

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ד, 2024, שאלון: 35581, גרסה 06

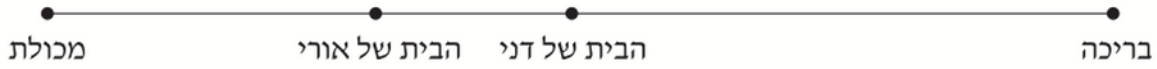
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יזאל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. הבית של אורי והבית של דני נמצאים בין הבריכה ובין המכולת, כמתואר בסרטוט שלפניכם. המרחק בין המכולת לבריכה הוא 12.5 ק"מ. המרחק בין הבית של אורי ובין הבית של דני הוא 2.3 ק"מ.



בכל יום רכב אורי על אופניים במהירות v קמ"ש, ודני רכב במהירות הגדולה ב-6 קמ"ש ממהירות הרכיבה של אורי. בימים ראשון ושני רכב אורי מביתו לבריכה, ודני רכב מביתו למכולת. בכל אחד מן הימים ראשון ושני הם יצאו לרכיבה באותה השעה. ביום ראשון כאשר הגיע דני למכולת, היה אורי במרחק של 5.8 ק"מ מן הבריכה.

ביום שני כאשר הגיע דני למכולת, הוא עצר שם וערך קניות במשך 29 דקות. בדיוק באותו הזמן שדני סיים לערוך את הקניות הגיע אורי לבריכה.

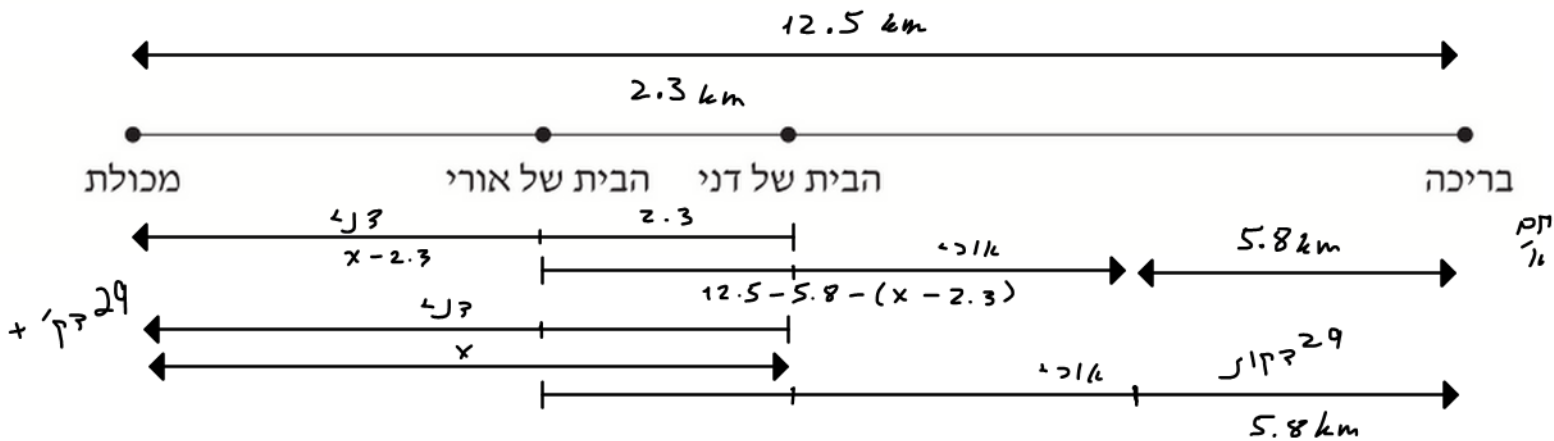
$$29 \text{ דקות} = 29 \frac{29}{60} \text{ שעות}$$

א. (1) מצאו את מהירות הרכיבה של אורי.

(2) מצאו את המרחק בין הבית של דני ובין המכולת.

ביום שלישי רכב דני מביתו אל המכולת, ערך קניות במשך חצי שעה, וחזר לכיוון ביתו. ביום זה רכב גם אורי למכולת. 45 דקות אחרי שיצא דני מביתו, יצא אורי מן המכולת ורכב לכיוון ביתו.

ג. האם בדרכם חזרה לבתיהם הם נפגשו בדרך שבין המכולת ובין הבית של אורי? נמקו את תשובתכם.



$$v = \frac{5.8}{\left(\frac{29}{60}\right)}$$

א. (1) למצוא, אורך עוקר 5.8 ק"מ - 29 דקות. (מהרשע שדני מניח למכולת וצץ סאולי מניח לבריכה)

$v = 12$ מהירות של אורי ת"א קמ"ש

א(2) $x =$ המרחק בין הבית של דני לבין המכולת
 קיום א'

ש דרך ק"מ	מהירות קמ"ש	זמן קצוות	מרחק
x	18	$\frac{x}{18}$	יום א' דני
$12.5 - 5.8 - (x - 2.3)$ $= 9 - x$	12	$\frac{9-x}{12}$	יום א' אלכז

$$\frac{x}{18} = \frac{9-x}{12}$$

$$12x = 162 - 18x$$

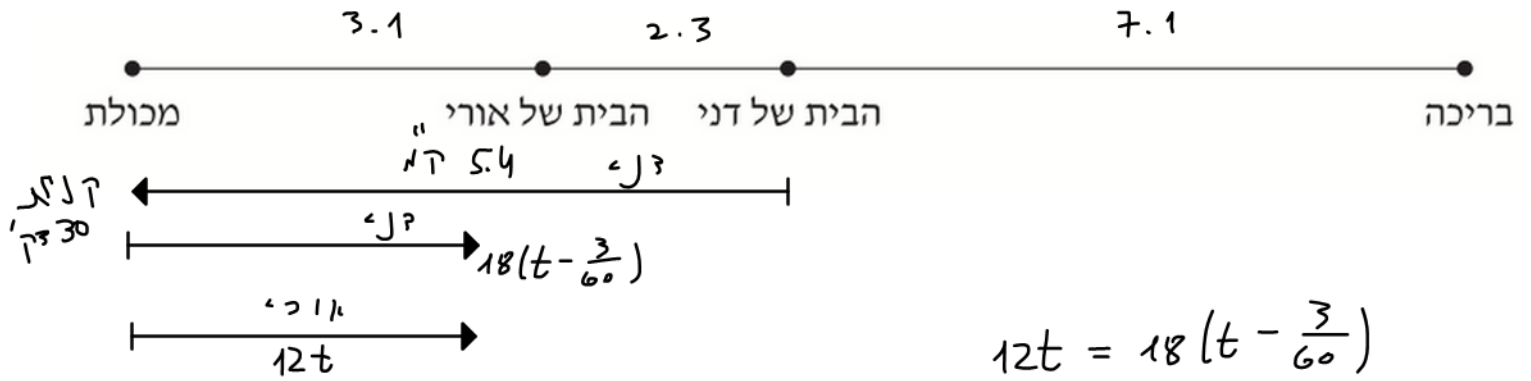
$$30x = 162$$

$$x = 5.4$$

ק"מ

המרחק בין הבית
 של דני למכולת
 הוא 5.4 ק"מ

ביום שלישי רכב דני מביתו אל המכולת, ערך קניות במשך חצי שעה, וחזר לכיוון ביתו. ביום זה רכב גם אורי למכולת. 45 דקות אחרי שיצא דני מביתו, יצא אורי מן המכולת ורכב לכיוון ביתו. האם בדרכם חזרה לבתיהם הם נפגשו בדרך שבין המכולת ובין הבית של אורי? נמקו את תשובתכם.



$$12t = 18\left(t - \frac{3}{60}\right)$$

$$12t = 18t - 0.9$$

$$6t = 0.9$$

$$t = 0.15 = \frac{9}{60} \text{ שעות}$$

$$12t = 1.8 \text{ ק"מ}$$

קני S	קני V	t	
5.4	18	0.3 = 18 ק"מ	קני מהקנייה למכוון
0	0	27 ק"מ	קני הקנייה
0	0	3 ק"מ	קני הקנייה
12t	12	t	אוכ' הנסיעה חסון
$18\left(t - \frac{3}{60}\right)$	18	$t - \frac{3}{60}$	קני הנסיעה חסון

תשובה:
כן.
הם אינן נפגשות,
9 דקות לאחר שאוכ' יצא
ובמכוון 1.8 ק"מ מהמכוון

2. הסדרה A היא סדרה הנדסית שאיבריה הם a_1, a_2, a_3, \dots ומנתה היא q , $-1 < q < 0$.
 נתון: $a_1 = 1$.
 הסדרה B מוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $b_n = a_n \cdot a_{n+2}$.
 א. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, והביעו את מנתה באמצעות q .
 ב. לפניכם שלוש טענות III-I. קבעו עבור כל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.
 I. הסדרה A לא עולה ולא יורדת.
 II. הסדרה B היא סדרה עולה.
 III. האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A יוצרים סדרה עולה.
 נתון: הסדרה B היא סדרה איך-סופית שסכומה הוא $\frac{1}{8}$.
 ג. מצאו את ערכו של q .
 נתונה סדרה הנדסית נוספת C, המוגדרת לכל n טבעי באופן הזה: $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.
 נתון: $c_3 + c_4 + \dots + c_m = 44,307$, m הוא מספר טבעי.
 ד. מצאו את הערך של m .

פתרון:

א. נתון: $a_1 = 1, -1 < q < 0$

$$b_n = a_n \cdot a_{n+2} \Rightarrow b_{n+1} = a_{n+1} \cdot a_{n+3}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} \cdot a_{n+3}}{a_n \cdot a_{n+2}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}} = q \cdot q = q^2$$

סדרה b_n הנ"ל היא סדרה הנדסית עם מנת q^2

ד. סדרה I נכונה. משום שהמנה של סדרה a_n היא q .





טענה II לא נכונה. הסדר:

$$b_1 = a_1 \cdot a_3 = 1 \cdot 1 \cdot 9^2 = 9^2 > 0$$

$$b_2 = 9^2 \rightarrow 0 < 9^2 < 7$$

סדרה שהיא סדרה ההרמונית שלילית חזקה

והנמוכה בין אבסולוטים היא

סדרה יורדת.

טענה III נכונה. הוכחה:

בסדרה a_n היא סדרה גאומטרית
 חזקה שלילית. מכיוון שסדרה שהיא סדרה
 ההרמונית שלילית היא שלילית.

$$\text{והנמוכה היא } 0 < 9^2 < 0$$

ואכן היא סדרה עולה.

ד. נתון כי סדרה B היא אינסופית

שסכומה $\frac{1}{8}$, ואכן היא מתכנסת:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$



3. קו - הציג אנו:

$$\frac{1}{8} = \frac{q^2}{1-q^2}$$

$$1-q^2 = 8q^2$$

$$9q^2 = 1$$

$$q^2 = \frac{1}{9} \quad | \sqrt{\quad}$$

$$q = \pm \frac{1}{3}$$

$$\boxed{q = -\frac{1}{3}}$$

$$C_n = \frac{a_n}{b_n} \quad 3. \quad (n) ?$$

(כעת) - הביטוי בקור C_n !

$$C_n = \frac{a_1 \cdot q^{n-1}}{b_1 \cdot q^{n-1}} = \frac{1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}}$$

$$C_n = 9 \left(\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}}\right)^{n-1} = 9 (-3)^{n-1}$$



$$C_3 + C_4 + \dots + C_m = 44,307 \quad \text{נתון:}$$

~ הביטוי עקור C_n נהדר:

$$C_3 = 9 \cdot (-3)^2 = 81$$

המשקל של הסדרה הינו $q_c = -3$

כלומר האיבריג בסכום $m-2$

, ליקב קנוסמה אסכזק n אי-דד-ק (השאלה)

בסדרה הנצסיה:

$$\frac{81 \left((-3)^{m-2} - 1 \right)}{-3-1} = 44,307$$

$$81 \left((-3)^{m-2} - 1 \right) = -777,228$$

$$(-3)^{m-2} - 1 = -2188$$

$$(-3)^{m-2} = -2187$$

$$(-3)^{m-2} = (-3)^7$$

⇓

$$\boxed{m = 9}$$



3. בחידון יש 5 שאלות. ההסתברות לענות נכון על כל אחת מן השאלות היא P . ידוע כי ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 4 שאלות לכל היותר היא 0.67232.
- מצאו את P .
 - מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יענה נכון על 3 שאלות בדיוק.
- מספר הנקודות הניתן לכל שאלה זהה למספר השאלה. כלומר מתמודד שענה נכון על שאלה 1, מקבל נקודה אחת. מתמודד שענה נכון על שאלה 2 מקבל שתי נקודות, וכן הלאה.
- מצאו את ההסתברות שמתמודד יצבור 14 נקודות לפחות.
 - מצאו את ההסתברות שמתמודד בחידון יצבור 6 נקודות בדיוק.
 - ידוע כי אחינעם ענתה נכון על 3 שאלות בדיוק. מצאו את ההסתברות שהיא צברה 6 נקודות בדיוק.

3(א) $1 - P(\text{נכון על 0 שאלות}) = 0.67232 \rightarrow 1 - p^5 = 0.67232 \rightarrow \boxed{p = \frac{4}{5}}$

3(ב) $P(\text{נכון על 3 שאלות}) = \binom{5}{3} \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \rightarrow \boxed{P(\text{נכון על 3 שאלות}) = \frac{128}{625}}$

3(ג) ע"ה אצטני לפחות 4 נקודות צריך לענות או על כל השאלות, שכן, או על 5 השאלות או על 4 השאלות האחרות

$P(\text{נכון על לפחות 4 שאלות}) = \left(\frac{4}{5}\right)^5 + \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^4 \rightarrow \boxed{P(\text{נכון על לפחות 4 שאלות}) = \frac{256}{625}}$

3(ד) ע"ה אצטני בדיוק 6 נקודות צריך או לענות על שאלות 1, 5, 11, לענות על 3, 2, 1 או לענות על 2!

$P(\text{נכון על בדיוק 6 נקודות}) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \binom{4}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{96}{3125}$



$$P\left(\begin{matrix} 3 \text{ יוקר} \\ 6 \text{ יוקר} \\ 3 \text{ יוקר} \end{matrix} \right) = \frac{96}{3125}$$

מ.3

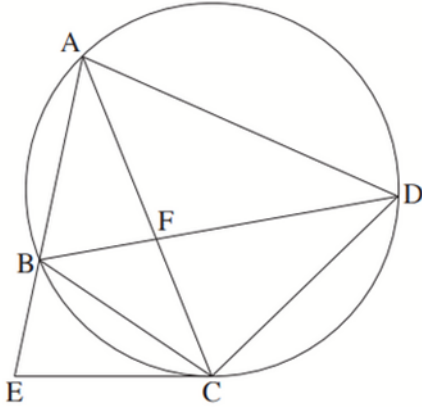
$$P\left(\begin{matrix} 3 \text{ יוקר} \\ 6 \text{ יוקר} \\ 3 \text{ יוקר} \end{matrix} \middle/ \begin{matrix} 3 \text{ יוקר} \\ 6 \text{ יוקר} \\ 3 \text{ יוקר} \end{matrix}\right) = \frac{P\left(\begin{matrix} 3 \text{ יוקר} & 3 \text{ יוקר} \\ 6 \text{ יוקר} & 6 \text{ יוקר} \\ 3 \text{ יוקר} & 3 \text{ יוקר} \end{matrix}\right)}{P\left(\begin{matrix} 3 \text{ יוקר} \\ 6 \text{ יוקר} \\ 3 \text{ יוקר} \end{matrix}\right)} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^2}{\frac{128}{625}} = \frac{\frac{64}{3125}}{\frac{128}{625}} = \frac{1}{10}$$

$$P\left(\begin{matrix} 3 \text{ יוקר} \\ 6 \text{ יוקר} \\ 3 \text{ יוקר} \end{matrix} \middle/ \begin{matrix} 3 \text{ יוקר} \\ 6 \text{ יוקר} \\ 3 \text{ יוקר} \end{matrix}\right) = \frac{1}{10}$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





4. המרובע ABCD חסום במעגל. אלכסוני המרובע נחתכים בנקודה F. המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך המיתר AB בנקודה E (ראו סרטוט).

נתון: $AB = CB$.

א. הוכיחו: $\angle EBC = 2 \cdot \angle BDC$.

נתון: AC חוצה את זווית ECD,

$$\frac{CD}{CF} = \frac{8}{5}$$

ב. (1) הוכיחו: $AC = AD$.

(2) מצאו את היחס $\frac{AD}{CD}$.

(3) מצאו את היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש CBF.

נסמן את שטח המשולש ABF ב-S.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש AEC.

פתרון: (שולחן קטול הפתרון)

<u>נימוק</u>	<u>לשנה</u>	<u>המספר</u>
נתון	מכאן חסום המעגל	1
נתון	CE משיק	2
נתון	$AB = CB$	3
למה הריב שלוליק המעגל מתאימה לשטחיה שלוליק המעגל	$\widehat{AB} = \widehat{CB}$	4
הוא השתה שלוליק המעגל מונוחה שלוליק הריב שלוליק	$\angle ADB = \angle CDB$	5





<p>ס'נ'ן /</p>	$\neq BDB = \alpha$	<p>(6)</p>
<p>במרוג' חסוק בג'ג' סכוב ס'ו'ל'ל נג'ו'ל'ל ~ 180° אפי (6), (5), (4)</p>	$\neq ABC = 180^\circ$	<p>(7)</p>
<p>סכוב ס'ו'ל'ל נג'ו'ל'ל ~ 180° אפי (7)</p>	$\neq EBC = 2\alpha$	<p>(8)</p>
<p>אפי (8), (6)</p>	$\neq EBC = 2 \neq BDC$ נ'ס'ן	<p>(9)</p>
<p>נ'ו'ן AC חו'ל'ל ECD ס'ו'ל'ל</p>	$\neq ACD = \neq ACE$	<p>(10)</p>
<p>נ'ו'ן /</p>	$\frac{CD}{CF} = \frac{8}{5}$	<p>(11)</p>
<p>ס'ו'ל'ל ה'ק'פ'ן הנ'ל'ג'ו'ן ח'ז'ו'ת' ק'ל'ט' ש'ל'ל ס'ו'ל'ל אפי (4)</p>	$\neq BAC = \neq BDC = \alpha$	<p>(12)</p>





<p>הוא דגמתה שונה במצד מיונחה ~ סלולר היקפי שונה לפי 4</p>	<p>$\\$BCA = \\$BAC = \alpha$</p>	<p>(13)</p>
<p>סלולר קיז שיה למירה. לפי (2), (6)</p>	<p>$\\$ECB = \\$CDB = \alpha$</p>	<p>(14)</p>
<p>היבוי סלולר - לפי (13), (14)</p>	<p>$\\$ACE = 2\alpha$</p>	<p>(15)</p>
<p>לפי (10)</p>	<p>$\\$ACD = 2\alpha$</p>	<p>(16)</p>
<p>הוא דגמתה שונה במצד מנוחה סלולר היקפי שונה.</p>	<p>$\\$ADB = \\$BDC = \theta$</p>	<p>(17)</p>
<p>לפי (4) היבוי סלולר.</p>	<p>$\\$ADC = 2\alpha$</p>	<p>(18)</p>
<p>לפי (6), (7)</p>	<p>$AC = AD$</p>	<p>(19)</p>
<p>הוא סלולר שונה בשולש חס A מיונחה דלגה שונה. לפי (16), (18)</p>	<p>מ.ס.ל ק' (1)</p>	<p>(20)</p>
<p>לפי (5), ההלכה מורה סלולר</p>	<p>DB מורה סלולר ADC</p>	<p>(24)</p>





<p>~ כנסת הו'ס - 11/1 בשאלה ACD אפי 20</p> <p>אפי (11), (20)</p> <p>חידוה</p>	$\frac{AD}{CD} = \frac{AF}{CF}$ $\frac{AD}{AF} = \frac{CD}{CF} = \frac{5}{8}$ $\Rightarrow AF = \frac{5}{8} AD$	<p>(21)</p> <p>(22)</p>
<p>אפי (19), (22)</p> <p>חיסוי - האלף</p>	$AF = \frac{5}{8} AC$ $\Rightarrow CF = \frac{3}{8} AC$ $\frac{AC}{CF} = \frac{8}{3}$	<p>(23)</p> <p>(24)</p> <p>(25)</p>
<p>חידוה</p>	$\frac{AD}{AF} = \frac{5}{8}$ $\frac{AD}{CD} = \frac{5}{3}$ <p>נ.ד.ה' (2)</p>	<p>(26)</p> <p>(27)</p> <p>(28)</p>





<p>אב' (28), (21) קנין עזר</p>	$\frac{AF}{CF} = \frac{AD}{CD} = \frac{5}{3}$ <p>נורוין אובה BK פליגה</p>	<p>(29)</p> <p>(30)</p>
<p>נוכח - שטח שאלה אב' (30)</p>	$S_{ABF} = \frac{AF \cdot BK}{2}$ $S_{CBF} = \frac{CF \cdot BK}{2}$	<p>(31)</p>
<p>ח.ש. ></p>	$\frac{S_{ABF}}{S_{CBF}} = \frac{AF}{CF}$	<p>(32)</p>
<p>אב' (32), (29)</p>	$\frac{S_{ABF}}{S_{CBF}} = \frac{5}{3}$	<p>(33)</p>
<p>מתון אב' (34), (33)</p>	<p>ח.ש. > (3)</p> $S_{ABF} = S$	<p>(34)</p>
<p>חיקור שטח חיק אב' (35), (34)</p>	$S_{CBF} = \frac{3}{5} S$ $S_{ABC} = \frac{8}{5} S$	<p>(35)</p> <p>(36)</p>

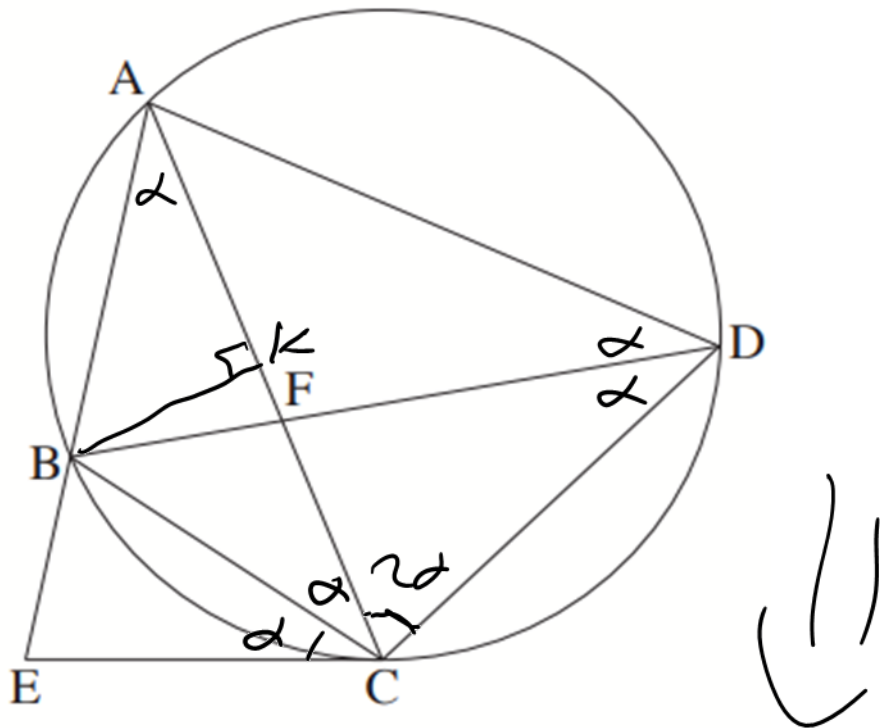




<p>אבי (13), (14)</p>	<p>$\angle EAC = \angle ECB = \alpha$</p>	<p>(37)</p>
<p>אבי (8), (15)</p>	<p>$\angle ECA = \angle ECB = \alpha$</p>	<p>(38)</p>
<p>צליון אבי S.S</p>	<p>$\triangle ACE \sim \triangle CBE$</p>	<p>(39)</p>
<p>יהם הזלגה הסרואילר אבי (39)</p>	<p>$\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{BE} = \frac{AE}{CE}$</p>	<p>(40)</p>
<p>חילוק</p>	<p>$\frac{BE}{BC} = \frac{CE}{AC}$</p>	<p>(41)</p>
<p>אבי (6), (13)</p>	<p>$\angle CAE = \angle CDA$</p>	<p>(42)</p>
<p>אבי (15), (16)</p>	<p>$\angle ACG = \angle ACD$</p>	<p>(43)</p>
<p>צליון אבי S.S</p>	<p>$\triangle ACE \sim \triangle DCF$</p>	<p>(44)</p>
<p>יהם הזלגה הסרואילר אבי (44)</p>	<p>$\frac{AC}{DC} = \frac{CE}{CF} = \frac{AE}{DF}$</p>	<p>(45)</p>
<p>חיסוק אבי (17), (45)</p>	<p>$\frac{CE}{AC} = \frac{CF}{DC} = \frac{5}{8}$</p>	<p>(46)</p>
<p>אבי (41), (46)</p>	<p>$\frac{BE}{BC} = \frac{5}{8}$</p>	<p>(47)</p>
<p>אבי (3), (17)</p>	<p>$\frac{BE}{AB} = \frac{5}{8}$</p>	<p>(48)</p>



<p>לשאלה יש אורח אורח זמן, יחס השטחים שזה אחרים הקבועים (כמו 30-32) חשוב</p>	$\frac{S_{BCE}}{S_{ABC}} = \frac{BE}{AB} = \frac{5}{8}$ $S_{BCE} = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{5} S = S$ $S_{AEC} = \frac{13}{5} S$ <p>א. כן ✓</p>	<p>(49)</p> <p>(50)</p> <p>(51)</p>
--	---	-------------------------------------



למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

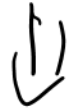
הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



הזירה: אר ס.ג.פ.ז' (ניסוי אפטר

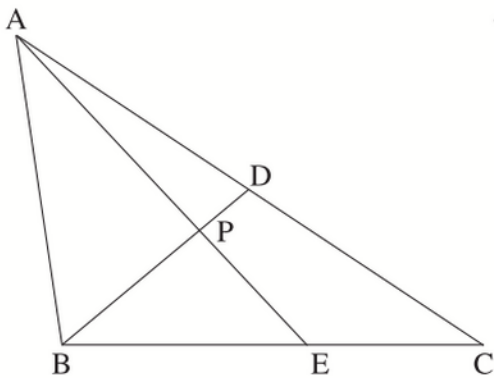
לכ ע"ה.ס.ה.:

$$\triangle ABF \cong \triangle CBE$$

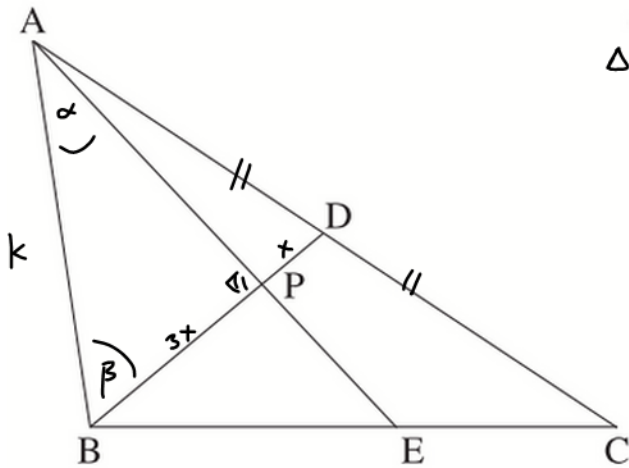


$$S_{CBE} = S_{ABF} = S$$





5. במשולש ABC, BD הוא תיכון לצלע AC. הנקודה E נמצאת על הצלע BC. BD ו-AE נחתכים בנקודה P (ראו סרטוט). נתון: $BP = 3 \cdot PD$. נסמן: $AB = k$, $\angle BAP = \alpha$, $\angle ABP = \beta$, $\alpha < \beta$.
 א. הביעו באמצעות α , β ו- k את אורכי הקטעים AP ו-BP.
 נתון כי AE ו-BD מאונכים זה לזה, וכי שטח המשולש ABD הוא $0.28k^2$.
 ב. מצאו את גודל הזווית α .
 ג. מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEB.
 ד. מצאו את אורך רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC כך שמתקיים $\angle ABC = 90^\circ$. הביעו את תשובתכם באמצעות k .



$$\Delta ABP: \frac{k}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{BP}{\sin \alpha} = \frac{AP}{\sin \beta} \quad \frac{k}{\sin}$$

$$BP = \frac{k \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$AP = \frac{k \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

ΔABD :

$$BD = \frac{4}{3} \cdot BP$$

$$S_{ABD} = 0.28k^2 = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AP$$

$$0.28k^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{k \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{k \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$0.28 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}$$

$\therefore k^2$

ΔABP

$$\angle APB = 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$0.28 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{12} \quad | \cdot 3$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha)$$

$$= \cos \alpha$$

$$0.84 = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$0.84 = \sin 2\alpha$$

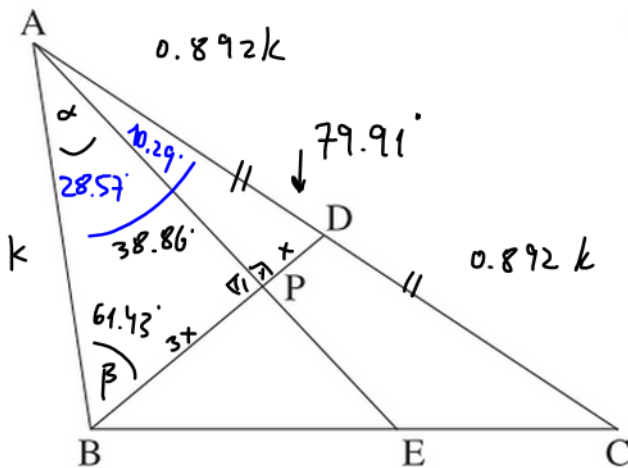
$$2\alpha = 57.14^\circ \quad 2\alpha = 180^\circ - 57.14^\circ = 122.86^\circ$$

$$\alpha = 28.57^\circ \quad \alpha = 61.43^\circ > \beta$$

סכום

מצאו את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEC

ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AEB.



$$\Delta ABD: \angle A = 38.86^\circ$$

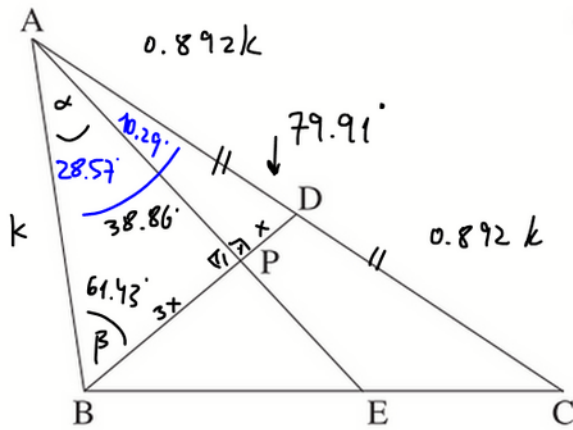
$$\angle B = \beta = 61.43^\circ$$

$$\angle D = 79.71^\circ$$

$$\frac{AD}{\sin 61.43^\circ} = \frac{k}{\sin 79.91^\circ} \Rightarrow AD = 0.892k$$

$$AC = 2AD$$

$$AC = 1.785 \cdot k$$



$$\triangle ACE: \frac{AE}{\sin \angle C} = 2R_1$$

$$\triangle ABE: \frac{AE}{\sin \angle ABE} = 2R_2$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\frac{AE}{2 \sin \angle C}}{\frac{AE}{2 \sin \angle ABE}} = \frac{\sin \angle ABE}{\sin \angle C}$$

$$\triangle ABC: \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle C}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{AEC \text{ חוס } R}{AEB \text{ חוס } R} = \frac{AC}{AB} = \frac{1.785k}{k} = 1.785$$

חס הריבועים הוא 1.785

סעיף ד' קולט בקורא נאה בחינת הקשר

6. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{6x}{(x^2 - a)^2}$, a הוא פרמטר חיובי.

ענו על סעיפים א-ה. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
- (3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.
- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
- ג. $g(x)$ היא פונקצייה המקיימת $g'(x) = f(x)$. גרף הפונקצייה $g(x)$ עובר בנקודה $(0, 0)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום. מצאו את תחומי הקעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של הפונקצייה $g(x)$.
- ד. (1) מצאו פונקצייה $g(x)$ המקיימת תנאים אלו.
- (2) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ שמצאתם בתת-סעיף ד(1).
- ה. $h(x)$ היא פונקצייה המוגדרת כך: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו התחום. (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקצייה $h(x)$.
- (2) מצאו את תחומי החיוביות של הפונקצייה $h(x)$.

6417) $(x^2 - a)^2 = 0 \rightarrow x^2 - a = 0 \rightarrow x^2 = a \rightarrow x = \pm\sqrt{a}$
 נ"ק: $x \neq \pm\sqrt{a}$

642) \sqrt{a} ! $-\sqrt{a}$ - לאנסים הנכני אך אינני לאנסים מונג (כפס)
 ולכן $x = \sqrt{a}$! $x = -\sqrt{a}$ פס אןכיר

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{x^4 - 2ax^2 + a^2} \rightarrow \frac{\frac{6x}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} - \frac{2ax^2}{x^4} + \frac{a^2}{x^4}} \rightarrow \frac{\frac{6}{x^3}}{1 - \frac{2a}{x^2} + \frac{a^2}{x^4}} \rightarrow \frac{0}{1} = 0$$

$x = \sqrt{a}, x = -\sqrt{a}, y = 0$



1c) $f'(x) = \frac{6(x^2-a)^2 - 6x \cdot 2(x^2-a) \cdot 2x}{(x^2-a)^4} \rightarrow \frac{6(x^2-a)(x^2-a-4x^2)}{(x^2-a)^4}$

$f'(x) = \frac{6(x^2-a)(-3x^2-a)}{(x^2-a)^4}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6(x^2-a)(-3x^2-a) = 0$

\swarrow \searrow
 $x^2 = a$ $(a > 0)$
 $x = \pm\sqrt{a}$
 אל תשמיש הביטוי?

x	$x < -\sqrt{a}$	$-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$	$x > \sqrt{a}$
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$	\searrow	\nearrow	\searrow

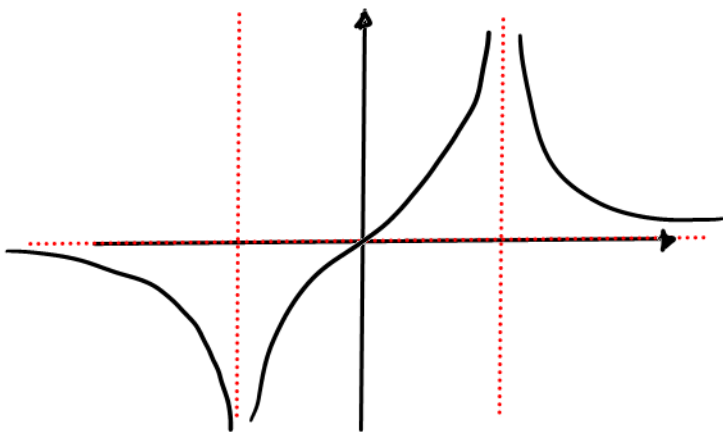
אנחנו רוצים להבין את התמונה הזו. נראה שיש לנו פונקציה שהיא שלילית ב- $x < -\sqrt{a}$ וחיובית ב- $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ ושלילית ב- $x > \sqrt{a}$. זה אומר שהפונקציה היא בצורת W.

אזורי: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$
 אזורי: $x > \sqrt{a}$ או $-\sqrt{a} > x$

$(\sqrt{a})^2 - a = a - a = 0$
 $(0^2 - a) = -a$
 $(-\sqrt{a})^2 - a = a - a = 0$

מיטת זה אלו
 כיוון זיטוי
 אזורי וזיטוי
 סימן

2.



הערה:
 זיטוי א-אמר
 $f(x) = \frac{6x}{(x^2-a)^3} = 0$

3. $g''(x) = f'(x)$
 לפני סוף ארבע אנחנו יודעים את הביטוי של $f'(x)$ וזוהי:

אזורי: $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$
 אזורי: $x > \sqrt{a}$ או $-\sqrt{a} > x$

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.



3(1)

$$f(x) = \int g'(x) dx = \int F(x) dx$$

$$\int 6x(x^2-a)^2 dx \rightarrow 3 \int 2x(x^2-a)^2 dx$$

$$f(x) = \frac{3(x^2-a)^{-1}}{-1} + C$$

קטגורי

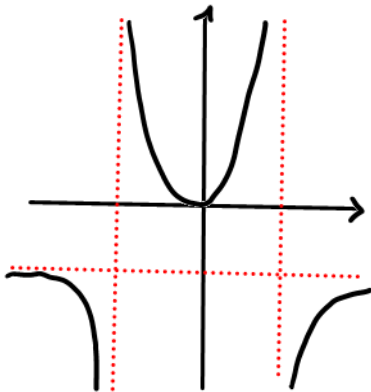
$$\int (F(x))^n f'(x) dx = \frac{(F(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

$$f(x) = \frac{3}{a-x^2} + C$$

$$f(a) = 0 \rightarrow 0 = \frac{3}{a} + C \rightarrow C = -\frac{3}{a}$$

$$f(x) = \frac{3}{a-x^2} - \frac{3}{a}$$

3(2)



אפי סניף ה נוט אדער
טר תחומי קולאז' אקווינדה אל אטור
אכין ו- (אז-ינאצ'ס, כדו כן אכיוון
אנאף יתנתר אור ציר ה- x ג סזא
איהאטכ סיתן אאלו אוחכי ה אפ תתקל
קארטר היתחום ה סזא.
ויט לראר שגאכ' אל- אפ קו:
 $f = -\frac{3}{a}$ $x = -\sqrt{a}$ $x = \sqrt{a}$

3(1)

אפי סניף
דונית

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)g(x) = 0 \cdot (-\frac{3}{a}) = 0$$

אכין אטי הוס אואס לט / ט - זסקיג'ר \sqrt{a} ! $-\sqrt{a}$
ז'ה יתקל' אלן תשא' לט / ט - קסקיג'ר \sqrt{a} ! $-\sqrt{a}$

$x = \sqrt{a}$	$x = -\sqrt{a}$	$f = 0$
----------------	-----------------	---------



(2) $h(x)$ תהיה פונקציה

היא $f(x)$ וגם $g(x)$ פונקציה

או $f(x)$ וגם $g(x)$ פונקציה

לפי המובנים מסעיפים ב, ו(2)

$f(x)$ וגם $g(x)$ פונקציה קטומה: $h(x) < 0$

$f(x)$ וגם $g(x)$ פונקציה קטומה: $x > -h(x)$

ולכן: $h(x) < 0$ או $x > -h(x)$

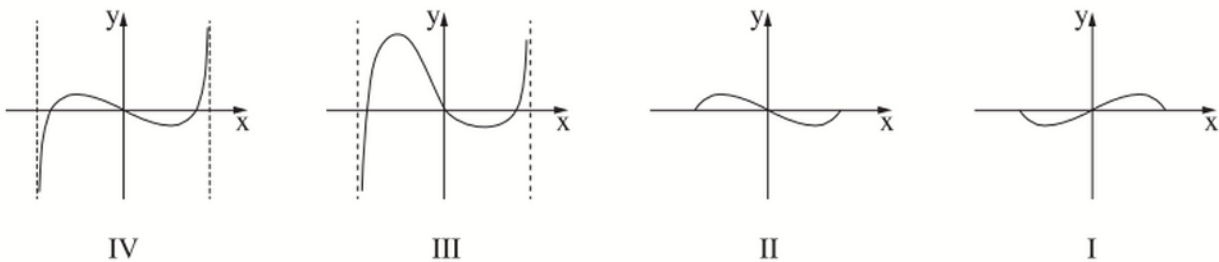
למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \cos x - \sqrt{\cos x}$ בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 - (2) הראו כי הפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה זוגית.
 - (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
 - (4) מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (בתשובתכם דייקו 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית).
- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 - ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).
 - ד. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



נתונה הפונקצייה $g(x) = k - f(x)$, הוא פרמטר חיובי. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום. נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום בין 0 ל- $\frac{\pi}{2}$. נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי הישרים $x = \frac{\pi}{2}$ ו- $x = -\frac{\pi}{2}$ הוא $14 \cdot S$. ה. הביעו את k באמצעות S .

כ(1) תחום ההגדרה:

$\cos x \geq 0$
 $\cos x = 0$
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
 $x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ (תחום)

$-\pi \leq x \leq \pi$

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$(+)$ $(+)$

$(-)$ $(-)$

$- \pi$ $-\frac{\pi}{2}$ 0 $\frac{\pi}{2}$ π

קבוע התחום
 וסימן של $\cos x$
 שלילי בטווח
 השלילי

אלו הם מכובים אר הזין של $\cos x$

גם אר מצדל היתורה
 (cos, sin)

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ וסיבות

(2) נכונות כ"א $f(-x) = f(x)$ (פונקציה זוגית)

$$f(-x) = \cos(-x) - \sqrt{\cos(-x)} = \cos x - \sqrt{\cos x} = f(x)$$

$\cos(-x) = \cos(x)$ קב"ל ה"ל

(3) נקודות חיתוך עם ה'צירים'; $f(0) = \cos 0 - \sqrt{\cos 0} = 1 - \sqrt{1} = 0$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{\cos x} (\sqrt{\cos x} - 1) = 0$$

$(-\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 0), (0, 0)$

$\cos x = 0$ $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ (קטגוריה)
 $\cos x = 1$ $\Rightarrow x = 2\pi k$ (קטגוריה)
 $\cos x = 0$ (קטגוריה)

$$f'(x) = -\sin x - \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

(4) נקודות קיצון (2011)

$$f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\sin x}{1} = \sin x \left(\frac{1}{2\sqrt{\cos x}} - 1 \right)$$

$$f'(x) = \sin x \left(\frac{1 - 2\sqrt{\cos x}}{2\sqrt{\cos x}} \right) = 0$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-1.57 \leq x \leq 1.57$$

$\sin x = 0$
 $x_1 = \pi k$
 $x_1 = 0$ (קטגוריה)

$1 - 2\sqrt{\cos x} = 0$
 $\sqrt{\cos x} = \frac{1}{2} \quad | \cdot 2$
 $\cos x = \frac{1}{4} \quad \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 1.32$

I) $x_2 = 1.32 + 2\pi k = 1.32 + 6.28k$ (קטגוריה)

II) $x_3 = -1.32 + 2\pi k = -1.32 + 6.28k$
 $x_3 = -1.32$ (קטגוריה)

x	$-\frac{\pi}{2}$	-1.32	0	1.32	$\frac{\pi}{2}$
f'	זקוק	$(-)$	0	$(-)$	$(+)$
f	max	min	max	min	max

$$f'(-1.4) = (-)$$

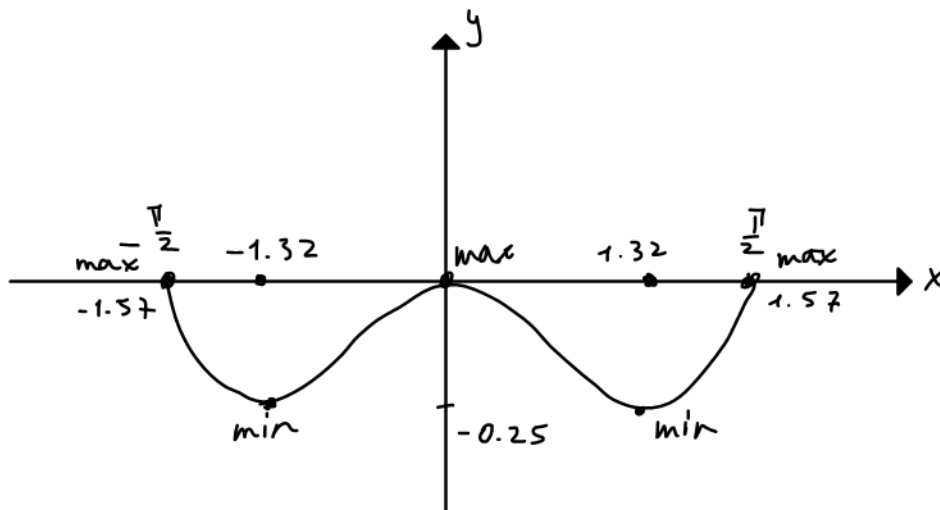
$$f'(1.3) = (-)$$

$$f'(-1.3) = (+)$$

$$f'(1.4) = (+)$$

$$f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = f(0) = 0 \quad f(1.32) = -0.25 = f(-1.32)$$

$$\max(-\frac{\pi}{2}, 0), \min(-1.32, -0.25), \max(0, 0), \min(1.32, -0.25), \max(\frac{\pi}{2}, 0)$$

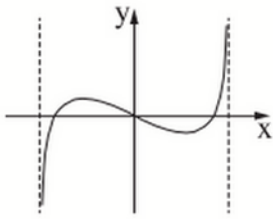


שקיצו

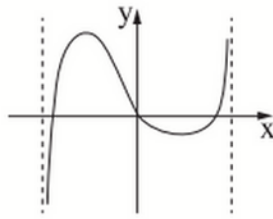
ג. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

$$\begin{aligned} & \text{חיוביות: } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ & \text{שליליות: } x \in \left(-1.32, -0.25\right) \cup \left(0.25, 1.32\right) \end{aligned}$$

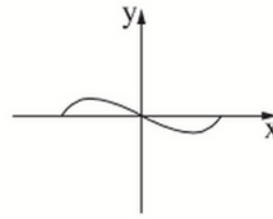
ד. קבעו איזה מן הגרפים I-IV שלפניכם מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



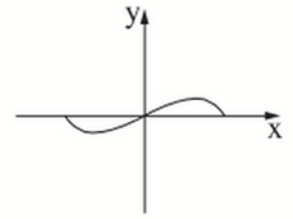
IV



III



II



I

תשובה: גרף IV

נימוקים: * הנגזרת

$$f'(x) = \frac{\sin x (1 - 2\sqrt{\cos x})}{2\sqrt{\cos x}}$$

לא מוגדרת עבור $x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ שגורים $\cos x = 0$

ולכן גרפים I ו-II אינם אפשריים.

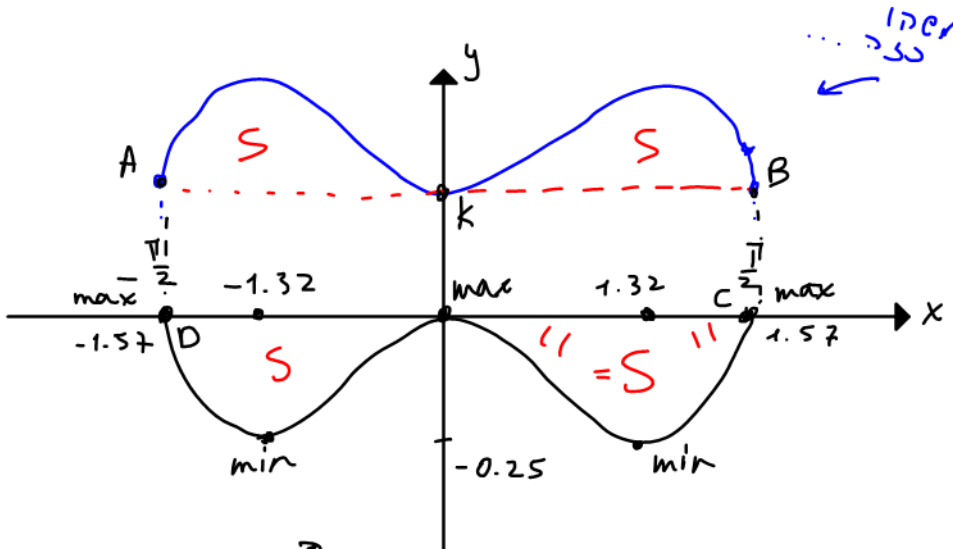
* $f(x)$ פונקציה זוגית ו- $f'(x)$ פונקציה אי-זוגית

אם $f(-x) = f(x)$ אז $-f'(-x) = f'(x)$

ולכן גרף III לא מתאים וגרף IV =

נתונה הפונקצייה $g(x) = k - f(x)$, הוא פרמטר חיובי. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום. נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום בין 0 ל- $\frac{\pi}{2}$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ ועל ידי הישרים $x = \frac{\pi}{2}$ ו- $x = -\frac{\pi}{2}$ הוא $14 \cdot S$. ה. הביעו את k באמצעות S .



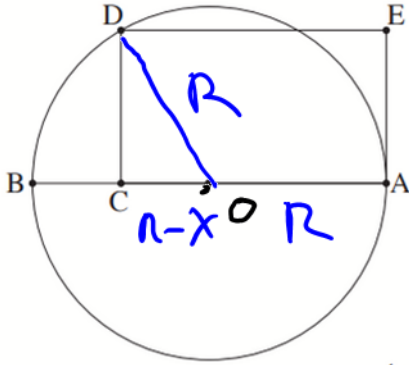
$g(x) = -f(x) + k$
היא שיקוף אנכי של $f(x)$ ויזזה k מעלה.

→ (א) בואו נרשום את המסלולים השונים S ונראה

$$14 \cdot S = \sum_{\text{כל } S} + 4S \Rightarrow \sum_{\text{כל } S} = 10S$$

$$\sum_{\text{כל } S} = k \cdot \pi = 10S$$

$$k = \frac{10S}{\pi}$$



8. הקטע AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R. מסמנים על הקוטר נקודה C ועל המעגל מסמנים נקודה D, כך שהקטע CD מאונך לקטע AB. הקטע AC גדול מ-R. דרך הנקודה D מעבירים ישר שמקביל לקוטר AB. דרך הנקודה A מעבירים משיק למעגל. הישר המקביל והמשיק נחתכים בנקודה E. נסמן: $AC = x$.

א. הביעו באמצעות R את הערך של x שבעבורו שטח המלבן ACDE מקסימלי.

הנקודה F נמצאת על הצלע DE.

ב. הביעו באמצעות R את סכום השטחים המקסימלי של המשולשים CDF ו-AFE.

פתרון:

א. $AB = 2R$

נסמן, $OC = x - R$ $\rightarrow 0 < x < R$

נהדק: $CO = x - R$

$DO = R$

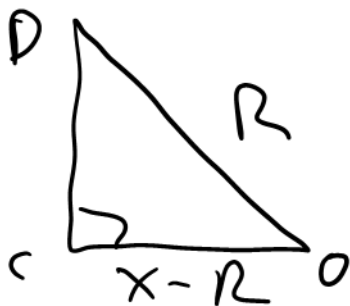
פונקציה הגמורה היא שטח מלבן

$AC < CD$, זכור, קבוע יא - זיין קל

כאן $x > R$ - נתקין בקוטר

cos

$CD^2 + CO^2 = DO^2$





$$CD^2 + (x-R)^2 = R^2$$

$$CD^2 + x^2 - 2Rx + R^2 = R^2$$

$$CD^2 = 2Rx - x^2$$

$$CD = \sqrt{2Rx - x^2}$$

כאורה, שטר הנלקח הוא

$$f(x) = x \cdot \sqrt{2Rx - x^2}$$

(נמצא) - נהוג - הנתיבים
השטח:

$$f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2Rx - x^2} + x \cdot \frac{2R - 2x}{2\sqrt{2Rx - x^2}}$$

$$f'(x) = \sqrt{2Rx - x^2} + \frac{Rx - x^2}{\sqrt{2Rx - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{2Rx - x^2 + Rx - x^2}{\sqrt{2Rx - x^2}}$$



$$f'(x) = \frac{3Rx - 2x^2}{\sqrt{2Rx - x^2}}$$

$$3Rx - 2x^2 = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{כאן יזכור כי } 0 < x < R \\ x = \frac{3R}{2} \end{cases}$$

$$f''(x) = 3R - 4x$$

נ"ס

$$f''\left(\frac{3R}{2}\right) = 3R - 4 \cdot \frac{3R}{2} = -3R < 0$$

כ"ס

הנגזרת השנייה שלילית. בהתאם זכור
יש נקודה מקסימום

$$x = \frac{3R}{2}$$

משוואה: עקור

יתרה של שטח מתחת $A \in CDE$ מקסימלית.

ק. סכום השטחים של המשולשים.

CDF - ADE שווה למחצית שטח

מתחת $A \in CDE$.
 \Downarrow



זכור, נחשב את שטח המלבן הנלקט סימול
 ונחזור ק-2:

$$f(x) = f\left(\frac{3R}{2}\right) = \frac{3R}{2} \cdot \sqrt{2R \cdot \frac{3R}{2} - \left(\frac{3R}{2}\right)^2}$$

$$f\left(\frac{3R}{2}\right) = \frac{3R}{2} \cdot \sqrt{3R^2 - 2.25R^2} = \frac{3R}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}R^2}$$

$$f\left(\frac{3R}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

נחזור ק-2 ונדבר לסכום שטחי
 נדכסילי של שני השטחים הווה.

$$\boxed{\frac{3\sqrt{3}R^2}{8}}$$

