 16$, $|\overline{SC}| = \sqrt{17}$.

נמצא את $|\underline{w}|$.

$$\overline{SC} = \overline{SD} + \overline{DC}$$

$$\overline{SC} = \underline{v} - \underline{w} + \underline{u}$$

$$\boxed{\overline{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w}}$$

$$\sqrt{17} = \sqrt{(\underline{u} + \underline{v} - \underline{w})^2}$$

$$17 = (\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}) \cdot (\underline{u} + \underline{v} - \underline{w})$$

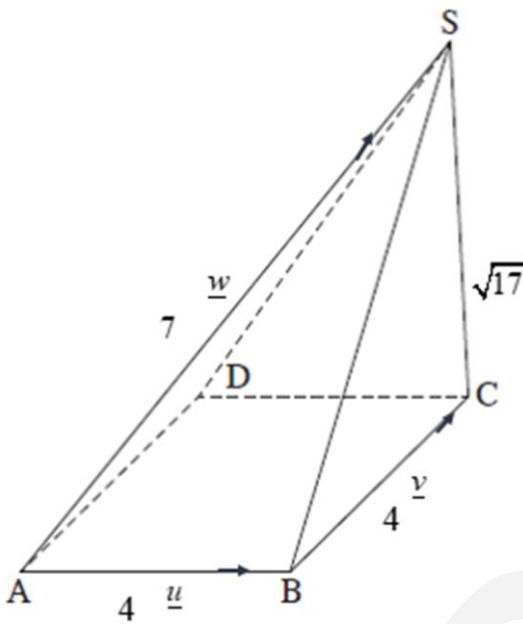
$$17 = \underline{u}^2 + \underline{u}\underline{v} - \underline{u}\underline{w} + \underline{u}\underline{v} + \underline{v}^2 - \underline{v}\underline{w} - \underline{u}\underline{w} - \underline{v}\underline{w} + \underline{w}^2$$

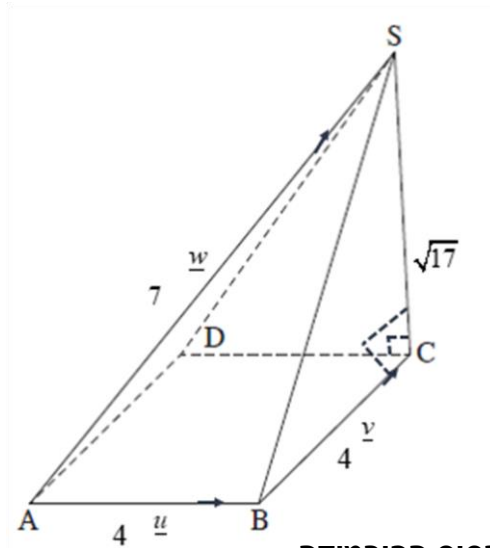
$$17 = 16 + 0 - 16 + 0 + 16 - 16 - 16 - 16 + \underline{w}^2$$

$$\underline{w}^2 = 49$$

$$\boxed{|\underline{w}| = 7}$$

תשובה: $|\underline{w}| = 7$.





$$\begin{aligned} \overline{AB} = \underline{u} \quad |\underline{u}| = 4 \quad \underline{u}^2 = 16 \\ \overline{AD} = \underline{v} \quad |\underline{v}| = 4 \quad \underline{v}^2 = 16 \\ \overline{AS} = \underline{w} \quad |\underline{w}| = 7 \quad \underline{w}^2 = 49 \\ \underline{u} \cdot \underline{v} = 0, \underline{u} \cdot \underline{w} = 16, \underline{v} \cdot \underline{w} = 16 \end{aligned}$$

ד. (1) נוכיח כי SC מאונך ל-BC ול-DC,

כלומר שהוא מאונך למישור ABCD, ולכן הוא גובה לבסיס הפירמידה.

$$\overline{SC} \cdot \overline{BC} = (\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{v} + \underline{v}^2 - \underline{v} \cdot \underline{w} = 0 + 16 - 16 = 0 \rightarrow \overline{SC} \perp \overline{BC}$$

$$\overline{SC} \cdot \overline{DC} = (\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}) \cdot \underline{u} = \underline{u}^2 + \underline{u} \cdot \underline{v} - \underline{u} \cdot \underline{w} = 16 + 0 - 16 = 0 \rightarrow \overline{SC} \perp \overline{DC}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{SC} \perp \overline{BC} \\ \overline{SC} \perp \overline{DC} \end{array} \right\} \overline{SC} \perp \pi_{ABCD}$$

תשובה: הוכחנו כי SC מאונך ל-BC ול-DC.

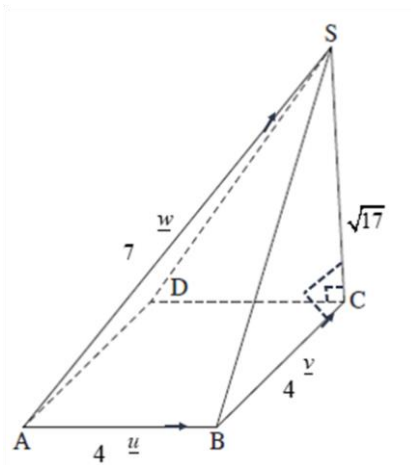
(2) נחשב את נפח הפירמידה SABCD, כאשר SC הוא הגובה לבסיס ABCD.

$$V_{SABCD} = \frac{S_{\Delta ABCD} \cdot SC}{3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot \sqrt{17}}{3}$$

$$V_{SABCD} = \frac{16\sqrt{17}}{3} \approx 21.99$$

תשובה: נפח הפירמידה SABCD הוא $\frac{16\sqrt{17}}{3} \approx 21.99$.

- על פי הנתון SD מאונך ל- AD.
- ברור גם ש- AD מאונך ל- DC.
- מכאן ש- AD מאונך לפאה SDC (כי מאונך לשני ישרים שונים בפאה, שלא מקבילים זה לזה).
- נובע מכך ש- AD הוא גובה בפירמידה המשולשת ASDC.



- אם נרצה נוכל לחשב את נפח הפירמידה ASDC

$$V_{ASDC} = \frac{S_{\Delta SDC} \cdot AD}{3} = \frac{4 \cdot \sqrt{17} \cdot 4}{3}$$

$$V_{ASDC} = \frac{16\sqrt{17}}{6} \approx 10.99$$

העשרה - פתרון חלופי אחת סעיף 3 (1)

- AD מאונך לפאה SDC ולכן $\overline{AD} \perp \overline{SC}$
- $\overline{BC} = \overline{AD}$ מאונך לפאה SDC ולכן $\overline{BC} \perp \overline{SC}$
- משפט פיתגורס ב- ΔSAD : נקבל ש- $SD = \sqrt{33}$
- משפט פיתגורס הפוך ב- ΔSDC : מקבלים ש- $(DC)^2 + (SC)^2 = (SD)^2$
- ולכן $DC \perp SC$

נוסחת הגדילה והדעיכה: $A_t = A_0 \cdot q^t$, כאשר A_0 - הכמות ההתחלתית,

q הוא גורם הגדילה/דעיכה, A_t הכמות לאחר זמן t .

א. בתחילת שנת 2014 היה הערך של דירה א' 980,000 שקלים, והוא גדל בכל שנה ב- 7%.

$$\cdot q_a = \frac{100+7}{100} = 1.07 \text{ הוא } (q_a) \text{ הגדילה}$$

בתחילת שנת 2014 היה הערך של דירה ב' 620,000 שקלים, והוא גדל בכל שנה פי q .

כעבור מספר מסוים של שנים היה הערך של דירה א' שונה לערך של דירה ב'.

מכיוון שהערך של דירה ב' היה נמוך יותר בשנת 2014,

הרי שקצב עליית הערך שלה היה גדול יותר, כלומר $q > q_a$.

תשובה: (III) $q > 1.07$.

ב. נתון כי בתחילת שנת 2024, כלומר 10 שנים מאז 2014, היו ערכי שתי הדירות שווים.

(1) נמצא מה היה הערך של דירה א' בתחילת שנת 2024.

$$A_{10} = A_0 \cdot q^{10} = 980,000 \cdot 1.07^{10} \approx 1,927,808 \text{ שקלים}$$

תשובה: הערך של דירה א' בתחילת שנה זו היה 1,927,808 שקלים.

(2) נמצא בכמה אחוזים גדל הערך של דירה ב' בכל שנה.

$$1,927,808 = 620,000 \cdot q^{10} \quad / : 620,000 \cdot$$

$$3.1093 = q^{10}$$

$$\sqrt[10]{3.1093} = q$$

$$\boxed{q = 1.12}$$

נמצא את אחוז הגדילה השנתי.

$$1.12 = \frac{100 + P}{100} \quad / \cdot 100$$

$$112 = 100 + P$$

$$\boxed{P = 12\%}$$

תשובה: הערך של דירה ב' גדל כל שנה ב- 12%.

ד. על פי הצפי, מתחילת שנת 2024 ואילך הערך של דירה ב' עתיד לרדת בכל שנה, באחוז שקטן פי 1.5 מ- 12%. לכן ערך דירה ב' ירד בכל שנה ב- $8\% = 1.5 : 12\%$

$$q = \frac{100 - 8}{100} = 0.92$$

נמצא בתחילת איזו שנה ערך דירה ב' ירד לראשונה מתחת לערכה בשנת 2014, כלומר מתחת ל- 620,000 שקלים.

$$620,000 = 1,927,808 \cdot 0.92^t \quad / : 1,927,808$$

$$\ln 0.3216 = \ln 0.92^t$$

$$\ln 0.3216 = t \ln 0.92$$

$$t = \frac{\ln 0.3216}{\ln 0.92}$$

$$t \approx 13.6$$

מכאן שמהלך 2037 יחזור ערכה לערכו התחלתי, ובתחילתה של השנה הבאה יהיה לראשונה נמוך יותר. תשובה: על פי הצפי, בתחילת שנת 2038 עתיד לרדת לראשונה הערך של דירה ב' בהשוואה לערך שהיה לה בתחילת שנת 2014.

$$א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 3}$.$$

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

$$e^x - 3 \neq 0 \rightarrow e^x \neq 3 \rightarrow x \neq \ln 3$$

תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x \neq \ln 3$.

(2) תשובה: האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x היא $x = \ln 3$.

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$, אולם המונה חיובי לכל x ולכן אין נקודות חיתוך.

$$. בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x = 0$: $f(0) = \frac{e^{2 \cdot 0}}{e^0 - 3} = -\frac{1}{2} \rightarrow (0, -\frac{1}{2})$$$

תשובה: $(0, -\frac{1}{2})$.

ג. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגה.

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x - 3}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(e^x - 3) - e^{2x} \cdot e^x}{(e^x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} [2(e^x - 3) - e^x]}{(e^x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} [2e^x - 6 - e^x]}{(e^x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x - 6)}{(e^x - 3)^2}$$

$$e^x - 6 = 0 \rightarrow e^x = 6 \rightarrow x = \ln 6$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(\ln 5) < 0 \\ f'(\ln 7) > 0 \end{array} \right\} \boxed{(\ln 6, 12), \min}$$

תשובה: $(\ln 6, 12)$, מינימום.

$$ד. $f'(\ln 2) < 0$ ↘$$

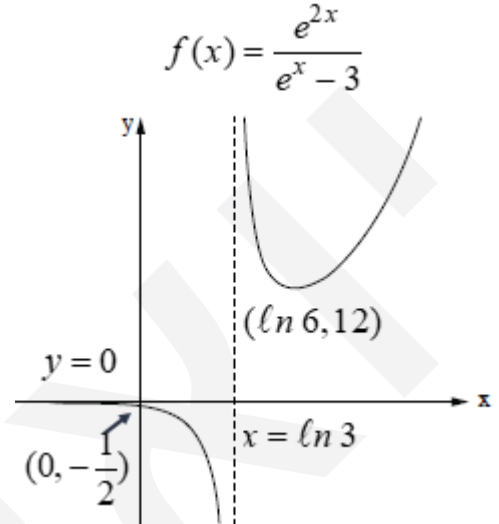
תשובה: עלייה $x > \ln 6$, ירידה $\ln 3 < x < \ln 6$ או $x < \ln 3$.

ה. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

שתי הצבות מומלצות לפני הסרטוט.

$$f(10) = 22,029 \rightarrow +\infty$$

$$f(-10) = -6.87 \cdot 10^{-10} \rightarrow 0 \text{ אסימפטוטה אופקית לשמאל.}$$



תשובה הסרטוט מעל.

א. נתונה הפונקציה $g(x) = -f(x) + 15$, המוגדרת גם בתחום $x \neq \ln 3$. זו טרנספורמציה בשני שלבים.

סיבוב סביב ציר ה- x , כאשר $(\ln 6, -12)$ תהייה נקודת מקסימום,

והפונקציה תהייה שלילית בתחום $x > \ln 3$ וחיובית בתחום $x < \ln 3$.

לאחר מכן תזוזה אנכית 15 יחידות כלפי מעלה,

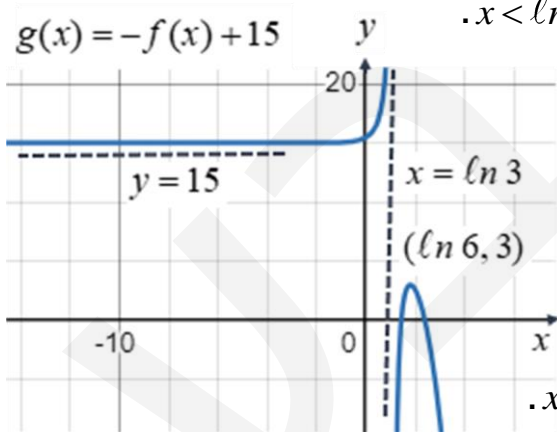
כאשר $(\ln 6, 3)$ תהייה נקודת מקסימום,

ולכן לפונקציה יהיו שתי נקודות חיתוך

עם ציר ה- x בתחום $x > \ln 3$.

(1) תשובה: $(\ln 6, 3)$ מקסימום של הפונקציה $g(x)$.

(2) תשובה: לפונקציה $g(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x .



א. נתונה הפונקציה $f(x) = ax \cdot \ln(2x)$.

בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן $x > 0 \rightarrow 2x > 0$.

תשובה: $x > 0$.

ב. נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \frac{e}{2}$ הוא 6, לכן $f'(\frac{e}{2}) = 6$.

$$f'(x) = a \cdot \ln(2x) + ax \cdot \frac{2}{2x}$$

$$6 = a \cdot \ln(2 \cdot \frac{e}{2}) + a \leftarrow f'(\frac{e}{2}) = 6$$

$$6 = a + a$$

$$\boxed{a = 3}$$

תשובה: $a = 3$.

נציב $a = 3$ והפונקציה היא $f(x) = 3x \cdot \ln(2x)$

ג. בנקודת חיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$:

$$0 = 3x \cdot \ln(2x)$$

$$\cancel{x=0} \leftarrow x > 0$$

$$\ln(2x) = 0$$

$$2x = e^0 = 1$$

$$x = 0.5 \rightarrow (0.5, 0)$$

תשובה: $(0.5, 0)$.

ד. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגה.

$$f(x) = 3x \cdot \ln(2x)$$

$$f'(x) = 3 \cdot \ln(2x) + 3x \cdot \frac{2}{2x}$$

$$\boxed{f'(x) = 3 \cdot \ln(2x) + 3}$$

$$3 \cdot \ln(2x) + 3 = 0$$

$$3 \cdot \ln(2x) = -3 \quad /:3$$

$$\ln(2x) = -1$$

$$2x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$x = \frac{1}{2e}$$

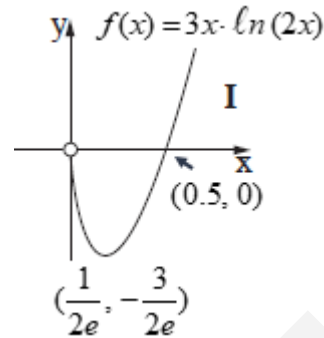
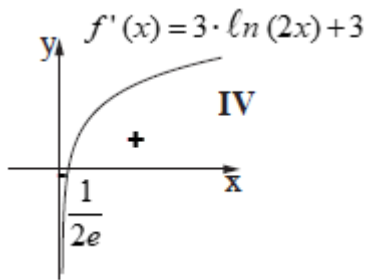
$$\left. \begin{array}{l} f'(\frac{1}{3e}) > 0 \searrow \\ f'(\frac{1}{e}) > 0 \nearrow \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{(\frac{1}{2e}, -\frac{3}{2e}), \min}$$

תשובה: $(\frac{1}{2e}, -\frac{3}{2e})$, מינימום.

ה. לפני זיהוי הגרפים המבוקשים שתי הצבות ב- $f(x)$, שתמיד מומלצות.

$f(0.001) = -0.02 \rightarrow 0$ ולכן הגרף של שואף לנקודה הריקה $(0, 0)$ והגרף מתחיל בירידה לתחום השליליות.

$f(1,000) = 22,802 \rightarrow +\infty$ ולכן הגרף מסתיים בעלייה חדה בתחום החיוביות.

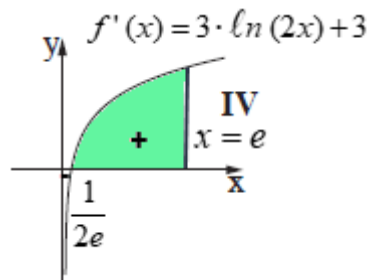


- הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות, בתאימות לתחומי הירידה והעלייה של הפונקציה.
- הפונקציה - הגרף דומה לגרף של $\ln x$, ומתאים לגרף של הנגזרת לאחר כיווץ אופקי, מתיחה אנכית, וההזה אנכית כלפי מעלה

- שיעורי נקודת המינימום מתאימים
- התאמה לחיתוך ציר x
- הנקודה הריקה בראשית והירידה לתחום השליליות
- השאיפה ל- $+\infty$ מימין

תשובה: גרף I מתאים ל- $f(x)$, גרף IV מתאים ל- $f'(x)$.

1. נחשב את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, הישר $x=e$ וציר ה- x (צבוע בירוק).



$$S = \int_{\frac{1}{2e}}^e (f'(x) - 0) dx = f(x) \Big|_{\frac{1}{2e}}^e$$

$$\left. \begin{array}{l} x=e \quad f(e)=13.81 \\ x=\frac{1}{2e} \quad f\left(\frac{1}{2e}\right)=-\frac{3}{2e} \end{array} \right\} S = 13.81 - \left(-\frac{3}{2e}\right) \rightarrow \boxed{S \approx 14.36}$$

תשובה: השטח, המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, הישר $x=e$ וציר ה- x , הוא כ- 14.36.