

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ד, 2024, שאלון: 35581, מועד ב', גרסה 06

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יזאל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

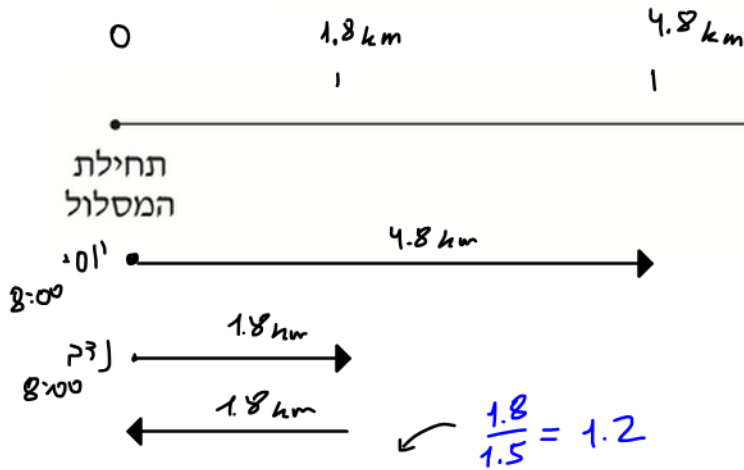




יוסי הלך מתחילת המסלול עד סופו במהירות קבועה ובלי לעצור בדרך.
נדב הלך מתחילת המסלול 1.8 ק"מ במהירות קבועה, ולאחר מכן הוא החליט לחזור לתחילת המסלול.
בדרכו חזרה הלך נדב במהירות הגדולה פי 1.5 ממהירות הליכתו ההתחלתית.
כאשר הגיע נדב חזרה לתחילת המסלול, היה יוסי במרחק של 4.8 ק"מ מתחילת המסלול.
נסמן ב- v קמ"ש את מהירות הליכתו ההתחלתית של נדב.
א. הביעו באמצעות v את מהירות ההליכה של יוסי.

במרחק של 3.9 ק"מ מסוף המסלול יש בריכה.
לאחר שהגיע נדב חזרה לתחילת המסלול, הוא יצא שוב להליכה באותו המסלול.
הוא הלך במהירות $(v + 2)$ קמ"ש במשך t שעות, עד שהגיע לבריכה.
כאשר הגיע נדב לבריכה, הגיע יוסי לסוף המסלול.

ב. הביעו את t באמצעות v .
נדב הגיע לבריכה בשעה 13:30.
ג. מצאו את v , אם ידוע כי v גדול מ-1 קמ"ש.



$x = \frac{1.8}{v}$ מהירות ההליכה של יוסי

$$\frac{4.8}{x} = \frac{1.8}{v} + \frac{1.8}{1.5v}$$

$$\frac{4.8}{x} = \frac{1.8}{v} + \frac{1.2}{v}$$

$$\frac{4.8}{x} = \frac{3}{v} \Rightarrow$$

$$4.8v = 3x$$

$$x = 1.6v$$

מרחק ק"מ	מהירות v קמ"ש	זמן t שעות	הערות
4.8	x	$\frac{4.8}{x}$	יוסי
1.8	v	$\frac{1.8}{v}$	נדב הלוך
1.8	$1.5v$	$\frac{1.8}{1.5v}$	נדב חזרה

מהירות הליכתו של יוסי היא $1.6v$

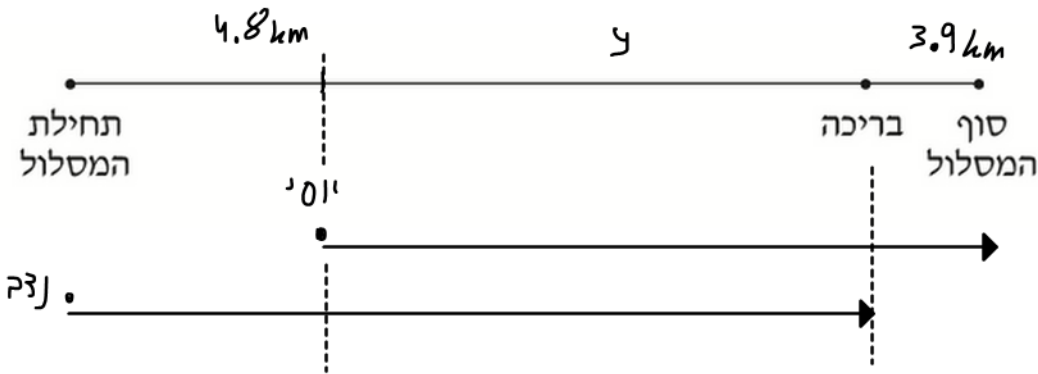
במרחק של 3.9 ק"מ מסוף המסלול יש בריכה.

לאחר שהגיע נדב חזרה לתחילת המסלול, הוא יצא שוב להליכה באותו המסלול.

הוא הלך במהירות $(v + 2)$ קמ"ש במשך t שעות, עד שהגיע לבריכה.

כאשר הגיע נדב לבריכה, הגיע יוסי לסוף המסלול.

ב. הביעו את t באמצעות v .



נסמן: y = המרחק בין הקיבוצים
 פה בין מ'קומאסן יוסי
 התחילת מסלול, נאשר
 נדב יבא סוף מסלול.

מרחק S	מהירות V	זמן t	אדם
$y + 3.9$	$1.6v$	t	יוסי
$y + 4.8$	$v + 2$	t	נדב

$$y + 4.8 = t \cdot (v + 2)$$

$$y + 3.9 = 1.6v \cdot t$$

- נחסר
 ⇒
 משוואות

$$0.9 = vt + 2t - 1.6vt$$

$$0.9 = 2t - 0.6vt$$

$$0.9 = t \cdot (2 - 0.6v)$$

$$t = \frac{0.9}{2 - 0.6v}$$

נדב הגיע לבריכה בשעה 13:30. → $5\frac{1}{2}$ שעות מתחילת השאלה

ג. מצאו את v , אם ידוע כי v גדול מ-1 קמ"ש.

נצק וף לבריכה
נצק חצב
נצק הולך

$$\frac{1.8}{v} + \frac{1.8}{1.5v} + t = 5\frac{1}{2}$$

$$\frac{2-0.6v}{3} + \frac{-v}{2-0.6v} = 5.5 \quad | \cdot v \cdot (2-0.6v)$$

$$3(2-0.6v) + 0.9v = 5.5v(2-0.6v)$$

$$6 - 1.8v + 0.9v = 11v - 3.3v^2$$

$$3.3v^2 - 11.9v + 6 = 0$$

$$v = \frac{20}{33} < 1 \quad v = 3$$

בסוף

$$v = 3$$

2. נתונה סדרה הנדסית שבה $2n + 1$ איברים (n הוא מספר טבעי).

כל איברי הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n+1}$ הם חיוביים.

סכום איברי הסדרה ללא שני האיברים הראשונים גדול פי 4 מסכום איברי הסדרה ללא שני האיברים האחרונים.

נתון כי סכום האיברים שנמצאים אחרי האיבר האמצעי גדול פי 512 מסכום האיברים שנמצאים לפני האיבר האמצעי.

א. מצאו את n .

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אין-סופית.

נתון: B היא סדרה אין-סופית המקיימת לכל k טבעי $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$.

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב-2.

נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב- $\frac{1}{30}$ מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את a_1 .

א. מצאו את n .

$$\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k q^k}{\sum_{k=1}^{2n} a_k} = \frac{a_1 q^2 (q^{2n-1} - 1)}{q - 1} \cdot \frac{q - 1}{a_1 (q^{2n-1} - 1)} = q^2 = 4 \rightarrow q = 2$$

q שלילי (נס)
 מאחר ואיברי הסדרה
 סגור סימן.

כלל של אתונה	סכום של אתונה	
a_1	$a_3 = a_1 q^2$	א' קר I
q	q	ל' ה
$2n-1$	$2n-1$	כ' ה



$$\underbrace{a_1 \dots a_n}_{n \text{ איברים}} \cdot \underbrace{\frac{a_{n+1}}{q}}_{\text{איבר } q} \cdot \underbrace{a_{n+2} \dots a_{2n+1}}_{n \text{ איברים}}$$

האיבר האמצעי הוא a_{n+1}

$$\frac{\int_{\text{איבר } q} \int_{\text{איבר } q} a_1 q^{n+1} (q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q-1} = q^{n+1} = 512$$

$2^{n+1} = 2^9$
 $n+1=9$
 $n=8$

דפני איבר איבר	איבר איבר	
a_1	$a_{n+2} = a_1 q^{n+1}$	איבר I
q	q	איבר II
n	n	איבר III

המשיכו את הסדרה הנתונה, כך שנוצרה סדרה הנדסית אינסופית.

נתון: B היא סדרה אינסופית המקיימת לכל k טבעי $b_k = \frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}$

ב. הוכיחו כי הסדרה B היא סדרה הנדסית, ומצאו את מנתה.

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{\frac{1}{(a_{k+1} + a_{k+2})^2}}{\frac{1}{(a_k + a_{k+1})^2}} = \frac{(a_k + a_{k+1})^2}{(a_{k+1} + a_{k+2})^2} = \left(\frac{a_k + a_{k+1}}{a_{k+1} + a_{k+2}} \right)^2 = \left(\frac{a_k + a_k q}{a_k q + a_k q^2} \right)^2 =$$

$$\left(\frac{a_k (1+q)}{a_k q (1+q)} \right)^2 = \left(\frac{1}{q} \right)^2 = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4} = Q_b$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



בסדרה B כופלים כל איבר שנמצא במקום זוגי ב-2.
נתון כי לאחר ההכפלה, סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב- $\frac{1}{30}$ מסכום האיברים שנמצאים במקומות הזוגיים.

ג. מצאו את a_1 .

מנת סדרת האיברים במקום האי-זוגיים. אצורה הראשון של סדרה.

$$S''_k = S''_k + \frac{1}{30}$$

$$\frac{b_1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{b_1 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{1}{30}$$

$$\frac{16b_1}{15} = \frac{8b_1}{15} + \frac{1}{30}$$

$$32b_1 = 16b_1 + 1$$

$$16b_1 = 1$$

$$b_1 = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{(a_1 + a_2)^2} = \frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{(a_1 + 2a_1)^2} = \frac{1}{16}$$

$$9a_1^2 = 16$$

$$a_1 = \frac{4}{3}$$

a''_1	S''_k	
$2b_2 = 2b_1 \cdot \frac{1}{4}$	b_1	I איברי
$Q_b^2 = \frac{1}{16}$	$Q_b^2 = \frac{1}{16}$	ל נה



3. במחקר שנעשה בקרב תלמידים בבית ספר מסוים נבדק הקשר בין חברות בתנועת נוער ובין התנדבות בקהילה.
70% מן החברים בתנועת נוער מתנדבים בקהילה.
בוחרים באקראי 5 תלמידים שחברים בתנועת נוער (הוצאה עם החזרה).
א. מהי ההסתברות שבחרו לפחות תלמיד אחד שמתנדב ולפחות תלמיד אחד שאינו מתנדב?
נתון כי 55% מן התלמידים אינם חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים, ו- $\frac{1}{12}$ מן התלמידים שאינם חברים בתנועת נוער מתנדבים.
ב. כמה אחוזים מן התלמידים חברים בתנועת נוער?
במחקר השתתפו 100 תלמידים סך הכול.
ג. כמה מן התלמידים חברים בתנועת נוער ואינם מתנדבים?
ד. בוחרים באקראי 3 מן התלמידים שאינם מתנדבים (הוצאה ללא החזרה).
(1) מהי ההסתברות שהתלמיד הראשון שנבחר חבר בתנועת נוער וששני התלמידים שנבחרו אחריו אינם חברים בתנועת נוער?
(2) מהי ההסתברות שאחד מן התלמידים שנבחרו חבר בתנועת נוער והשניים האחרים אינם חברים בתנועת נוער אם ידוע שהתלמיד הראשון שנבחר אינו חבר בתנועת נוער?

כ. A - חברים בתנועת נוער
 \bar{A} - אינם חברים בתנועת נוער
 B - מתנדבים בקהילה
 \bar{B} - אינם מתנדבים בקהילה
(ג'ד יי):

$P(B/A) = 0.7$

$P\left(\begin{matrix} \text{למנו 5 חברים בתנועת נוער} \\ \text{ולמנו 1 מתנדב בקהילה} \\ \text{1 אינו חבר בתנועת נוער} \\ \text{1 אינו מתנדב בקהילה} \end{matrix}\right) = 1 - (P_5(0) + P_5(1)) = 1 - \left(\binom{5}{0} 0.7^0 0.3^5 + \binom{5}{1} 0.7^1 0.3^4\right)$

$= 1 - 0.3^5 - 0.7^5 = 0.8295$

ז. $\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0.7$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.55$

$P(B/\bar{A}) = \frac{1}{12} \rightarrow \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{1}{12}$

	$P(\bar{A})$	$P(A)$	
			$P(B)$
	0.55		$P(\bar{B})$
1			



$P(A) = x$: (27)

$P(B|A) = 0.7x$

$P(\bar{A}) = 1 - x$

$\frac{P(B|\bar{A})}{1-x} = \frac{1}{12} \rightarrow P(B|\bar{A}) = \frac{1}{12}(1-x)$

אכי תכונת הטקס:

$\frac{1}{12}(1-x) + 0.55 = 1-x$

$\frac{1}{12} - \frac{1}{12}x + 0.55 = 1-x$

$\frac{11}{12}x = \frac{11}{30} \rightarrow x = \frac{2}{3}$

	$P(\bar{A})$	$P(A)$	
	$\frac{1}{12}(1-x)$	$0.7x$	$P(B)$
	0.55		$P(\bar{B})$
1	$1-x$	x	

40% מן התאגידים חזרו בתנועת טעם

2. $P(A \cap \bar{B}) = x - 0.7x = 0.3x = \frac{3}{25}$

$\frac{3}{25} \cdot 100 = 12$

12 טעמים חזרו בתנועת טעם ואינם מתנגדים

307

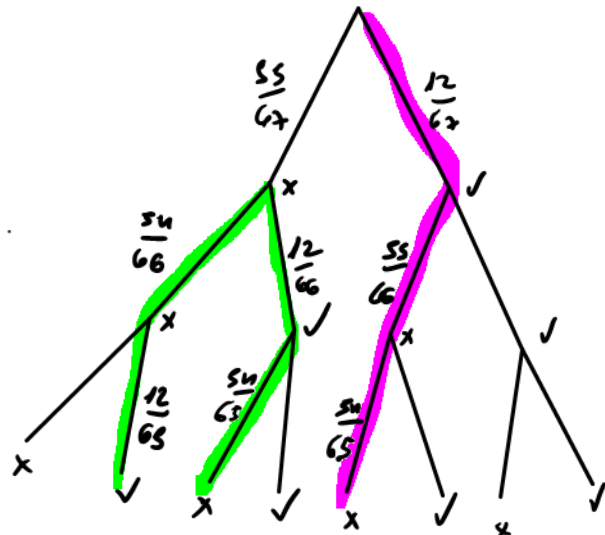
מספר התאגידים שטעמי מתנגדים הוא: $67 - 60 - 0.67 = 0.67$

מתוך 12 בתנועת טעם יש 55 אל דגש נשאר

$P(\text{התנגד / תנועת טעם / אל דגש נשאר}) = \frac{12}{67} \cdot \frac{55}{66} \cdot \frac{54}{65} = \frac{108}{871}$

327

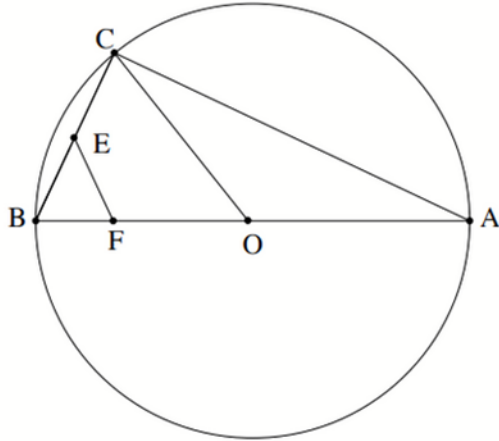
$P(\text{התנגד / תנועת טעם / אל דגש נשאר}) = \frac{54}{66} \cdot \frac{12}{65} + \frac{12}{66} \cdot \frac{54}{65} = \frac{216}{715}$



למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





4. משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש- AB הוא קוטר במעגל.
 הנקודה E נמצאת על הצלע BC,
 והנקודה F נמצאת על הקטע BO, כמתואר בסרטוט.
 נתון כי המרובע CEFO הוא בר חסימה במעגל.
- א. הוכיחו: $EF = EB$.
- המעגל החוסם את המרובע CEFO חותך את הצלע AC בנקודה D
 כך ש- ED מקביל ל- AB.
- ב. (1) הוכיחו כי המרובע EDOB הוא מקבילית.
 (2) הוכיחו: $OD \perp AC$.
- הישר l משיק בנקודה C למעגל החוסם את המשולש ABC.
 ג. הוכיחו כי הישר l משיק למעגל החוסם את המרובע CEFO.

פתרון:

המספר	לענה	נימוך
1	AB קוטר במעגל	נתון
2	CEFO בר חסימה	נתון
3	נסמן $\angle BAC = \alpha$	ע.נ.ו
4	$\angle BOC = 2\alpha$	זווית מרכזית שווה לזווית חיצונית שווה לזווית חיצונית שווה לזווית חיצונית שווה לזווית חיצונית



<u>נימוק</u>	<u>טענה</u>	<u>המסבר</u>
<p>כציוסיק במעבר ולוים .</p>	$O B = O C = O A$	<p>5</p>
<p>זויה היקפית היסודי על קוטר איה עס אפי 1</p>	$\angle A C B = 90^\circ$	<p>6</p>
<p>השאלה עסו במשולש ABC. אפי 3, 6</p>	$\angle A B C = 90^\circ - \alpha$	<p>7</p>
<p>סכום זווית (גפוי) במלבג חבוק במעגל הויל 180 אפי 2, 4</p>	$\angle C E F = 180^\circ - 2\alpha$	<p>8</p>
<p>זווית זמזונג משליג עסו. אפי 8</p>	$\angle B E F = 2\alpha$	<p>9</p>
<p>השאלה עסו במשולש BEF. אפי 7, 9</p>	$\angle B F E = 90^\circ - \alpha$	<p>10</p>
<p>במשולש מול זווית שול מונח 7, 10 באע שול 10</p>	$E F = E B$	<p>11 ל.י.ס.א.</p>



המספר	אגנה	ניתוח
12	<p>0 נקודת החימוק של המעל המוסק א - CEFO עק א</p>	<p>נתון</p>
13	<p>נקייה הטעיק DO - 1 DE</p>	<p>קניו עטר</p>
14	<p>DE AB</p>	<p>נתון</p>
15	<p>$\angle EFO = 90^\circ + \alpha$</p>	<p>זווית צמזמן של זווית 140. אבי 10</p>
16	<p>$\angle EDO = 90^\circ + \alpha$</p>	<p>במרוכז חבוק קמח סכום זווית נגדי 180. אבי 15, 12</p>
17	<p>$\angle DOB = 90^\circ + \alpha$</p>	<p>סכום זווית חז צדדי קין יסריק מקביל 180. אבי 16, 14</p>



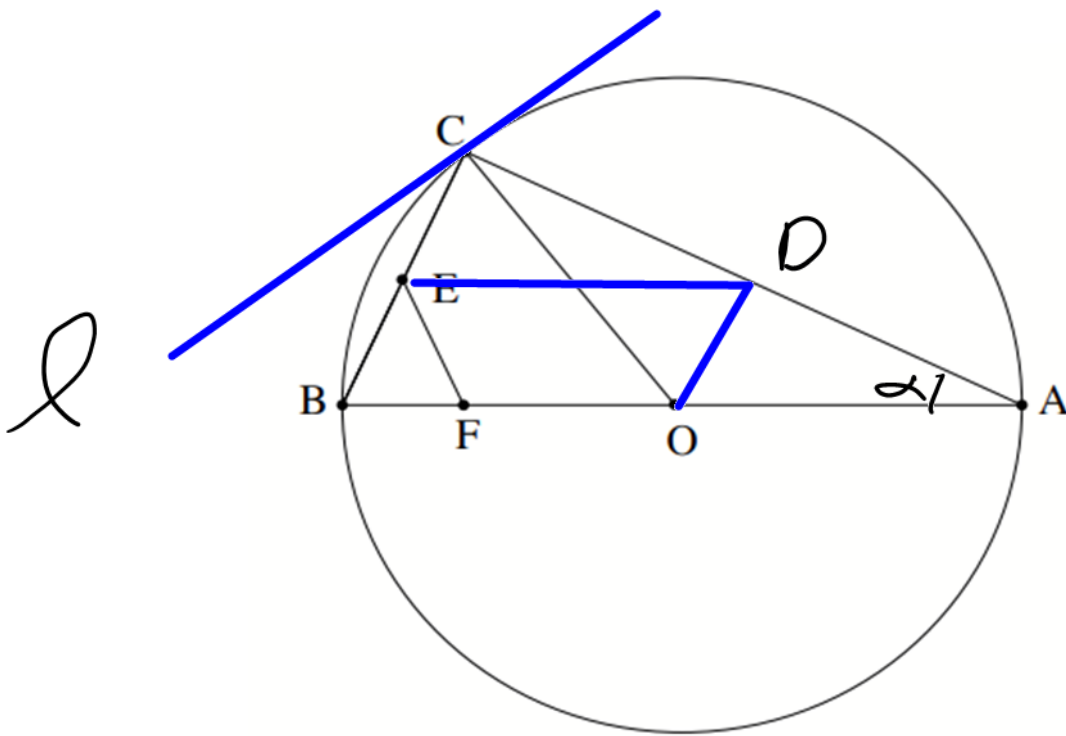
<u>ניחוד</u>	<u>טענה</u>	<u>המסבר</u>
ח.ב.ו. - 5/10 אפי 7,7	$\#E\#B\#A\#D\#C\#$	(18)
אם בין שני ישרים יש ישר שלישי שחלק אותם יש 5 זוויות הן צדדי-שסכומן 180, הישרים מקבילים אפי 18	D B E	(19)
הצדקה מקבילי - אפי 14, 19	B D E מקבילי	(20)
זווית מתא-מת בין ישרים מקבילים שווה אפי 15	$\#C\#D\#A\# = \#B\#C\#A\#$ $= 90$	מ.ש.ל. ק. (1)
אפי 21	C ⊥ A D	(21)
		מ.ש.ל. ק. (2)



נימוק	טענה	המספר
151	ל משיק קו זווטה למגעל החיים זית מעולם ABC	23
משיק מאונך לרדיוס ואז נהדו צת ההשקה.	LOL	24
לפי 23 לפי 22	$\angle CPO = 90^\circ$	25
מחצלת היתקב.	אס קוטר במגעל החיים אז מרובק CEFO	26
לפי 25	ל משיק למגעל החיים אז מרובק CEFO	27
ישר המאונך לרדיוס בוקצהו הוא משיק למגעל לפי 24, 26	מ.ש.ל ?	



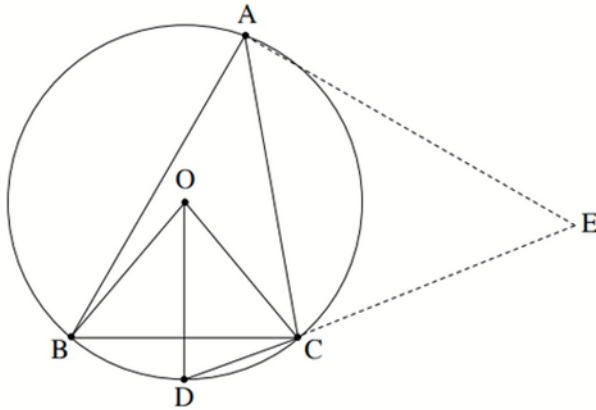
שיעור עם תוספת:



למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





5. משולש ABC חד זוויות חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.

הנקודה D היא אמצע הקשת הקטנה BC, כמתואר בסרטוט.

נתון: $\angle ABC = 60^\circ$.

נסמן: $\angle BAC = \alpha$.

א. הביעו באמצעות R ו- α את שטחי המשולשים

ABC ו-ODC.

נתון כי היחס בין שטח המשולש ABC

ובין שטח המשולש ODC הוא $2\sqrt{3} \sin(84^\circ)$.

ב. מצאו את הערך של α .

הנקודה E נמצאת על המשך המיתר DC כך ש- $\angle CAE = 51^\circ$, כמתואר בסרטוט.

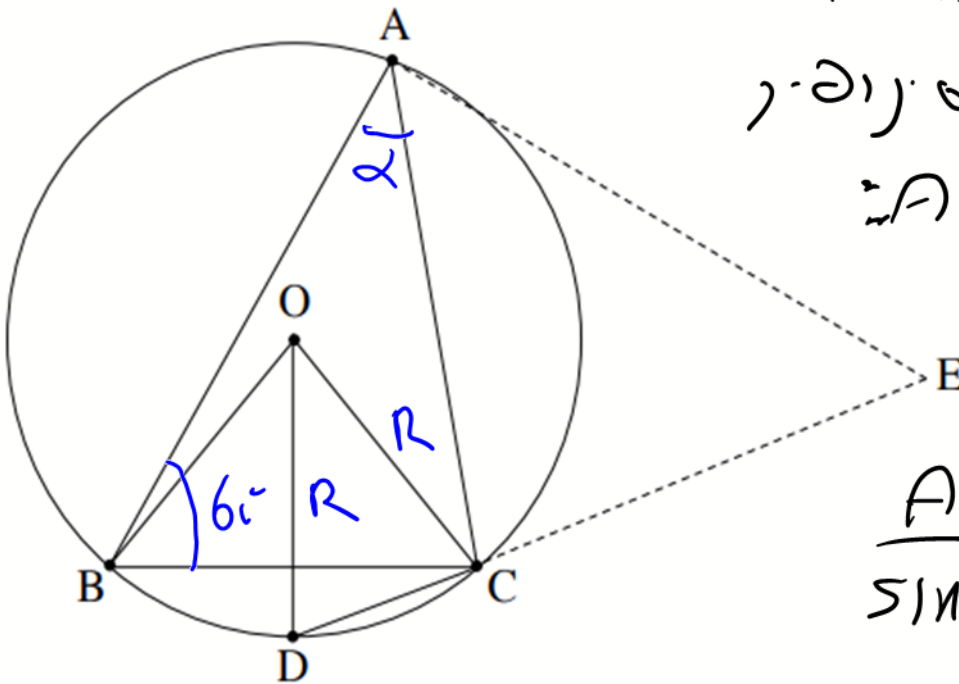
ג. הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החסום במשולש ACE.

פתרון:

א. $\angle ACB = 120^\circ - \alpha$

נחשב את הסינוס

במשולש ABC:



$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$AC = 2R \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}R$$



המשך:

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow BC = 2R \sin \alpha$$

מכיוון, לפי נוסחת ג'ורג'ון - שטח משולש:

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin \alpha}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}R \cdot 2R \sin \alpha \cdot \sin(\alpha - \alpha)}{2}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{3} R^2 \sin \alpha \sin(\alpha - \alpha)$$

נשים לב ל: \cos

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$$

(זווית מרכז - זווית היקף) $\cdot 2$ זווית α

היקף - ישר - זווית α אינה ישרה.

$$\angle BOD = \angle COD = \alpha$$

(זהו זווית שווה במעגל, נשען על זווית מרכזית שווה)



נכון:

$$S_{COD} = \frac{CO \cdot DO \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$$

ג. נתון:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{COD}} = 2\sqrt{3} \cdot \sin 84^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3} R^2 \sin \alpha \sin(120^\circ - \alpha)}{\left(\frac{R^2 \sin \alpha}{2}\right)} = 2\sqrt{3} \sin 84^\circ$$

$$2\sqrt{3} \sin(120^\circ - \alpha) = 2\sqrt{3} \sin 84^\circ$$

↓

$$120^\circ - \alpha = 96^\circ$$

$$120^\circ - \alpha = 84^\circ$$

נכון
נכון
נכון

$$\alpha = 36^\circ$$



d.

$$\angle ACB = 120^\circ - 36^\circ = 84^\circ$$

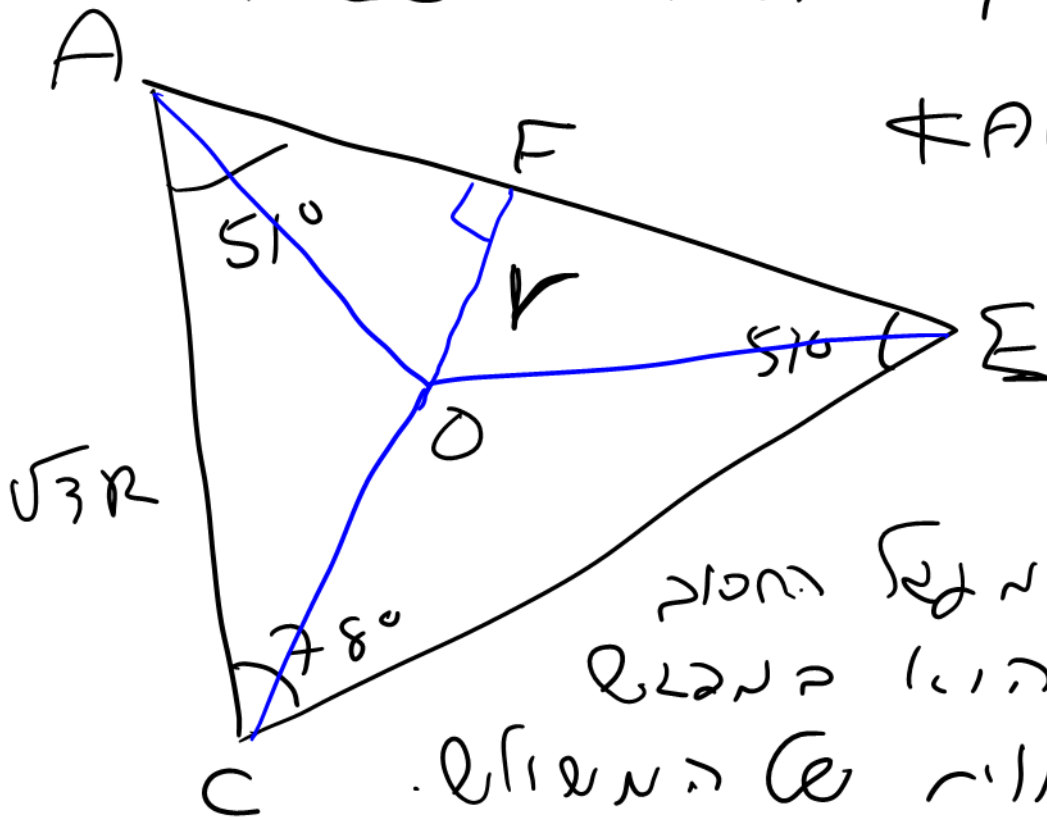
$$\angle BCD = \frac{1}{2} \angle BAC = 18^\circ$$

$$\angle ACD = 102^\circ$$

$$\angle ACE = 78^\circ$$

נתבונן במשולש ACE

$$\angle AEC = 51^\circ$$



מרכז המשולש החסוב
במשולש הוא במגלש
חוצי הצלעות המשולש.

נקיר ו- חוצי הצלעות המשולש
עווה שזויהק (A=C) ולכן נמשך



|| חוצה שלוי - הוויס (FACE) גב זח'זון עם ק"ג AE קנהולק שרכחן, ק- F.

חוצה שלוי - הרקיס השולס שולה שזקיים תיסו עם זוקה זכנ

$$\angle AFC = 94$$

נסחן א - זרכס הנעל החכוק

$$\angle FAO = 25.5^\circ$$

כגת נח'ס) א - AF קמשולס AFC

$$\cos 51^\circ = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AF = 1.09R$$

וויסיק לשולס AOF :

$$\tan 25.5^\circ = \frac{OF}{AF} \rightarrow OF = 0.52R$$

OF ~ אונכ, זקלג AE זכנ הווא רכיוס הנעל החכוק



כשרות ACE .

משוקקה: רציוס הגל
החובב כשרות ACE

הוא 0.52R



6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x-1}{(x-a)^3}$, המוגדרת בתחום $x \neq a$, הוא פרמטר שונה מ-0.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y .

ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת

משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה- x , וקבעו את סוגה.

הגרפים 1–4 שבסוף השאלה מתארים את הפונקצייה $f(x)$ בעבור ערכים שונים של a .

ג. התאימו לכל אחד מן הערכים IV–I של a את הגרף המתאים לו, ונמקו את תשובותיכם.

I. $a = -1$ II. $a = 0.5$ III. $a = 1$ IV. $a = 2$

נתונה הפונקצייה $g(x)$, המקיימת $g(x) = f(x) - b$ בעבור הערך של a המתאים לגרף 2.

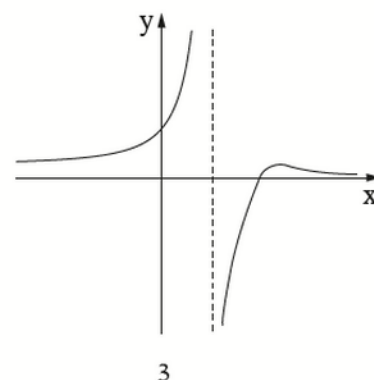
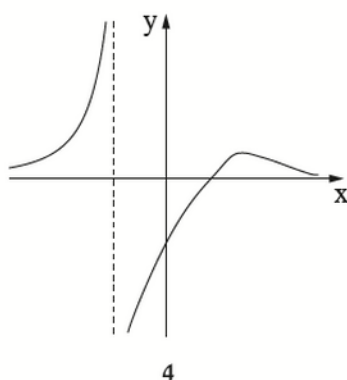
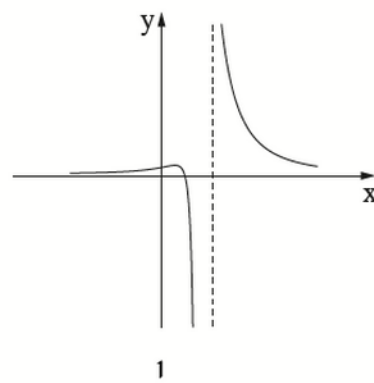
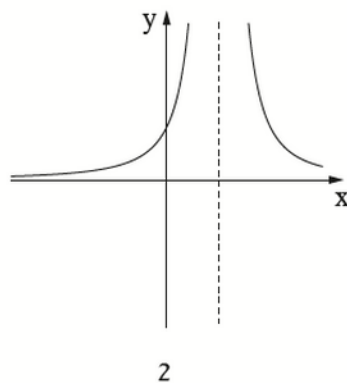
הוא פרמטר חיובי.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x היא $(t, 0)$, $1 < t < 6$.

נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $g(x)$,

על ידי הישר $x = t$ ועל ידי הישר $x = 6$ הוא 3.8.

ד. מצאו את הערך של b .



נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x-1}{(x-a)^3}$, המוגדרת בתחום $x \neq a$, הוא פרמטר שונה מ-0.

- א. ענו על התת-סעיפים (1)-(2). הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.
 (1) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם ציר ה- y .

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-a)^3}, \quad x \neq a, \quad a \neq 0 \quad (1) \text{ א.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

אסימטוטה אנכית $x=a$
אסימטוטה אופקית $y=0$

הערה: אם $a=1$ אז לפונקצייה הנלונת יש אס' $x=a$ גם כן

$$f(0) = \frac{-1}{(-a)^3} = \frac{-1}{-a^3} = \frac{1}{a^3}$$

נק' חיתוך ציר y $(0, \frac{1}{a^3})$ (2) א.

ב. מצאו עבור אילו ערכים של a יש לפונקצייה $f(x)$ נקודת קיצון שנמצאת משמאל לאסימפטוטה האנכית לציר ה- x , וקבעו את סוגה.

$x < a$ קיצון

$$u = x-1 \quad v = (x-a)^3$$

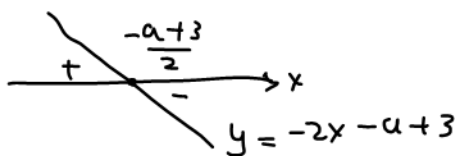
$$u' = 1 \quad v' = 3(x-a)^2 \cdot 1$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-a)^3 - (x-1) \cdot 3 \cdot (x-a)^2}{((x-a)^3)^2} = \frac{(x-a)^2 \cdot (x-a-3(x-1))}{(x-a)^6}$$

$$f'(x) = \frac{-2x - a + 3}{(x-a)^6} = 0 \Rightarrow -2x - a + 3 = 0$$

$$2x = -a + 3$$



$$\text{קיצון } x = \frac{-a+3}{2}$$

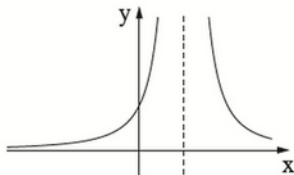
$$\begin{aligned}
 & x < a \text{ קיבולן} \\
 & \frac{-a+3}{2} < a \quad | \cdot 2 > 0 \\
 & -a+3 < 2a \\
 & 3 < 3a \quad | :3 > 0 \\
 & 1 < a
 \end{aligned}$$

\Rightarrow

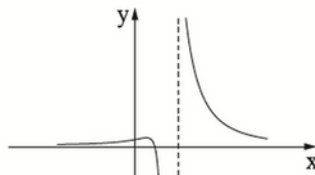
$a > 1$

הגרפים 1-4 שבסוף השאלה מתארים את הפונקצייה $f(x)$ בעבור ערכים שונים של a .
ג. התאימו לכל אחד מן הערכים IV-I של a את הגרף המתאים לו, ונמקו את תשובותיכם.

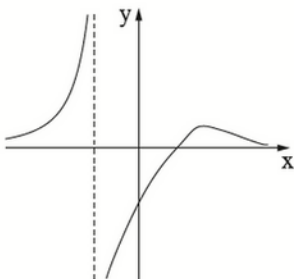
a = 2 .IV a = 1 .III a = 0.5 .II a = -1 .I



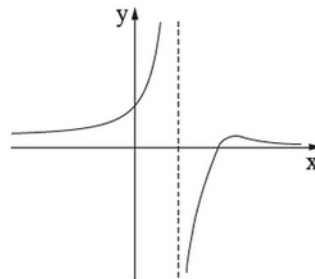
2



1



4



3

4 גרף = I

כי הואס היאנבית $x=a$ מאמאל
לפינה הי- y

1 גרף = IV

לפי סעיליה, נק' הקיבולן מאמאל
הואס היאנבית ($a > 1$)

3 גרף = II

לפי סעיליה, נק' הקיבולן
מיאן הואס היאנבית

2 גרף = III

עבור $a=1$ יש לפונקצייה
המקבולת

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^3} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

אס אנבית $x=1$ ואין לה נקודות קיבולן.

הערה: $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ היא הצלחה עם $y = \frac{1}{x^2}$

אסיכוס

4 גרף = I
3 גרף = II
2 גרף = III
1 גרף = IV

נתונה הפונקצייה $g(x) = f(x) - b$, המקיימת $a = 1$ בעבור הערך של a המתאים לגרף 2. b הוא פרמטר חיובי.

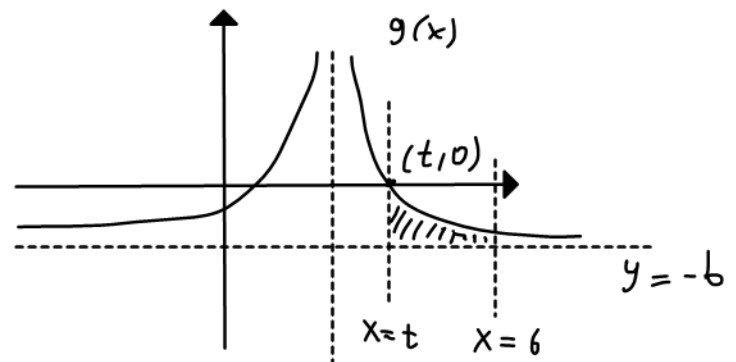
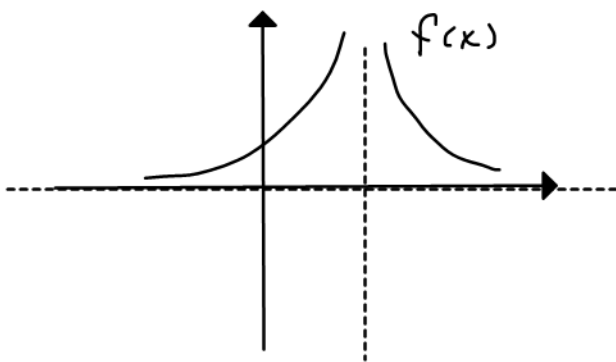
אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x היא $(t, 0)$, $1 < t < 6$. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$, על ידי האסימפטוטה האופקית של הפונקצייה $f(x)$, על ידי הישר $x = t$ ועל ידי הישר $x = 6$ הוא 3.8. מצאו את הערך של b .

$$g(x) = f(x) - b, \quad b > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$$

$$g(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - b$$

עבור $a = 1$: 2



$$S = \int_t^6 (g(x) - (-b)) dx = \int_t^6 (f(x) - b + b) dx = \int_t^6 f(x) dx$$

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int (x-1)^{-2} dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1 \cdot 1} = \frac{-1}{x-1} + C$$

$$S = \left[\frac{-1}{x-1} \right]_t^6 = \frac{-1}{6-1} - \frac{-1}{t-1} = \frac{-1}{5} + \frac{1}{t-1} = 3.8 \quad \sqrt{\frac{1}{5}} \quad \sqrt{+\frac{1}{5}}$$

$$\frac{1}{t-1} = 4 \Rightarrow t-1 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 1.25$$

$$g(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{(1.25-1)^2} - b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{(0.25)^2}$$

$b = 16$

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = (b + \cos x) \sin x$, המוגדרת בתחום $-\pi \leq x \leq \pi$, b הוא פרמטר.

א. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

נתון כי לגרף הפונקצייה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

ב. לפניכם שלוש אפשרויות I-III לערכים של b .

קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקצייה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם.

I. $b = 0$ II. $0 < b < 1$ III. $1 \leq b$

נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$, כאשר $\cos x = \frac{1}{4}$, הוא $\left(-\frac{5}{8}\right)$.

ג. מצאו את הערך של b .

הציבו $b = 1$ בפונקצייה $f(x)$, וענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ה. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)$ המקיימת $g(x) = (f(x))^2 \cdot f'(x)$. הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

ו. חשבו את השטח ברביע הראשון, המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

א. האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמקו את תשובתכם.

$$f(-x) = (b + \cos(-x)) \sin(-x) = (b + \cos x) \cdot (-\sin x) = -f(x)$$

הכונן הינה א"ס

נתון כי לגרף הפונקצייה $f(x)$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

ב. לפניכם שלוש אפשרויות I-III לערכים של b .

קבעו איזו אפשרות יכולה להתאים לפונקצייה $f(x)$, ונמקו את קביעתכם.

I. $b = 0$ II. $0 < b < 1$ III. $1 \leq b$

$$0 = (b + \cos x) \sin x$$

$$b + \cos x = 0 \quad \sin x = 0$$

$$\cos x = -b \quad x = \pi k$$

$$x = 0, \pi, -\pi$$

$b > 1$ כאשר $b = 1$ כגבולות השלולא ו- $\cos x = -1$ ב- $x = \pi, -\pi$ שכבר התקבלו מהשלולא

$\sin x = 0$ כאשר $b < 1$ וכי, השלולא $\cos x = -b$ אין בתחולא.



נתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$, כאשר $\cos x = \frac{1}{4}$, הוא $(-\frac{5}{8})$.
ג. מצאו את הערך של b .

$$u = b + \cos x \quad u' = -\sin x$$

$$v = \sin x \quad v' = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin^2 x + \cos x(b + \cos x) = -\sin^2 x + b \cos x + \cos^2 x$$

נחיל את $-\sin^2 x$ כבי $\cos^2 x - 1$

כי $\cos x = \frac{1}{4}$ נקבל

$$f'(x) = \cos^2 x - 1 + b \cos x + \cos^2 x$$

$$f'(x) = 2\cos^2 x + b \cos x - 1$$

$$-\frac{5}{8} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + b \cdot \frac{1}{4} - 1$$

$$-\frac{5}{8} = \frac{1}{8} + \frac{b}{4} - 1$$

$$\frac{1}{4} = \frac{b}{4}$$

$$b = 1$$

הציבו $b = 1$ בפונקצייה $f(x)$, ונענו על הסעיפים ד-ו.

ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

$$f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x = \pi + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = \pi, -\pi$$

x	$-\pi < x < -\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3} < x < \pi$	π			
$f'(x)$	0	-	0	+	0	-	0
$f(x)$	max	min	max	min	max	min	max

$$f(\pi) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$f(-\pi) = 0$$

$$(\pi, 0) \text{ min}$$

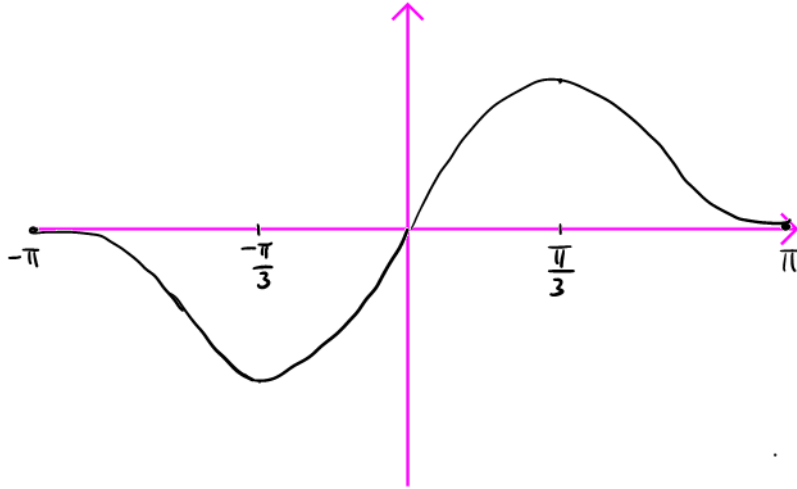
$$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ max}$$

$$\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ min}$$

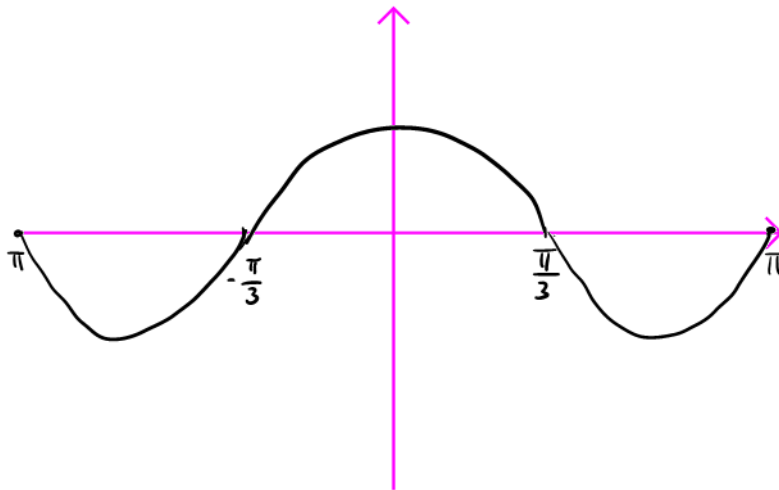
$$(-\pi, 0) \text{ max}$$



ה. (1) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.



(2) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



נתונה הפונקצייה $g(x)$ המקיימת $g(x) = (f(x))^2 \cdot f'(x)$. הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

ו. חשבו את השטח ברביע הראשון, המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

מהיקנותי בתחומי חיוביות ואפילו של $f'(x)$ אולי $g(x)$ (מצאה כרגע I כאלו $0 < x < \frac{\pi}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (g(x) - 0) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (f(x))^2 \cdot f'(x) dx = \frac{(f(x))^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{(f(\frac{\pi}{3}))^3}{3} - \frac{(f(0))^3}{3} = \frac{(\frac{3\sqrt{3}}{4})^3}{3} - 0 = \frac{27\sqrt{3}}{64}$$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



8. נתונה הפונקצייה $f(x) = \sqrt{x}$, המוגדרת בתחום $x \geq 0$, ונתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{32}{x^2+3}$, המוגדרת לכל x .

א. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הפיתול של הפונקצייה $g(x)$.

(3) סרטטו במערכת צירים אחת סקיצה של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

בנקודה $C(t, 0)$ מעבירים אנך לציר ה- x , $t > 0$.

האנך חותך את גרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של הפונקצייה $g(x)$ בנקודה B .

ב. הביעו באמצעות t את מכפלת אורכי הקטעים AC ו- BC .

ג. הוכיחו כי מכפלת אורכי הקטעים AC ו- BC מקסימלית כאשר הנקודה B היא נקודת פיתול של הפונקצייה $g(x)$.

נתונה הפונקצייה $k(x) = \frac{8\sqrt{x-5}}{(x-5)^2+3}$, המוגדרת בתחום $x \geq 5$.

ד. היעזרו בסעיפים הקודמים של השאלה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקצייה $k(x)$, וקבעו את סוגה. נמקו את תשובתכם.

כ(1) $g'(x) = \frac{-32 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} \rightarrow \frac{-64x}{(x^2+3)^2} = 0 \rightarrow x=0$

x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	↘	

$g'(0) = -$
 $g'(-) = +$

$g(0) = \frac{32}{3} \rightarrow \boxed{\text{max}(0, \frac{32}{3})}$

כ(2) $g''(x) = \frac{-64(x^2+3)^2 + 64x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} \rightarrow \frac{-64(x^2+3)(x^2+3-4x^2)}{(x^2+3)^4} = 0$

$-64(x^2+3)(3-3x^2) = 0$
 $x^2 = 1$
 $x = \pm 1$

x	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$g''(x)$	+	-	+
$g(x)$	∪	∩	∪

$g''(2) = +$
 $g''(0) = -$
 $g''(-2) = +$

$g(1) = \frac{32}{1+3} = 8$ $g(-1) = \frac{32}{1+3} = 8$

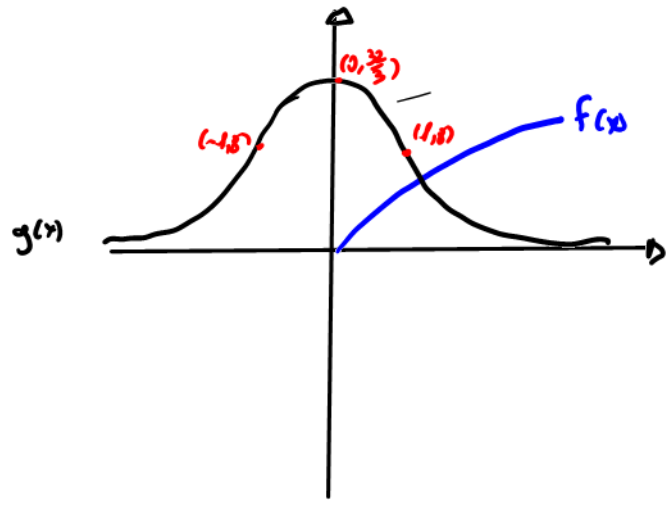
$(-1, 8)$ $(1, 8)$ (נקודות קיצון)



ניקוד אלוטר
כי אלוטר יש
אם אלוטר = 0

g(x): $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{32}{x} = 0$

1. (3)



2. $A(t, \sqrt{t})$ $B(t, \frac{32}{t^2+3})$

$AC = \sqrt{t}$ $BC = \frac{32}{t^2+3}$

$AC \cdot BC = \frac{32\sqrt{t}}{t^2+3}$

3. $h(t) = \frac{32\sqrt{t}}{t^2+3}$

$h'(t) = \frac{\frac{16}{\sqrt{t}}(t^2+3) - 32\sqrt{t} \cdot 2t}{(t^2+3)^2} \rightarrow \frac{16}{\sqrt{t}}(t^2+3) - 64t\sqrt{t} = 0 \rightarrow 1\sqrt{t}$

$16(t^2+3) - 64t^2 = 0 \rightarrow 48 = 48t^2 \rightarrow t = \pm 1 \rightarrow (t > 0) \ t = 1$

$h'(2) = -$
 $h'(\frac{1}{2}) = +$

$t=1$ כיסוי
מסוף אליו הקטעים
BC ו AC

$h(1) = \frac{32}{4} = 8$ $\max(1, 8)$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



3. ניתן להצביר את $K(x)$ כ:

$$K(x) = \frac{1}{2} h(x-s)$$

אם הצורה של $K(x)$ היא הנגה אנקיר h
 (אם h ימקוט ימנה אכח אנכי. עוכי ה- g יקטט
 כי כה)

יצק: עזונו הקיר הקצון של $K(x)$ קט: $\max(\theta, z)$

