פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ד, 2024, מועד א', שאלון: 35372

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. ΔABC **שווה שוקיים והגובה** AE **לבסיס** BC **הוא גם תיכון.**

(1) נמצא את השיפוע של AE.

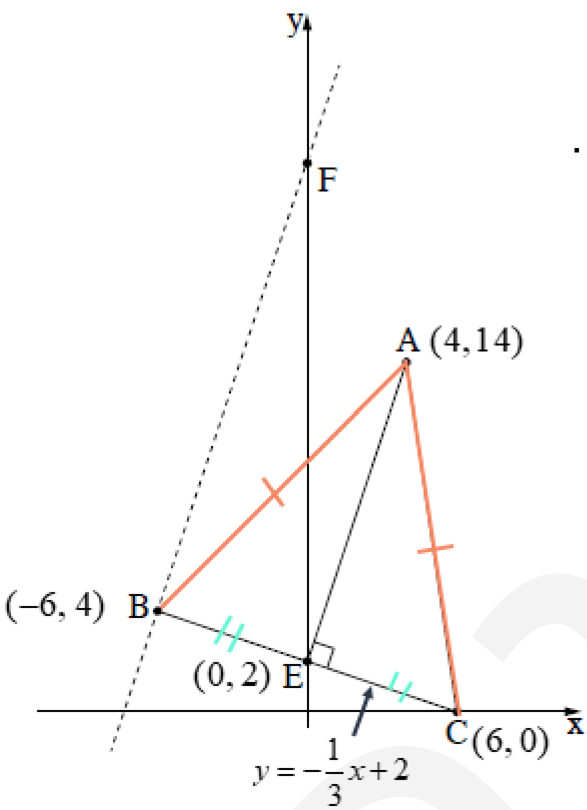
$$m_{AE}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{14-2}{4-0}=\frac{12}{4}=3$$

תשובה: השיפוע של AE **הוא** 3 .

(2) נמצא את משוואת הבסיס BC.

$m_{AE}=+3\rightarrow m_{BC}=-\frac{1}{3}$, **(שיפוע הופכי לנגדי).**

נמצא את משוואת הבסיס BC**, על-פי** $m_{BC}=-\frac{1}{3}$ **, ו-** $E(0,2)$.



$$y-2=-\frac{1}{3}(x-0)$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{3}x+2}$$

תשובה: משוואת הבסיס BC **היא** $y=-\frac{1}{3}x+2$.

ב. הקודקוד C **נמצא על ציר ה-** x **, ולכן** $y_C=0$.

$$0=-\frac{1}{3}x+2$$

$$\frac{1}{3}x=2 \quad /:(\frac{1}{3})$$

$$x=6 \quad \rightarrow \boxed{C(6,0)}$$

תשובה: $C(6,0)$.

ג. הנקודה $E(0,2)$ **היא אמצע הבסיס** BC .

$$y_E=\frac{y_B+y_C}{2}$$

$$2=\frac{y_B+0}{2} \quad /\cdot 2$$

$$4=y_B$$

ולכן $B(-6,4)$

$$x_E=\frac{x_B+x_C}{2}$$

$$0=\frac{x_B+6}{2} \quad /\cdot 2$$

$$0=x_B+6$$

$$-6=x_B$$

ניתן גם למצוא את שיעורי הנקודה B **בשיטת הדילוגים, עם הפרשים שווים:** $x=6,0,-6$, $y=0,2,4$.

רק לנמק, שההפרשים שווים בין שיעורי הנקודות כי הנקודה $E(0,2)$ **היא אמצע הבסיס** BC .

תשובה: $B(-6,4)$.

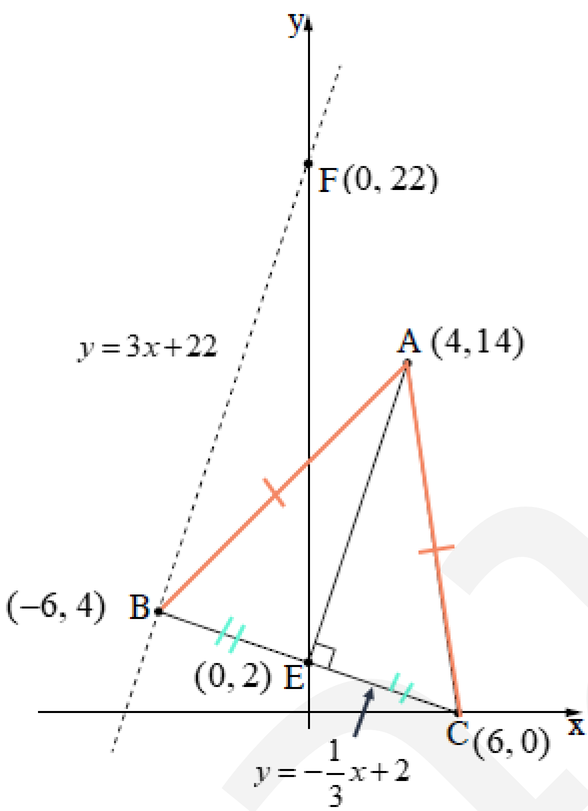
ד. דרך הקודקוד $B(-6,4)$ העבירו ישר המקביל לגובה AE .

$m_{BF}=m_{AE}=3$, (לישרים מקבילים שיפועים שווים).

נמצא את משוואת הישר BF , על-פי $m_{BF}=3$ ו- $B(-6,4)$.

$$y-4=3(x-(-6))$$
$$y-4=3(x+6)$$
$$y-4=3x+18$$
$$\boxed{y=3x+22}$$

תשובה: משוואת הישר BF היא $y=3x+22$.



ה. הקודקוד F נמצא על ציר ה- y ולכן $x_F=0$.

מכאן ששיעורי הנקודה F הם $(0,22)$.

נחשב את היקף המשולש FBE .

$$FE=y_F-x_E=22-2=20$$
$$BE=\sqrt{(-6-0)^2+(4-2)^2}=\sqrt{40}$$
$$FB=\sqrt{(-6-0)^2+(4-22)^2}=\sqrt{360}$$
$$P_{\Delta FBE}=20+\sqrt{40}+\sqrt{360}$$
$$\boxed{P_{\Delta FBE}=20+8\sqrt{10}\approx 45.3}$$

תשובה: היקף המשולש FBE הוא $20+8\sqrt{10}\approx 45.3$.

בחנות למוצרי קוסמטיקה מוכרים מארזי מתנה משני סוגים א' ו– ב'.
בטבלה מוצגים מספר הסבונים ומספר הקרמים על פי סוג המארז.

א. נסמן ב- x את מספר המארזים מסוג א',
וב- y את מספר המארזים מסוג ב'.
נוסיף לטבלה את הנתונים, כולל טור מתאים לפונקציית המטרה.

	מספר הסבונים	מספר הקרמים	רווח למארז
x - מארז א'	12	3	25 שקלים
y - מארז ב'	8	6	20 שקלים
אילוץ	לכל היותר 240 סבונים	לכל היותר 132 קרמים	

נרשום את מערכת האילוצים, הנובעת הן מהמגבלות שהוצגו בטבלה,
והן מהעובדה שמספרי המארזים אינם שליליים.

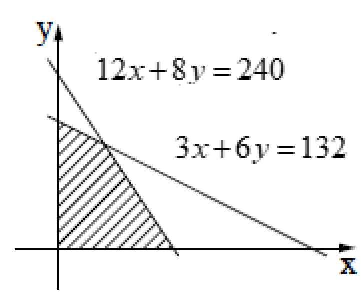
תשובה: מערכת האילוצים של הבעיה היא: $\begin{cases} 12x+8y\le 240 \\ 3x+6y\le 132 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$.

ב. הרווח מכל מארז מסוג א' הוא 25 שקלים והרווח מכל מארז מסוג ב' הוא 20 שקלים.
תשובה: פונקציית המטרה היא $f(x,y)=25x+20y$.

ג. הנקודה $(0,0)$ נמצאת מתחת לשני הישרים ולכן שרטוט 1 הוא הסרטוט המתאים.

$12\cdot 0+8\cdot 0\le 240 \quad \rightarrow 0\le 240 \quad o.k.$

$3\cdot 0+6\cdot 0\le 132 \quad \rightarrow 0\le 132 \quad o.k.$



1

תשובה: סרטוט 1 **מתאר את התחום האפשרי של הבעיה (השטח המקווקו).**

ד. נבנה טבלה שתסייע במענה לשאלה – כמה מארזים מכל סוג יש למכור ביום אחד להשגת רווח מקסימלי.

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של שני הישרים עם ציר ה- y **, שבהם מתקיים** $x=0$.

$$\begin{aligned}&3x+6y\le 132\\&3\cdot 0+6y=132\\&6y=132 \quad /:6\\&y=22 \quad \to (0,22)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&12\cdot 0+8y=240\\&8y=240 \quad /:8\\&y=30 \quad \to (0,30)\end{aligned}$$

מכאן שהישר התלול פחות עובר בנקודה $(0,22)$.

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין שני הישרים

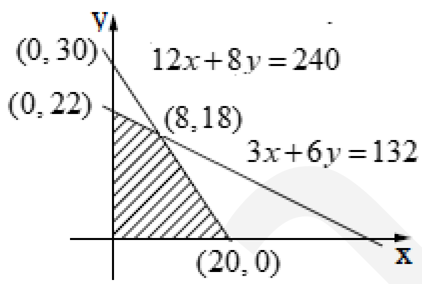
$$\begin{cases}12x+8y=240\\3x+6y=132 \quad /\cdot(-4)\end{cases}$$

$$+\begin{cases}12x+8y=240\\-12x-24y=-528\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&-16y=-288 \quad /:(=16)\\&y=18\\&3x+6\cdot 18=132\\&3x+108=132\\&3x=24\\&x=8 \quad \to \boxed{(8,18)}\end{aligned}$$

נמצא את שיעורי נקודת החיתוך עם ציר ה- x **(שבה מתקיים** $y=0$ **) של הישר** $12x+8y=240$.

$$\begin{aligned}&12x+8\cdot 0=240\\&12x=240 \quad /:12\\&x=20 \quad \to \boxed{(20,0)}\end{aligned}$$



1

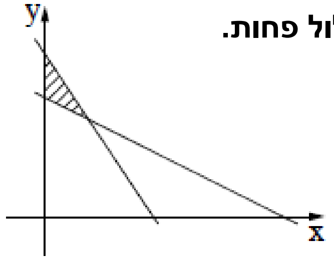
	$f(x,y)=25x+20y$
$(0,22)$	$f(0,22)=25\cdot 0+20\cdot 22=440$
$(8,18)$	$f(8,18)=25\cdot 8+20\cdot 18=560$
$(20,0)$	$f(20,0)=25\cdot 20+20\cdot 0=500$

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה הוא 560 **שקלים.**

תשובה: יש למכור 8 **מארזים מסוג א' ו-** 18 **מארזים מסוג ב' ביום אחד, כדי שהרווח יהיה מקסימלי.**

ד. ביום מסוים התברר שיש מספר גדול של קרמים שהתוקף שלהם עומד לפוג, ויש לארוז 132 **כרמים <u>לפחות</u>, ולכן האילוץ המתאים הוא** $3x+6y\ge 132$ **, ולכן התחום האפשרי הוא <u>מעל</u> לישר התלול פחות.**

תשובה: סרטוט 3 **מתאר את התחום האפשרי ביום זה.**



נכתב ע"י עפר ילין

המשקל של הביצים בלול מסוים מתפלג נורמלית.

א. המשקל הממוצע של הביצים הוא 58 גרם $=\bar{x}$.

המשקל של 31% מן הביצים הוא <u>פחות</u> מ- 53 גרם.

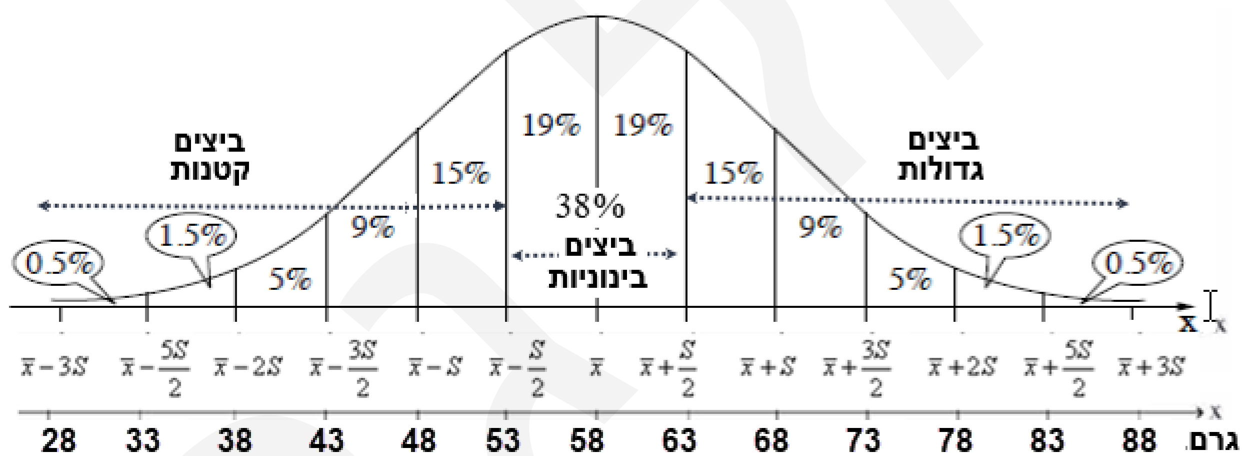
נחשב משמאל לימין את האחוז המצטבר, עד שנקבל 31% $0.5\%+1.5\%+5\%+9\%+15\%=31\%$ **.**

לכן, משקל של 53 גרם נמצא במרחק של 0.5 סטיות תקן מתחת לממוצע שהוא 58 גרם.

מכאן שחצי סטיית תקן שווה ל: 5 גרם $=58-53$, וסטיית תקן אחת היא 10 גרם $=5\cdot 2$.

תשובה: סטיית התקן היא 10 גרם.

ב. נשלים את הנתונים על גרף ההתפלגות הנורמלית, כאשר חצי סטיית תקן הוא 5 גרם.



את הביצים בלול ממיינים לשלוש קבוצות: ביצים קטנות, ביצים בינוניות וביצים גדולות.

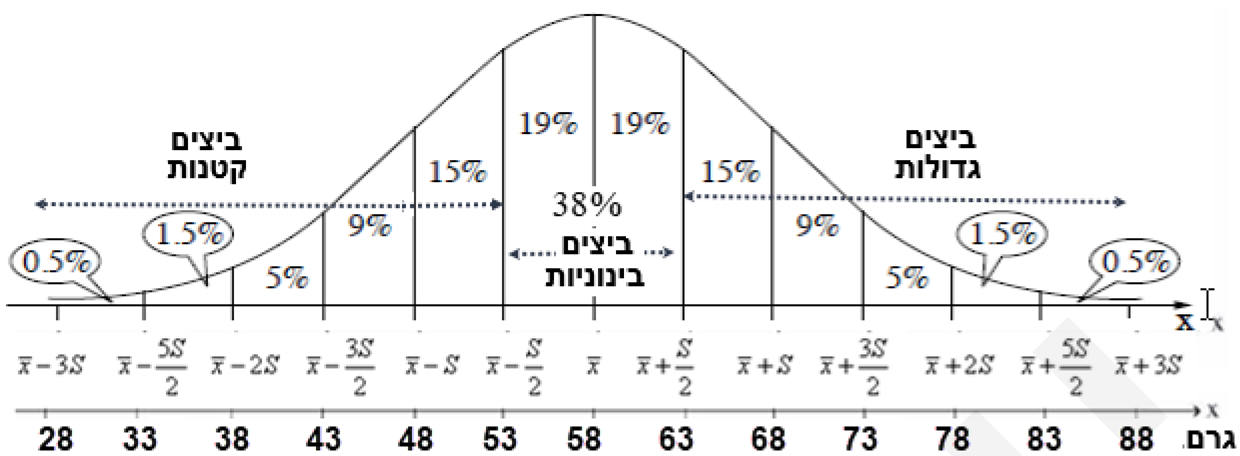
ביצים שמשקלן קטן מ- 53 גרם נחשבות ביצים קטנות.

ביצים שמשקלן בין 53 גרם ובין 63 גרם נחשבות ביצים בינוניות.

כל השאר נחשבות ביצים גדולות.

נחשב את השטח, שבין 53 גרם ל- 63 גרם: $19\%+19\%=38\%$

תשובה: 38% מהביצים בלול הן ביצים בינוניות.



ג. ביום מסוים היו בלול $1,824$ ביצים בינוניות.

(1) על פי סעיף ב, 38% מהביצים בלול הן ביצים בינוניות.

אם n הוא מספר הביצים, אז $38\% \cdot n = 1,824 \quad \rightarrow 0.38n = 1,824 \quad /:0.38 \quad \rightarrow n = 4,800$

או: אם 38% הם $1,824$ ביצים, אז אחוז אחד הם 48 ביצים $= 1,824:38$.

ו- 100% הם $4,800$ ביצים $= 48 \cdot 100$.

תשובה: על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, היו ביום זה $4,800$ ביצים סך הכול בלול.

(2) את הביצים הגדולות אורזים בתבניות של 12 ביצים.

אחוז הביצים הגדולות הוא $50\% - 19\% = 31\%$, ולכן $1,488$ ביצים $= 0.31 \cdot 4,800 = 31\% \cdot 4,800$.

או: אם 100% הם $4,800$ ביצים, אז אחוז אחד הם 48 ביצים $= 4,800:100$.

ו- 31% הם $1,488$ ביצים $= 48 \cdot 31$.

מספר התבניות הוא $1,488:12 = 124$.

תשובה: על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, נארזו ביום זה 124 תבניות של ביצים גדולות.

ד. נתון כי ציון התקן של המשקל של אחת הביצים בלול הוא 0.2 .

ציון תקן של 0.2 אומר שזו הסטייה של הנתון מהממוצע, סטייה קטנה מחצי סטיית תקן.

ביצים עד חצי סטיית תקן הן במשקל שבין הממוצע ל 63 גרם והן בינוניות.

פתרון חלופי: **נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן:** $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$.

$$0.2 = \frac{x-58}{10} \quad / \cdot 10$$

$$2 = x - 58$$

$$\boxed{x = 60 \ gram}$$

תשובה: ביצה זו נחשבת בינונית.

הפונקציה הריבועית $y=x^2-8x+17$
מתארת את כמות המוצרים (במיליונים) שייצרו במפעל מסוים (ציר ה- y)
לפי הזמן (בשנים) במשך תקופה מסוימת (ציר ה- x)

א. נתונה הפרבולה $y=x^2-8x+17$.

כמות המוצרים שייצרו במפעל בתחילת התקופה, מסומנת בנקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y.

בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y מתקיים $x=0$, נקבל $y=17$.

תשובה: כמות המוצרים שייצרו במפעל בתחילת התקופה היא 17 מיליון מוצרים.

ב. נמצא את כמות המוצרים כעבור 7 שנים. נציב: $x=7$: $y=7^2-8\cdot7+17=10$.

תשובה: כעבור 7 שנים מתחילת התקופה ייצרו במפעל 10 מיליון מוצרים.

ג. שיעור ה- x של קדקוד הפרבולה בעלת המינימום $y=x^2-8x+17$, מתקבל על ידי הנוסחה $x=-\frac{b}{2a}$.

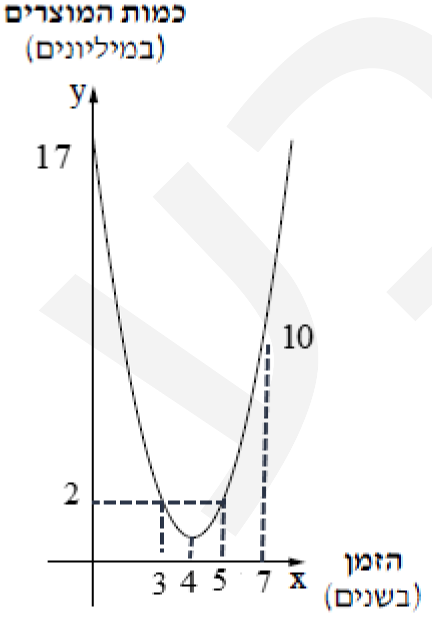
$x=\frac{-(-8)}{2\cdot1}=\frac{8}{2}=4$ **, משמע לאחר 4 שנים הכמות היא הקטנה ביותר, כי יש נקודת מינימום לפרבולה.**

תשובה: כעבור 4 שנים מתחילת התקופה כמות המוצרים שייצרו במפעל הייתה הקטנה ביותר.

ד. 2 מיליון מוצרים משמעו $y=2$.

נציב $y=2$ במשוואת הפרבולה.

$$2=x^2-8x+17$$
$$0=x^2-8x+15$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot15=4}}{2\cdot1}$$
$$x_{1,2}=\frac{8\pm2}{2}$$
$$x_1=\frac{8+2}{2}=\frac{10}{2}=5$$
$$x_2=\frac{8-2}{2}=\frac{6}{2}=3$$



תשובה: כעבור 3 שנים, וגם לאחר 5 שנים ייצרו במפעל 2 מיליון מוצרים.

יואל גבע
לא מתפשרים.
בגרות פד מאי 24 מועד קיץ א שאלון 35372

רינה מכינה ממתקי שוקולד בצורת פירמידה ישרה SABCD,

שבסיסה ריבוע ABCD (ראו סרטוט).

א. נחשב את הנפח של ממתק שוקולד אחד, שצורתו פירמידה.

נפח פירמידה, ששטח הבסיס שלה הוא S וגובהה הוא h, הוא $V=\frac{S\cdot h}{3}$.

נפח הפירמידה הוא 20 סמ"ק $=\frac{4\cdot 4\cdot 3.75}{3}=V$.

תשובה: הנפח של ממתק שוקולד אחד הוא 20 סמ"ק.

ב. רינה עוטפת כל ממתק שוקולד ברדיד אלומיניום,

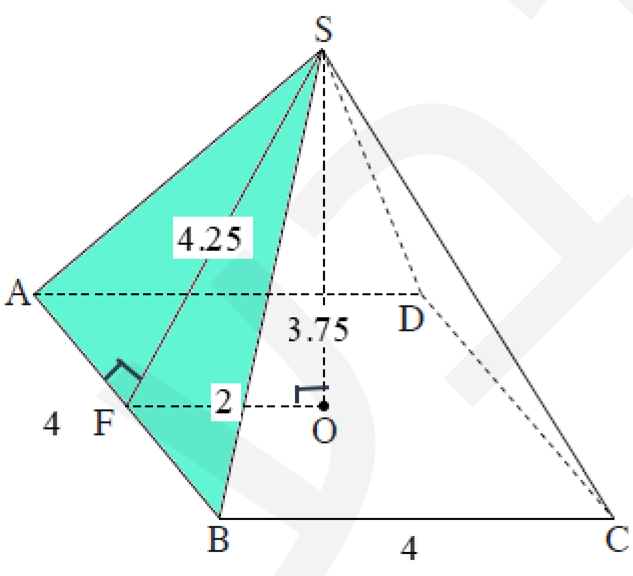
ועל אחת מן הפאות הצדדיות היא מדביקה מדבקה צבעונית המכסה אותה בדיוק.

(1) נמצא את SF גובה הפאה הצדדית, בעזרת משפט פיתגורס.

$OF=\frac{BC}{2}=\frac{4}{2}=$ **2 ס"מ**.

גובה הפירמידה מאונך לבסיס ולכן ΔSOF הוא ישר זווית.

$$(FO)^2+(SO)^2=(SF)^2$$
$$2^2+3.75^2=(SF)^2$$
$$18.0625=(SF)^2 \quad \sqrt{\ }$$
$$SF=4.25 \text{ ס"מ}$$



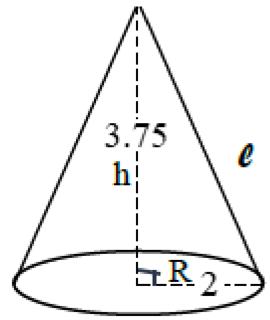
תשובה: גובה הפאה הצדדית (SF) הוא 4.25 ס"מ.

(2) נמצא את שטח המדבקה.

שטח הפאה הצדדית הוא 8.5 סמ"ר $=\frac{4\cdot 4.25}{2}=S_{\Delta SFO}$.

תשובה: שטח המדבקה הוא 8.5 סמ"ר.

לרגל החג החליטה רינה להכין ממתקי שוקולד בצורת חרוט.



ג. הרדיוס של הבסיס שווה לחצי צלע של בסיס הפירמידה, כלומר 2 **ס"מ**$= R = 4:2$.

הגובה שווה לגובה הפירמידה, כלומר 3.75 **ס"מ**$= h$.

נפח חרוט, ששטח הבסיס שלה הוא S **וגובהו הוא** h**, הוא** $\mathrm{V} = \dfrac{S \cdot h}{3}$.

שטח הבסיס שצורתו עיגול הוא: 4π **סמ"ר**$= S = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 2^2$

נפח החרוט הוא $5\pi \approx 15.71$ **סמ"ק**$= \mathrm{V} = \dfrac{4\pi \cdot 3.75}{3}$.

תשובה: הנפח של ממתק שוקולד בצורת חרוט הוא $15.71 \approx 5\pi$ **סמ"ק.**

רינה מכינה מארזי מתנה של ממתקי שוקולד.

ד. בכל מארז רינה מכניסה 2 **ממתקי שוקולד בצורת פירמידה, וממתק שוקולד אחד בצורת חרוט.**

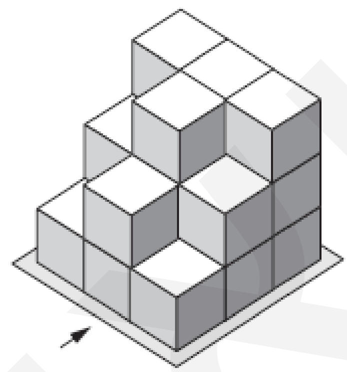
לרינה יש שוקולד מומס בנפח של 170 **סמ"ק.**

הנפח של שלושת הממתקים שבכל מארז הוא 55.71 **סמ"ק**$= 2 \cdot 20 + 15.71$.

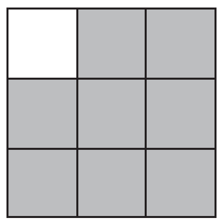
בכמות זו ניתן למלא 3 **מארזים**$\approx 170 : 55.71 = 3.05$.

תשובה: אפשר להכין 3 **מארזים לכל היותר מן השוקולד שיש לרינה.**

בסרטוט שלפניכם מתואר מבנה מקוביות זהות.
החץ בסרטוט מסמן את המבט מלפנים.



לפניכם תרשים המתאר את
אחד המבטים של המבנה



א. בתרשים של המבט רואים שבטור הימני יש 3 קוביות באמצעי גם 3 קוביות ובשמאלי 2 קוביות.

אם נביט על המבנה מימין,

נראה שבטור הימני יש 3 קוביות שעומדות זו על גבי זו (אפילו בשלושת השורות),

בטור האמצעי 3 קוביות שעומדות זו על גבי זו (בשורה השנייה),

ובטור השמאלי 2 קוביות שעומדות זו על גבי זו (בשורה השנייה).

(במבט מלפנים רואים 3 קוביות בכל אחד מהטורים.)

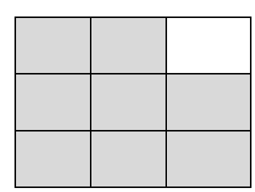
תשובה: התרשים מתאר מבט מימין של המבנה.

ב. אם נביט על המבנה משמאל,

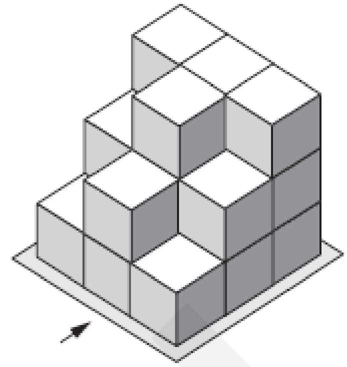
נראה שבטור הימני יש 2 קוביות שעומדות זו על גבי זו (בשורה השנייה),

בטור האמצעי 3 קוביות שעומדות זו על גבי זו (בשורה השנייה),

ובטור השמאלי 3 קוביות שעומדות זו על גבי זו (בשלושת השורות).



תשובה: התרשים מעל.



ג. תרשים מספרים, מראה כמה קוביות יש בכל משבצת, כאשר מסתכלים ממבט לפנים.

בלוח, שבסרטוט, יש שלוש שורות ושלושה טורים.

3	3	3
2	3	2
1	2	1

תשובה: תרשים המספרים של המבנה, מעל.

על גבי הקוביות שבמבנה הוסיפו קוביות,
עד שנוצר מבנה חדש בצורת קובייה.

ד. מבנה של קוביות, שבו שלוש שורות ושלושה טורים, הוא קוביה כאשר יש בו גם שלוש קומות מלאות.

במבנה שכזה מספר הקוביות הוא $3\cdot3\cdot3=3^3=27$.

במבנה הקיים מספר הקוביות הוא $3+3+3+2+3+2+1+2+1=20$,

ולכן הוסיפו 7 **קוביות** $= 27-20$.

תשובה: הוסיפו 7 **קוביות למבנה הנתון.**