

פתרון הבחינה

במתמטיקה

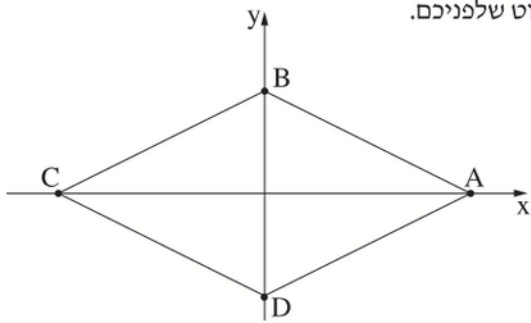
קיץ תשפ"ד, 2024, שאלון: 35582, מועד ב', גרסה 06

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יזאל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





1. נתון מעוין ABCD. אלכסוני המעוין מונחים על הצירים, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

נתון: אורך האלכסון AC הוא 10.

המרחק של כל אחת מצלעות המעוין מראשית הצירים הוא $\sqrt{5}$.

א. מצאו את משוואת הצלע AB.

בתוך המעוין חסום מעגל.

ב. מצאו את משוואת המעגל.

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל והמעוין ברביע הראשון.

ג. מצאו את שיעורי הנקודה M.

מן הנקודה M מורידים אנך לציר ה-x החותך אותו בנקודה K(a, 0).

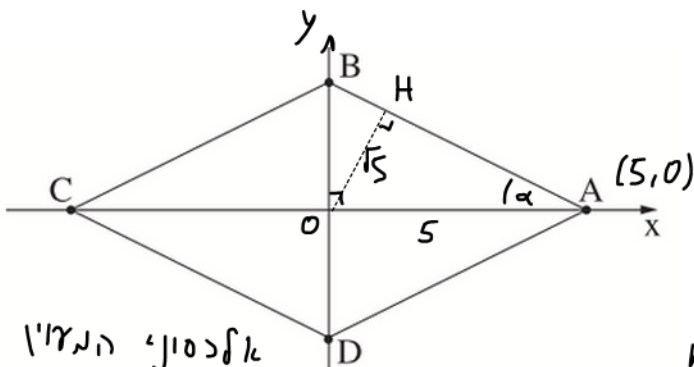
על הישר $x = -a$ מסמנים נקודה E ומעבירים דרכה ישר המקביל לציר ה-x.

הישר המקביל חותך את האנך האמצעי לקטע EK בנקודה G.

ד. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות G המתקבלות באופן זה נמצא על פרבולה, ומצאו את משוואתה.

הנקודה N נמצאת ברביע הראשון על הפרבולה שאת משוואתה מצאתם. שיעור ה-x של הנקודה N הוא 16.

ה. מצאו את משוואות שני המעגלים שמרכזם בנקודה N והם משיקים למעגל החסום במעוין.



$$\Delta AOH: \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \alpha = 26.56^\circ$$

$$\Delta BOA: \tan \alpha = \frac{y_B}{5} \quad y_B = 2.5$$

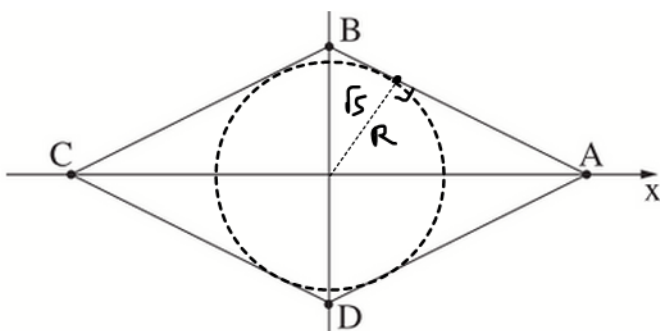
$$B(0, 2.5) \quad A(5, 0)$$

$$m_{AB} = \frac{2.5 - 0}{0 - 5} = -\frac{1}{2}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 5) \Rightarrow \boxed{AB: y = -\frac{1}{2}x + 2.5}$$

אלכסוני המעוין
חוצים זה את זה

$$CO = OA = 5$$

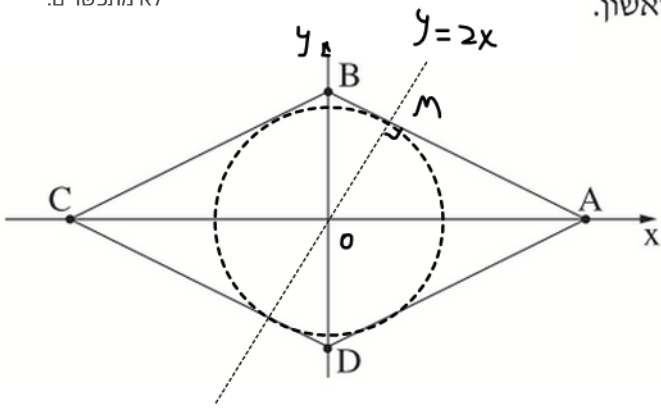


$$R = \sqrt{5} \quad O(0,0) \quad \text{מרכז המעגל}$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 5}$$

משוואת
המעגל

הנקודה M היא נקודת ההשקה של המעגל והמעוין ברביע הראשון.
ג. מצאו את שיעורי הנקודה M.



$$m_{OM} \cdot m_{AB} = -1$$

OM ⊥ AB
קיים מאונך
רמסיך

$$m_{OM} = 2$$

$$OM : y = 2x$$

$$M \begin{cases} y = 2x \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 + (2x)^2 = 5$$

$$5x^2 = 5$$

$$x = 1 \quad y = 2$$

$M(1, 2)$

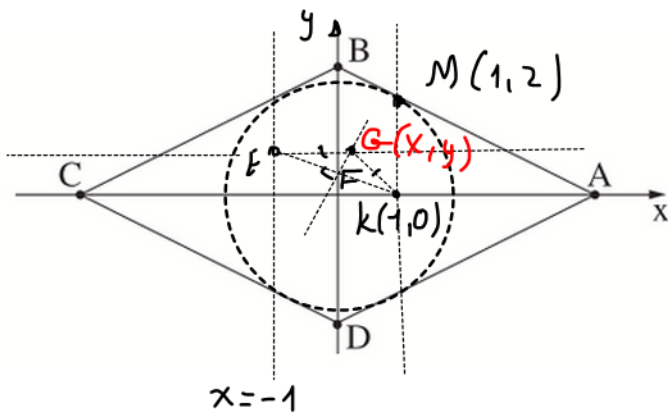
$$x_m = 1 \quad \text{כי } a = 1$$

מן הנקודה M מורידים אנך לציר ה-x החותך אותו בנקודה K(a, 0). <=

על הישר $x = -a$ מסמנים נקודה E ומעבירים דרכה ישר המקביל לציר ה-x.

הישר המקביל חותך את האנך האמצעי לקטע EK בנקודה G.

ד. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות G המתקבלות באופן זה נמצא על פרבולה, ומצאו את משוואתה.



$$\text{נסמן } F = \text{אנך } KE$$

$$FG \text{ אנך אמצעי ל- } KE$$

וזו כן $\triangle GKE$ משום שזוהי שווה שוקיים, שזו

שקד ותיכון התיכונים.

$$\text{נניאן } GE = GK$$

$$GE = GK = \text{מרחק נק' } G \text{ מהישר } x = -1$$

$$GK = \text{מרחק נק' } G \text{ מהנק' } K(1,0)$$

לפי הגדרת הפרבולה, הנק' G נמצאת במרחקים שווים

מישר ומנקודה וזו כן הנקודות G נמצאות על פרבולה.

מוקד הפרבולה $(1,0)$ והנהיג $x = -1$. משוואת הפרבולה

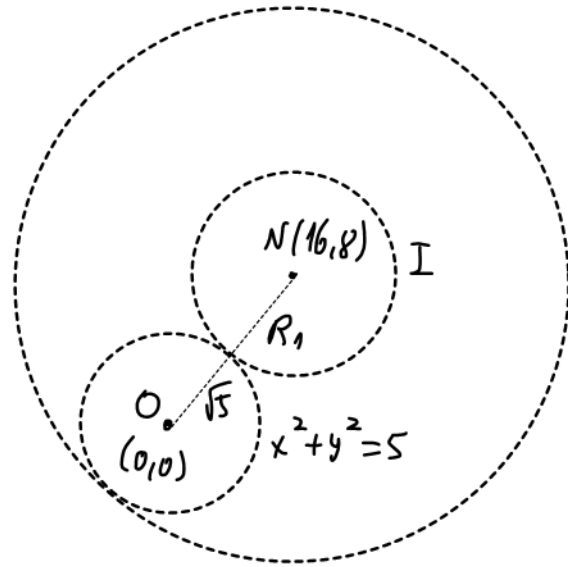
$y^2 = 4x$

$$\frac{p}{2} = 1$$

$$p = 2$$

$$y^2 = 2px$$

הנקודה N נמצאת ברביע הראשון על הפרבולה שאת משוואתה מצאתם. שיעור ה- x של הנקודה N הוא 16.
ה. מצאו את משוואות שני המעגלים שמרכזם בנקודה N והם משיקים למעגל החסום במעוין.



II

$$y^2 = 4x \quad \text{for } N(16, 8)$$

$$y^2 = 4 \cdot 16 \quad N(16, 8)$$

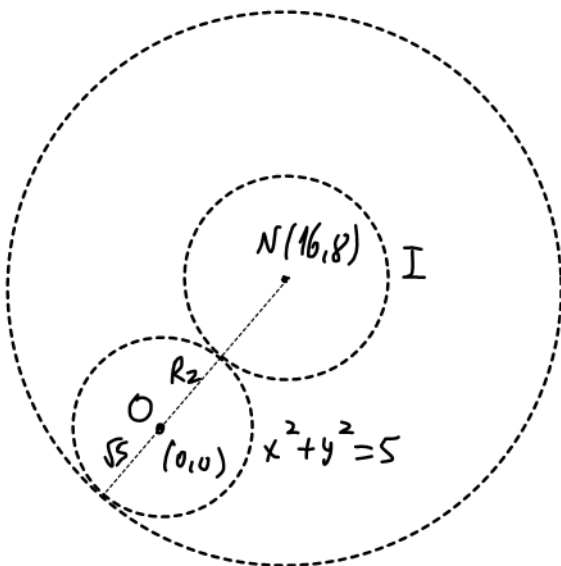
$$y = 8$$

I זכור הסקה תיקוילר

$$R_1 + \sqrt{5} = ON = \sqrt{16^2 + 8^2}$$

$$R_1 = \sqrt{245}$$

$$(x-16)^2 + (y-8)^2 = 245 \quad (I)$$



II

II זכור הסקה פנימית

$$ON + \sqrt{5} = R_2$$

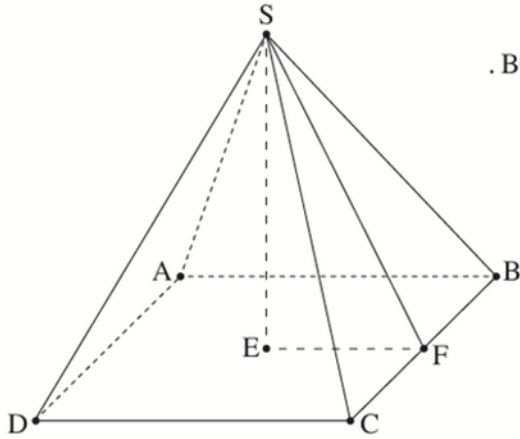
$$R_2 = \sqrt{405}$$

$$(x-16)^2 + (y-8)^2 = 405 \quad (II)$$

מאונטר התוצאה תהי:

$$(x-16)^2 + (y-8)^2 = 245$$

$$(x-16)^2 + (y-8)^2 = 405$$



2. בסרטוט שלפניכם פירמידה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הבסיס, והנקודה F היא אמצע המקצוע BC. נסמן: $\vec{SE} = \underline{u}$, $\vec{SF} = \underline{v}$, $\vec{SB} = \underline{w}$.
- הביעו באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את הווקטורים \vec{BC} ו- \vec{DC} .
הקטע SE הוא גובה הפירמידה.
נתון: $|\underline{u}| = 8$.
 - מצאו את הערך של $\underline{u} \cdot \underline{w}$.
 - נתון: $\vec{BA} = (-3, 4, 5)$. מצאו את גודל הזווית שבין SB ובין הבסיס של הפירמידה.
נתון: $E(0, 4, 5)$, מישור הבסיס ABCD מקביל לציר z.
 - מצאו את משוואת המישור שעליו מונח הבסיס של הפירמידה.
 - נתון: שיעור ה-x של הקודקוד B הוא 3.
 - מצאו את שיעורי הקודקוד B.

א. הביעו באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את הווקטורים \vec{BC} ו- \vec{DC}

$$\vec{BC} = 2\vec{BF} = 2(\vec{BS} + \vec{SF}) = 2(-\underline{w} + \underline{v}) = \boxed{2\underline{v} - 2\underline{w}}$$

$$\begin{aligned} \vec{DC} &= \vec{DB} + \vec{BC} = 2\vec{EB} + \vec{BC} = 2(\vec{ES} + \vec{SB}) + \vec{BC} \\ &= 2(-\underline{u} + \underline{w}) + 2\underline{v} - 2\underline{w} = -2\underline{u} + 2\underline{w} + 2\underline{v} - 2\underline{w} = \boxed{2\underline{v} - 2\underline{u}} \end{aligned}$$

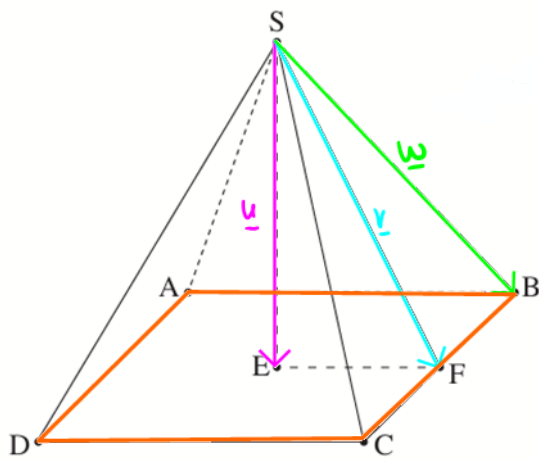
הקטע SE הוא גובה הפירמידה.

נתון: $|\underline{u}| = 8$.

ב. מצאו את הערך של $\underline{u} \cdot \underline{w}$.

$$\underline{u} \cdot (2\underline{v} - 2\underline{u}) = 0 \rightarrow 2\underline{u} \cdot \underline{v} - 2|\underline{u}|^2 = 0 \rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}|^2 = 64$$

$$\underline{u} \cdot (2\underline{v} - 2\underline{w}) = 0 \rightarrow 2\underline{u} \cdot \underline{v} - 2\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{w} = 64$$



נתון: $\vec{BA} = (-3, 4, 5)$.

ג. מצאו את גודל הזווית שבין SB ובין הבסיס של הפירמידה.

- וקטור הכיוון של SB הוא \underline{w}
- וקטור הנורמה של בסיס הפירמידה הוא \underline{u}
- נשמע בנוסחה לחישוב זווית בין שני וקטורים

$$\sin(\alpha) = \frac{\underline{w} \cdot \underline{u}}{|\underline{w}| \cdot |\underline{u}|}$$

יזוג מסעף קודם: $\underline{w} \cdot \underline{u} = 64$
 $|\underline{u}| = 8$

יש לחשב את $|\underline{w}|$

וקטור \vec{BA} הנמוך קסעף מאפשר חישוב בצורה הקטים ואנכסון הקטים.

כאשר נכון נוכח לחשב את $|\underline{w}|$ במשולש ישר זווית ΔSEB

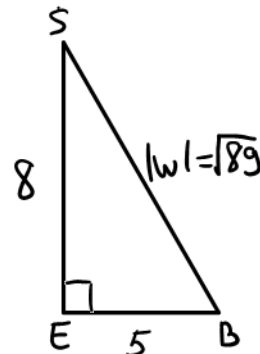
בצד קטים $|\vec{BA}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$

אנכסון קטים $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} = 10$

חצי אנכסון קטים $= 5$

כעת נחשב את $|\underline{w}|$ ע"י הניגזונם

במשולש ישר זווית ΔSEB



כעת נציב בנוסחה לחישוב הזווית

$$\sin(\alpha) = \frac{\underline{w} \cdot \underline{u}}{|\underline{w}| \cdot |\underline{u}|} = \frac{64}{\sqrt{89} \cdot 8} = 57.99^\circ$$



נתון: $E(0, 4, 5)$, מישור הבסיס ABCD מקביל לציר z.

ד. מצאו את משוואת המישור שעליו מונח הבסיס של הפירמידה.

כרטיש לישור ABCD יהי וקטור \vec{AB} שנימין ג'סס קוזק ווקטור הכיוון \vec{e} ז'י $(0, 0, 1)$.

נסמן את הנורמל (a, b, c) ונתשג אלו ע"י 2 מנפולר סקלרייה עציכטן ס ע'ר כרטיש הישור

$$I \quad (a, b, c) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

$$II \quad (a, b, c) \cdot (-3, 4, 5) = 0$$

$$I \quad c = 0$$

$$II \quad -3a + 4b = 0$$

$$b = \frac{3a}{4}$$

ניבול ז'יג'ר ח'ג'ש $a = 4$

$$b = 3$$

וקטור הנורמל ג'לא $(4, 3, 0)$

$$4x + 3y + 0z + D = 0$$

כ'ג'ר נוג'ר לתשג א'ר D ע"י

הלכ'ג'ר ה'נקוד'ת E.

$$4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + D = 0$$

$$D = -12$$

$$4x + 3y - 12 = 0$$



נתון: שיעור ה־x של הקודקוד B הוא 3.

ה. מצאו את שיעורי הקודקוד B.

$$4 \cdot 3 + 3y - 12 = 0$$

$$y = 0$$

B נמצא בישור. נציב $x=3$ במשוואת הישור

כדי למצוא את שיעור ה־z של נקודה B
(שמעל קונו) הציב BE

$$B(3, 0, z)$$

$$E(0, 4, 5)$$

$$d_{BE} = \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2 + (z-5)^2} = 5$$

$$9 + 16 + (z-5)^2 = 25$$

$$(z-5)^2 = 0$$

$$z = 5$$

$$B(3, 0, 5)$$



3. א. מצאו את פתרונות המשוואה: $z^6 + 729i = 0$ (הוא מספר מרוכב). (1)

ב. מצאו את ארבעת הפתרונות של המשוואה: $\frac{z^6 + 729i}{z^2 - 9i} = 0$ (הוא מספר מרוכב). (2)

הפתרונות שמצאתם בתת-סעיף א(2) מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ג. מצאו את שטח המרובע.

ד. מסובבים את המרובע (סביב הראשית) בזווית α נגד כיוון השעון, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

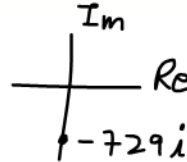
ה. מהו הערך של מכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע בעבור $\alpha = 45^\circ$? נמקו את תשובתכם.

ו. מצאו את שני הערכים של α כך שמכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע לאחר הסיבוב תהיה

מספר מדומה טהור.

ז. מהו הערך של המכפלה בעבור כל אחד מן הערכים של α שמצאתם? (2)

$$z^6 = -729i$$



(1)ל

$$z^6 = 729 \operatorname{cis}(270^\circ)$$

$$z_k = \sqrt[6]{729} \operatorname{cis}\left(\frac{270^\circ + 360^\circ k}{6}\right) = 3 \operatorname{cis}(45^\circ + 60^\circ k)$$

$$z_0 = 3 \operatorname{cis} 45^\circ, \quad z_3 = 3 \operatorname{cis} 225^\circ$$

$$z_1 = 3 \operatorname{cis} 105^\circ, \quad z_4 = 3 \operatorname{cis} 285^\circ$$

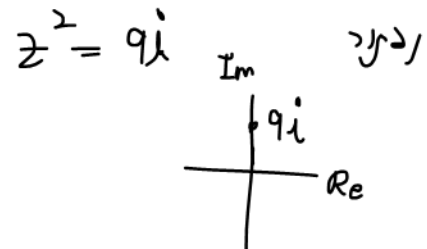
$$z_2 = 3 \operatorname{cis} 165^\circ, \quad z_5 = 3 \operatorname{cis} 345^\circ$$

$$\frac{z^6 + 729i}{z^2 - 9i} = 0 \Rightarrow z^6 + 729i \neq 0 \quad \text{and} \quad z^2 - 9i \neq 0 \quad (2)ל$$

$$z^2 = 9 \operatorname{cis} 90^\circ$$

$$z_k = 3 \operatorname{cis}(45^\circ + 180^\circ k)$$

$$z = 3 \operatorname{cis} 45^\circ, \quad z = 3 \operatorname{cis} 225^\circ$$



$$3 \operatorname{cis} 105^\circ, 3 \operatorname{cis} 165^\circ, 3 \operatorname{cis} 285^\circ, 3 \operatorname{cis} 345^\circ$$

בתיאור הוליסטית הם :

הפתרונות שמצאתם בתת-סעיף א(2) מייצגים קודקודים של מרובע במישור גאוס.

ב. מצאו את שטח המרובע. *ההכרחי שניתן הוא נטילן*

$$\angle AOB = \angle COD = 60^\circ$$

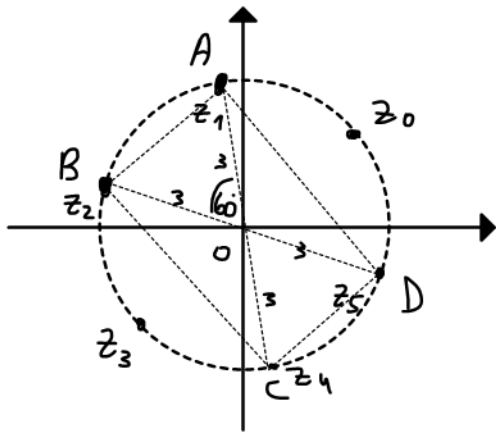
$$\angle AOD = \angle BOC = 120^\circ$$

$$S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\sum_{\text{המלבן}} = 4 \cdot \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{S = 9\sqrt{3}} \text{ יג' נכרח}$$



מסובבים את המרובע (סביב הראשית) בזווית α נגד כיוון השעון, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

ג. מהו הערך של מכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע בעבור $\alpha = 45^\circ$? נמקו את תשובתכם.

הס' קוב הוא כפול ב- $\text{cis } 45^\circ$. הקוקנדים התקסיים הם:

$$z_1 = 3 \text{cis } 105^\circ \cdot \text{cis } 45^\circ$$

$$z_2 = 3 \text{cis } 165^\circ \cdot \text{cis } 45^\circ$$

$$z_4 = 3 \text{cis } 285^\circ \cdot \text{cis } 45^\circ$$

$$z_5 = 3 \text{cis } 345^\circ \cdot \text{cis } 45^\circ$$

ומכפלת

$$\text{המכפלה} = 3^4 \text{cis } (105^\circ + 165^\circ + 285^\circ + 345^\circ) \text{cis } (4 \cdot 45^\circ)$$

$$= 81 \text{cis } 900^\circ \text{cis } 180^\circ = 81 \cdot (-1) \cdot (-1) = 81$$

$$\text{cis } 900^\circ = \text{cis } 180^\circ = -1$$

$$\boxed{\text{מכפלת המספרים היא 81}}$$

7. (1) מצאו את שני הערכים של α כך שמכפלת כל המספרים המייצגים את קודקודי המרובע לאחר הסיבוב תהיה מספר מדומה טהור.

(2) מהו הערך של המכפלה בעבור כל אחד מן הערכים של α שמצאתם?

$$\text{המכפלה} = 81 \operatorname{cis} 90^\circ \operatorname{cis} 4\alpha = -81 \operatorname{cis} 4\alpha$$

(1) T

$\operatorname{cis} 4\alpha = \pm i$ כדי שהמכפלה תהיה מספר מקומי טהור.

$$4\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ$$

$$4\alpha = 270^\circ \Rightarrow \alpha = 67.5^\circ$$

| | | | |
|--------|------------|-----------------------|------|
| $-81i$ | המכפלה היא | $\alpha = 22.5^\circ$ | טהור |
| $81i$ | המכפלה היא | $\alpha = 67.5^\circ$ | זגני |

(2) T

4. נתונה הפונקצייה $k(x) = xe^x$, ונתונה הפונקצייה $m(x) = 2e^x - 1$, המוגדרות לכל x .

- א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y בעבור כל אחת מן הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$.
 (2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ (אם יש כאלה).
 (3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של כל אחד מן הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ עם ציר ה- y .

הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ נחתכים בשתי נקודות בדיוק, נקודה אחת שבה $x = c$ ונקודה נוספת שבה $x = d$, $d > c$.

ב. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקצייה $k(x)$ ושל גרף הפונקצייה $m(x)$.

נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$, המוגדרת לכל $x \neq 1$.

- ג. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .
 ד. הסבירו מדוע למשוואה $f'(x) = 0$ יש בדיוק שני פתרונות.
 ה. (1) הסבירו מדוע $1 < d$.
 (2) הביעו באמצעות c ו- d את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.
 ו. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

א. (1) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- y בעבור כל אחת מן הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$.

$k(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \infty \cdot e^\infty = \infty \cdot \infty = \infty \longrightarrow \text{אין אסימפטוטה כזו.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\infty \cdot e^{-\infty} = -\infty \cdot 0^+ = 0^- \longrightarrow \text{יש אסימפטוטה כזו ב-} y=0$$

\swarrow מקורו \searrow מקורו
 קבוצת \searrow נזכיר

$m(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2e^\infty - 1) = 2 \cdot \infty - 1 = \infty \longrightarrow \text{אין אסימפטוטה כזו.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{-\infty} - 1) = 2 \cdot 0^+ - 1 \approx -1 \longrightarrow \text{יש אסימפטוטה כזו ב-} y=-1$$



(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של כל אחת מן הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ (אם יש כאלה).

$$k'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1) = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$$

| | | | |
|---------|----------|----------------|----------|
| x | $x < -1$ | -1 | $x > -1$ |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | $\frac{-1}{e}$ | |

$$\rightarrow \begin{matrix} k(x) : \text{פני} & x > -1 \\ k(x) : \text{יני} & x < -1 \end{matrix}$$

$$k(-1) = -1e^{-1} = \frac{-1}{e}$$

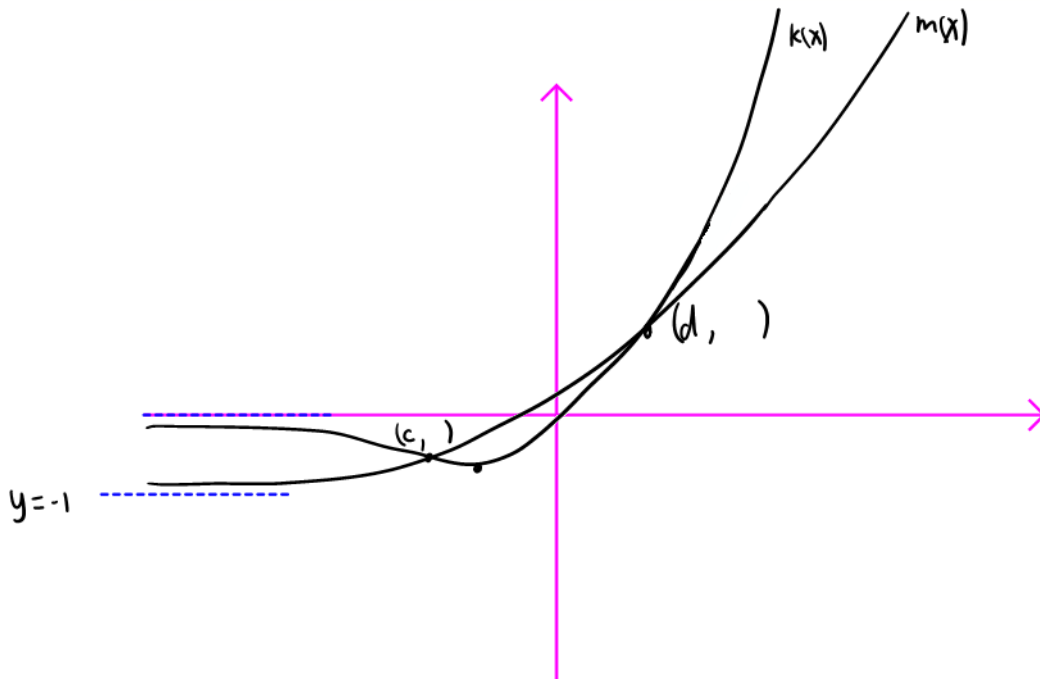
$$m'(x) = 2e^x = + \rightarrow \text{כיון } m(x) \text{ יולך על } x.$$

(3) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של כל אחד מן הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ עם ציר ה- y .

$$k(0) = 0 \quad (0, 0) : k(x)$$

$$m(0) = 2 \cdot e^0 - 1 = 1 \quad (0, 1) : m(x)$$

- הגרפים של הפונקציות $k(x)$ ו- $m(x)$ נחתכים בשתי נקודות בדיוק, נקודה אחת שבה $x = c$ ונקודה נוספת שבה $x = d, d > c$.
- ב. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקצייה $k(x)$ ושל גרף הפונקצייה $m(x)$.



נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1}$, המוגדרת לכל $x \neq 1$.

ג. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$. (1)

עקו $x=1$: ישנה אסימטרה אנכית? $x=1$. עקב כך האם נכנסו ואינו האם נכנסו.
עקו $x \rightarrow \infty$: אם הנמנה זקם והמכנה שואפים ל- ∞ אז ה- ∞ הנמוני עולה.
 ייתכן שאחר והקורו גבוה מצד אחד ולכן אין אסימטרה כאלה $x \rightarrow \infty$
עקו $x \rightarrow -\infty$: עקב הנמוני הוא -1 ועקב הנמנה הוא ∞ ולכן ישנה אסימטרה $y=0$ כאשר $x \rightarrow -\infty$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

$$0 = \frac{e^x - 1}{x - 1} \rightarrow 0 = e^x - 1 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

ד. הסבירו מדוע למשוואה $f'(x) = 0$ יש בדיוק שני פתרונות.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - (e^x-1)}{(x-1)^2} = \frac{xe^x - e^x - e^x + 1}{(x-1)^2} = \frac{xe^x - (2e^x - 1)}{(x-1)^2} = \frac{k(x) - m(x)}{(x-1)^2} = 0$$

$$\rightarrow k(x) = m(x) \rightarrow x = d, c$$

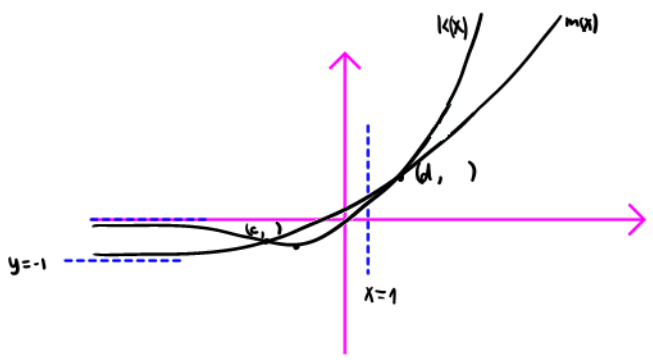
כיצד ניבא? הניבא $k(x)$ ו- $m(x)$ (מתכנה כזוה"מ). לכן נגדל האם כזוה"מ

ה. (1) הסבירו מדוע $d < 1$.

נימ שראו שעבור $x=1$ הניבא (אם עדיין נשל $k(x)$ מסקנה שישו ה- x של נקודה הניבא בין הניבא עברו ל-1. מניבא הזו של הניבא.

$$k(1) = 1e^1 = e \quad (1, e)$$

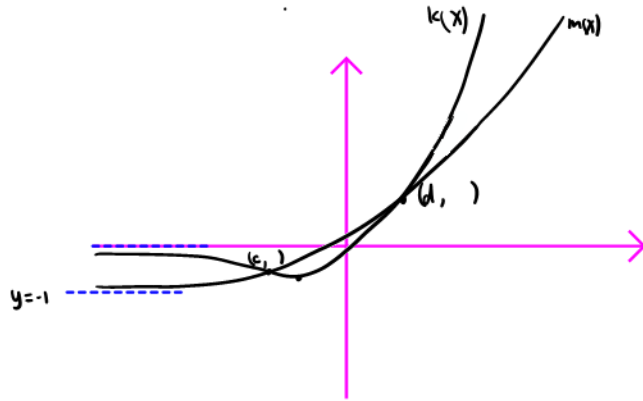
$$m(1) = 2e^1 - 1 = (1, 2e-1)$$



(2) הביעו באמצעות c ו- d את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה f(x).

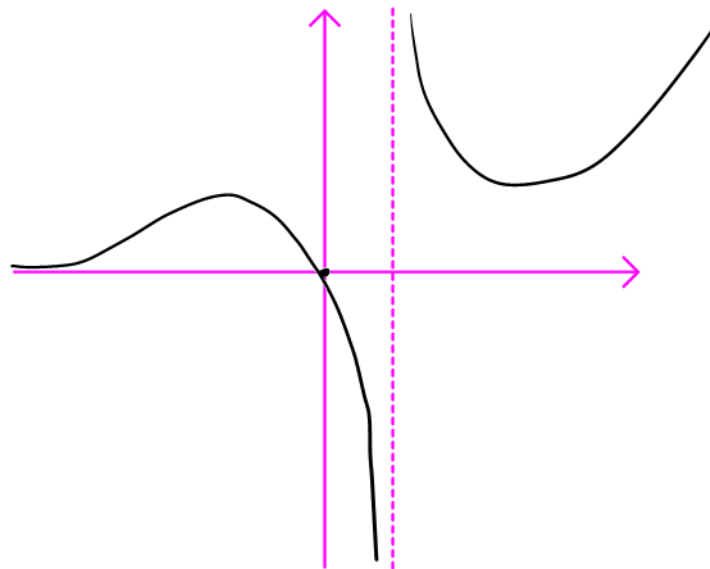
אנוני הנגזרת $f'(x) = \frac{k(x) - m(x)}{(x-1)^2}$ קודם כל סימן הנגזרת.
 נגבולן בפרטים של שא! m(x). ב' עוזב וצא לא m(x) סימן f'(x) חיובי

| | | | | |
|-------|-------|-----------|-----------|-------|
| x | x < c | c < x < 1 | 1 < x < d | d < x |
| f'(x) | + | 0 | - | 0 |
| f(x) | ↗ | max | ↘ | min |



ע"כ: $x < c$, $x > d$
 יליוני: $c < x < 1$, $1 < x < d$

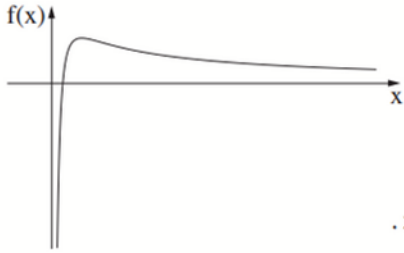
1. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה f(x).



למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





5. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $f(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x}$, המוגדרת בתחום $x > 0$.

א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- x .

נתונה הפונקצייה $g(x)$ המוגדרת בתחום $x > 0$ ומקיימת: $g'(x) = f(x)$.
שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ הוא $-\frac{1}{4}$.

ב. (1) מצאו את הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x .

(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

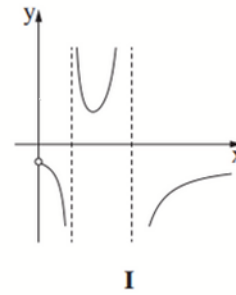
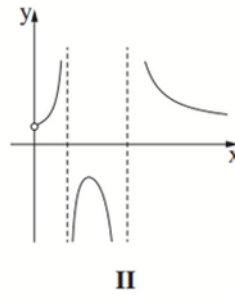
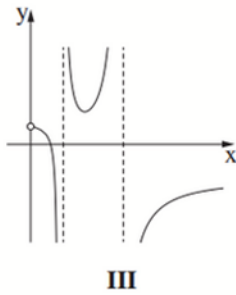
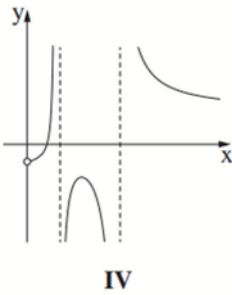
נתונה הפונקצייה $h(x)$ המוגדרת כך: $h(x) = 1 + \frac{a}{g(x)}$, a הוא פרמטר גדול מ- $\frac{1}{4}$.

ג. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $h(x)$.

(2) קבעו אם גרף הפונקצייה $h(x)$ חותך את ציר ה- x . נמקו את קביעתכם.

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $h(x)$, וקבעו את סוגה. הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך.

ה. קבעו איזה מן הגרפים IV-I שלפניכם מתאר את הפונקצייה $h(x)$.



א. $f(x) = 0$

$$\frac{2\ln(x)-1}{x} = 0 \rightarrow 2\ln(x)-1 = 0 \rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$(\sqrt{e}, 0)$

שיעור ה- x של נקודת הקיצון של $g(x)$ הוא \sqrt{e} כי $g'(x) = 0$ כי $f(x) = 0$

$x = \sqrt{e}$, נקודת הקיצון של $g(x)$: $(\sqrt{e}, -\frac{1}{4})$

ד. $g(x) = \int g'(x) dx$

$$g(x) = \int (2\ln(x)-1) \cdot \frac{1}{x} dx \rightarrow \frac{1}{2} \int (2\ln(x)-1) \frac{2}{x} dx$$



לפי קיומיה:

$$\int f(x)^n f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \frac{(2h(x)-1)^2}{2} + C \rightarrow g(x) = \frac{(2h(x)-1)^2}{4} + C$$

(בזים איך נקודת הקיצון של $g(x)$ היא נמצאת ב-1)

$$-\frac{1}{4} = \frac{(2h(1/e)-1)^2}{4} + C \rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

$$g(x) = \frac{(2h(x)-1)^2 - 1}{4} \rightarrow \frac{4h^2(x) - 4h(x)}{4}$$

$$g(x) = h^2(x) - h(x)$$

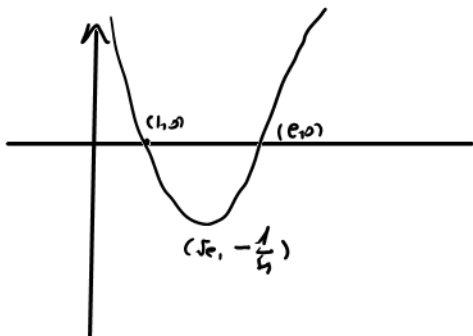
ז(ז)

$$g(x) = 0$$

$$h^2(x) - h(x) = 0 \rightarrow h(x)(h(x) - 1) = 0$$

$$\begin{array}{l} h(x) = 0 \\ x = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} h(x) - 1 = 0 \\ h(x) = 1 \\ x = e \end{array}$$

$$(1, 0) \quad (e, 0)$$



ז(ב)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h^2(x) - h(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h^2(x) - h(x) = \infty$$

ניתן לומר לפי הגרף של $g(x)$ שהפונקציה $h(x)$ היא פונקציה עולה, וקטגוריית $h(x)$ היא פונקציה עולה וקטגוריית $h(x)$ היא פונקציה עולה.

ז(ג)

ת"ת של $h(x)$ היא תחום ההגדרה של $g(x)$, קטגוריית

$$0 < x < 1 \cup e < x < \infty$$



27) $h(x) = 0$

$$1 + \frac{a}{g(x)} = 0 \rightarrow g(x) = -a$$

ניתן לראות שיש פתרון ל $g(x) = -a$ כאשר $a > \frac{1}{4}$ כי
לכאורה $g(x) \geq -\frac{1}{4}$ וזוהי תנאי צורך.
אם $a > \frac{1}{4}$ אז יש פתרון.

3

$$h'(x) = \frac{-ag'(x)}{[g(x)]^2} \rightarrow -ag'(x) = 0 \rightarrow g'(x) = 0 \rightarrow x = \sqrt{e}$$

באמצע $a > 0$ הנכנסת $g(x)$ ו $h(x)$ ו $g'(x) = 0$ נקודת הקיצון
כאשר $x = \sqrt{e}$ מתקבל $h(x)$ (קיצון מקסימום)

$$h(\sqrt{e}) = 1 + \frac{a}{g(\sqrt{e})} \rightarrow h(\sqrt{e}) = 1 - \frac{a}{4}$$

$(\sqrt{e}, 1 - \frac{a}{4})$ מקסימום

ד. רכיב מספר $h(x)$ יש נקודה קיצון מקסימום קיצון
 $x = \sqrt{e}$ וזאת נקודה כללית. יש נקודה קיצון מקסימום
מקסימום $h(x)$ מתקבלת כאשר $x = \sqrt{e}$.
II קיצון מקסימום $h(x)$

