שאלון

581

(5 יח"ל, 806)

בגרויות במתמטיקה

לכל השאלות בחוברת פתרונות וידאו מלאים
באפליקציית MY.GEVA ובאתר MY.GEVA.CO.IL

מדהים! מה הלאה?

מורידים את האפליקציה MY.GEVA

Google play · App Store

סורקים את הברקוד המופיע ליד כל שאלה

צופים בסרטון ההסבר המלא לשאלה

מפציצים בבגרות

יואל גבע

עדכני ל- 2023-2024

הקדמה

מורים ותלמידים יקרים,

אנו שמחים להגיש לכם חוברת הכנה לקראת הבגרות במתמטיקה לשאלון 581 (5 יחידות לימוד).

בחוברת תמצאו את 49 מבחני הבגרות שנערכו עד היום בשאלון 581 (מועדי חורף וקיץ), עד וכולל מועד ב׳, קיץ 2023.

מה מיוחד בחוברת זו?

לכל השאלות בחוברת קיימים סרטוני וידאו הכוללים פתרונות מלאים באתר **my.geva.co.il**

כיצד צופים בסרטון פתרון?

נכנסים לאתר **my.geva.co.il**

בוחרים את מספר יחידות הלימוד ונכנסים לפתרונות וידאו למבחני בגרות 581.

כעת ניתן לראות את פתרונות הווידאו לכל השאלות ממבחני הבגרות.

הפתרונות לשני המבחנים הראשונים הם בחינם!

כיצד אנו ממליצים להיעזר בסרטוני הפתרון שבאתר my.geva?

בכל שאלה שבה אתם מתקשים, או שהתשובה הסופית שקיבלתם אינה תואמת את התשובות המופיעות בסוף המבחן, מומלץ לצפות בסרטון הפתרון המתאים. כמו כן, אם קיים נושא שבו אתם מרגישים צורך בחיזוק נוסף, מומלץ לצפות בכל סרטוני הפתרון באותו נושא. (מיון שאלות המבחנים לפי נושאים מופיע בהמשך החוברת.)

בנוסף, ניתן לרכוש באתר **my.geva.co.il** מנוי לסרטוני פתרון לשאלות מתוך ספרי הלימוד לשאלון 581, בהוצאת יואל גבע.

לתשומת ליבכם!

החל ממועד קיץ תשע״ד, 2014, שאלון 581 כולל 8 שאלות ולא 9 שאלות כפי שהיה בעבר.
(הפרק השני בשאלון כולל 2 שאלות במקום 3.)
כמו כן, הנושאים אינדוקציה מתמטית, בעיות תערובת וסדרות מעורבות אינם נכללים עוד בתכנית הלימודים. כדי להתאים את מבחני הבגרות למבנה הבחינה העדכני ולתכנית הלימודים החלפנו את השאלות בנושאים הנ״ל בשאלות אחרות הנכללות בתכנית הלימודים.

אנו מאחלים לכם הצלחה רבה בבחינת הבגרות.
יואל גבע – הוצאת הספרים, צוות האתר my.geva.co.il

המבנה של שאלון 581

תלמידי 5 יחידות לימוד נבחנים בשני שאלונים.
השאלון הראשון הוא 035**581** והשאלון השני הוא 035**582**.

בשאלון 581 שלושה פרקים.
משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
בסך הכול צריך לענות על 5 שאלות מתוך 8 שאלות.

המבנה של שאלון 035581:

פרק ראשון – בעיות מילוליות, סדרות, הסתברות (40 נקודות).
הפרק כולל 3 שאלות, מתוכן יש לענות על 2 שאלות (לכל שאלה – 20 נקודות).

פרק שני – גיאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות).
הפרק כולל 2 שאלות, מתוכן יש לענות על שאלה אחת (לכל שאלה – 20 נקודות).

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות עם שורשים ריבועיים, ושל פונקציות טריגונומטריות (40 נקודות).
הפרק כולל 3 שאלות, מתוכן יש לענות על 2 שאלות.
(לכל שאלה – 20 נקודות).
בעמוד הבא מצורף דף ההוראות לנבחן כפי שמופיע בטופס הבגרות של שאלון 581.

מדינת ישראל
משרד החינוך

סוג הבחינה: א. בגרות לבתי ספר על־יסודיים
ב. בגרות לנבחנים אקסטרניים
מועד הבחינה:
מספר השאלון: 035806, 316
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. <u>משך הבחינה</u>: שלוש שעות וחצי.

ב. <u>מבנה השאלון ומפתח ההערכה</u>: בשאלון זה שלושה פרקים.

פרק ראשון	— אלגברה והסתברות	— 20×2	— 40 נקודות
פרק שני	— גאומטריה וטריגונומטריה במישור	— 20×1	— 20 נקודות
פרק שלישי	— חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	— 20×2	— 40 נקודות
		סה"כ	— 100 נקודות

ג. <u>חומר עזר מותר בשימוש</u>:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.
שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. <u>הוראות מיוחדות</u>:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, <u>גם</u> כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את <u>כל</u> פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.
(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה או בדפים שקיבלת מהמשגיחים.
שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

<u>הערה</u>: קישורית לדוגמאות תשובה לשאלון זה תתפרסם בדף הראשי של אתר משרד החינוך.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

ב ה צ ל ח ה !

מיון שאלות המבחנים לפי נושאים

בעיות מילוליות

בעיות תנועה

בעיות הספק

סדרות

סדרה חשבונית

סדרה הנדסית

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת

סדרות כלליות וכלל נסיגה

הסתברות

טבלה דו ממדית

עמוד 36 שאלה 3, עמוד 58 שאלה 3, עמוד 100 שאלה 3 סעיף א,
עמוד 297 שאלה 3 ללא סעיף ד.

כפל וחיבור הסתברויות, דיאגרמת עץ

עמוד 2 שאלה 3, עמוד 5 שאלה 3, עמוד 40 שאלה 3 סעיף א,
עמוד 48 שאלה 3, עמוד 53 שאלה 3, עמוד 85 שאלה 3, עמוד 121 שאלה 3,
עמוד 169 שאלה 3, עמוד 177 שאלה 3, עמוד 237 שאלה 3,
עמוד 247 שאלה 3, עמוד 257 שאלה 3.

נוסחת ברנולי – התפלגות בינומית

עמוד 22 שאלה 3, עמוד 40 שאלה 3 סעיף ב, עמוד 81 שאלה 3,
עמוד 116 שאלה 3, עמוד 127 שאלה 3, עמוד 140 שאלה 3,
עמוד 155 שאלה 3.

בעיות המשלבות טבלה דו ממדית או דיאגרמת עץ עם נוסחת ברנולי

עמוד 10 שאלה 3, עמוד 14 שאלה 3, עמוד 19 שאלה 3, עמוד 26 שאלה 3,
עמוד 31 שאלה 3, עמוד 43 שאלה 3, עמוד 62 שאלה 3, עמוד 66 שאלה 3,
עמוד 71 שאלה 3, עמוד 76 שאלה 3, עמוד 90 שאלה 3, עמוד 95 שאלה 3,
עמוד 163 שאלה 3, עמוד 100 שאלה 3, עמוד 105 שאלה 3,
עמוד 110 שאלה 3, עמוד 133 שאלה 3, עמוד 148 שאלה 3,
עמוד 185 שאלה 3, עמוד 193 שאלה 3, עמוד 201 שאלה 3,
עמוד 209 שאלה 3, עמוד 219 שאלה 3, עמוד 228 שאלה 3,
עמוד 267 שאלה 3, עמוד 279 שאלה 3, עמוד 288 שאלה 3,
עמוד 297 שאלה 3, עמוד 304 שאלה 3.

גאומטריה

בעיות עם משולשים ומרובעים (עם או בלי פרופורציה ודמיון)

עמוד 6 שאלה 4, עמוד 14 שאלה 4, עמוד 19 שאלה 4, עמוד 27 שאלה 4,
עמוד 36 שאלה 4, עמוד 48 שאלה 4, עמוד 95 שאלה 4, עמוד 100 שאלה 4,
עמוד 122 שאלה 4, עמוד 134 שאלה 4, עמוד 141 שאלה 4,
עמוד 258 שאלה 4 סעיפים א-ג, עמוד 280 שאלה 4 ללא סעיף ה(2).

בעיות עם מעגל (ללא פרופורציה ודמיון)

עמוד 2 שאלה 4, עמוד 53 שאלה 4, עמוד 58 שאלה 4, עמוד 62 שאלה 4,
עמוד 116 שאלה 4, עמוד 194 שאלה 4, עמוד 202 שאלה 4,
עמוד 210 שאלה 4, עמוד 229 שאלה 4, עמוד 238 שאלה 4,
עמוד 248 שאלה 4, עמוד 258 שאלה 4 סעיף ד, עמוד 268 שאלה 4,
עמוד 280 שאלה 4 סעיף ה(2).

בעיות עם מעגל (כולל פרופורציה ודמיון)

עמוד 10 שאלה 4, עמוד 23 שאלה 4, עמוד 31 שאלה 4, עמוד 40 שאלה 4,
עמוד 44 שאלה 4, עמוד 67 שאלה 4, עמוד 71 שאלה 4, עמוד 76 שאלה 4,
עמוד 81 שאלה 4, עמוד 85 שאלה 4, עמוד 90 שאלה 4, עמוד 105 שאלה 4,
עמוד 111 שאלה 4, עמוד 127 שאלה 4, עמוד 149 שאלה 4,
עמוד 156 שאלה 4, עמוד 164 שאלה 4, עמוד 170 שאלה 4,
עמוד 178 שאלה 4, עמוד 186 שאלה 4, עמוד 221 שאלה 4,
עמוד 289 שאלה 4, עמוד 298 שאלה 4, עמוד 305 שאלה 4.

טריגונומטריה

הערה: ברוב הבעיות נדרש ידע בזהויות ומשוואות טריגונומטריות.

בעיות עם משולשים ומרובעים

עמוד 2 שאלה 5, עמוד 6 שאלה 5, עמוד 15 שאלה 5, עמוד 20 שאלה 5,
עמוד 44 שאלה 5, עמוד 49 שאלה 5, עמוד 76 שאלה 5, עמוד 81 שאלה 5,
עמוד 86 שאלה 5, עמוד 100 שאלה 5, עמוד 164 שאלה 5,
עמוד 179 שאלה 5.

בעיות עם מעגל

עמוד 10 שאלה 5, עמוד 23 שאלה 5, עמוד 27 שאלה 5, עמוד 31 שאלה 5,
עמוד 36 שאלה 5, עמוד 40 שאלה 5, עמוד 54 שאלה 5, עמוד 58 שאלה 5,
עמוד 63 שאלה 5, עמוד 67 שאלה 5, עמוד 72 שאלה 5, עמוד 91 שאלה 5,
עמוד 96 שאלה 5, עמוד 106 שאלה 5, עמוד 111 שאלה 5, עמוד 116 שאלה 5,
עמוד 122 שאלה 5, עמוד 128 שאלה 5, עמוד 134 שאלה 5,
עמוד 142 שאלה 5, עמוד 149 שאלה 5, עמוד 156 שאלה 5, עמוד 170 שאלה 5,
עמוד 186 שאלה 5, עמוד 194 שאלה 5, עמוד 202 שאלה 5, עמוד 211 שאלה 5,
עמוד 221 שאלה 5, עמוד 229 שאלה 5, עמוד 239 שאלה 5,
עמוד 249 שאלה 5, עמוד 259 שאלה 5, עמוד 269 שאלה 5,
עמוד 280 שאלה 4, עמוד 289 שאלה 5, עמוד 298 שאלה 5,
עמוד 305 שאלה 5.

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

חקירת פונקציות

פולינומים

עמוד 87 שאלה 8, עמוד 123 שאלה 7, עמוד 182 שאלה 8,
עמוד 187 שאלה 6 סעיף א, עמוד 195 שאלה 6,
עמוד 290 שאלה 6 ללא סעיף ה.

פונקציות רציונליות

עמוד 7 שאלה 7, עמוד 11 שאלה 6, עמוד 20 שאלה 6, עמוד 24 שאלה 6,
עמוד 73 שאלה 7, עמוד 87 שאלה 7, עמוד 102 שאלה 8,
עמוד 112 שאלה 6, עמוד 123 שאלה 6, עמוד 129 שאלה 7,
עמוד 150 שאלה 6, עמוד 166 שאלה 8, עמוד 172 שאלה 7 סעיף א,
עמוד 182 שאלה 8, עמוד 187 שאלה 6 סעיפים ב, ג, עמוד 222 שאלה 6,
עמוד 250 שאלה 6 ללא סעיף ה(2), עמוד 260 שאלה 6 ללא סעיף ד(2),
עמוד 292 שאלה 8 ללא סעיף ד, עמוד 299 שאלה 6 ללא סעיף ה,
עמוד 306 שאלה 6 ללא סעיף ב(2).

פונקציות עם שורשים

עמוד 28 שאלה 6, עמוד 37 שאלה 6, עמוד 55 שאלה 8, עמוד 72 שאלה 6,
עמוד 77 שאלה 7, עמוד 82 שאלה 7, עמוד 112 שאלה 7,
עמוד 117 שאלה 6, עמוד 135 שאלה 6, עמוד 157 שאלה 6,
עמוד 172 שאלה 7 סעיפים ב-ד, עמוד 180 שאלה 6, עמוד 188 שאלה 7,
עמוד 203 שאלה 6, עמוד 213 שאלה 7, עמוד 223 שאלה 7,
עמוד 230 שאלה 6, עמוד 240 שאלה 6, עמוד 251 שאלה 7,
עמוד 282 שאלה 6 סעיפים א-ב, עמוד 300 שאלה 7 ללא סעיף ה,
עמוד 307 שאלה 7 ללא סעיף ד.

פונקציות ללא תבנית אלגברית מפורשת

עמוד 3 שאלה 6 סעיפים א-ג, עמוד 41 שאלה 6 ,
עמוד 45 שאלה 8 סעיפים א, ב, עמוד 64 שאלה 8 , עמוד 69 שאלה 8 סעיף א,
עמוד 92 שאלה 8 , עמוד 143 שאלה 6 .

פונקציות טריגונומטריות

עמוד 3 שאלה 7 סעיפים א, ב, עמוד 11 שאלה 7 סעיפים א-ג,
עמוד 25 שאלה 8 סעיף א, עמוד 28 שאלה 7 סעיפים א, ב,
עמוד 32 שאלה 6 סעיפים א, ב, ג, ה, עמוד 44 שאלה 6 , עמוד 50 שאלה 7 ,
עמוד 91 שאלה 6 , עמוד 101 שאלה 6 , עמוד 117 שאלה 7 ,
עמוד 128 שאלה 6 , עמוד 136 שאלה 7 , עמוד 144 שאלה 7 ,
עמוד 151 שאלה 7 , עמוד 158 שאלה 7 , עמוד 165 שאלה 6 ,
עמוד 171 שאלה 6 , עמוד 181 שאלה 7 , עמוד 196 שאלה 7 ,
עמוד 204 שאלה 7 , עמוד 212 שאלה 6 , עמוד 231 שאלה 7 ,
עמוד 241 שאלה 7 , עמוד 261 שאלה 7 , עמוד 272 שאלה 7 סעיפים א-ג,
עמוד 283 שאלה 7 סעיפים א-ה, עמוד 291 שאלה 7 סעיף ה.

בעיות קיצון

בעיות קיצון גאומטריות

עמוד 3 שאלה 8, עמוד 37 שאלה 8, עמוד 50 שאלה 8, עמוד 107 שאלה 8,
עמוד 136 שאלה 8, עמוד 165 שאלה 7, עמוד 262 שאלה 8.

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים

עמוד 7 שאלה 8, עמוד 11 שאלה 8, עמוד 97 שאלה 8, עמוד 118 שאלה 8,
עמוד 124 שאלה 7 סעיף ג, עמוד 130 שאלה 8, עמוד 145 שאלה 8,
עמוד 159 שאלה 8, עמוד 172 שאלה 8, עמוד 182 שאלה 8 סעיף ד,
עמוד 197 שאלה 8, עמוד 205 שאלה 8, עמוד 214 שאלה 8,
עמוד 232 שאלה 8, עמוד 242 שאלה 8, עמוד 273 שאלה 8,
עמוד 284 שאלה 8, עמוד 292 שאלה 8 סעיף ד.

בעיות קיצון עם בעיות תנועה

עמוד 29 שאלה 8, עמוד 60 שאלה 8.

בעיות קיצון עם פונקציות טריגונומטריות

עמוד 54 שאלה 6, עמוד 64 תרגיל 7, עמוד 73 תרגיל 8, עמוד 77 תרגיל 6,
עמוד 82 תרגיל 6, עמוד 101 שאלה 6 סעיף א, עמוד 113 שאלה 8,
עמוד 151 שאלה 8, עמוד 188 שאלה 8, עמוד 224 שאלה 8,
עמוד 252 שאלה 8, עמוד 300 שאלה 8, עמוד 307 שאלה 8.

אינטגרלים

הערה: חלק מהסעיפים בנושא זה נרשמו גם תחת הכותרת חקירת פונקציות.

פולינומים

עמוד 55 שאלה 7, עמוד 59 שאלה 7, עמוד 78 שאלה 8,
עמוד 172 שאלה 8, עמוד 195 שאלה 6 סעיף ג, עמוד 290 שאלה 6 סעיף ה.

פונקציות רציונליות

עמוד 49 שאלה 6, עמוד 63 שאלה 6, עמוד 69 שאלה 8,
עמוד 299 שאלה 6 סעיף ה, עמוד 300 שאלה 7 סעיף ה,
עמוד 306 שאלה 6 סעיף ב(2).

פונקציות עם שורשים

עמוד 16 שאלה 8, עמוד 33 שאלה 7, עמוד 45 שאלה 7, עמוד 68 שאלה 7,
עמוד 112 שאלה 7 סעיף ו, עמוד 135 שאלה 6, עמוד 203 שאלה 6 סעיף ו,
עמוד 230 שאלה 6 סעיף ו, עמוד 307 שאלה 7 סעיף ד.

חילוק פולינומים

עמוד 15 שאלה 6.

פונקציות ללא תבנית אלגברית מפורשת

עמוד 3 שאלה 6, עמוד 45 שאלה 8, עמוד 107 שאלה 7,
עמוד 187 שאלה 6 סעיף ג(2).

פונקציות טריגונומטריות

עמוד 3 שאלה 7, עמוד 11 שאלה 7 סעיף ד, עמוד 16 שאלה 7,
עמוד 25 שאלה 8 סעיף ב, עמוד 28 שאלה 7 סעיף ג, עמוד 41 שאלה 7,
עמוד 59 שאלה 6, עמוד 68 שאלה 6, עמוד 96 שאלה 6, עמוד 106 שאלה 6,
עמוד 124 שאלה 8, עמוד 128 שאלה 6, עמוד 151 שאלה 7,
עמוד 165 שאלה 6, עמוד 181 שאלה 7 סעיף ב, עמוד 196 שאלה 7 סעיף ג,
עמוד 204 שאלה 7 סעיף ו, עמוד 212 שאלה 6 סעיף ד,
עמוד 272 שאלה 6 סעיף ד, עמוד 283 שאלה 6 סעיף ו,
עמוד 291 שאלה 7 סעיף ה.

אינטגרל הכולל את זיהוי הנגזרת הפנימית של פונקציה מורכבת

הערה: חלק זה כולל פולינומים, פונקציות רציונליות, פונקציות עם שורשים ופונקציות טריגונומטריות, שבהן לצורך מציאת האינטגרל יש לזהות את הנגזרת הפנימית של פונקציה מורכבת.

עמוד 7 שאלה 6, עמוד 21 שאלה 8, עמוד 37 שאלה 7, עמוד 83 שאלה 8,
עמוד 86 שאלה 6, עמוד 92 שאלה 7, עמוד 97 שאלה 7, עמוד 101 שאלה 7,
עמוד 112 שאלה 6 סעיף ה, עמוד 117 שאלה 7 סעיף ג, עמוד 157 שאלה 6,
עמוד 166 שאלה 8, עמוד 222 שאלה 6 סעיף ד,
עמוד 230 שאלה 6 סעיפים ג- ד, עמוד 250 שאלה 6 סעיף ה(2),
עמוד 260 שאלה 6 סעיף ד(2), עמוד 270 שאלה 6.

נפח גוף סיבוב

עמוד 24 שאלה 7, עמוד 32 שאלה 6 סעיף ד, עמוד 159 שאלה 8.

בעיות קיצון עם אינטגרלים

עמוד 20 שאלה 7, עמוד 33 שאלה 8, עמוד 41 שאלה 8.

פונקציות עם ערך מוחלט

הערה: השאלות הבאות נרשמו גם תחת כותרות אחרות.
עמוד 15 שאלה 6 סעיף ג, עמוד 83 שאלה 8 סעיף ב,
עמוד 282 שאלה 6 סעיפים ג-ד.

תוכן עניינים

מבחני בגרות – שאלון 581

מבחן בגרות מספר 1

קיץ תשס״ט, 2009, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 רוכב אופניים יצא בשעה $08:00$ מעיר A, ורוכב אופניים שני יצא בשעה $09:00$ מעיר A. כל אחד מהרוכבים רכב במהירות קבועה לעיר B.
המרחק בין A ל-B הוא 45 ק״מ. כאשר הרוכב הראשון הגיע לעיר B, הרוכב השני עדיין לא הגיע לעיר B והיה במרחק של 25 ק״מ ממנה.
מהירות הרוכב הראשון גדולה ב- m קמ״ש ממהירות הרוכב השני, וידוע כי $0<m<5$.

סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

א. הבע באמצעות m את שני הפתרונות האפשריים למהירות הרוכב השני.

ב. נסמן את שני הפתרונות שהבעת בסעיף א׳ ב- x_1 וב- x_2.
מצא עבור אילו ערכי m מתקיים $|x_1-x_2|<11$.

.2 א. נתונות שתי סדרות הנדסיות אינסופיות:
$a_1, a_2, a_3, \dots$ ו- $b_1, b_2, b_3, \dots$.
מנת הסדרה האחת היא q_1 ומנת הסדרה השנייה היא q_2.
נסמן: $S=a_1+a_2+a_3+\dots$, $K=b_1+b_2+b_3+\dots$, $M=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\dots$.
נתון: $S\cdot K=M$. הוכח: $q_1+q_2=2q_1q_2$.

סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

ב. בסדרה חשבונית האיבר התשיעי גדול פי 4 מהאיבר הראשון.
אם מחלקים את האיבר השישי באיבר השני מקבלים 2 ושארית 1.
מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

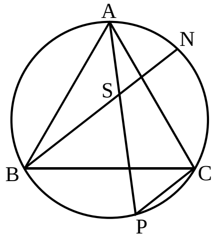
.3 ידוע כי בכפר מסוים 20% מהתושבים חולים במחלת מעיים.
רופא הכפר בדק את כל התושבים.
90% מהחולים בכפר אובחנו על ידו כחולים, ו- 10% מהבריאים בכפר אובחנו על ידו כחולים.
א. מהו אחוז התושבים בכפר שלגביהם הרופא ביצע אבחנה שגויה?
הרופא נתן תרופה לכל מי שאובחן על ידו כחולה.
התרופה גרמה לפריחה אצל 60% מהחולים שאובחנו כחולים,
ואצל 25% מהבריאים שאובחנו כחולים.
ב. מהי ההסתברות שתושב בכפר הוא חולה, אם ידוע שיש לו פריחה?

סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

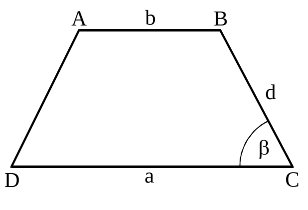
ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

.4 ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל.
N ו- P הן נקודות על המעגל.
BN ו- AP נפגשים בנקודה S (ראה ציור).
נתון: $PC \parallel BN$. הוכח כי:
א. המשולש BSP הוא שווה-צלעות.
ב. המרובע $SPCN$ הוא מקבילית.
ג. $AN = PC$.



סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

.5 בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel DC)$
אורך הבסיס הגדול CD הוא a,
אורך הבסיס הקטן AB הוא b
ואורך השוק הוא d.
הזווית ליד הבסיס הגדול DC
היא β (ראה ציור).
א. הוכח כי אורך אלכסון הטרפז הוא $\sqrt{ab+d^2}$.
ב. הזווית בין אלכסון הטרפז ובין הבסיס הגדול של הטרפז היא α.
הוכח כי אם $\alpha+\beta=90^\circ$, אז $\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=\sqrt{\frac{a^2-ab}{2b^2}}$.



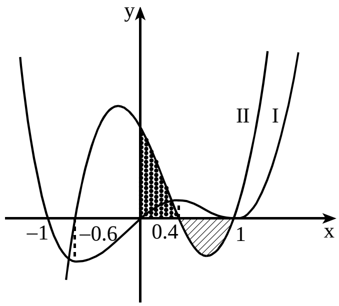
סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

.6

סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!



בציור שלפניך מוצגות סקיצות של שני גרפים: גרף I וגרף II.
אחד הגרפים הוא הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, והגרף האחר הוא הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$.

א. איזה גרף הוא של $f'(x)$,
ואיזה גרף הוא של $f''(x)$? נמק.

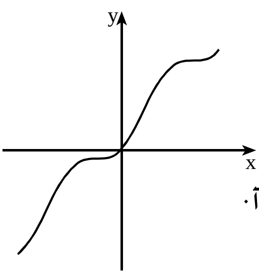
ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ג. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הוכח שהשטח המוגבל על ידי גרף II וציר ה- x (השטח המקווקו בציור) שווה לשטח המוגבל על ידי גרף II והצירים (השטח המנוקד בציור).

.7

סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!



נתונה הפונקציה $f(x) = x - \frac{\sin(2x)}{2}$.

א. הראה כי $f'(x) = 2\sin^2 x$.

ב. (1) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון? נמק.

(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות פיתול? נמק.

ג. בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $g(x) = x + \sin^2 x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.
בתחום הנתון מצא את כל השטח המוגבל על ידי הגרף של $g(x)$ ועל ידי הישר $y = x$.

.8

סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

נתון משולש שאחת מצלעותיו היא 10 ס״מ, וגובה המשולש לצלע זו הוא 5 ס״מ. (המשולש אינו קהה-זווית.)

א. מבין כל המשולשים שהם כאלה, מצא את צלעות המשולש שהיקפו מינימלי.

ב. מה הן תכונות המשולש שאת צלעותיו מצאת בסעיף א׳?

תשובות למבחן בגרות מספר 1 – קיץ תשס"ט, 2009, מועד א:

1. א. $x_1 = \frac{25-m+\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$, $x_2 = \frac{25-m-\sqrt{m^2-130m+625}}{2}$.

ב. $4<m<5$.

2. ב. $a_1=8$, $d=3$.

3. א. 10% . ב. $\frac{27}{32}$.

6. א. גרף I — $f'(x)$, גרף II — $f''(x)$.

ב. $x=0$ מינימום, $x=-1$ מקסימום.

ג. $x=1$, $x=0.4$, $x=-0.6$.

7. ב. (1) לא. (2) כן. ג. π .

8. א. 10 ס"מ, $5\sqrt{2}$ ס"מ, $5\sqrt{2}$ ס"מ.

ב. המשולש הוא ישר זווית ושווה-שוקיים.

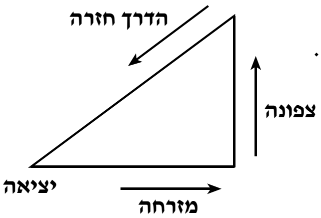
מבחן בגרות מספר 2

קיץ תשס״ט, 2009, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 3-1.

.1 הולך רגל יוצא כל בוקר להליכה לאורך מסלול שאורכו הכולל הוא 24 ק״מ.
הוא יוצא מביתו לכיוון מזרח והולך m ק״מ.
אחר כך הוא פונה צפונה והולך 1.5 שעות.
לאחר מכן הוא חוזר לביתו בדרך הקצרה ביותר (ראה ציור). בדרכו חזרה הוא הולך 60 דקות פחות מהזמן שבו הוא הולך בשני הכיוונים יחד, מזרחה וצפונה.
בכל קטעי הדרך הוא הולך באותה מהירות קבועה. חשב את m.



סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

.2 נתונה סדרה הנדסית שכל n האיברים שלה הם חיוביים. סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים.
א. חשב את מנת הסדרה.
ב. נתון כי n הוא מספר זוגי. נסמן: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$
$T_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ \ldots - a_n$
($a_1,\ a_2\ ,\ a_3,\ \ldots\ ,\ a_n$ הם איברי הסדרה הנתונה). חשב את היחס $\frac{S_n}{T_n}$.

סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

.3 בשכבה י״א יש שתי כיתות: י״א 1 ו-י״א 2.
בכיתה י״א 1 יש 40 תלמידים, ולמחציתם יש מחשב נישא.
בכיתה י״א 2 יש 35 תלמידים, ול- 40% מהם יש מחשב נישא.
א. בחרו באקראי תלמיד משכבה י״א, ונמצא שיש לו מחשב נישא.
מהי ההסתברות שהוא לומד בכיתה י״א 2?
ב. בחרו באקראי בזה אחר זה (בלי החזרה) 2 תלמידים מכיתה י״א-1, ובאותו אופן בחרו 2 תלמידים מכיתה י״א 2.
מהי ההסתברות של- 2 התלמידים מכיתה י״א 1 וגם ל- 2 התלמידים מכיתה י״א 2 אין מחשב נישא?

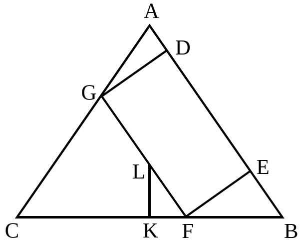
סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

.4 סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

במשולש שווה-שוקיים ABC $(AC = AB)$
חסום מלבן $GFED$ כך שהקדקודים D ו- E
מונחים על הצלע AB, והקדקודים F ו- G
מונחים על הצלעות BC ו- CA בהתאמה.
נקודה L, הנמצאת על צלע המלבן GF,
היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
דרך הנקודה L העבירו אנך לצלע BC,
החותך את BC בנקודה K (ראה ציור).

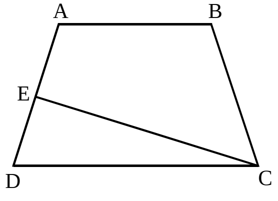


א. הוכח: $\Delta KAB \sim \Delta KLF \sim \Delta EFB$.

אם נתון: $BC = 18$ ס"מ, $AB = 15$ ס"מ,
חשב:
ב. את אורך הקטע KF. נמק.
ג. את אורך הקטע FE. נמק.

.5 סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ הזווית שליד הבסיס הגדול היא α.
E היא נקודה על השוק AD כך ש- $\sphericalangle ECD = \beta$ (ראה ציור).
נתון כי אורך השוק של הטרפז שווה לאורך הבסיס הקטן AB.
א. הבע באמצעות α ו- β את היחס
בין שטח המשולש DEC לשטח
המשולש BDC $\left(\frac{S_{\Delta DEC}}{S_{\Delta BDC}}\right)$.



ב. נתון: $\sphericalangle AEC = 90^\circ$, אורך האלכסון הטרפז
גדול פי 1.5 מאורך הבסיס הקטן AB.
חשב את היחס $\frac{S_{\Delta DEC}}{S_{\Delta BDC}}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$

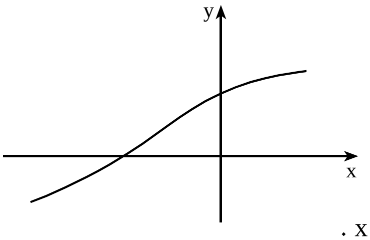
בחלק מהתחום $-\frac{3\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ (ראה ציור).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה

בנקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y.

מצא את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x.



סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-a}{x-b}$; $a\,,\,b>0$; $a\neq b$.

המשיקים לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך עם הצירים מקבילים זה לזה.

א. הוכח כי $a=2b$.

הצב $a=2b$, וענה על הסעיפים ב-ז (הבע באמצעות b במידת הצורך).

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

ג. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ד. מצא נקודות חיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ה. מצא תחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ז. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $b<0$.

נמק את שיקוליך בשרטוט הגרף עבור תחומי עלייה וירידה ועבור תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה.

סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-24}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה A שבה $x=t$. מנקודה A

העבירו ישר המקביל לציר ה- x

וחותך את גרף הפונקציה בנקודה B.

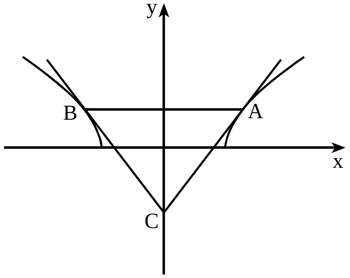
בנקודה B העבירו עוד משיק לגרף

הפונקציה. המשיקים נפגשים בנקודה C

שעל ציר ה- y (ראה ציור).

א. הראה כי הפונקציה זוגית.

ב. מצא את השטח המינימלי של המשולש ABC.



סרקו אותי לצפייה בפתרון בחינם!

תשובות למבחן בגרות מספר 2 – קיץ תשס"ט, 2009, מועד ב:

1. $m=8$.

2. א. 2. ב. -3.

3. א. $\frac{7}{17}=0.4118$. ב. $\frac{19}{221}=0.086$.

4. ב. 3 ס"מ. ג. 4.8 ס"מ.

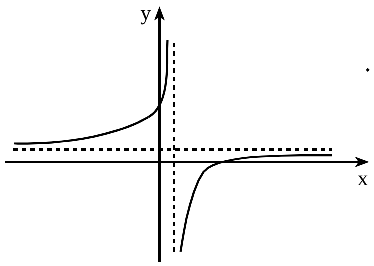
5. א. $\frac{\sin 1\frac{1}{2}\alpha\sin\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin(\alpha+\beta)}=\frac{(1+2\cos\alpha)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. ב. 0.1562.

6. $3-2\sqrt{2}=0.1716$.

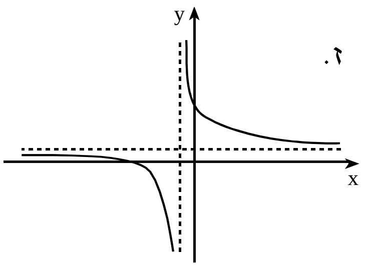
7. ב. $x=b$, $y=1$. ג. עלייה: $x>b$ או $x<b$; ירידה: אין. ד. $(0;2)$, $(2b;0)$.

ה. $\cup$: $x<b$; $\cap$: $x>b$.

ו.



ז.



8. ב. $\frac{216}{\sqrt{12}}=62.35$.

מבחן בגרות מספר 3

חורף תש״ע, 2010

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון

שני צינורות, צינור I וצינור II, ממלאים יחד במים את כל הנפח של בריכה במשך 6 שעות (קצב הזרמת המים של כל אחד מהצינורות אינו משתנה).

יום אחד, צינור I מילא לבדו רבע מנפח הבריכה, וצינור II מילא לבדו עוד רבע מנפח הבריכה, וכך התמלא חצי מנפח הבריכה במשך m שעות.

א. (1) הבע באמצעות m את הזמן הדרוש לצינור I למלא את כל נפח הבריכה לבדו.

(2) מצא עבור איזה ערך של m יש פתרון אחד לבעיה.

ב. נתון כי כאשר כמות המים בבריכה היא 70% מנפח הבריכה, צינור I ממלא לבדו את נפח הבריכה הנותר במשך 3 שעות.

מצא את m במקרה זה.

.2 סרקו אותי לצפייה בפתרון

נתונות שתי סדרות הנדסיות: $a_1, a_2, \dots, a_n$

$b_1, b_2, \dots, b_n$

הסדרות מקיימות: $b_1 = a_2$, $b_4 = a_{11}$.

א. הראה כי לכל n טבעי מתקיים: $b_n = a_{3n-1}$.

ב. נתון כי מנת הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא 2 .

כמו כן, מתקיים: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{3n} = k$.

הבע באמצעות k את הסכום $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$.

.3 בוחרים באקראי 3 אנשים מעיר גדולה.
ההסתברות ששלושתם הם בעלי השכלה גבוהה היא 0.064 .
ההסתברות לבחור באקראי אדם שמרכיב משקפיים מבין בעלי השכלה גבוהה בעיר קטנה פי 2 מההסתברות לבחור באקראי אדם שמרכיב משקפיים מבין אלו שאינם בעלי השכלה גבוהה.

א. ידוע שאדם מהעיר מרכיב משקפיים.
מהי ההסתברות שהוא בעל השכלה גבוהה?

ב. בוחרים באקראי 4 אנשים מבין תושבי העיר שאינם בעלי השכלה גבוהה. ההסתברות שארבעתם אינם מרכיבים משקפיים היא $\frac{81}{256}$.

מהי ההסתברות שאדם בעיר מרכיב משקפיים והוא גם בעל השכלה גבוהה?

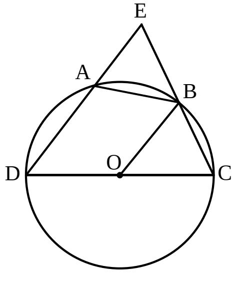
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

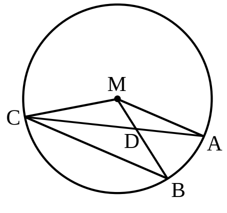
.4 במעגל שמרכזו O חסום מרובע ABCD .
DC הוא קוטר. המשכי הצלעות DA ו- CB נפגשים בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $OB \parallel DE$, $\sphericalangle BOC = \alpha$.

א. הבע באמצעות α את $\sphericalangle ABO$.

ב. נתון כי שטח המשולש OBC שווה לשטח המשולש BEA .
הוכח כי $\Delta OBC \cong \Delta BEA$.



.5 A , B ו- C הן נקודות על מעגל שמרכזו M .
AC ו- BM נחתכים בנקודה D (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle CBM = 2\sphericalangle ACB$,
שטח המשולש CBD גדול פי 1.5 משטח המשולש CDM .
חשב את $\sphericalangle CBM$.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-b)^2}{x^2-4}$, $b>2$.

א. מצא (הבע באמצעות b במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת האסימפטוטות שלה המקבילות לצירים.

(2) את השיעורים של נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(3) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. על פי הסקיצה של גרף הפונקציה, מצא את התחום שבו פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית <u>וגם</u> פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית, אם ידוע כי ל- $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד. נמק.

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ בתחום $-3\pi\le x\le 3\pi$.

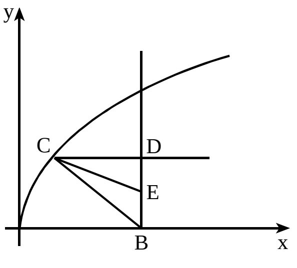
א. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה בתחום הנתון.

ג. לפונקציה יש שלוש נקודות מקסימום בתחום הנתון.
מצא את השיעורים של נקודות אלה.

ד. העבירו ישר דרך נקודות המקסימום של הפונקציה.
מצא בתחום $-\pi\le x\le\pi$ את השטח המוגבל על ידי הישר, על ידי גרף הפונקציה, על ידי שתי האסימפטוטות של הפונקציה ועל ידי ציר ה- x .

.8 נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax}$, $a>0$.



מנקודה $B(b;0)$ ($b>0$) העבירו אנך לציר ה- x .

C היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$.

מנקודה C העבירו ישר המקביל לציר ה- x וחותך את האנך בנקודה D .

הנקודה E היא אמצע הקטע BD (ראה ציור).

נתון כי עבור $C(2;4)$ שטח המשולש CBE הוא מקסימלי.

מצא את הערך של a ואת הערך של b .

תשובות למבחן בגרות מספר 3 – חורף תש״ע, 2010:

1. א. **(1)** $2m \pm 2\sqrt{m^2-6m}$. הפתרון קיים בתנאי ש- $m \ge 6$. **(2)** $m=6$.

ב. $m=6.25$.

2. ב. $\frac{2}{7}k$.

3. א. 0.25. ב. 0.05.

4. א. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

5. $\sphericalangle CBM = 41.41^\circ$.

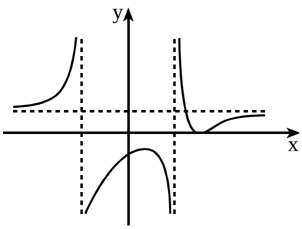
6. א. **(1)** תחום הגדרה: $x \ne 2$, $x \ne -2$.

אסימפטוטות: $x=2$, $x=-2$, $y=1$.

(2) $(b;0)$, $\left(0;-\frac{b^2}{4}\right)$.

(3) $(b;0)$ מינימום, $\left(\frac{4}{b};\frac{4-b^2}{4}\right)$ מקסימום.

ב.



ג. $\frac{4}{b} < x < 2$.

7. ב. $x=3\pi$, $x=\pi$, $x=-\pi$, $x=-3\pi$. ג. $\left(2\pi;\frac{1}{2}\right)$, $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-2\pi;\frac{1}{2}\right)$. ד. 2.

8. $a=8$, $b=6$.

מבחן בגרות מספר 4

קיץ תש"ע, 2010, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון

רוכב אופניים אחד יצא ממקום A אל מקום B, ובאותה שעה בדיוק יצא רוכב אופניים אחר ממקום B אל מקום A.
כעבור 4 שעות נפגשו רוכבי האופניים. הזמן, שנדרש לרוכב האופניים שיצא מ- A לעבור את הדרך שבין A ל- B, גדול ב- 108 דקות מהזמן שנדרש לרוכב האופניים שיצא מ- B לעבור דרך זו.

א. מצא את היחס בין המהירות של רוכב האופניים שיצא מ- B לבין המהירות של רוכב האופניים שיצא מ- A.

ב. מצא בכמה שעות עבר כל אחד מרוכבי האופניים את הדרך שבין A ל- B.

.2 סרקו אותי לצפייה בפתרון

נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים $(n>1)$.
האיבר הראשון בסדרה הוא a_1 (שונה מאפס), והפרש הסדרה הוא d.
בונים סדרה חדשה שגם בה n איברים.
האיבר הראשון בסדרה החדשה גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה הנתונה, והפרש הסדרה החדשה גם הוא d.
סכום הסדרה החדשה גדול פי 2 מסכום הסדרה הנתונה.

א. בטא את a_1 באמצעות d ו- n.

ב. אם מגדילים את הפרש הסדרה הנתונה ב- 3 (בלי לשנות את a_1 ואת n), מקבלים סדרה חשבונית שסכומה גדול פי 2 מסכום הסדרה הנתונה.
הראה כי הפרש הסדרה הנתונה הוא 2.

3. באחד הדוכנים בלונה פארק אפשר להשתתף במשחק שבו מסובבים שני גלגלים, A ו- B. כל גלגל מחולק ל- 20 גזרות שוות (לכל אחת מהגזרות יש אותה הסתברות שהגלגל ייעצר עליה, והגלגל אינו נעצר בגבול שבין הגזרות).
בגלגל A יש 2 גזרות אדומות והשאר שחורות.
בגלגל B יש 4 גזרות אדומות והשאר שחורות.
תור אחד במשחק מורכב משני שלבים:
בשלב הראשון: משתתף במשחק מסובב את הגלגל A.
בשלב השני: אם הגלגל A נעצר על גזרה אדומה בשלב הראשון, המשתתף מסובב את הגלגל B. אם הגלגל A נעצר על גזרה שחורה בשלב הראשון, המשתתף מסובב שוב את הגלגל A.

א. ידוע שבתור אחד בשלב הראשון נעצר הגלגל A על גזרה אדומה.
מהי ההסתברות שבתור זה התקבלה בשלב השני גזרה שחורה?

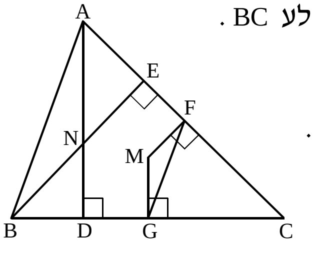
ב. (1) מהי ההסתברות שבתור אחד תתקבל לפחות גזרה אדומה אחת?
(2) אם ידוע כי בתור אחד הייתה לפחות אחד מהגזרות אדומה, מהי ההסתברות שבתור זה התקבלה רק גזרה אדומה אחת?

ג. משתתף משחק n תורות.
הבע באמצעות n את ההסתברות שלא תתקבל כלל גזרה אדומה.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 5-4.

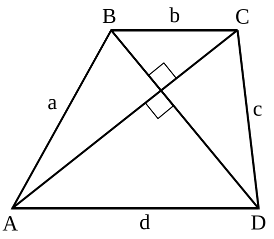
4. נתון משולש ABC חד-זוויות.
BE הוא גובה לצלע AC, ו- AD הוא גובה לצלע BC.
הגבהים נפגשים בנקודה N.
FM הוא אנך אמצעי לצלע AC,
ו- GM הוא אנך אמצעי לצלע BC (ראה ציור).



א. הוכח: (1) $\sphericalangle BAC = \sphericalangle GFC$.
(2) $\sphericalangle ABN = \sphericalangle MFG$.
(3) $\Delta ANB \sim \Delta GMF$.

ב. מצא את היחס $\frac{BN}{FM}$. נמק.

5. בטרפז ABCD $(AD \parallel BC)$ נתון: $AC \perp BD$,
$CD = c$, $BC = b$, $AB = a$, $AD = d$, $(d > b)$.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה O .

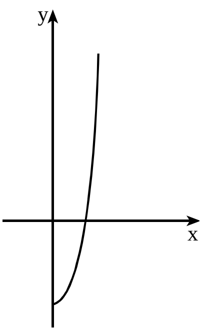


א. הוכח: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.
ב. דרך קדקוד B מעבירים ישר
המקביל לשוק CD . הישר חותך
את הבסיס AD בנקודה M .
נתון: $\sphericalangle ABM = \alpha$. הוכח: $\cos\alpha = \frac{bd}{ac}$.
ג. הבע באמצעות d , b ו- α : (1) את שטח המשולש ABM .
(2) את שטח הטרפז ABCD .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

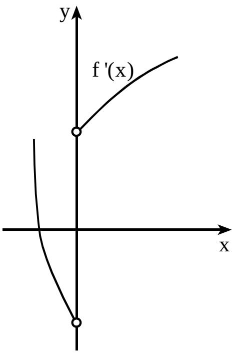
6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8}{x + 2}$, $x \neq -2$.



א. בציור מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
עבור $x \geq 0$. מעבירים ישר המשיק לגרף
הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 1$.
מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$,
על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y עבור $x \geq 0$.
ב.(1) מצא תחומי עלייה וירידה
של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה),
עבור כל תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל תחום
ההגדרה שלה.
ג. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)|$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=2-\cos x-\sin^2 x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.
עבור התחום הנתון ענה על סעיפים א׳-ד׳ :
א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
ג. (1) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
(2) שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (הפונקציה $f(x)$ גזירה גם בקצות התחום הנתון).
(3) מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}$.
ד. נתון כי גרף הפונקציה $g(x)=a-\cos x-\sin^2 x$ משיק לציר x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד. מהו הערך של a ? נמק.

.8 $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$. בציור מוצג הגרף של $f'(x)$.
$f(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת בתחום $x \ge -4$.
נתון : $f'(x)=\frac{6x^2+16x}{\sqrt{x^3+4x^2}}$.



א. מצא את תחום ההגדרה של $f'(x)$.
ב. מצא את האסימפטוטה האנכית של $f'(x)$.
ג. מצא את שיעור ה- x של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$. נמק.
ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$. נמק.
ה. נתון : $f(a)=4\sqrt{3}$, $-2\frac{2}{3}<a<0$.
השטח, המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x=a$, הוא $\frac{28\sqrt{3}}{9}$.
מצא את ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.
אין צורך למצוא את $f(x)$, ואין צורך למצוא את a .
בתשובתך תוכל להשאיר $\sqrt{3}$ או לדייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

תשובות למבחן בגרות מספר 4 – קיץ תש"ע, 2010, מועד א:

1. א. 1.25 . ב. הרוכב שיצא מ- A : 9 שעות. הרוכב שיצא מ- B : 7.2 שעות.

2. א. $a_1=\frac{d(n-1)}{4}$.

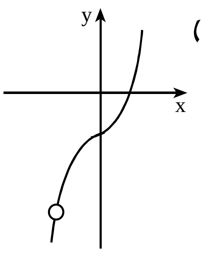
3. א. 0.8 . ב. **(1)** 0.19 . **(2)** $\frac{17}{19}$. ג. 0.81^n .

4. ב. 2 .

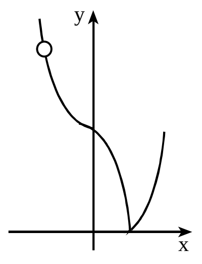
5. ג. **(1)** $\frac{bd\tan\alpha}{2}$. **(2)** $\frac{bd(d+b)\tan\alpha}{2(d-b)}$.

6. א. $1\frac{1}{2}$.

ב. **(1)** עלייה: $x>-2$ או $x<-2$; ירידה: אף x . **(2)**



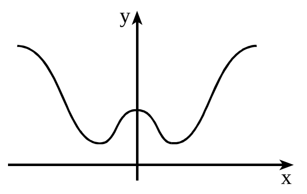
ג.



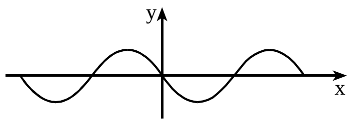
7. א. (0;1) . ב. $(\pi;3)$ מקסימום מוחלט, $(-\pi;3)$ מקסימום מוחלט.

$(\frac{\pi}{3};\frac{3}{4})$ מינימום מוחלט, $(-\frac{\pi}{3};\frac{3}{4})$ מינימום מוחלט.

ג. **(1)**



(2)



(3) $\frac{1}{2}$.

ד. $a=1$.

8. א. $x>-4$, $x\neq 0$. ב. $x=-4$. ג. $x=-2\frac{2}{3}$.

ד. עלייה: $-4<x<-2\frac{2}{3}$ או $x>0$; ירידה: $-2\frac{2}{3}<x<0$.

ה. $\frac{64\sqrt{3}}{9}=12.317$.

מבחן בגרות מספר 5

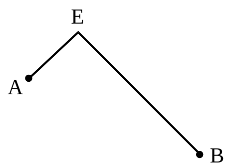
קיץ תש"ע, 2010, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

.1

סרקו אותי
לצפייה בפתרון



רוכב אופניים רכב מעיר A לעיר B.
במסלול שבין שתי הערים יש תחילה
עלייה ואחר כך ירידה (ראה ציור).
מהירות הרוכב בירידה היא קבועה,
וגדולה ב- 10 קמ"ש ממהירותו בעלייה.
הרוכב עבר את הדרך מ- A ל- B ב- 4.5 שעות.
בדרך חזור עבר הרוכב את הדרך מ- B ל- A ב- 6 שעות.
מהירות הרוכב בעלייה שבדרך מ- A ל- B שווה למהירות הרוכב בעלייה שבדרך מ- B ל- A, וגם מהירות הרוכב בירידה בכל אחת מהדרכים היא אותה מהירות. אורך המסלול בין שתי הערים הוא 70 ק"מ.

א. מצא את מהירות הרוכב בעלייה.

ב. מצא את אורך המסלול מ- E ל- B.

.2

סרקו אותי
לצפייה בפתרון

a_n ו- a_k הם שני איברים בסדרה חשבונית במקום ה- n ובמקום ה- k בהתאמה. הפרש הסדרה הוא d, והאיבר הראשון בסדרה הוא $a_1 = md$, m – מספר טבעי, $d \neq 0$.

א. (1) הראה כי מתקיים $a_n + a_k = a_1 + d(n+k+m-2)$.

(2) הבע באמצעות n, k ו- m את המקום בסדרה של איבר השווה לסכום של שני האיברים a_n ו- a_k.

ב. (1) הבע באמצעות a_1, d ו- m את הסכום $a_{34} + a_{65}$.

(2) נתון: $a_{34} + a_{65} = a_{109}$, סכום 79 האיברים הראשונים בסדרה הוא 7900. מצא את d ואת a_1.

.3 ברשותנו שתי קוביות משחק הנראות זהות. קובייה אחת מאוזנת והאחרת לא מאוזנת. בהטלת הקובייה המאוזנת ההסתברות לקבל אחד מהמספרים הרשומים על פאות הקובייה היא אותה הסתברות עבור כל אחד מהמספרים.

בהטלת הקובייה הלא-מאוזנת ההסתברות לקבל את המספר שש היא $\frac{1}{3}$.

א. (1) זורקים 3 פעמים את הקובייה המאוזנת.
מהי ההסתברות לקבל בדיוק 2 פעמים את המספר שש?
(2) זורקים 3 פעמים את הקובייה הלא-מאוזנת.
מהי ההסתברות לקבל בדיוק 2 פעמים את המספר שש?

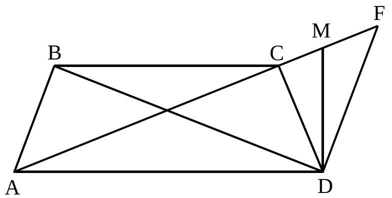
ב. בוחרים באקראי אחת משתי הקוביות, וזורקים 3 פעמים את הקובייה שבוחרים.
(1) מהי ההסתברות לקבל בדיוק 2 פעמים את המספר שש?
(2) ידוע כי המספר שש התקבל בדיוק 2 פעמים.
מהי ההסתברות שנבחרה הקובייה הלא-מאוזנת?

ג. זורקים n פעמים את הקובייה הלא-מאוזנת. הבע באמצעות n את ההסתברות לקבל לפחות פעם אחת את המספר שש.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

.4 נתון טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(BC \parallel AD)$.
דרך הקדקוד D העבירו אנך ל- AD וישר המקביל לשוק AB.
האנך חותך את המשך האלכסון AC בנקודה M,
והישר המקביל חותך את המשך האלכסון בנקודה F (ראה ציור).



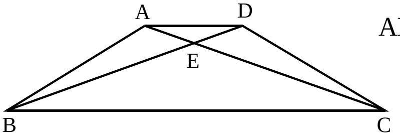
נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CAD = \beta$.

א. הוכח כי: $\Delta ABC \sim \Delta FDA$.

ב. הוכח כי: $\sphericalangle CDM = \sphericalangle MDF$.

ג. הוכח כי: $\frac{AC}{AF} = \frac{MC}{MF}$.

.5 בציור שלפניך טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AD \parallel BC)$.



נתון: $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle BDC = \beta$.

א. הוכח: היחס בין שטח המשולש AED לשטח המשולש BEC הוא $\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}} = \frac{\sin^2(2\alpha+\beta)}{\sin^2\beta}$.

ב. נתון גם: $\alpha = 30^\circ$, $\sqrt{\frac{S_{\Delta AED}}{S_{\Delta BEC}}} = \frac{1}{4}$. מצא את β.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

.6 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+6x+12}{x^2-6x+9}$.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

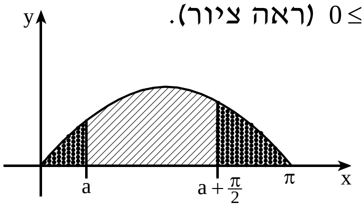
(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצא את האסימפטוטות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ המקבילות לצירים.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמק.

.7 נתונה הפונקציה $f(x) = \sin x$ בתחום $0 \le x \le \pi$ (ראה ציור).



מעבירים שני ישרים שמשוואותיהם:

$x = a$, $x = a + \frac{\pi}{2}$, ($0 < a < \frac{\pi}{2}$).

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי שני הישרים, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

S_2 הוא סכום של שני שטחים, שכל אחד מהם מוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי אחד הישרים ועל ידי ציר ה- x (סכום השטחים המנוקדים בציור). מצא עבור איזה ערך של a היחס $\frac{S_1}{S_2}$ הוא מקסימלי.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. על סמך סעיפים א׳ ו-ב׳ שרטט סקיצה של גרף הפונקציה,
אם נתון כי הפונקציה יורדת בכל התחום שבו היא מוגדרת.

ד. נתון כי הישר $y=-kx+8k$, $k>0$, אינו חותך את גרף הפונקציה $f(x)$.
הישר מחלק את השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=4$ ו- $x=8$, לשני שטחים שווים.
מצא את הערך של k .

תשובות למבחן בגרות מספר 5 – קיץ תש״ע, 2010, מועד ב:

1. א. 10 קמ״ש. ב. 50 ק״מ.

2. א. (2) $n+k+m-1$. ב. (1) $a_1+(97+m)d$. (2) $d=2$, $a_1=22$.

3. א. (1) $\frac{5}{72}$. (2) $\frac{2}{9}$. ב. (1) $\frac{7}{48}$. (2) $\frac{16}{21}$. ג. $1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

5. ב. $\beta=106.1^\circ$.

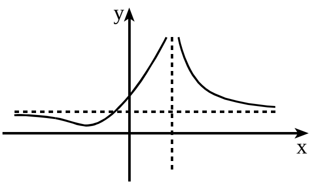
6. א. (1) $x=3$, $y=1$.

(2) $(0;1\frac{1}{3})$.

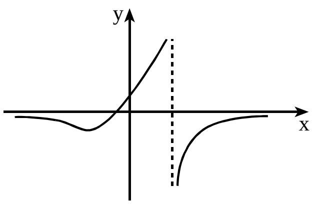
(3) עלייה: $-3.5<x<3$;

ירידה: $x>3$ או $x<-3.5$.

(4)



ב. (1) $x=3$, $y=0$. (2)

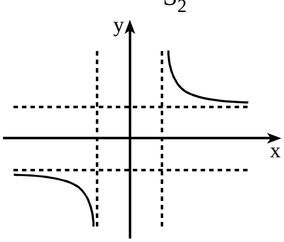


7. $a=\frac{\pi}{4}$. הערה: שים לב שכאשר S_1 הוא מקסימלי, היחס $\frac{S_1}{S_2}$ הוא מקסימלי.

8. א. $x>\sqrt{15}$ או $x<-\sqrt{15}$.

ב. $x=\sqrt{15}$, $x=-\sqrt{15}$, $y=1$, $y=-1$.

ג.



ד. $k=\frac{3}{8}$.

מבחן בגרות מספר 6

חורף תשע״א, 2011

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 נהג יצא מעיר A לכיוון עיר B. המרחק בין שתי הערים הוא 120 ק״מ.
בהתחלה נסע הנהג במהירות קבועה כפי שתכנן, אבל כעבור $\frac{3}{4}$ שעה מתחילת נסיעתו הייתה תקלה ברכבו.
הנהג חזר מיד לכיוון A, ונסע 10 ק״מ במהירות של 50 קמ״ש עד למוסך הנמצא בדרך ל- A.
המוסך טיפל בתקלה במשך 33 דקות, ומיד לאחר הטיפול יצא הנהג לכיוון B במהירות הקטנה ב- 10 קמ״ש ממהירות נסיעתו עד התקלה.
הוא הגיע ל- B באיחור של שעה אחת לעומת השעה המתוכננת.
מה הייתה מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה?

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.2 בסדרה שכל איבריה שונים מאפס ומאחד נתון כי סכום של כל שני איברים עוקבים שווה למכפלתם.
א. מצא נוסחת נסיגה המביעה את a_{n+1} באמצעות a_n.
ב. הוכח כי עבור כל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n$.
ג. נתון כי $a_{31} = 3$, n הוא מספר זוגי.
מצא נוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

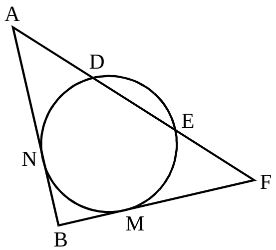
.3 משפחה יצאה לטיול במכונית הנוסעת על 4 גלגלים חדשים.
בתא המטען של המכונית יש גלגל רזרבי אחד.
ההסתברות שיהיה נקר (פנצ׳ר) בגלגל חדש בזמן הטיול היא 0.05.
ההסתברות שיהיה נקר בגלגל הרזרבי בזמן הטיול היא 0.25.
א. מהי ההסתברות שיהיה נקר בדיוק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים החדשים?

ב. בתחילת הטיול היה נקר בגלגל אחד, והמשפחה החליפה את הגלגל בגלגל הרזרבי.
(1) מהי ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל הרזרבי מבין ארבעת הגלגלים?
(2) מהי ההסתברות שאחרי ההחלפה יהיה נקר רק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים?
(3) ידוע כי אחרי ההחלפה היה נקר רק בגלגל אחד מבין ארבעת הגלגלים.
מהי ההסתברות שהנקר היה בגלגל הרזרבי?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

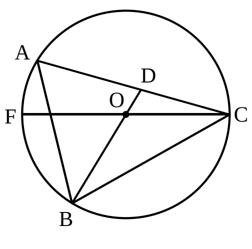
ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

.4 מנקודה A יוצאים למעגל חותך AF וישר המשיק למעגל בנקודה N.
החותך נפגש עם המעגל בנקודות D ו- E.
מנקודה F יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה M, ונפגש עם המשך המשיק AN בנקודה B (ראה ציור). נתון: $AD = DE = EF$.



א. הוכח: $AN = MF$.
ב. הוכח: $\Delta ADN \cong \Delta FEM$.
ג. הוכח: במרובע $MNDE$ יש שתי צלעות מקבילות זו לזו.

.5 משולש חד-זוויות ABC חסום במעגל שמרכזו O. CF הוא קוטר במעגל, והמשך הרדיוס BO חותך את הצלע AC בנקודה D, כמתואר בציור. נתון: $\sphericalangle ABD = \alpha$.
הקשת $\overset{\frown}{BC}$ ארוכה פי 2 מהקשת $\overset{\frown}{FB}$.



א. חשב את גודל הזווית BAC.
ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש BAD לשטח המשולש BAC.
ג. נתון גם כי: $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{3}$. מצא את α.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-a}{x^2+3a}-1$. a הוא פרמטר, $a>0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

(3) את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה. נמק.

(4) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(5) אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

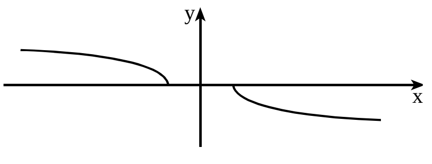
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הסבר את השינויים בגרף הפונקציה $f(x)$ עבור $a<0$ לעומת גרף הפונקציה עבור $a>0$:

(1) בתחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) בנקודות הפיתול של הפונקציה.

7. נתונות הפונקציות $f(x)=\sqrt{-x-4}$, $g(x)=-\sqrt{x-4}$ (ראה ציור).



א. מצא את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות הנתונות.

לפונקציות יש משיק משותף, המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=x_0$.

ב. (1) הבע באמצעות x_0 את השיעורים של הנקודה שבה המשיק המשותף משיק לגרף הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את השיעורים של נקודת ההשקה שהבעת בתת-סעיף ב' (1) (ערכים מספריים).

ג. השטח המוגבל על ידי המשיק המשותף, על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x , מסתובב סביב ציר ה- x . מצא את הנפח של גוף הסיבוב שנוצר.

.8 נתונה הפונקציה $f(x)=2\tan^2 x$ בתחום $-\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

א. בתחום הנתון:

(1) מצא את ערכי ה- x שעבורם הפונקציה $f(x)$ אינה מוגדרת.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מצא את פונקציית הנגזרת של הפונקציה $g(x)=\tan x-x$.

(2) בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ מצא את השטח המוגבל על ידי הישר $y=\frac{2}{3}$, על ידי הישר $x=\frac{\pi}{2}$, על ידי הגרף של הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x. היעזר בפונקציית הנגזרת של $g(x)$.

תשובות למבחן בגרות מספר 6 – חורף תשע"א, 2011:

.1 80 קמ"ש. **.2** א. $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n-1}$. ג. $2.25n$.

.3 א. $\frac{6859}{40000}$. ב. (1) $\frac{6859}{32000}$. (2) $\frac{2527}{8000}$. (3) $\frac{19}{28}$.

.5 א. 60°. ב. $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(30+\alpha)\sin(120-\alpha)}$. ג. 40.89°.

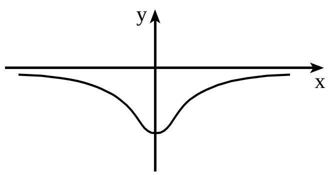
.6 א. (1) כל x.

(2) עלייה: $x>0$; ירידה: $x<0$.

(3) $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$. (4) $(0;-1\frac{1}{3})$.

(5) $y=0$.

ב.



ג. (1) $x\ne\sqrt{-3a}$, $x\ne-\sqrt{-3a}$. (2) אין נקודות פיתול.

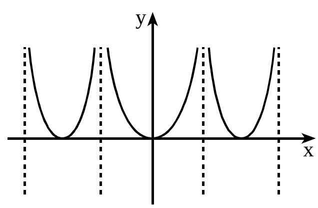
.7 א. $f(x)$: $x\le-4$. $g(x)$: $x\ge4$.

ב. (1) $\left(-x_0;-\sqrt{-x_0-4}\right)$. (2) $(8;-2)$. ג. $2\frac{2}{3}\pi$.

.8 א. (1) $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{3\pi}{2}$. (2) $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{3\pi}{2}$.

(3) $(-\pi;0)$ מינימום, $(0;0)$ מינימום, $(\pi;0)$ מינימום.

(4)



ב. (1) $g'(x)=\tan^2 x$. (2) $\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{9}=0.8056$.

מבחן בגרות מספר 7

קיץ תשע"א, 2011, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון

במפעל לייצור מחשבונים עובדים פועלים ותיקים ופועלים חדשים.
פועל ותיק ופועל חדש התבקשו להרכיב מחשבונים.
לו פועל ותיק היה עובד $\frac{1}{3}$ מהזמן שנדרש לעובד חדש לבצע לבד עבודה זו,
ופועל חדש היה עובד $\frac{1}{3}$ מהזמן שנדרש לעובד ותיק לבצע לבד עבודה זו,
אז יחד הם היו מבצעים $\frac{13}{18}$ מעבודה זו. פועל ותיק מבצע לבד את העבודה
במספר שעות קטן יותר מזה הדרוש לפועל חדש.

א. מצא פי כמה גדול מספר השעות הדרוש לפועל חדש לבצע לבד
את העבודה, ממספר השעות הדרוש לפועל ותיק לבצע לבד את העבודה.

ב. נתון כי פועל ותיק מרכיב 9 מחשבונים בשעה.
בצוות עבודה יש פועל אחד חדש ושני פועלים ותיקים.
מצא בכמה שעות הצוות מרכיב 168 מחשבונים.

.2 סרקו אותי לצפייה בפתרון

נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת.
כל איבר בסדרה זו קטן פי 2 מסכום כל האיברים שאחריו.
סכום הסדרה ההנדסית הנתונה הוא 4 .
מצא את סכום כל האיברים שאחרי האיבר העשירי בסדרה.

.3

בחברת תקשורת גדולה נבדקו הרגלי הצפייה של הלקוחות.
נמצא כי מספר הלקוחות שצופים בערוצי אקטואליה גדול פי 4 ממספר
הלקוחות שאינם צופים בהם. $\frac{5}{6}$ מהלקוחות שצופים בערוצי סרטים,
צופים בערוצי אקטואליה.
75% מהלקוחות שאינם צופים בערוצי סרטים, צופים בערוצי אקטואליה.
בוחרים באקראי לקוח מבין הלקוחות שהרגלי הצפייה שלהם נבדקו.
ההסתברות שהוא צופה בערוצי סרטים היא P .

א. (1) הבע באמצעות P את ההסתברות שהלקוח שנבחר צופה בערוצי
סרטים וגם בערוצי אקטואליה.

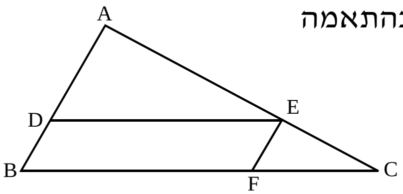
(2) מצא את P .

ב. (1) נמצא שהלקוח שנבחר אינו צופה בערוצי סרטים.
מהי ההסתברות שהוא אינו צופה בערוצי אקטואליה?
(2) בחרו באקראי 5 לקוחות שאינם צופים בערוצי סרטים.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם צופה בערוצי אקטואליה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

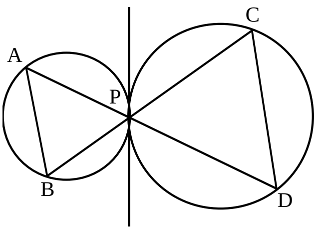
.4 נתון משולש ABC. הנקודות D, E, ו- F
נמצאות על הצלעות AB, AC, ו- BC בהתאמה
כך ש- $DE \parallel BC$ ו- $FE \parallel BA$ (ראה ציור).



א. נתון: שטח המשולש ADE הוא S_1,
שטח המשולש EFC הוא S_2.
הבע באמצעות S_1 ו- S_2
את היחס $\frac{BF}{FC}$. נמק.

ב. הוכח כי שטח המשולש BEF שווה ל- $\sqrt{S_1 \cdot S_2}$.

.5 לשני מעגלים יש משיק משותף המשיק לשניהם בנקודה P.
נקודות C ו- D נמצאות על מעגל אחד
ונקודות A ו- B נמצאות על המעגל
האחר כך שהקטעים AD ו- CB
נפגשים בנקודה P (ראה ציור).



נתון: רדיוס המעגל העובר דרך הנקודות
C, D ו- P הוא 4.5 ס"מ, $\frac{CD}{AB} = \frac{3}{2}$,
$\sphericalangle BAP = \alpha$, $\sphericalangle DCP = \beta$.

א. מצא את רדיוס המעגל העובר דרך הנקודות A, B ו- P.
ב. הבע באמצעות α ו- β את אורך הקטע BD.
ג. אם נתון גם כי $\frac{PD}{PB} = \frac{3}{2}$, הראה כי $BD = 3\sin\alpha \cdot \sqrt{1 + 24\sin^2\alpha}$.
(α ו- β הן זוויות חדות.)

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}}$. a הוא פרמטר שונה מאפס.

א. עבור $a>0$ מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

(3) תחומי עלייה וירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

(4) נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור $a>0$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-a$, $a>0$.

(1) מה הן האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$?

(הבע באמצעות a במידת הצורך).

(2) מה הם הערכים שהפונקציה $g(x)$ יכולה לקבל?

(הבע באמצעות a במידת הצורך).

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=\cos(x^2-2x)$ בתחום $-0.5\le x\le 2.5$.

א. בתחום הנתון מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

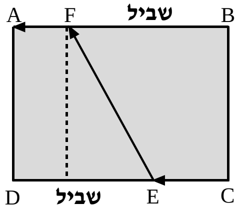
ב. בתחום הנתון שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. בתחום $0\le x\le 2$ מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

תוכל להיעזר בסקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

בתשובותיך דייק במידת הצורך עד שתי הספרות אחרי הנקודה העשרונית.

8. נתונה מדשאה בצורת מלבן ABCD .
לאורך צלעות המלבן BA ו- CD יש שבילי הליכה.
אורך הצלע BA הוא 0.4 ק״מ,
ואורך הצלע BC הוא 0.3 ק״מ.
אדם עומד בקדקוד C של המדשאה
ורוצה להגיע לקדקוד A . הוא הולך
לאורך הקטע CE שעל השביל CD ,
אחר כך הולך לאורך הקטע EF שעל המדשאה
וממשיך לאורך הקטע FA שעל השביל BA (ראה ציור).
האדם הולך במהירות של 6 קמ״ש לאורך השבילים,
ועל המדשאה הוא הולך במהירות של 4 קמ״ש.
מה צריך להיות אורך הקטע EF , כדי שהאדם יגיע ל- A בזמן הקצר ביותר? בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



תשובות למבחן בגרות מספר 7 – קיץ תשע״א, 2011, מועד א:

1. א. פי 1.5 . ב. 7 שעות. **2.** $\frac{4096}{59049}$.

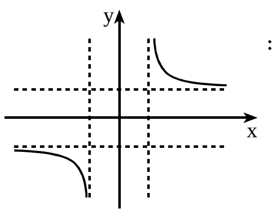
3. א. **(1)** $\frac{5}{6}p$. **(2)** $P=0.6$. ב. **(1)** 0.25 . **(2)** $\frac{1023}{1024}$. **4.** א. $\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$.

5. א. 3 ס״מ. ב. $BD=\sqrt{36\sin^2\alpha+81\sin^2\beta-108\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}$.

6. א. **(1)** $x>a$ או $x<-a$. **(2)** $x=a$, $x=-a$, $y=a$, $y=-a$.

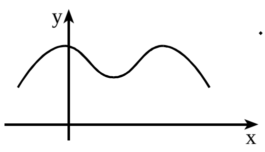
(3) עלייה: אף x ; ירידה: $x>a$ או $x<-a$. **(4)** אין חיתוך עם הצירים.

ב. עבור $a>0$:



ג. **(1)** $x=a$, $x=-a$, $y=0$, $y=-2a$. **(2)** $g(x)>0$ או $g(x)<-2a$.

7. א. $(-0.5;0.315)$ מינימום, $(0;1)$ מקסימום, $(1;0.54)$ מינימום, $(2;1)$ מקסימום, $(2.5;0.315)$ מינימום. ב.



ג. 0.92 .

8. 0.4025 ק״מ.

מבחן בגרות מספר 8

קיץ תשע"א, 2011, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 3-1.

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון

רוכב אופניים יצא ממושב A אל מושב B, ולאחר $\frac{1}{2}$ שעה יצא רוכב אופניים שני ממושב B אל מושב A.
הרוכבים נפגשו לאחר שהרוכב השני עבר $\frac{1}{4}$ מהמרחק שבין B ל- A.
ביום אחר יצא רוכב האופניים הראשון ממושב A למושב B $\frac{1}{2}$ שעה אחרי שרוכב האופניים השני יצא ממושב B אל מושב A. הרוכבים נפגשו באמצע הדרך שבין A ל- B. מהירויות הרוכבים לא השתנו.

א. חשב את היחס בין מהירות הרוכב הראשון ובין מהירות הרוכב השני.

ב. ידוע שאם שני הרוכבים יוצאים באותו רגע זה לקראת זה,
הם נפגשים במרחק b ק"מ מאמצע הדרך שבין A ל- B.
הבע באמצעות b את הדרך שבין A ל- B.

.2 סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. סכום כל האיברים בסדרה הנדסית אינסופית הוא 112,
וסכום האיברים במקומות הראשון, הרביעי, השביעי וכו' של סדרה זו הוא 64. מצא את a_1 ואת q.

ב. בסדרה נתון: $a_{n+1} = a_n + 4n + 6$. בסדרה ישנם K איברים (K זוגי).
הבע באמצעות K את ההפרש בין סכום האיברים במקומות הזוגיים לבין סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

.3 בקבוצה של 40 אנשים יש 16 גברים והשאר נשים. ל- 12 גברים בקבוצה יש רישיון נהיגה, ול- 16 נשים בקבוצה יש רישיון נהיגה.

א. בוחרים באקראי אדם מהקבוצה.
מהי ההסתברות שייבחר אדם שיש לו רישיון נהיגה?

ב. בוחרים באקראי אדם מהקבוצה. לאחר שהאדם חוזר לקבוצה, שוב בוחרים באקראי אדם מהקבוצה. מהי ההסתברות שלפחות פעם אחת ייבחר אדם שיש לו רישיון נהיגה?

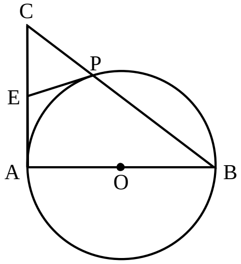
ג. האם המאורע "לבחור מהקבוצה גבר" והמאורע "לבחור מהקבוצה אדם שיש לו רישיון נהיגה" הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

ד. לכמה נשים בקבוצה צריך שיהיה רישיון נהיגה כדי לקבוע שבקבוצה הנתונה של 40 האנשים אין תלות בין מין האדם לכך שיש לו רישיון נהיגה? (מספר הגברים והנשים בקבוצה אינו משתנה, ומספר הגברים בעלי רישיון אינו משתנה).

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

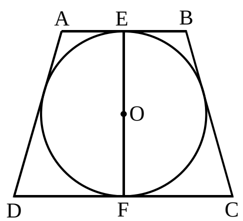
.4 במשולש ישר-זווית CAB $(\sphericalangle CAB = 90^\circ)$
הניצב AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
היתר BC חותך את המעגל גם בנקודה P.
המשיק למעגל בנקודה P חותך את הניצב CA בנקודה E (ראה ציור).



א. הוכח כי $CE = EA$.

ב. אם נתון כי $\frac{CP}{EA} = \frac{2}{3}$, וכי שטח המשולש CPE הוא 2 סמ"ר, מצא את שטח המשולש PAB. נמק.

.5 נתון טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel DC)$ החוסם מעגל שמרכזו O. AB ו- DC משיקים למעגל בנקודות E ו- F בהתאמה. EF הוא קוטר במעגל (ראה ציור). האורך של שוק הטרפז הוא b.
נתון כי $(\sin\sphericalangle C)^2 = \sin(90^\circ - \sphericalangle C)$. הבע באמצעות b:



א. את רדיוס המעגל החסום בטרפז.

ב. את אורך הבסיס הקטן AB.

בתשובותיך השאר שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{\cos x}$.

א. מצא אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

ב. בתחום $0\le x\le 2\pi$:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן. נמק.

(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. לשרטוט ששרטטת בתת-סעיף ב(3) הוסף סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-2\pi\le x\le 0$.

ד. השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הישר $y=2$, על ידי הישר $x=\frac{\pi}{2}$, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y , מסתובב סביב ציר ה- x .
מצא את הנפח של גוף הסיבוב שנוצר.

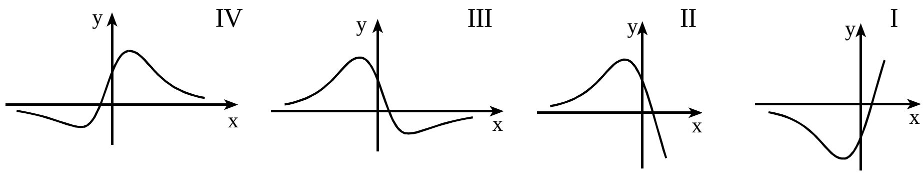
ה. בתחום שבין ∞ ל- $-\infty$, רשום בצורה כללית את השיעורים:

(1) של נקודות המינימום של הפונקציה $f(x)$.

(2) של נקודות המקסימום של הפונקציה $f(x)$.

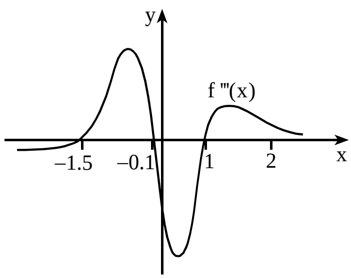
7. נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x)=\frac{-6x^2-3x+3}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$.
הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. מבין הגרפים I , II , III , IV שלפניך, איזה גרף מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$? נמק.



ב. (1) מצא תחומי קעירות כלפי מטה $\cap$ ותחומי קעירות כלפי מעלה $\cup$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.
(2) היעזר בגרף של $f'(x)$ שבסעיף א', ומצא בין אילו שני מספרים שלמים עוקבים נמצא שיעור ה- x של נקודת הקיצון של $f(x)$. נמק.
(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, אם ידוע כי הגרף חותך את ציר ה- x רק בנקודה אחת שבה $x=3$.

לפניך סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת השלישית $f'''(x)$.



ג. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'''(x)$, על ידי ציר ה- x וציר ה- y ועל ידי הישר $x=2$ בתחום $x\geq 0$.
ד. על פי הגרף של $f'(x)$ שבסעיף א', הסבר מדוע הגרף של פונקציית הנגזרת השלישית $f'''(x)$ חותך את ציר ה- x בשלוש נקודות.

8. נתונות המשוואות של שתי פרבולות : $f(x)=-a^2x^2$, $g(x)=x^2-x$.
a הוא פרמטר שונה מ- 0 .
הפרבולות נפגשות בנקודות O ו- A (O – ראשית הצירים).
א. הבע באמצעות a את השיעורים של הנקודה A .
ב. מצא את השיעורים של הנקודה A שעבורה השטח, המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי האנך לציר ה- x העובר דרך הנקודה A , הוא מקסימלי.

תשובות למבחן בגרות מספר 8 – קיץ תשע"א, 2011, מועד ב:

1. א. $\frac{5}{3}$. ב. $8b$ קמ"ש.

2. א. $a_1 = 56$, $q = 0.5$. ב. $K^2 + 3K$.

3. א. 0.7 . ב. 0.91 . ג. לא. המאורעות תלויים. ד. 18 .

4. ב. 32 סמ"ר.

5. א. $0.393b$. ב. $0.382b$.

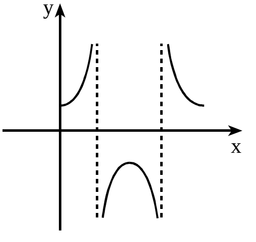
6. א. הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. (1) תחום הגדרה: $0 \le x \le 2\pi$, $x \ne \frac{\pi}{2}$, $x \ne \frac{3\pi}{2}$.

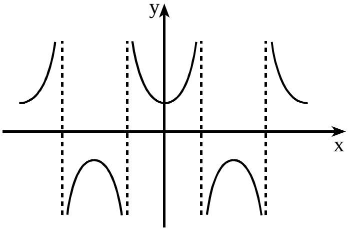
אסימפטוטות מקבילות לצירים: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

(2) $(0;1)$ מינימום, $(\pi;-1)$ מקסימום, $(2\pi;1)$ מינימום.

(3)



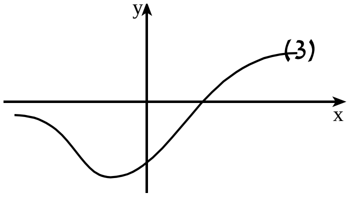
ג.



ד. $\frac{2}{3}\pi^2 + \sqrt{3}\pi = 12.02$.

ה. (1) $(2\pi k;1)$ מינימום. (2) $(\pi + 2\pi k;-1)$ מקסימום. הערה: k מספר שלם.

7. א. IV .



ב. (1) $\cap$: $x > \frac{1}{2}$ או $x < -1$;

$\cup$: $-1 < x < \frac{1}{2}$.

(2) בין -1 ל- 0 .

ג. 4.638 .

ד. הפונקציה $f'''(x)$ היא למעשה הנגזרת השנייה של $f'(x)$.
בגרף של $f'(x)$ שבסעיף א', יש 3 נקודות פיתול ולכן הנגזרת השנייה של $f'(x)$ מתאפסת ב-3 נקודות ומכאן שבגרף של $f'''(x)$ יש 3 נקודות חיתוך עם ציר ה- x .

8. א. $A\left(\frac{1}{1+a^2};\frac{-a^2}{(1+a^2)^2}\right)$. ב. $A(\frac{2}{3};-\frac{2}{9})$.

מבחן בגרות מספר 9

חורף תשע״ב, 2012

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 משאית יצאה מעיר A לעיר B.
בדיוק באותו רגע יצאה מכונית מעיר B לעיר A.
כאשר הגיעה המכונית ל- A היא חזרה מיד ל- B, וכאשר הגיעה ל- B היא מיד שוב יצאה ל- A. המכונית פגשה בדרכה את המשאית שלוש פעמים, לפני שהמשאית הגיעה ל- B.
הפגישה הראשונה הייתה כעבור 2 שעות מרגע היציאה של המכונית והמשאית לדרך. הפגישה השנייה הייתה כעבור $4\frac{2}{3}$ שעות מרגע היציאה.
הפגישה השלישית הייתה במרחק 40 ק״מ מ- B.
מצא את המהירות של המשאית (המהירויות של המשאית והמכונית אינן משתנות).

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.2 א. בסדרה חשבונית ישנם $2n-1$ איברים. סכום n איברים הראשונים הוא 760 וסכום n האיברים האחרונים הוא 1960.
מצא את n אם האיבר הראשון בסדרה הוא 10.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

ב. נתונה סדרה המקיימת לכל n טבעי:

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{b_n-1}$$

$$b_{19}+b_{20}=4.5\ ,\ b_{19}>2$$

$$b_{n+2}=b_n$$

מצא את b_{10}.

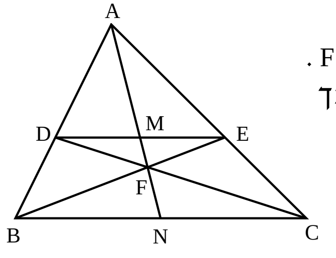
הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

.3 חברה מייצרת טלפונים ניידים חדשניים עם "מסך תלת ממד".
כדי לבדוק את הביקוש לטלפונים אלה, ערכה החברה סקר טלפוני.
בסקר השתתפו צעירים ומבוגרים. חלק מהמשתתפים בסקר הצהירו
שלא יקנו את הטלפון החדשני והשאר הצהירו שיקנו אותו. נמצא כי 50%
מהמבוגרים הצהירו כי יקנו את הטלפון החדשני. $\frac{2}{3}$ מבין אלה שהצהירו
כי לא יקנו את הטלפון החדשני, היו צעירים. $\frac{1}{5}$ מהמשתתפים בסקר היו
צעירים שגם טענו כי לא יקנו את הטלפון החדשני.
א. בסקר השתתפו $2{,}000$ איש. כמה צעירים השתתפו בסקר?
ב. כמה צעירים, מבין הצעירים שהשתתפו בסקר, הצהירו שיקנו
את הטלפון החדשני?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

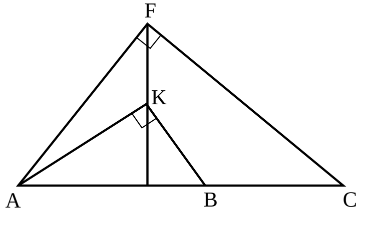
ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

.4 במשולש ABC הנקודות D ו- E
נמצאות על הצלעות AB ו- AC בהתאמה
כך ש- $DE \parallel BC$. CD ו- BE נחתכים בנקודה F.
AF חותך את DE בנקודה M, והמשכו חותך
את BC בנקודה N (ראה ציור).



הוכח: א. $\frac{DM}{BN} = \frac{EM}{CN}$.
ב. $\frac{EM}{BN} = \frac{DM}{CN}$.
ג. $DM = EM$ ו- $BN = CN$.

.5 במשולש ישר-זווית AFC $(\sphericalangle AFC = 90^\circ)$,
הנקודה K נמצאת על הגובה ליתר
כך ש- $\sphericalangle FAK = \beta$ ו- $\sphericalangle KAC = \alpha$.
B היא נקודה על היתר AC
כך ש- $\sphericalangle AKB = 90^\circ$ (ראה ציור).
רדיוס המעגל החוסם את המשולש AFC
הוא R, ורדיוס המעגל החוסם
את המשולש AKB הוא r.



א. (1) הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AF}{AK}$.
(2) הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{R}{r}$.
ב. הבע באמצעות R ו- r בלבד את רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKF.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x}-2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)$, המוגדרת בתחום ההגדרה של $f(x)$.

הנגזרת של $g(x)$ מקיימת: $g'(x)=f(x)\cdot f'(x)$.

מצא את תחום הירידה של הפונקציה $g(x)$. נמק.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{-a\cdot 16\cos x}{\sqrt{16\sin x+9}}$ בתחום $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{7\pi}{6}$.

a הוא פרמטר גדול מ- 0. הפונקציה מוגדרת לכל x בתחום הנתון.

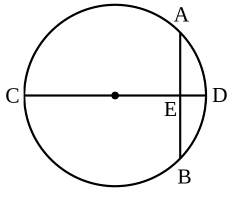
א. בתחום הנתון מצא עבור אילו ערכי x:

(1) $f(x)>0$. נמק. (2) $f(x)<0$. נמק.

ב. מצא את ערך האינטגרל $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} f(x)\,dx$.

ג. נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=-\frac{\pi}{6}$ ו- $x=\frac{7\pi}{6}$, שווה ל- 8. מצא את הערך של a.

8. CD הוא קוטר במעגל שרדיוסו R.
AB הוא מיתר במעגל המאונך לקוטר CD וחותך אותו בנקודה E כך ש- $CE>R$ (ראה ציור).
הבע באמצעות R את השטח המקסימלי של המשולש ABC.



תשובות למבחן בגרות מספר 9 – חורף תשע״ב, 2012:

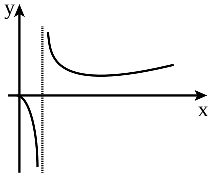
1. 40 קמ״ש.

2. א. $n=16$. ב. $b_{10}=1\frac{1}{2}$.

3. א. 1600 צעירים. ב. 1200 .

5. א. (1) $\frac{AF}{AK}=\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$. (2) $\frac{R}{r}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\alpha+\beta)}$. ב. $\sqrt{R}\sqrt{r}$.

6. א. (1) $x\geq 0$, $x\neq 2$. (2) $x=2$. (3) $(0;0)$. (5)



(4) $(0;0)$ מקסימום, $(8;4)$ מינימום.

ב. $2<x<8$.

7. א. (1) $\frac{\pi}{2}<x\leq\frac{7\pi}{6}$. (2) $-\frac{\pi}{6}\leq x<\frac{\pi}{2}$. ב. 0 . ג. $a=\frac{1}{2}$.

8. $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

מבחן בגרות מספר 10

קיץ תשע"ב 2012, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 צינור הזרים לבְרֵכה 10 מ"ק מים בקצב קבוע.
לאחר הפסקה של $\frac{1}{3}$ שעה הוגבר קצב ההזרמה של הצינור ב- 3 מ"ק לשעה.
בקצב המוגבר הזרים הצינור עוד 20 מ"ק מים.
הזמן שהצינור הזרים את המים, כולל ההפסקה, זהה לזמן שהיה נדרש לצינור, לו היה מזרים 30 מ"ק מים בלי הפסקה בקצב שלפני ההגברה.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. חשב כמה זמן הזרים הצינור את המים עד ההפסקה.

ב. נתון גם כי הצינור ממלא $\frac{1}{3}$ מנפח בְרֵכה ריקה ב- 18 שעות, כאשר הוא מזרים מים בקצב שלפני ההגברה.
שני צינורות מזרימים יחד מים לבְרֵכה הריקה באותו קצב.
קצב זה קטן מהקצב המוגבר של הצינור הנתון וגדול מהקצב שלפני ההגברה.
באיזה תחום שעות יהיה הזמן שבו שני הצינורות ימלאו את הבְרֵכה?

.2 נתונה הסדרה $-2, 5, -8, 11, -14, 17, \ldots$.
הסימנים של איברי הסדרה מתחלפים לסירוגין, והערכים המוחלטים של האיברים מהווים סדרה חשבונית.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. הבע באמצעות n את הסכום של:

(1) $2n$ האיברים הראשונים של הסדרה.

(2) $2n+1$ האיברים הראשונים של הסדרה.

ב. בסדרה הנתונה יש מספר אי-זוגי של איברים, וסכום כל איברי הסדרה הוא -65 .
מצא את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

.3 א. מחלקים 2 כדורים לבנים וכדור 1 שחור בין שני כדים.
בכל כד חייב להיות לפחות כדור אחד.
בוחרים באקראי כד ומוציאים ממנו כדור אחד.
מצא באיזה אופן צריך לחלק את הכדורים בין שני הכדים,
כדי שהסיכוי להוציא כדור לבן יהיה הגדול ביותר.

ב. בכד אחד יש 5 כדורים: 2 לבנים ו-3 שחורים.

(1) מוציאים באקראי 5 פעמים כדור מהכד עם החזרה
(בכל פעם מחזירים לכד את הכדור שהוצא).
מהי ההסתברות להוציא בדיוק פעמיים כדור לבן?

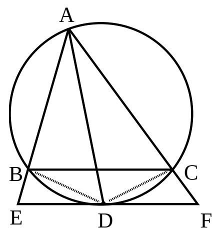
(2) מוציאים באקראי 6 פעמים כדור מהכד עם החזרה.
מהי ההסתברות להוציא בדיוק 3 פעמים כדור לבן כך שהכדור
הלבן השלישי יוצא בפעם השישית?

<u>הערה</u>: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

.4 נתון כי במשולש AEF חוצה-זווית EAF הוא AD.
D היא נקודת ההשקה של הצלע EF למעגל ,
החותך את הצלעות AE ו- AF בנקודות B ו- C
בהתאמה. המעגל עובר גם דרך קדקוד A
(ראה ציור).

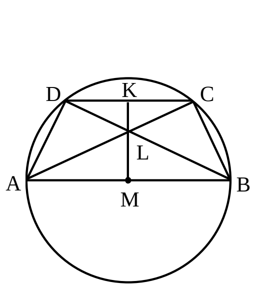


הוכח: א. $BC \parallel EF$.

ב. $\Delta ABD \sim \Delta DCF$.

ג. $AD \cdot BD = DF \cdot AB$.

.5 טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(DC \parallel AB)$
חסום במעגל שמרכזו M .
הבסיס AB הוא קוטר במעגל זה.
אלכסוני הטרפז נפגשים בנקודה L .
המשך ML חותך את DC בנקודה K
(ראה ציור). נתון כי $\sphericalangle BAD = \alpha$.
הבע באמצעות α את היחס $\frac{KL}{LM}$.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 8-6.

.6 א. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה רציונלית המקיימת:
- לפונקציה יש שלוש אסימפטוטות: $x=4$, $x=-1$, $y=0$.
- הפונקציה מוגדרת לכל $x\neq -1$ ו- $x\neq 4$.
- $f(0)>0$
- $f(1.5)=0$
- $f'(x)<0$ רק עבור $-1<x<4$
- $f(x)<0$ עבור $x>4$ ו- $f(x)>0$ עבור $x<-1$.

(1) על פי הנתונים שבסעיף זה, סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) על פי הגרף שסרטטת, הראה כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון בתחום $-1<x<4$, וקבע את סוגה. נמק. אין צורך למצוא את השיעורים של נקודת הקיצון.

ב. נתון גם כי הפונקציה $f(x)$ מקיימת $f(x)=\dfrac{3a-3bx}{(x^2-ax-4)^2}$.

a ו- b הם פרמטרים. מצא את הפונקציה $f(x)$.

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=4\sin^2 x\cdot\cos^2 x$ בתחום $0\le x\le\pi$.

בתחום הנתון:

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. (1) נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\sin(4x)$.

הראה כי $g'(x)=f(x)$.

(2) בתחום הנתון מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

.8 ישר משיק לפרבולה $y=x^2$ בנקודה שבה $0<x<1$.

המשיק יוצר משולש עם ציר ה- x ועם הישר $x=1$.

מצא את השטח המקסימלי של המשולש הנוצר באופן שתואר.

תשובות למבחן בגרות מספר 10 – קיץ תשע"ב 2012, מועד א':

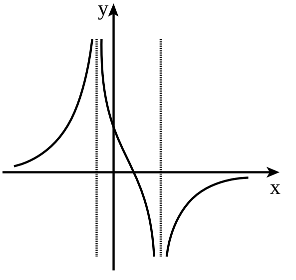
1. א. $\frac{5}{6}$ שעות, כלומר 50 דקות. ב. בין 21.6 שעות ל- 27 שעות.

2. א. (1) $S_{2n} = 3n$. (2) $S_{2n+1} = -3n - 2$. ב. -1430 .

3. א. כד א' : 1 לבן ; כד ב' : 1 לבן ו- 1 שחור. ב. (1) $\frac{216}{625}$. (2) $\frac{432}{3125}$.

5. $-\cos 2\alpha$.

6. א. (1)



(2) קיימת נקודת קיצון מסוג מקסימום.

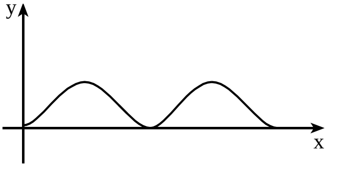
ב. $f(x) = \frac{9-6x}{(x^2-3x-4)^2}$.

7. א. $(0;0)$, $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $(\pi;0)$.

ב. $(0;0)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{4};1\right)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ מינימום, $\left(\frac{3\pi}{4};1\right)$ מקסימום,

$(\pi;0)$ מינימום.

ג.



ד. (2) $\frac{\pi}{2}$.

8. $\frac{8}{27}$.

מבחן בגרות מספר 11

קיץ תשע״ב, 2012, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 רוכב אופנוע יצא מ- A, ובאותה שעה יצא רוכב אופניים מ- B.
הם רכבו זה לקראת זה ונפגשו בדרך. רוכב האופנוע הגיע ל- B
כעבור $\frac{1}{4}$ שעה מרגע הפגישה, ורוכב האופניים הגיע ל- A
כעבור 4 שעות מרגע הפגישה (מהירויות הרוכבים היו קבועות).

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. מצא את היחס בין המהירות של רוכב האופנוע למהירות של רוכב האופניים.

ב. נתון כי המרחק בין A ל- B גדול מ- 90 ק״מ.
מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות של כל אחד מהרוכבים.
(מהירות רוכב האופנוע אינה עולה על 120 קמ״ש).

.2 סדרה מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{a_n}{1-a_n}$.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. מגדירים סדרה חדשה לפי $b_n=\frac{a_n-3}{a_n}$. הוכח: $b_{n+1}-b_n=3$.

ב. נתון: $b_2+b_4+b_6+\ \dots\ +b_{30}=667.5$. חשב את a_1.

.3 נערך סקר בקרב מספר גדול של סטודנטים (בנים ובנות).
חצי מהסטודנטים המשתתפים בסקר היו בנים.
בסקר נמצא כי מספר הבנות הסובלות מרעש גדול פי 3 ממספר הבנים הסובלים מרעש. נמצא גם כי 5% מבין הבנים סובלים מרעש.

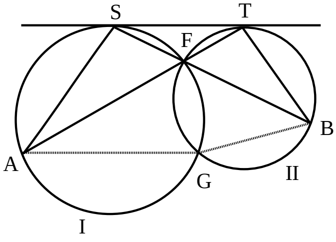
א. ידוע כי אחד המשתתפים בסקר שנבחר באקראי, סובל מרעש.
מהי ההסתברות שהנבחר הוא בת?

ב. בחרו באקראי 5 סטודנטים מבין משתתפי הסקר.
ידוע כי לכל היותר 2 מבין הסטודנטים שנבחרו באקראי, סובלים מרעש. מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם סובל מרעש?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

4. שני מעגלים I ו- II נחתכים בנקודות G ו- F.
הישר ST משיק למעגל I בנקודה S,
ולמעגל II בנקודה T.
המשך SF חותך את המעגל II בנקודה B,
והמשך TF חותך את מעגל I בנקודה A
(ראה ציור).

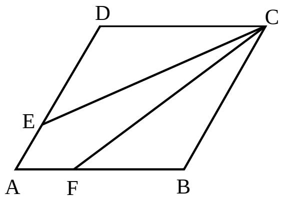


א. הוכח כי $\frac{ST}{AS}=\frac{TB}{ST}$.

(1) הוכח כי $\sphericalangle AGF=\sphericalangle SFA+\sphericalangle SAF$.

(2) הוכח כי אם הנקודות A, G ו- B נמצאות על ישר אחד,
אז $\sphericalangle SFA=60^\circ$.

5. נתון מעוין ABCD. E ו- F הן נקודות
על הצלעות AD ו- AB בהתאמה
כך ש- $AE=AF$ ו- $FB=2AF$.
נתון כי $\sphericalangle DCB=60^\circ$.



א. מצא את גודל הזווית FCB.

ב. נתון כי אורך האלכסון AC הוא b.
הבע באמצעות b את היקף המרובע AECF.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\cos^3(3x-\pi)$, המוגדרת לכל x.

א. בתחום $0\le x\le\frac{2\pi}{3}$ מצא:

(1) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. (1) הוכח כי הפונקציה זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $-\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$.

ג. רשום את משוואות הישרים המשיקים לגרף הפונקציה בתחום $-\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$ ומאונכים לציר ה- y.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-9}}$.

א. מצא:

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

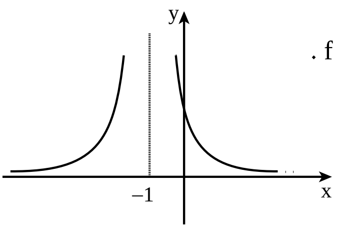
(3) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

(4) את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. מצא את הסימן של האינטגרל המסוים $\int_k^t f'(x)dx$, $(k < t)$ אם נתון כי k ו- t גדולים מ- 3. נמק.

8. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציית מנה המוגדרת עבור $x \ne -1$.



בציור מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

א. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות בלבד: $x = -1$, $y = 1$.
גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -1$. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, על פי תשובתך לסעיף א׳ ועל פי הנתונים שבסעיף ב׳.

ג. נתון גם $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. a , b , c ו- d הם פרמטרים שונים מאפס.

(1) הבע באמצעות a את b , c ו- d.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x = 1$ ועל ידי הצירים.

תשובות למבחן בגרות מספר 11 – קיץ תשע״ב, 2012, מועד ב:

1. א. היחס הוא 4 .

ב. מהירות רוכב האופנוע גדולה מ- 72 קמ״ש וקטנה או שווה ל- 120 קמ״ש.

מהירות רוכב האופניים גדולה מ- 18 קמ״ש וקטנה או שווה ל- 30 קמ״ש.

2. ב. $a_1 = 2$.

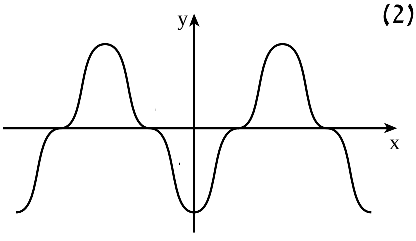
3. א. $\frac{3}{4}$. ב. $\frac{45}{136}$.

5. א. 23.41° . ב. $2.063b$.

6. א. (1) $(0;-1)$, $\left(\frac{\pi}{6};0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$.

(2) $(0;-1)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{3};1\right)$ מקסימום, $\left(\frac{2\pi}{3};-1\right)$ מינימום.

ב. (2)



ג. $y = 1$, $y = -1$, $y = 0$.

7. א. (1) $x > 3$ או $x < -3$.

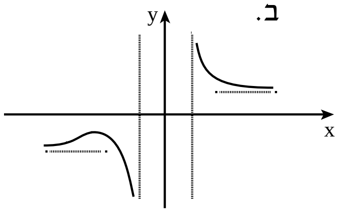
(2) אין.

(3) $x = 3$, $x = -3$, $y = 1$, $y = -1$.

(4) עלייה: $x < -9$;

ירידה: $x > 3$ או $-9 < x < -3$.

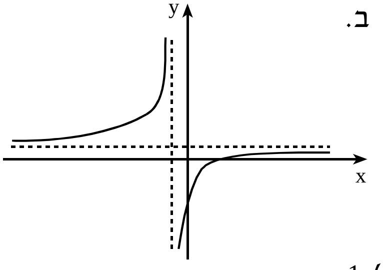
ב.



ג. הסימן שלילי.

8. א. $\cup$: $x < -1$, $\cap$: $x > -1$.

ב.



ג. (1) $b = -a$, $c = a$, $d = a$. (2) 1 .

מבחן בגרות מספר 12

חורף תשע"ג, 2013

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון

דן יצא מתל אביב להרצליה על אופניו, ורכב במהירות קבועה של v קמ"ש. כעבור $\frac{1}{2}$ שעה מרגע היציאה של דן, גם אילנית יצאה על אופניה מתל אביב להרצליה, ורכבה באותו מסלול במהירות הגדולה ב- 2 קמ"ש ממהירותו של דן.
אילנית ודן נפגשו בדרך להרצליה, ו- $\frac{1}{2}$ שעה לאחר הפגישה הגיעה אילנית להרצליה.
מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות v, אם נתון כי מסלול הרכיבה מתל אביב להרצליה קטן מ- 25 ק"מ וגדול מ- 9 ק"מ.

.2 סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. נתונה סדרה הנדסית ... $3, 6, 12, 24, \dots$
מסדרים את איברי הסדרה בשורות כך שבשורה הראשונה יש איבר אחד ובכל שורה אחרת מספר האיברים גדול באחד מזה שבשורה הקודמת. הבע באמצעות n את סכום האיברים ב- n השורות הראשונות.

3
$6, 12$
$24, 48, 96$
....
....

ב. נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58, 62, 66, \dots, (4n+6)$
הבע את סכום הסדרה באמצעות n $(n>12)$.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

.3 בחדר I נמצאים k נשים ו- k גברים $(k>1)$.
בחדר II נמצאים k נשים ו- $3k$ גברים.
מטילים קובייה מאוזנת.
אם מתקבל מספר המתחלק ב- 3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר I.
אם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב- 3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר II.
כאשר בוחרים באופן זה, הסתברות לבחור 2 נשים מחדר I גדולה פי $\frac{15}{7}$ מההסתברות לבחור 2 נשים מחדר II.

א. מצא את k.

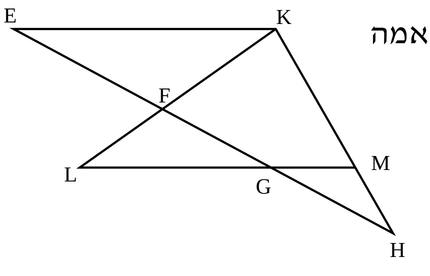
ב. מצא את ההסתברות לבחור 2 נשים באופן שתואר.

ג. ידוע שנבחר לפחות גבר אחד באופן שתואר.
מהי ההסתברות שנבחרו בדיוק 2 גברים מחדר I?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

.4 נתון משולש KHE. נקודות M ו- G נמצאות על הצלעות KH ו- EH בהתאמה כך ש- $GM \parallel EK$.
נקודה F נמצאת על הצלע EH.
המשכי הקטעים GM ו- FK נפגשים בנקודה L (ראה ציור).



נתון: $\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$.

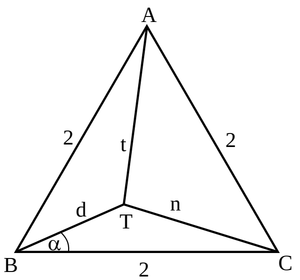
א. הוכח כי $\Delta KHE \sim \Delta FLG$.

ב. נתון גם: $\frac{EF}{GE}=\frac{3}{5}$, $EH=12.5$ ס"מ, $LG=5$ ס"מ.

(1) מצא את האורך של EK.

(2) מצא את היחס $\frac{MH}{KH}$.

5. נתון משולש שווה-צלעות ABC.
נקודה T נמצאת בתוך המשולש (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle TBC = \alpha$, $CT = n$ ס"מ,
$BT = d$ ס"מ, $AT = t$ ס"מ.
אורך צלע המשולש הוא 2 ס"מ.



א. הוכח כי $\sin(\alpha - 30^\circ) = \frac{n^2 - t^2}{4d}$.
ב. הבע את שטח המשולש ATC
באמצעות α ו- d.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3a^2}$. a הוא פרמטר, $a > 0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):
(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
(3) את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
(4) אם נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד ובהן $x = \pm a$.
(1) היעזר בגרף של $f(x)$, והבע באמצעות a את התחום שבו פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית, ואת התחום שבו היא שלילית. נמק.
(2) הבע באמצעות a את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, וקבע את סוגן.

ד. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי הישר $x = a$ ועל ידי ציר ה- x.
סמן במערכת צירים את השטח המבוקש.

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=-\sqrt{\sin x}+\frac{1}{2}\sin x$ בקטע $0\le x\le 3\pi$.

א. בקטע הנתון מצא :

(1) עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. (1) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון.

(2) מצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

ג. האם יש ערכים של x בקטע הנתון שעבורם מתקיים האי-שוויון $\frac{1}{2}\sin x>\sqrt{\sin x}$? נמק.

.8 מחלקים חוט שאורכו k לשני חלקים (לאו דווקא חלקים שווים).
מחלק אחד של החוט יוצרים מעגל ומהחלק האחר יוצרים ריבוע.
סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי כאשר היקף המעגל הוא $\frac{5\pi}{\pi+4}$. מצא את הערך של k .

תשובות למבחן בגרות מספר 12 – חורף תשע"ג, 2013:

1. $4 < v < 8$.

2. א. $3\cdot(2^{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}-1)$. ב. $2n^2+8n-384$.

3. א. $k=4$. ב. $\frac{11}{105}$. ג. $\frac{15}{188}$.

4. ב. (1) 7.5 ס"מ $=EK$. (2) $\frac{MH}{KH}=\frac{2}{5}$.

5. ב. $\sqrt{3}-d\left[\sin(60^\circ-\alpha)+\sin\alpha\right]$ או $\sqrt{3}-d\cos(30^\circ-\alpha)$.

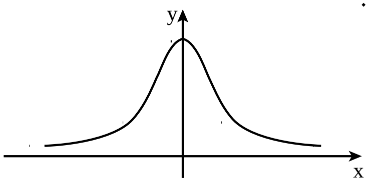
6. א. (1) כל x .

(2) $\left(0;\frac{2}{a^2}\right)$.

(3) $y=0$.

(4) $\left(0;\frac{2}{a^2}\right)$ מקסימום.

ב.



ג. (1) $f''(x)>0$ כאשר $x>a$ או $x<-a$. $f''(x)<0$ כאשר $-a<x<a$.

(2) $x=a$ מינימום, $x=-a$ מקסימום.

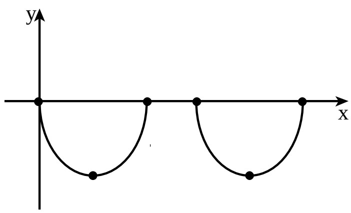
ד. $\frac{1}{2a^2}$.

7. א. (1) $0\le x\le \pi$ או $2\pi\le x\le 3\pi$.

(2) $(0;0)$ מקסימום, $\left(\frac{1}{2}\pi;-\frac{1}{2}\right)$ מינימום, $(\pi;0)$ מקסימום,

$(2\pi;0)$ מקסימום, $\left(2\frac{1}{2}\pi;-\frac{1}{2}\right)$ מינימום, $(3\pi;0)$ מקסימום.

ב. (1)



(2) $y=-\frac{1}{2}$.

ג. לא.

8. $k=5$.

מבחן בגרות מספר 13

קיץ תשע"ג, 2013, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון

פועל I ופועל II עובדים במפעל לייצור חלקי חילוף.
שני הפועלים מבצעים יחד עבודה מסוימת.
קצב העבודה הרגיל של פועל I שונה מקצב העבודה הרגיל של פועל II .
אם כל אחד מהפועלים יגביר את קצב העבודה הרגיל שלו ב- 50% ,
ההפרש בין זמן העבודה של שני הפועלים יחד בקצב הרגיל ובין זמן העבודה שלהם יחד בקצב המוגבר יהיה $\frac{2}{15}$ מהזמן שנדרש לפועל I לבצע לבד את העבודה בקצב הרגיל שלו.

א. מצא את היחס בין הזמן שבו פועל I מבצע לבד את העבודה ובין הזמן שבו פועל II מבצע לבד עבודה זו.

ב. העבודה ששני הפועלים מבצעים יחד היא הכנה של 300 חלקי חילוף.
הפועלים ביצעו יחד עבודה זו בקצב הרגיל שלהם ב- 6 ימים.
כמה חלקי חילוף ביום מכין לבד פועל I בקצב הרגיל שלו?

.2 סרקו אותי לצפייה בפתרון

נתונה סדרה a_n . סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא :
$S_n = n^2 - 5n + [2 + 6 + 10 + \ \dots \ + (4n-2)]$.

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ- 102 .
חשב את הערך הגדול ביותר שיכול להתקבל עבור סכום מסוים של איברים כאלה (לאו דווקא הסכום של כל האיברים).

.3 הוועדה המארגנת של תחרות "נולד לשיר" מתלבטת אם ישפוט בתחרות רק שופט א' או יצטרפו אליו שני שופטים נוספים: שופט ב' ושופט ג'. ההצבעה של שופט א' לא תשתנה אם הוא ישפוט לבד או אם ישפוט עם האחרים. ההצבעה של כל אחד מהשופטים אינה תלויה בהצבעה של השופטים האחרים.
אם ישפוט בתחרות רק שופט א' – יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם השופט יצביע בעדו.
אם ישפטו שלושת השופטים – יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם <u>לפחות</u> 2 מהשופטים יצביעו בעדו. יוסי הוא אחד המתמודדים בתחרות.
נתון כי ההסתברות ששופט א' יצביע בעד יוסי שווה להסתברות ששופט ב' יצביע בעדו. ההסתברות ששופט ג' יצביע בעד יוסי היא 0.5.

א. האם ההסתברות, שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפוט בתחרות רק שופט א', שווה להסתברות שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפטו בתחרות שלושת השופטים? נמק.

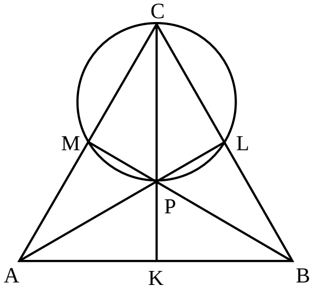
ב. לבסוף הוחלט שבתחרות ישפטו שלושת השופטים. נתון כי ההסתברות, ששופט א' הצביע בעד יוסי אם ידוע כי יוסי עבר לשלב נוסף בתחרות, גדולה מ- 0.8.
מצא את תחום הערכים של ההסתברות ששופט א' הצביע בעד יוסי.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

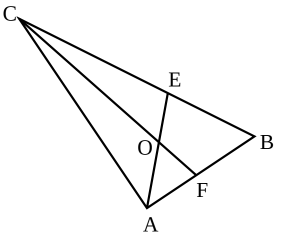
.4 א. הוכח כי אם במשולש שני תיכונים שווים זה לזה, המשולש הוא שווה-שוקיים.

ב. במשולש ABC הנקודות L, M ו- K הן אמצעי הצלעות CB, CA ו- AB, בהתאמה. הנקודה P היא נקודת מפגש של התיכונים במשולש, ונתון שהיא נמצאת על מעגל העובר דרך הנקודות L, M ו- C (ראה ציור).
נתון גם כי $AL = BM$.



(1) הוכח כי $BM \perp AC$.
(2) הוכח כי $AK = AM$.

.5 הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.
המשך AO חותך את הצלע BC בנקודה E.
המשך CO חותך את הצלע AB בנקודה F
(ראה ציור).



נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

א. הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AE}{CF}$.

ב. נתון גם: $\frac{AE}{CF} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60^\circ$.
הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB שווה ל- $\frac{1}{2}BC$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

.6 נתונה הפונקציה $g(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$ בתחום $0 \le x \le \frac{7}{3}\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם גרף הפונקציה $f(x) = \sin x$.

ג. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.
(1) מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB.
(2) כמה קטעים כמו AB שאורכם מקסימלי מתקבלים בתחום הנתון? נמק.

7. נתונות שתי פונקציות: $f(x)=x^2+4x+b$

$g(x)=-x^2+c$

b ו- c הם פרמטרים גדולים מ- 0.

לגרפים של שתי הפונקציות יש משיק משותף בנקודה משותפת P.

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה P.

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי $b>4$.

הישר $x=a$ חותך את המשיק המשותף בנקודה D, את הגרף של $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של $g(x)$ בנקודה B (D, A ו- B הן שלוש נקודות שונות).

ג. הראה כי הישר PD הוא תיכון במשולש PAB.

ד. השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי המשיק המשותף ועל ידי הישרים $x=a$ ו- $x=-a$, הוא S.

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הגרף של $g(x)$ ועל ידי הישרים $x=a$ ו- $x=-a$.

8. נתון כי הפונקציה הזוגית $f(x)=\sqrt{8-ax+bx^2}+c$ מוגדרת בתחום $-2\le x\le 2$ בלבד.

a, b ו- c הם פרמטרים, $c>0$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a ואת הערך של הפרמטר b.

הצב את הערך של a ואת הערך של b, וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=\sqrt{2}$, ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\sqrt{2}$.

השטח המוגבל על ידי שני המשיקים ועל ידי ציר ה- x הוא $\frac{49\sqrt{2}}{2}$.

מצא את הערך של הפרמטר c.

ג. בתחום $-2\le x\le 2$ נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=-f(x)$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=\sqrt{2}$, ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\sqrt{2}$.

מהו סוג המרובע שנוצר על ידי שני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ ושני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

תשובות למבחן בגרות מספר 13 – קיץ תשע"ג, 2013, מועד א:

1. א. היחס הוא $\frac{3}{2}$. **ב.** 20 חלקי חילוף.

2. א. $a_n = 6n - 8$. **ב.** 884.

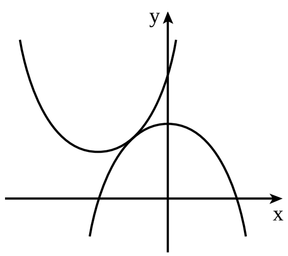
3. א. הסתברות שווה. **ב.** $0.6 < P \le 1$.

5. א. $\frac{AE}{CF} = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\alpha}$.

6. א. $\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3};0\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3};0\right)$. **ב.** $\left(\frac{\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

ג. (1) 1. (2) שני קטעים.

7. א. $(-1; b-3)$. **ב.**



ד. $2S$.

8. א. $a = 0$, $b = -2$. **ב.** $c = 3$. ג. מעוין.

מבחן בגרות מספר 14

קיץ תשע"ג, 2013, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 ראובן ושמעון חופרים יחד תעלה אחת ב- 12 שעות.
אם ראובן חופר לבד $\frac{1}{3}$ מהתעלה, ולאחר שהוא מסיים את חלקו
שמעון חופר לבד את יתר התעלה, החפירה מסתיימת כעבור $23\frac{1}{3}$ שעות.
כמה תעלות שלמות לכל היותר יחפור ראובן לבד בפחות מ- 100 שעות?
התעלות זהות לתעלה הנתונה.
הספקי העבודה של שמעון ושל ראובן אינם משתנים.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.2 נתונה סדרה a_n : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$
ונתונה סדרת הסכומים S_n : $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$
S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n.
סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$.

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b.

ב. נתון כי $|b| < 1$.
בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות, I ו- II :

I. $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, \dots$

II. $a_1, -a_3, a_5, -a_7, \dots$

T הוא הסכום של אין-סוף איברי הסדרה I,
M הוא הסכום של אין-סוף איברי הסדרה II.
הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

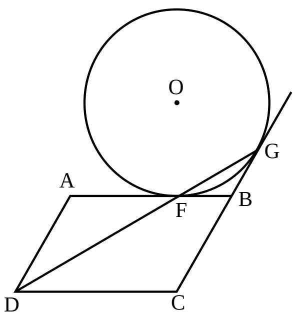
סרקו אותי לצפייה בפתרון

.3 מבין כל תלמידי י״ב בעיר מסוימת מאתרים תלמידים שיתאימו לקורס ייחודי. הקורס מתאים לתלמידים שיש להם יכולת טכנית.
הבוחנות מאבחנות 80% מבין התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית, ומאבחנות 10% מבין התלמידים שאין להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית.
מבין התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית, אחוז התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית גדול פי 4 מאחוז התלמידים (בקבוצה זו) שאין להם יכולת זו.
א. מהי ההסתברות שלתלמיד י״ב בעיר זו אכן יש יכולת טכנית?
ב. באותה עיר כל אלה שאובחנו כבעלי יכולת טכנית השתתפו בקורס, ורק הם. בעיר יש 600 תלמידי י״ב.
מבין המשתתפים בקורס לכמה תלמידים אין יכולת טכנית?

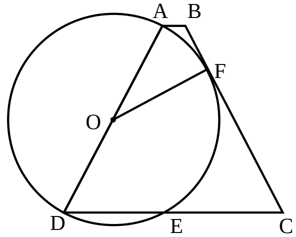
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

.4 נתונה מקבילית $ABCD$.
הצלע AB משיקה למעגל שמרכזו O בנקודה F. המשך הצלע CB משיק למעגל בנקודה G (ראה ציור).
נתון: $AF = AD$.
א. הוכח כי הנקודה F נמצאת על הישר DG.
ב. נתון גם: $BO = BC$, $FC \perp DC$.
(1) הוכח כי $OF = FC$.
(2) הוכח כי $FB = \frac{1}{2}BO$.



.5 נתון טרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AD = BC)$.
השוק AD היא קוטר במעגל שמרכזו O.
השוק BC משיקה למעגל בנקודה F.
המעגל חותך את הבסיס DC בנקודה E (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle BCD = \alpha$.
א. הבע באמצעות α את גודל הזווית FOD.
ב. (1) הבע באמצעות α את גודל הזווית ODF.
(2) הבע באמצעות α את היחס $\frac{DE}{DC}$.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-\cos\frac{x}{2}$ בתחום $2\pi\le x\le 5\pi$.

א. (1) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.

(2) הראה כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום הנתון.

(3) רק על פי התשובות לתת-סעיפים (1) ו-(2), סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, בתחום הנתון.

(4) כמה פתרונות יש למשוואה $f'(x)=40$ בתחום הנתון? נמק.

ב. (1) רשום את הערך המקסימלי של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון.

(2) האם השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון, שווה לערך של האינטגרל המסוים $\int_{2\pi}^{5\pi}(f'(x)-f''(x))dx$? נמק

7. נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x, ונתונה הפונקציה $g(x)$.

נתון: $g(x)=k+2x$, $\int_0^1 g(x)dx=0$. k הוא פרמטר.

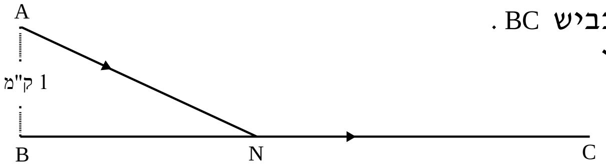
א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. נתון גם כי בתחום $x\ge 0$ מתקיים: $f(x)\ge g(x)$, $f''(x)>0$, $f(0)=k$.
סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של הפונקציה $g(x)$ וסקיצה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $x\ge 0$. נמק.

ג. בתחום $x\ge 0$ איזה שטח גדול יותר: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ והצירים או השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר $x=1$? נמק.

ד. נתון גם: $f(x)=x^3+3x^2+ax+f(0)$, a הוא פרמטר,
הגרף של $g(x)$ משיק לגרף של $f(x)$ בנקודה הנמצאת בתחום $x\ge 0$.
מצא את הפונקציה $f(x)$.

8. דני יצא מנקודה A, הנמצאת בשדה במרחק 1 ק"מ מהכביש BC.
הוא הלך בשדה בקו אלכסוני במהירות קבועה v,
והגיע לכביש BC בנקודה כלשהי N (ראה ציור).



דני הלך בכביש במהירות הגדולה פי $\frac{13}{12}$ מהמהירות שבה הלך בשדה,
והגיע לנקודה C בכביש. המרחק בין B ל-C הוא 6 ק"מ.
מהו אורך המסלול ANC אם ידוע שדני עבר אותו בזמן המינימלי?

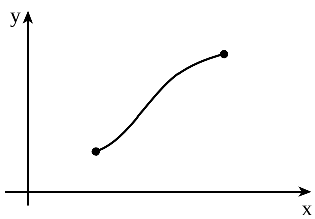
תשובות למבחן בגרות מספר 14 – קיץ תשע"ג, 2013, מועד ב:

1. לכל היותר 3 תעלות שלמות. **2.** ב. $\frac{M}{T}=\frac{1-b^2}{b^2}$.

3. א. $\frac{1}{3}$. ב. 40 תלמידים.

5. א/ $270^\circ-2\alpha$. ב. (1) $\alpha-45^\circ$. (2) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(135^\circ-\alpha)\sin(\alpha+45^\circ)}$.

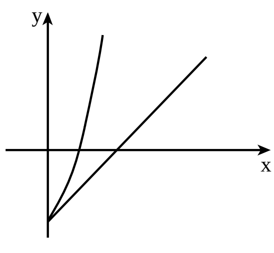
6. א. (1) תחום עלייה: $2\pi<x<5\pi$; (3)
תחום ירידה: אין.



(4) אין פתרונות בתחום הנתון.

ב. (1) 2.25. (2) כן.

7. א. $(0;-1)$, $\left(\frac{1}{2};0\right)$. ב.



ג. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x
ועל ידי הישר $x=1$ הוא גדול יותר.

ד. $f(x)=x^3+3x^2+2x-1$.

8. 6.2 ק"מ.

מבחן בגרות מספר 15

חורף תשע״ד, 2014

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 נמל A ונמל B נמצאים על אותה גדה של נהר, שכיוון הזרם שלו הוא מ-A ל-B. רפסודה הפליגה בשעה 9:00 בבוקר מנמל A אל נמל B, והיא נישאה על גבי הזרם של הנהר כך שמהירות הרפסודה היא מהירות הזרם. באותה שעה הפליגה סירה מנמל B (נגד כיוון הזרם) לכיוון נמל A. מהירות הסירה במים עומדים היא 15 קמ״ש.
הסירה הגיעה לנמל A, ומיד חזרה אל נמל B.
ידוע כי הרפסודה והסירה יגיעו לנמל B באותה שעה.
נתון כי הרפסודה והסירה נפגשו לראשונה כעבור 5 שעות מרגע הפלגתן.
האם הסירה והרפסודה יגיעו לנמל B עד לשעה 9:00 בערב באותו יום? נמק.
מהירות הזרם ומהירות הסירה במים עומדים הן קבועות.

הערה: בחישוביך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה עשרונית.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.2 נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \dots$.
סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6.
מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה, ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \dots$.
סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3.
מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \dots$.

א. הוכח כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.
ב. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25.
מצא את n.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.3 בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.
נמצא כי המאורע "תושב העיר המשתתף בחוג לריקודי עם" והמאורע "תושב העיר משתתף בחוג לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.
מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון. מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.

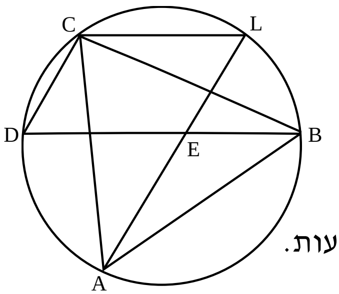
א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתאטרון?

ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם.
עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי.
מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

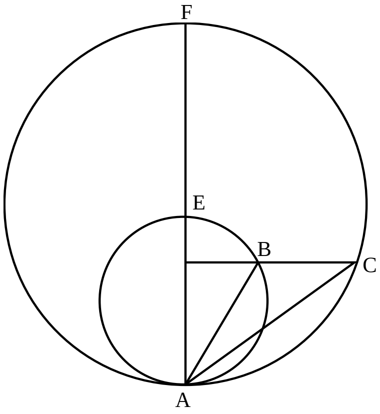
.4 משולש שווה-צלעות ABC חסום במעגל.
נקודות D ו- L נמצאות על המעגל כך ש- $BD \parallel LC$.
המיתרים AL ו- BD נחתכים בנקודה E (ראה ציור).



א. הוכח כי המרובע $LEDC$ הוא מקבילית.

ב. (1) הוכח כי ΔADE הוא משולש שווה-צלעות.

(2) הוכח כי $LC + LB = LA$.



.5 שני מעגלים, גדול וקטן, משיקים מבפנים בנקודה A. נקודה F נמצאת על המעגל הגדול כך ש<u>קטע המרכזים</u> של שני המעגלים נמצא על AF.
AF חותך את המעגל הקטן בנקודה E.
דרך נקודה B שעל המעגל הקטן העבירו ישר המקביל למשיק המשותף לשני המעגלים. המקביל חותך את המעגל הגדול בנקודה C (ראה ציור).
רדיוס המעגל הגדול הוא R,
ורדיוס המעגל הקטן הוא r.
נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle FAB = \beta$.

א. (1) הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle BCA$. נמק.

(2) הבע רק באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AC}{AB}$.

ב. הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{R}{r}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+x-a}{x^2-x+a}$. a הוא פרמטר גדול מ- 1.
הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של $f(x)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של $f(x)$, וקבע את סוגן. (הבע באמצעות a במידת הצורך.)

(3) ידוע כי גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות בדיוק. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. בתחום $x \le 0$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'(x)$, על ידי הישר $x=-1$ ועל ידי ציר ה- x, שווה ל- $\frac{1}{2}$.
חשב את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (מצא ערכים מספריים).

7. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ אורך השוק הוא b.
BD הוא גובה לשוק AC. DE הוא אנך לבסיס BC.
סמן $\sphericalangle BAC = 2x$, ומצא מה צריך להיות הגודל של $\sphericalangle BAC$,
כדי שאורך האנך DE יהיה מקסימלי.
בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

8. בטבלה שלפניך מוצגים ערכים מסוימים של הפונקציה $f(x)$
בקטע $1 < x < 2$.

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	1.19	1.28	1.36	1.43

הפונקציה $f(x)$ חיובית בקטע הנתון, ואין לה נקודות קיצון פנימיות
בקטע זה. נתון כי פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית בקטע הנתון.
א. קבע מהו הסימן של $f'(1.2)$. נמק.
ב. קבע אם הטענה $f'(1.3) < f'(1.2) < f'(1.1)$ נכונה. נמק.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ בקטע $1 < x < 2$.
ג. בקטע הנתון מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$
(אם יש כאלה). נמק.
ד. הראה כי בתחום $1.1 \le x \le 1.3$ אין פתרון למשוואה $g'(x) = f'(x)$.

תשובות למבחן בגרות מספר 15 – חורף תשע"ד, 2014:

1. לא. הם יגיעו לנמל B ‏12.07 שעות לאחר יציאתם.

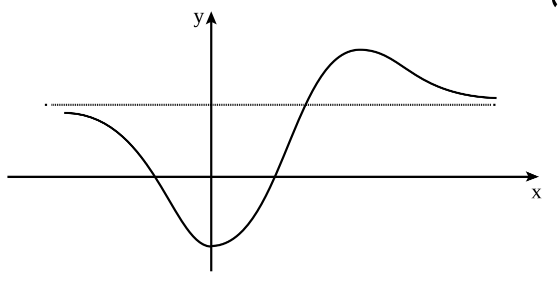
2. ב. $n = 7$.

3. א. 18%. ב. 0.579825.

5. א. **(1)** $90^\circ - (\alpha+\beta)$. **(2)** $\frac{\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)}$. ב. $\frac{\cos^2\beta}{\cos^2(\alpha+\beta)}$.

6. א. **(1)** $y = 1$. **(2)** $(0;-1)$ מינימום, $\left(2a;\frac{4a+1}{4a-1}\right)$ מקסימום.

(3)



ב. $(1;0)$, $(-2;0)$.

7. 109.47°.

8. א. הסימן הוא חיובי. ב. הטענה נכונה. ג. עלייה: $1 < x < 2$; ירידה: אין.

מבחן בגרות מספר 16

קיץ תשע"ד, 2014, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. משאית יצאה מעיר A, וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B.
זמן מה אחרי יציאת המשאית יצאה מכונית מעיר A,
והגיעה לעיר B 2 שעות לפני המשאית.
המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרגע היציאה של המכונית.
המהירויות של המשאית ושל המכונית היו קבועות.
מצא כמה שעות אחרי רגע היציאה של המשאית יצאה המכונית
(מצא את שני הפתרונות).

סרקו אותי לצפייה בפתרון

2. בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים. סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.
א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0.
ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.
סכום כל איברי הסדרה הוא 726. מצא את הפרש הסדרה.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

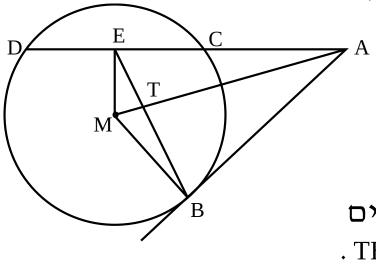
3. אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.
המנצח בסיבוב מקבל נקודת אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו,
כל אחד מקבל חצי נקודה.
נתון: ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1,
ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2,
ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7.
הסיבובים אינם תלויים זה בזה.
א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים <u>יותר</u> מנקודה אחת?
ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים <u>לפחות</u> נקודה אחת?
ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים <u>לפחות</u> נקודה אחת.
מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?

ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתיח.
(בכל משחק שני סיבובים.)
מהי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

4. מנקודה A יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B,
ויוצא ישר אחר החותך את המעגל בנקודות C ו- D.
הנקודה E היא אמצע המיתר DC.
הנקודה M היא מרכז המעגל (ראה ציור).

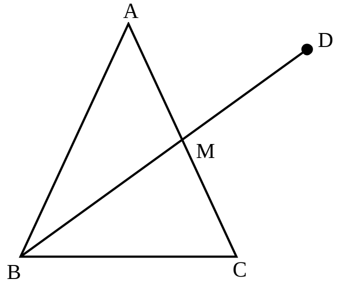


א. הוכח כי המרובע AEMB
הוא בר חסימה במעגל.

ב. אלכסוני המרובע AEMB,
שהוא בר חסימה במעגל,
נפגשים בנקודה T.
נתון כי הנקודה T היא מפגש התיכונים
במשולש BDC. הוכח כי $TB^2 = 2MT \cdot TA$.

ג. נתון $TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ס"מ, $MT = 1$ ס"מ.
מצא את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AEMB.

5. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$,
BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = 50^\circ$.



א. חשב את גודל הזווית הקהה AMB.

ממשיכים את BM עד הנקודה D.
נתון גם:
רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC
הוא 10 ס"מ. רדיוס המעגל החוסם
את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.

ב. חשב את זוויות המשולש AMD.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

6. נתונות שתי פונקציות : $f(x)=2\sin^2 x$, $g(x)=\sin(2x)$, בתחום $0\le x\le \pi$.

א. בתחום הנתון מצא :

(1) את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(2) את נקודות החיתוך של כל אחת משתי הפונקציות עם ציר ה- x .

ב. (1) נתונה הפונקציה $h(x)=x-\frac{\sin(2x)}{2}$.

הראה כי $h'(x)=f(x)$.

(2) בתחום $0\le x\le \pi$ מצא את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^2+9}$. a הוא פרמטר גדול מ- 0 .

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) הראה כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) הבע באמצעות a את האסימפטוטות האופקיות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

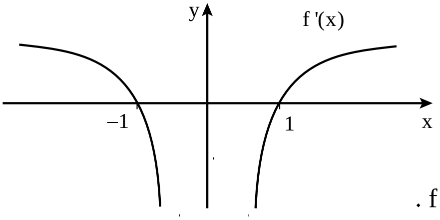
(3) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x=-4$, שווה ל- 2 .

בלי לחשב את הערך של a , חשב את הערך המספרי של $f(-4)$ ואת הערך המספרי של $f(4)$.

8. בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
האסימפטוטה <u>היחידה</u>
של הפונקציה $f(x)$ היא $x=0$.
נתון כי יש פתרון אחד בלבד
למשוואה $f(x)=2$ ופתרון
אחד בלבד למשוואה $f(x)=-2$.



א. רק על פי נתוני השאלה,
סרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$.
נמק.

ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא $f'(x)=\frac{ax^2-b}{ax^2}$,
a ו- b הם פרמטרים שונים מ- 0.
מצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

תשובות למבחן בגרות מספר 16 – קיץ תשע״ד, 2014, מועד א:

1. שעה או שעתיים.

2. ב. $d=2$. **3.** א. 0.32. ב. 0.68. ג. $\frac{7}{34}$. ד. 0.2841.

4. ג. 3 ס״מ. **5.** א. 100.56°. ב. 60.22°, 79.44°, 40.34°.

6. א. (1) $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\pi$. (2) $f(x)$: $(0;0)$, $(\pi;0)$.

$g(x)$: $(0;0)$, $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$, $(\pi;0)$.

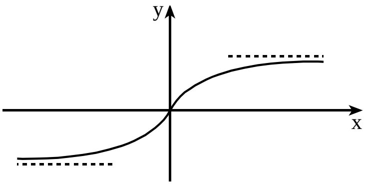
ב. (2) $2+\frac{\pi}{2}$.

7. א. (1) כל x. ב. (1) כל x. (4)

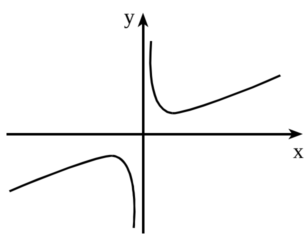
(2) $y=\sqrt{a}$, $y=-\sqrt{a}$.

(3) עלייה: כל x ; ירידה: אין.

ג. $f(4)=5$, $f(-4)=5$.



8. א.



ב. $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

מבחן בגרות מספר 17

קיץ תשע״ד, 2014, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 3-1.

.1 רץ I ורץ II יצאו באותו רגע מאותו מקום. הם רצו במהירות קבועה ובאותו כיוון.
המהירות של רץ I הייתה 6 קמ״ש, והמהירות של רץ II הייתה 7.5 קמ״ש. כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים, יצא רץ III מאותו מקום ובאותו כיוון, והוא רץ במהירות קבועה.
רץ III פגש בדרך את רץ I, ושעה אחר כך הוא פגש את רץ II.
מצא כמה שעות עברו מרגע היציאה של רץ III עד לפגישתו עם רץ II.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.2 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, \ldots$
שלושה איברים עוקבים בסדרה, a_n, a_{n+1}, a_{n+2},
מקיימים:
$$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$$
$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$$
א. מצא את האיבר a_n.
ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה:
$a_5, a_9, a_{13}, \ldots, a_{4k+1}$
סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450.
האיבר הראשון בסדרה הנתונה בפתיח הוא $a_1 = -21$.
מצא את הערך של k.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.3 בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י״ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי: מסלול א׳ או מסלול ב׳.

נמצא: 75% מן התלמידים שבחרו במסלול א׳ הן בנות.

10% מן הבנות בחרו במסלול ב׳.

40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י״ב (בן/בת).
מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א׳?

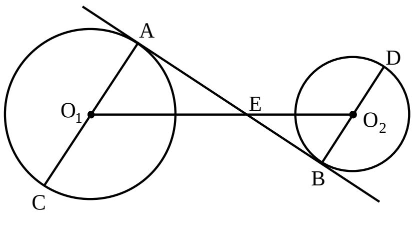
ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד (בן/בת), האם המאורע ״התלמיד הוא בת״ והמאורע ״התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א׳ ״ הם מאורעות בלתי תלויים? נמק.

ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.
נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א׳ היא 0.99 .
(הבחירות של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי תלויות).
כמה בנות נבחרו?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

.4 AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O_1 .
BD הוא קוטר במעגל שמרכזו O_2 .
ישר משיק למעגלים O_1 ו- O_2
בנקודות A ו- B בהתאמה.
המשיק חותך את קטע המרכזים
O_1O_2 בנקודה E (ראה ציור).



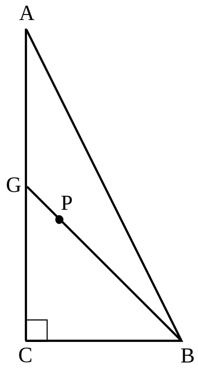
נתון: רדיוס המעגל O_1 הוא 30 ס״מ,
רדיוס המעגל O_2 הוא 20 ס״מ,
אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 90 ס״מ.

א. (1) מצא את היחס $\frac{O_1E}{O_1C}$. נמק.

(2) הוכח כי $\Delta EO_1C \sim \Delta EO_2D$.

ב. הוכח כי הנקודה E נמצאת על הישר CD .

.5 במשולש ישר-זווית ACB $(\measuredangle ACB = 90^\circ)$
נקודה G היא אמצע הניצב AC .
נקודה P נמצאת על GB כך ש- $BG = 4 \cdot PG$
(ראה ציור). רדיוס המעגל החוסם
את המשולש CGB הוא R . נתון : $GC = BC$.
א. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל
החוסם את המשולש ACB .
ב. הבע באמצעות R את מרחק הנקודה P
ממרכז המעגל החוסם את המשולש ACB .

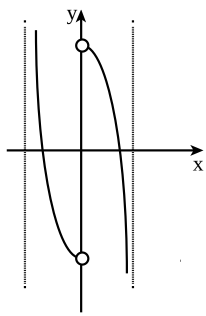


פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

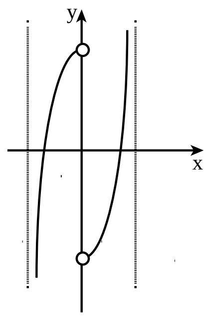
ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

.6 נתונות שתי פונקציות : $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$
$g(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$

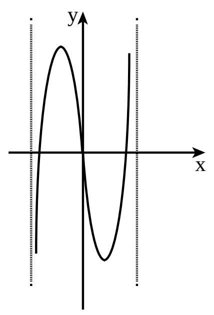
א. (1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה. מצא את תחום ההגדרה.
(2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$
עם הצירים.
ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת
מהפונקציות, וקבע את סוגן.
ג. על פי הסעיפים א ו-ב, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,
וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ד. לפניך ארבעה גרפים, $I - IV$.
איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$? נמק.



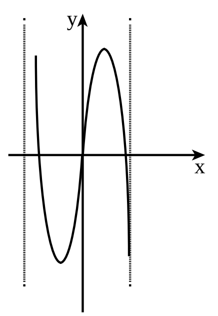
I



II



III



IV

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

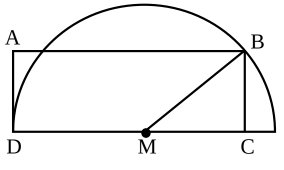
(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. רק על פי סעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. רק על פי הסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ שסרטטת, מצא את התחום שבו מתקיים: פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית. נמק.

.8 נתון מלבן $ABCD$.



הצלע DC מונחת על הקוטר של חצי מעגל שהרדיוס שלו R ומרכזו M כך ש- $DC \geq R$.
הצלע AD משיקה לחצי המעגל בנקודה D , והקדקוד B נמצא על המעגל (ראה ציור).
נסמן: $\measuredangle BMC = x$

$S(x)$ – שטח המלבן $ABCD$.

א. מצא מה צריך להיות x , כדי ששטח המלבן $S(x)$ יהיה מקסימלי.

ב. הבע באמצעות R את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $S(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

תשובות למבחן בגרות מספר 17 – קיץ תשע״ד, 2014, מועד ב :

1. $1\frac{2}{3}$ שעות (שעה ו- 40 דקות).

2. א. $a_n = 15$. ב. $k = 10$.

3. א. 0.48 . ב. לא, המאורעות הם מאורעות תלויים. ג. שתי בנות.

4. א. **(1)** $\frac{9}{5}$.

5. א. $\frac{\sqrt{10}}{2}R$. ב. $\frac{R}{2}$.

6. א. **(1)** $-\sqrt{8} \le x \le \sqrt{8}$.

(2) $f(x)$: $(\sqrt{8};0)$, $(0;0)$, $(-\sqrt{8};0)$.

$g(x)$: $(\sqrt{8};0)$, $(0;0)$, $(-\sqrt{8};0)$.

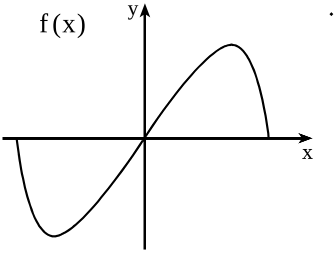
ב. $f(x)$: $(2;4)$ מקסימום מוחלט, $(-2;-4)$ מינימום מוחלט.

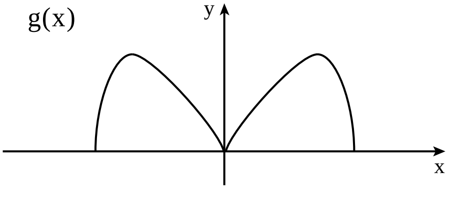
$g(x)$: $(2;4)$ מקסימום מוחלט, $(-2;4)$ מקסימום מוחלט.

$(\sqrt{8};0)$ מינימום מוחלט, $(0;0)$ מינימום מוחלט,

$(-\sqrt{8};0)$ מינימום מוחלט.

ג.





ד. גרף I .

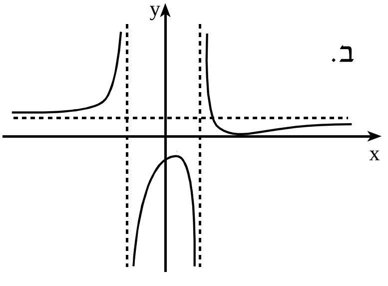
7. א. **(1)** $x \ne 1$, $x \ne -1$.

(2) $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$.

(3) $(0;-4)$, $(2;0)$.

(4) $(2;0)$ מינימום, $\left(\frac{1}{2};-3\right)$ מקסימום.

ב.



ג. $1 < x < 2$.

8. א. $\frac{\pi}{3}$. ב. $1\frac{1}{2}R^2$.

מבחן בגרות מספר 18

קיץ תשע״ד, 2014, מועד ג

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 שני פועלים, פועל I ופועל II, מתקנים כביש. ההספק של כל אחד משני הפועלים קבוע. ביום הראשון עבד פועל I לבד 4 שעות, ואז הצטרף אליו פועל II, והם עבדו יחד עוד 3 שעות.
התברר כי ביום הראשון ביצעו הפועלים סך הכול 60% מהתיקון כולו.
ביום השני עבדו הפועלים יחד כל הזמן כך שסך הכול בשני ימי העבודה ביצע כל אחד מהפועלים בדיוק מחצית מהתיקון כולו.
מצא כמה שעות עבדו הפועלים יחד ביום השני.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.2 נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים $(n>2)$:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_{n-1},\ a_n$$

הפרש הסדרה הנתונה הוא d.
מהסדרה הנתונה בנו סדרה חדשה של הפרשי ריבועים :

$$a_2^2-a_1^2,\ \ a_3^2-a_2^2,\ \dots,\ \ a_n^2-a_{n-1}^2$$

א. הוכח כי הסדרה החדשה היא סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא $2d^2$.
ב. נתון : $a_2^2-a_1^2=64$.
הבע את האיבר האחרון בסדרה החדשה באמצעות n ו- d.
ג. נתון גם : $a_n^2-a_{n-1}^2=192$, $d^2>1$
מצא את תחום הערכים של n.

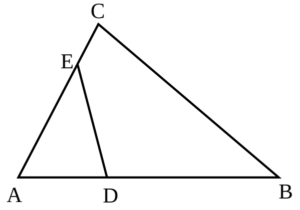
סרקו אותי לצפייה בפתרון

.3 מבין העובדים בחברה גדולה בוחרים באקראי 4 עובדים.
ההסתברות שלכל היותר ל- 3 עובדים יש השכלה גבוהה היא $\frac{255}{256}$.
א. לאיזה אחוז מהעובדים יש השכלה גבוהה?
ב. מהי ההסתברות שמבין 4 עובדים שבוחרים באקראי, ל- 3 אין השכלה גבוהה?
ג. 40% מעובדי החברה הן נשים. ל- $\frac{1}{4}$ מהנשים יש השכלה גבוהה.
מבין העובדים שיש להם השכלה גבוהה בחרו באקראי שני עובדים.
מהי ההסתברות ששני העובדים הם נשים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

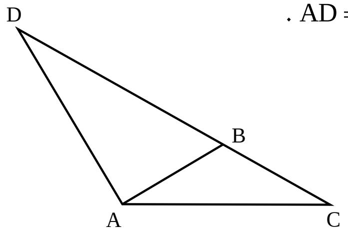
.4 במרובע $BDEC$ המשכי הצלעות BD ו- CE נפגשים בנקודה A, כמתואר בציור.
נתון כי המרובע $BDEC$ הוא בר-חסימה במעגל.



א. הוכח כי $\Delta ADE \sim \Delta ACB$.

נתון: שטח המשולש ACB גדול פי 4 משטח המשולש ADE.
נקודה F נמצאת על הצלע ED כך ש- $\sphericalangle DAF = \sphericalangle EAF$.
המשך AF חותך את BC בנקודה G.
ב. (1) הוכח כי $\Delta AEF \sim \Delta ABG$.
(2) מצא את היחס $\frac{EF}{BG}$.
ג. הוכח כי $\frac{AD}{AE} = \frac{GC}{BG}$.

.5 נתון משולש שווה-שוקיים ADC שבו $AD = AC$.
נקודה B נמצאת על הצלע DC כך ש- $AB = BC$ ו- $DC = 3BC$ (ראה ציור).



א. מצא את גודל הזוויות במשולש ADC.
ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC הוא $16\sqrt{3}$ סמ״ר.
BT הוא גובה לצלע AC במשולש ABC.
מצא את האורך של הקטע DT.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=2x+\frac{\cos x}{\sin x}$ בתחום $0\le x\le\pi$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. (1) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

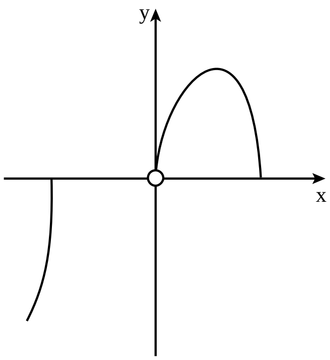
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

השיפוע של משיק זה הוא המקסימלי מבין השיפועים של כל המשיקים לגרף הפונקציה בתחום הנתון.

מצא את הזווית שמשיק זה יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

7. בציור שלפניך מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{12x^3-x^5}}{x}$, שתחום ההגדרה שלה הוא $0<x\le 2\sqrt{3}$, $x\le -2\sqrt{3}$.



א. הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות בדיוק.

מצא את תחום הערכים של k .

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{12x-x^3}$,

שתחום ההגדרה שלה הוא $0\le x\le 2\sqrt{3}$, $x\le -2\sqrt{3}$.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) עבור הערכים של k שמצאת בסעיף א', מצא בכמה נקודות חותך הישר $y=k$ את גרף הפונקציה $g(x)$.

8. נתון כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x , ומקיימת : $f'(x)=x^2-6x+5$.

א. הישר $y=10\frac{2}{3}$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.
מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,
וקבע את סוגן.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x , ומקיימת : $f'(x)=g'(x)$.

ב. המרחק בין נקודת המקסימום של $f(x)$ לנקודת המקסימום של $g(x)$
הוא 1. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$,
וקבע את סוגן. מצא את שתי האפשרויות.

ג. (1) סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
וסקיצות של שני הגרפים האפשריים של $g(x)$.

(2) כמה נקודות פגישה עם ציר ה- x יש לכל אחד משלושת הגרפים
שסרטטת?

תשובות למבחן בגרות מספר 18 – קיץ תשע״ד, 2014, מועד ג:

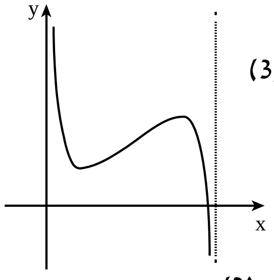
1. 3 שעות. **2.** ב. $64+(n-2)\cdot 2d^2$. ג. $2<n<66$.

3. א. 25%. ב. $\frac{27}{64}$. ג. 0.16. **4.** ב. (2) $\frac{1}{2}$.

5. א. 30° , 30° , 120°. ב. 10.58 ס״מ $=4\sqrt{7}$ ס״מ.

6. א. $0<x<\pi$. ב. (1) $x=0$, $x=\pi$.

(2) $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}+1\right)$ מינימום, $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{2}-1\right)$ מקסימום. (3)



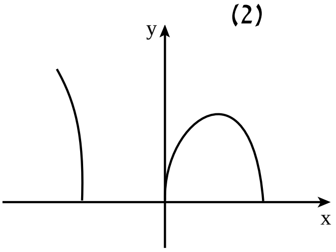
ג. 45°.

7. א. $0\le k<4$.

ב. (1) עלייה: $0<x<2$;

ירידה: $2<x<2\sqrt{3}$ או $x<-2\sqrt{3}$.

(2)



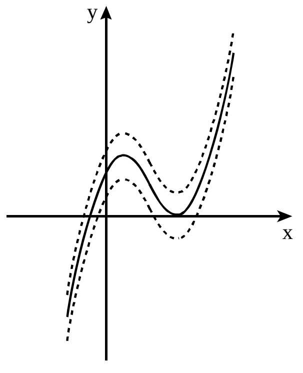
(3) ב- 3 נקודות.

8. א. $(1;10\frac{2}{3})$ מקסימום, $(5;0)$ מינימום.

ב. אפשרות א׳: $(1;11\frac{2}{3})$ מקסימום, $(5;1)$ מינימום.

אפשרות ב׳: $(1;9\frac{2}{3})$ מקסימום, $(5;-1)$ מינימום.

ג. (1)



(2) לגרף של $f(x)$ (המצויר בקו מלא) יש שתי נקודות פגישה עם ציר ה- x.

לגרף העליון של $g(x)$ (המצויר בקו מקווקו) יש נקודת פגישה אחת עם ציר ה- x.

לגרף התחתון של $g(x)$ (המצויר בקו מקווקו) יש 3 נקודות פגישה עם ציר ה- x.

מבחן בגרות מספר 19

חורף תשע״ה, 2015

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון

צַבָּעים ותיקים וצַבָּעים מתלמדים צריכים לצבוע מספר מסוים של דלתות. צַבָּע אחד ותיק ו- 2 צַבָּעים מתלמדים יסיימו את הצביעה בזמן הארוך ב- 25% מהזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צַבָּעים ותיקים וצַבָּע אחד מתלמד. לכל צבע ותיק אותו קצב עבודה בלתי משתנה, ולכל צבע מתלמד אותו קצב עבודה בלתי משתנה.
(צבע ותיק עובד מהר יותר מצבע מתלמד.)

א. מצא את היחס בין הזמן שצבע מתלמד יסיים לבדו את צביעת הדלתות לבין הזמן שצבע ותיק יסיים לבדו את צביעת הדלתות.

ב. מצא כמה צבעים מתלמדים צריכים לעבור עם צבע אחד ותיק, כדי שהם יסיימו את צביעת הדלתות במשך אותו הזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מתלמד.

.2 סרקו אותי לצפייה בפתרון

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל:

$$a_1 = 4$$
$$a_n + a_{n+1} = 4n + 2$$

א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.

ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות אי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות זוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

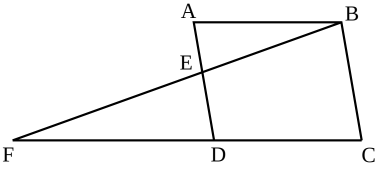
ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

.3 ביישוב גדול $\frac{1}{3}$ מהתושבים הם נשים, והשאר הם גברים.
מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:
קבוצה של 4 אנשים (נשים/גברים) לריאיון ברדיו
וקבוצה של 4 אנשים (נשים/גברים) לריאיון בטלוויזיה.
א. מהי ההסתברות שבכל קבוצה יש בדיוק 2 גברים?
ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון ברדיו היו לכל היותר 2 גברים.
מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיוק 2 גברים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

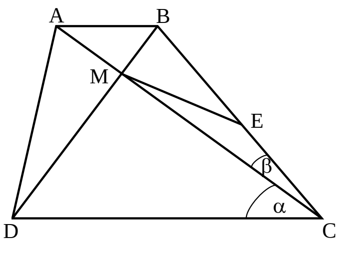
ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

.4 במקבילית $ABCD$ הנקודה E נמצאת על הצלע AD. המשך BE חותך את המשך CD בנקודה F (ראה ציור).



נתון: שטח המשולש ABE הוא 27 סמ"ר.
שטח המשולש DFE הוא 48 סמ"ר.
א. מצא את שטח המשולש BED.
ב. נתון גם כי המרובע $BCDE$ הוא בר חסימה במעגל.
מצא את היחס $\frac{AB}{EF}$.

.5 אלכסוני הטרפז $ABCD$ מאונכים זה לזה ונפגשים בנקודה M.
E היא אמצע השוק BC (ראה ציור).



נתון: $\sphericalangle ACD = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \beta$, $DC = a$.
א. הבע באמצעות a , α ו- β את האורך של ME.

נתון: $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{1}{3}$, $a = 6.6$ ס"מ.
ב. מצא את האורך של AB.

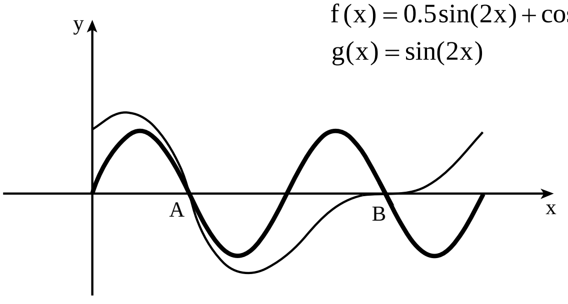
נתון גם: $BM = 1.3$ ס"מ.
ג. מצא את הזווית DCB.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

.6 נתונות שתי פונקציות: $f(x)=0.5\sin(2x)+\cos x$
$g(x)=\sin(2x)$

בתחום $0\le x\le 2\pi$.
בתחום הנתון הגרפים של הפונקציות נפגשים בשתי נקודות, A ו-B, הנמצאות על ציר ה-x, כמתואר בציור.



א. דרך נקודה על ציר ה-x, הנמצאת בין הנקודות A ו-B, מעבירים אנך לציר ה-x.
האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ בנקודות M ו-N.
מצא את האורך המקסימלי של הקטע MN.

ב. דרך נקודה על ציר ה-x, הנמצאת בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, מעבירים אנך לציר ה-x.
האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ בנקודות K ו-L.
מצא את האורך המקסימלי של הקטע KL.

.7 נתונות הפונקציות $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{3x^2+2}}$$

א. מצא עבור כל אחת מהפונקציות:
(1) את תחום ההגדרה.
(2) את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
(3) את השיעורים של נקודות הקיצון (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה אחת בלבד.

ג. נתונה הפונקציה $h(x)=g(x)-k$, $k>0$.
עבור אילו ערכים של k אין לפונקציה $h(x)$ נקודות חיתוך עם הפונקציה $f(x)$? נמק.

8. נתון כי הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$

מקיימות $\int_0^3 \frac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}dx = 3$.

נתון גם: $f'(x) = kx + 2$, $f(0) = 1$. k הוא פרמטר.

א. מצא את הערך המספרי של $f(3)$, ומצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

(1) הראה כי $g(x) = |x+1|$.

(2) סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות למבחן בגרות מספר 19 – חורף תשע״ה, 2015:

1. א. יחס הזמנים הוא 2 . ב. 3 צבעים מתלמדים.

2. א. $a_{50} + a_{51} = 202$. ב. $a_{n+2} - a_n = 4$. ג. $a_{51} = 104$. ד. $S_{101} = 10{,}304$.

3. א. $\frac{64}{729}$. ב. $\frac{8}{11}$. **4.** א. 36 סמ״ר. ב. $\frac{AB}{EF} = \frac{3}{4}$.

5. א. $ME = \frac{a\cos\alpha}{2\cos\beta}$. ב. 2.2 ס״מ $= AB$. ג. 49.94° . **6.** א. $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$. ב. 1 .

7. א. (1) $f(x)$: $x \ge 0$, $g(x)$: כל x .

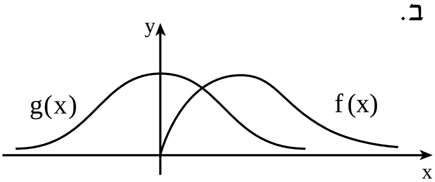
(2) $f(x)$: $y = 0$, $g(x)$: $y = 0$.

(3) $f(x)$: $(0;0)$ מינימום,

$\left(1;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ מקסימום.

$g(x)$: $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ מקסימום.

ב.

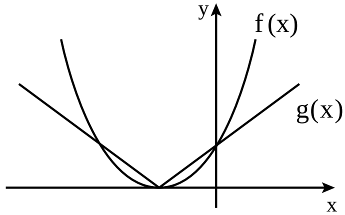


ג. $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8. א. $f(3) = 16$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

ב. (1) $g(x) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$.

(2)



מבחן בגרות מספר 20

קיץ תשע״ה, 2015, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 מכונית I ומכונית II יצאו באותו זמן מאותו מקום ולאותו כיוון.
המהירות של מכונית I הייתה 50 קמ״ש, והמהירות של מכונית II הייתה 40 קמ״ש. כעבור חצי שעה מרגע היציאה של שתי המכוניות, יצאה גם מכונית III מאותו מקום ולאותו כיוון.
ברגע שמכונית III פגשה במכונית II, המרחק בין מכונית I למכונית II היה 15 ק״מ. המהירויות של כל המכוניות היו קבועות.

א. מצא את המהירות של מכונית III.

ב. האם ייתכן שאחרי הפגישה בין מכונית III למכונית II, יהיה המרחק בין מכונית III למכונית I שווה למרחק בין מכונית II למכונית I? נמק.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.2 נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת
שכל איבריה חיוביים: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.
כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו, אחד לפניו ואחד אחריו.

א. מצא את המנה של הסדרה a_n.

ב. נתונה הסדרה $b_n = \frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא $20,460$.
מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

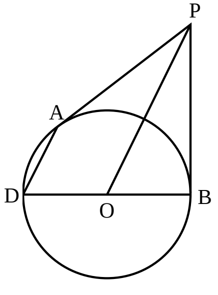
.3 נתונה קבוצה של ספרות שונות:
3 ספרות הן זוגיות (שונות מ- 0) והשאר הן ספרות אי-זוגיות.
יוני יוצר מספר דו ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:
הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,
והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.
יוני בוחר כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.
א. נתון כי ההסתברות שיוני ייצור מספר אי-זוגי היא $\frac{4}{7}$.
מהו מספר הספרות האי-זוגיות בקבוצה הנתונה?
ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

אמילי יוצרת מספר תלת-ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:
הספרה הראשונה שאמילי בוחרת באקראי היא ספרת המאות,
הספרה השנייה שהיא בוחרת באקראי היא ספרה העשרות,
והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.
אמילי בוחרת כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.
ג. ידוע כי הספרה הראשונה שאמילי בחרה היא זוגית.
מהי ההסתברות שבמספר התלת-ספרתי שאמילי יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

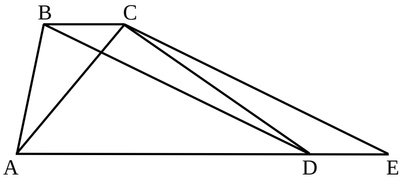
.4 PA ו- PB משיקים למעגל שמרכזו O.
המשך BO חותך את המעגל בנקודה D
(ראה ציור).
א. הוכח: $PO \parallel AD$.



הנקודה C נמצאת על הקוטר DB כך ש- $AC \perp DB$.
ב. הוכח: $\Delta ADC \sim \Delta POB$.

PD חותך את AC בנקודה E.
ג. הוכח: $\Delta DEC \sim \Delta DPB$.
ד. הוכח: $AC = 2EC$.

5. נתון טרפז $ABCD$ $(BC \parallel AD)$.
הנקודה E נמצאת על המשך AD
כך ש- $CE \parallel BD$ (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle CAD = 2\sphericalangle DBC$,
$DB = 1.8AC$.

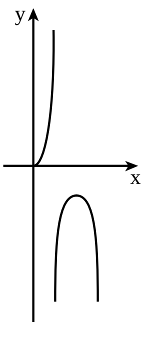


א. מצא את גודל הזווית CEA.
ב. נתון גם כי שטח המשולש ACE הוא 87.873 סמ"ר.
מצא את גובה הטרפז.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sin x}{\cos 2x}$ ונתון התחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$
(ראה ציור).



ענה על הסעיפים א, ב ו-ג עבור התחום הנתון.
א.(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את האסימפטוטות האנכיות
של הפונקציה $f(x)$.
(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון
של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן על פי הציור.
ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
ג. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$.
מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{6}$.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד.
על סמך הגרף של הפונקציה $f(x)$, ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מנקודות אלה.

ג. האם השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים, גדול מ- 4 , קטן מ- 4 או שווה ל- 4 ? נמק.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a^2x+a^2$, a הוא פרמטר גדול מ- 0 .

א. הראה כי המקסימום של הפונקציה מתקבל בנקודה שבה $y>0$.

ב. מצא עבור איזה ערך/איזה תחום ערכים של a נקודת המינימום של הפונקציה:
(1) נמצאת על ציר ה- x .
(2) נמצאת מעל ציר ה- x .
(3) נמצאת מתחת לציר ה- x .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל אחד משלושת המקרים שבסעיף ב.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{1}{3}x^3-x+1=0$? נמק.

תשובות למבחן בגרות מספר 20 – קיץ תשע"ה, 2015, מועד א:

1. א. 60 קמ"ש. ב. לא ייתכן.

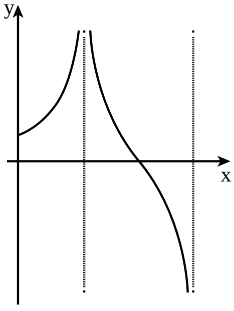
2. א. $\frac{1}{2}$. ב. (1) הוכחה. מנת הסדרה b_n היא 2. (2) $\frac{1}{20}$.

3. א. 4 ספרות אי-זוגיות. ב. $\frac{1}{3}$. ג. $\frac{7}{15}$.

5. א. 25.84°. ב. 7.845 ס"מ.

6. א. (1) $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ או $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$.

ב.



(2) $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

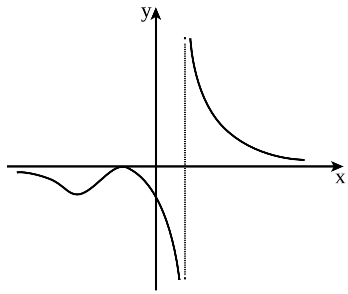
(3) $(0;0)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{2};-1\right)$ מקסימום.

ג. 1.

7. א. (1) $x \neq 1$. (2) $x = 1$, $y = 0$. (3) $(-2;0)$, $(0;-4)$.

(4) $(-2;0)$ מקסימום, $\left(-8;-\frac{4}{81}\right)$ מינימום.

(5)



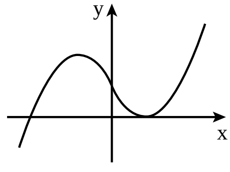
ב. נקודת פיתול אחת נמצאת בתחום $x < -8$,
ונקודת פיתול שנייה בתחום $-8 < x < -2$.

ג. השטח קטן מ- 4.

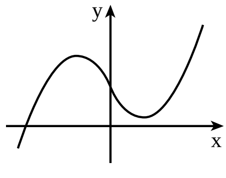
8. א. שיעור ה- y בנקודת המקסימום הוא $\frac{2}{3}a^3 + a^2$.
מאחר ו- $a > 0$ שיעור ה- y הוא חיובי.

ב. (1) $a = 1.5$. (2) $0 < a < 1.5$. (3) $a > 1.5$.

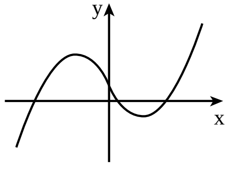
ג. עבור $a = 1.5$:



עבור $0 < a < 1.5$:



עבור $a > 1.5$:



ד. פתרון אחד.

מבחן בגרות מספר 21

קיץ תשע"ה, 2015, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 בזמן הנסיעה באוטובוס הבחין יוסי ברגע מסוים באימא שלו, ההולכת ליד האוטובוס בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של האוטובוס.
כעבור 10 שניות מהרגע שיוסי הבחין באימו, עצר האוטובוס בתחנה, ויוסי רץ מיד כדי להשיג את אימו.
מהירות הריצה של יוסי גדולה פי 2 ממהירות ההליכה של אימו, והיא $\frac{1}{7}$ ממהירות הנסיעה של האוטובוס.
כל המהירויות הן קבועות.
א. כמה זמן רץ יוסי כדי להשיג את אימו?

ברגע שיוסי השיג את אימו, הם הלכו יחד 3 דקות במהירות ההליכה של אימו (בכיוון ההליכה שלה).
מיד בתום 3 הדקות רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס שירד בה.
(מהירות הריצה של יוסי היא כמו בסעיף א.)
ב. כמה זמן רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס?

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.2 נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל $b_{n+1} = \frac{1}{2^n \cdot b_n}$.
א. הוכח כי האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה מהווים סדרה הנדסית, וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית.
ב. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל- $3\frac{7}{16}$.
מצא את b_1 (מצא את שתי האפשרויות).

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.3 חוקר עורך מחקר על הרגלי האכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים.
חלק מהסטודנטים מביאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מביאים אוכל מהבית. כל הסטודנטים שמביאים אוכלים מהבית אוכלים אותו במשך היום ואינם אוכלים בקפטריה.
הסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים במשך היום.

א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדיוק 2 מהם מביאים אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדיוק 1 מהם מביא אוכל מהבית.
(1) מהו אחוז הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית?
(2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם?

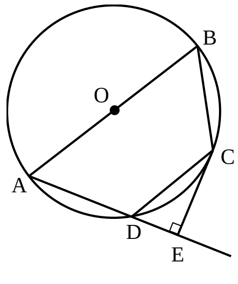
ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אינם אוכלים במשך היום.
(1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה?
(2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מבין הסטודנטים שאוכלים במשך היום?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

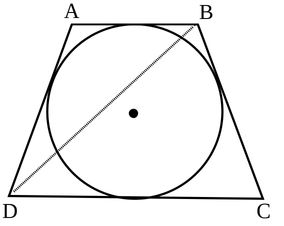
ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

.4 מרובע ABCD חסום במעגל שמרכזו O.
הצלע AB היא קוטר.
E היא נקודה על המשך AD כך ש- $CE \perp AE$.
א. הוכח: $\Delta CDE \sim \Delta ABC$.

נתון גם: $OD \perp AC$, $\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$.
ב. הוכח כי $OC \parallel AD$.
ג. הוכח כי CE משיק למעגל.



.5 מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel DC)$, כמתואר בציור.



נתון: $\sphericalangle BCD = 70^\circ$.

א. הבע באמצעות r:

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

(2) את שוק הטרפז.

(3) את אלכסון הטרפז.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

.6 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$, ונתון התחום $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

בתחום הנתון ענה על הסעיפים א ו-ב.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית או אי-זוגית? נמק.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) - a$.

(1) מצא את הערכים האפשריים של a שעבורם יש למשוואה $f(x) - a = 0$ פתרון אחד בלבד.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ עבור כל אחד מהערכים של a שמצאת בתת סעיף ב (1).

.7 נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

הישר $y=\frac{1}{3}x+3$ חותך את הגרף של הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=0$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ושל הפונקציה $f(x)$?

(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(6) הוסף לסקיצה שסרטטת בתת-סעיף ב (5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונות שתי משוואות, I ו- II : $\text{I. } \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=k$, $\text{II. } \sqrt{x^2+9}=k$

נתון כי $k>0$.

מצא את תחום הערכים של k שעבורם אין פתרון למשוואה I וגם אין פתרון למשוואה II .

.8 נתונה הפונקציה $f(x)$, ונתון כי כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ מוגדרת בתחום $x>0$.

נתון גם: הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1$,

$f'(x)$ עולה בתחום $0<x<3$, ויורדת בתחום $x>3$,

האסימפטוטות של $f'(x)$ הן $x=0$ ו- $y=0$.

א. סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתון גם כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת שמשוואתה $x=0$.

ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים בטווח $y\geq 4$ ורק אותם.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ציין על ציר ה- x ועל ציר ה- y את הערכים שמצאת.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-[f(x)]^3$.

מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

תשובות למבחן בגרות מספר 21 – קיץ תשע״ה, 2015, מועד ב:

1. א. 150 שניות. ב. 240 שניות.

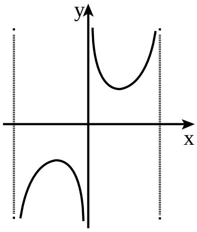
2. א. הוכחה $(q=\frac{1}{2})$. ב. $b=\frac{1}{3}$ או $b=1\frac{1}{2}$.

3. א. (1) 80%. (2) 0.8322. ב. (1) 8%. (2) $\frac{10}{11}$.

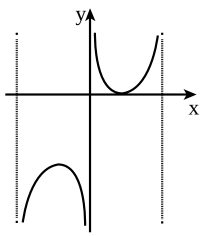
5. א. (1) $2.856r$. (2) $2.128r$. (3) $2.92r$. ב. 0.6435.

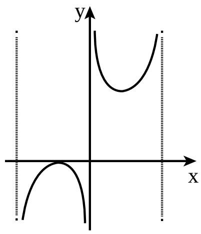
6. א. (1) $0<x<\frac{\pi}{2}$ או $-\frac{\pi}{2}<x<0$. (2) אי-זוגית. (4)

(3) $\left(\frac{\pi}{4};2\right)$ מינימום, $\left(-\frac{\pi}{4};-2\right)$ מקסימום.



ב. (1) $a=2$, $a=-2$. (2) $a=2$ $a=-2$



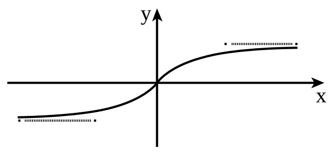


7. א. $f(x)=\sqrt{x^2+9}$.

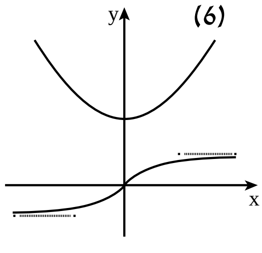
ב. (1) $f'(x)$ - כל x ; $f(x)$ - כל x. (2) $y=1$, $y=-1$. (3) $(0;0)$.

(4) עלייה: כל x ; ירידה: אין.

(5)

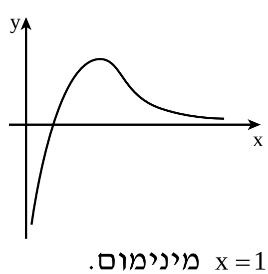


(6)

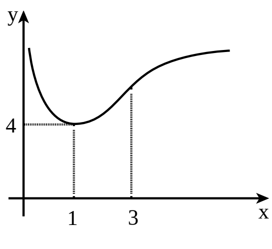


ג. $1\le k<3$.

8. א.



ד.



ב. $x=1$ מינימום.

ג. $\cup$: $0<x<3$; $\cap$: $x>3$.

ה. עלייה: $0<x<1$; ירידה: $x>1$.

מבחן בגרות מספר 22

חורף תשע"ו, 2016

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

.1 רוכב אופניים ורוכב אופנוע יצאו באותו רגע זה לקראת זה משני יישובים שונים. הם נפגשו כעבור 3 שעות.
רוכב האופנוע עובר $\frac{2}{3}$ מהדרך שבין שני היישובים ב-1.25 שעות פחות מהזמן שרוכב האופניים עובר $\frac{1}{4}$ מהדרך שבין שני היישובים.
מהירויות הרוכבים אינן משתנות.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. מצא פי כמה המהירות של רוכב האופנוע גדולה מן המהירות של רוכב האופניים.
ב. מצא בכמה שעות עובר רוכב האופנוע את כל הדרך שבין שני היישובים.

.2 נתונה סדרה הנדסית עולה: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots$
ההפרש בין האיבר הרביעי בסדרה לאיבר השלישי גדול פי 4 מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון.
האיבר השישי בסדרה גדול ב-31 מהאיבר הראשון.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. מצא את מנת הסדרה, ואת האיבר הראשון בסדרה.
ב. מהסדרה הנתונה בנו שתי סדרות חדשות, I ו-II:

$$\text{I.}\quad a_1\cdot a_2,\ a_2\cdot a_3,\ a_3\cdot a_4,\ \dots,\ a_n\cdot a_{n+1},\ a_{n+1}\cdot a_{n+2}$$

$$\text{II.}\quad \frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2},\ \frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3},\ \frac{a_4}{a_3}+\frac{a_5}{a_4},\ \dots,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

(1) האם כל אחת מהסדרות החדשות היא סדרה הנדסית עולה? נמק.

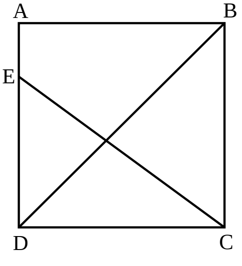
הסכום של כל האיברים בסדרה I הוא 2730.
(2) מצא את מספר האיברים בסדרה I.
(3) מצא את הסכום של כל האיברים בסדרה II.

.3 במכונת מזל אפשר לזכות ב- 50 שקל, ב- 100 שקל או לא לזכות כלל.
דן משחק 5 משחקים במכונה זו.
ההסתברות שדן יזכה ב- 50 שקל בדיוק פעמיים שווה להסתברות שהוא יזכה ב- 50 שקל בדיוק פעם אחת.
(ההסתברות לזכות ב- 50 שקל שונה מאפס.)
ההסתברות שדן לא יזכה באף משחק היא $\frac{1}{32}$.
א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב- 50 שקל במשחק בודד?
ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב- 100 שקל במשחק בודד?
ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכול ב- 100 שקל בדיוק.
מהי ההסתברות שהוא לא זכה ב- 50 שקל באף אחד משני המשחקים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

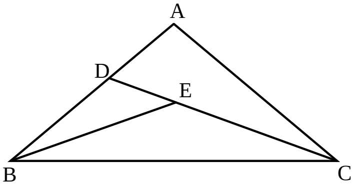
ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

.4 בריבוע ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD (ראה ציור).
מעגל העובר דרך הנקודות E, D ו- C חותך את האלכסון BD בנקודה M, ואת הצלע BC בנקודה N.
הנקודה M נמצאת בין הקדקוד B ובין נקודת החיתוך של BD עם CE.



א. הוכח כי $CD = EN$.
ב. האם הקטע DM קצר מהקטע CE, ארוך ממנו או שווה לו? נמק.
ג. הוכח כי $BM \cdot BD = AE \cdot AD$.

.5 במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ זווית הבסיס היא 2α .
הנקודה E היא מפגש חוצי-הזווית
במשולש ABC . המשך CE חותך
את הצלע AB בנקודה D (ראה ציור).



נתון : $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$, $\sphericalangle BAC > 90^\circ$.

א. מצא את α .

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC
ובין רדיוס המעגל <u>החסום</u> במשולש ABC .

ג. נתון כי ההפרש בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC
ובין רדיוס המעגל <u>החסום</u> במשולש ABC הוא 2 ס״מ.
מצא את אורך הקטע AE .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

.6 נתונה הפונקציה $f(x) = a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos(4x)$ בתחום $0 \le x \le \frac{2\pi}{3}$.
a ו- b הם פרמטרים.
לפונקציה $f(x)$ יש קיצון בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{3}$. נתון כי <u>$b < 0$</u> .

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

ד. (1) מצא את הערך של האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x)\,dx$.

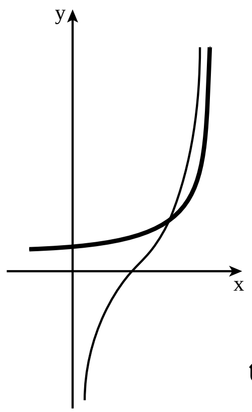
(2) בתחום $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{2\pi}{3}$, הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$
חותך את ציר ה- x בנקודה אחת שבה $x = k$.
בתחום $\frac{\pi}{2} \le x \le k$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$, שווה ל- S .
הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \frac{2\pi}{3}$ בתחום $k \le x \le \frac{2\pi}{3}$. נמק.

<u>הערה :</u> אין צורך למצוא את $f''(x)$.

.7 נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$

$g(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}$

(ראה ציור).



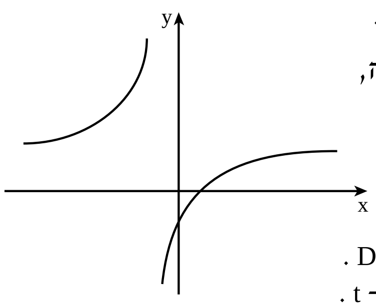
א. (1) מצא את תחום ההגדרה
של הפונקציה $f(x)$,
ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
(2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים
של הפונקציה $f(x)$,
ואת האסימפטוטות המאונכות לצירים
של הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x=1$.

ג. נתונות הפונקציות $h(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}+2$, $t(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}+2$,

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$
ועל ידי הישר $x=2.5$.
S_2 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו- $t(x)$
ועל ידי הישר $x=2.5$.
האם השטח S_1 גדול מהשטח S_2, קטן ממנו או שווה לו? נמק.

.8 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ (ראה ציור).



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה,
ואת האסימפטוטות של הפונקציה
המקבילות לצירים.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה- x.
הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$
בנקודה C ואת הישר $y=2x$ בנקודה D.
נסמן את שיעור ה- x של הנקודה C ב- t.
מצא מה צריך להיות הערך של t,
כדי שהאורך של הקטע CD יהיה מינימלי:
(1) עבור $t>-1$. (2) עבור $t<-1$.

ג. מצא את האורך המינימלי של הקטע CD עבור כל $t\neq -1$.

תשובות למבחן בגרות מספר 22 – חורף תשע"ו, 2016:

1. א. פי 4 . ב. 3.75 שעות.

2. א. $q = 2$, $a_1 = 1$.

ב. (1) סדרה I הנדסית עולה (המנה שלה היא 4),

סדרה II היא סדרה קבועה, אינה סדרה הנדסית עולה.

(2) 6 איברים. (3) 20 .

3. א. $\frac{1}{3}$. ב. $\frac{1}{6}$. ג. $\frac{3}{5}$.

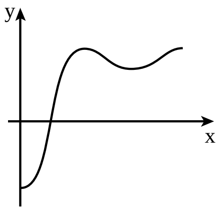
4. ב. DM קצר מ- CE .

5. א. $\alpha = 20^\circ$. ב. 2.79 . ג. 1.459 ס"מ.

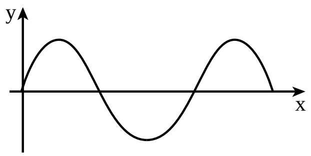
6. א. $(0;b)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{3};-3\frac{1}{2}b\right)$ מקסימום, $\left(\frac{\pi}{2};-3b\right)$ מינימום,

$\left(\frac{2}{3}\pi;-3\frac{1}{2}b\right)$ מקסימום.

ב.



ג.



ד. (1) 0 . (2) S .

7. א. (1) $f(x)$: $x < 3$, $g(x)$: $0 < x < 3$.

(2) $f(x)$: $y = 0$, $x = 3$.

$g(x)$: $x = 0$, $x = 3$.

ב. 0.6945 .

ג. $S_1 = S_2$.

8. א. תחום הגדרה: $x \neq -1$.

אסימפטוטה אנכית: $x = -1$.

אסימפטוטה אופקית: $y = 1$.

ב. (1) $t = 0$. (2) $t = -2$.

ג. $\frac{1}{2}$.

מבחן בגרות מספר 23

קיץ תשע"ו, 2016

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 שתי מכוניות יצאו באותו זמן מעיר א' לעיר ב'.
המרחק בין שתי הערים הוא 300 ק"מ.
המכונית הראשונה נסעה במהירות הגדולה ב- 25 קמ"ש מהמהירות של המכונית השנייה. כעבור 1.5 שעות מרגע היציאה מעיר א', הקטינה המכונית הראשונה את מהירותה לחצי ממהירותה הקודמת, והגיעה לעיר ב' $\frac{1}{2}$ שעה אחרי המכונית השנייה.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. מצא את המהירות של המכונית השנייה אם ידוע שמהירותה גדולה מ- 60 קמ"ש.

ב. מצא כעבור כמה שעות מרגע היציאה מעיר א' ולפני שהמכונית השנייה השיגה את המכונית הראשונה, היה המרחק בין שתי המכוניות 12.5 ק"מ. (מצא את שתי האפשרויות).

.2 נתונה סדרה חשבונית a_n המקיימת: $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. מצא את הסכום של 19 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

הסדרה S_n היא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה a_n : $S_1, S_2, S_3, \ldots$
נתון כי $S_n = n \cdot a_n$ לכל n טבעי.

ב. הראה כי הפרש הסדרה a_n הוא 0 .

ג. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את a_1 .

נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל: $b_{n+1} - b_n = a_n + S_n$ לכל n טבעי.

ד. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את הסכום
$(b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \ldots + (b_{20} - b_{19})$.

.3 במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים.
40% היו ממושבים ו- 40% היו מערים. 70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.
$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.
ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.

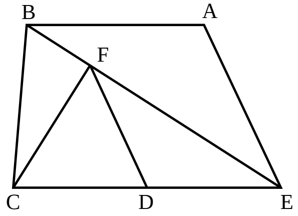
א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצליח במבחן. מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב?
(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

.4 נתון טרפז $ABCE$ $(AB \parallel EC)$.
הנקודה F נמצאת על האלכסון BE
כך ש- $CF \perp BE$.
הנקודה D היא אמצע הבסיס CE
(ראה ציור).



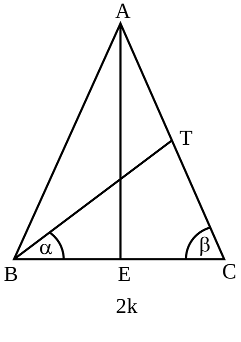
נתון: $\sphericalangle CEB = \sphericalangle AEB$, $EA = 4a$, $ED = 3a$.

א. הוכח כי $\Delta EAB \sim \Delta EDF$.

ב. נתון כי שטח המשולש EAB הוא S.
הבע באמצעות S את שטח המשולש CEF.

ג. המשך DF חותך את AB בנקודה G.
הבע באמצעות S את שטח המשולש BFG.

.5 נתון משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$.
AE הוא גובה לבסיס BC,
ו- BT הוא תיכון לשוק AC (ראה ציור).



נתון: $\sphericalangle ACB = \beta$, $\sphericalangle TBC = \alpha$, $BC = 2k$.

א. (1) הבע את האורך של TC
באמצעות k ו- β בלבד.
(2) היעזר בתת-סעיף א(1), והראה כי
$\sin(\alpha + \beta) = 4 \sin\alpha \cdot \cos\beta$.

ב. נתון גם: $TE = 5$ ס"מ, $k = 4$ ס"מ.
(1) מצא את β. (2) מצא את α.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-\sin(2x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$.

ענה על הסעיפים שלפניך עבור התחום הנתון.

א. מצא את השיפוע הגדול ביותר ואת השיפוע הקטן ביותר של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. (1) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^3+2ax}{\sqrt{x^4+4x^2+4}}$.

a הוא פרמטר גדול מ- 0.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמק.

ג. השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=-1$, שווה ל- 4.

מצא את הערך של a.

ד. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת $f(x)=g'(x)$.

אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ היא נקודה שבה $x=0$.

(1) הראה כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=2x^2$.

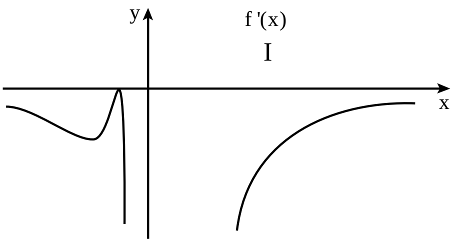
(2) מצא את התחום שבו מתקיים $f(x)>g(x)$.

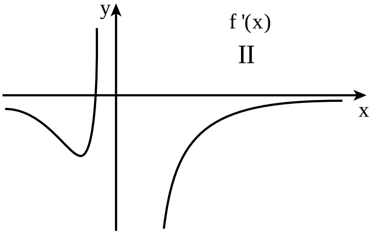
8. נתונה הפונקציה $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$, $x\neq 0$. n הוא מספר טבעי גדול מ- 1 .

א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ב. הראה כי עבור n אי-זוגי $f'(x)\leq 0$ לכל $x\neq 0$.

לפניך שני גרפים, I ו- II . (בגרפים מוצגות כל נקודות הקיצון).





אחד הגרפים מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n זוגי,
והגרף האחר מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n אי-זוגי.
היעזר בגרפים I ו- II , וענה על הסעיפים ג, ד, ו-ה.

ג. עבור n אי-זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. עבור n זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונות הפונקציות: $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$, $h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$.

מהו הסימן של המכפלה $g''(x)\cdot h''(x)$ עבור $x>0$? נמק.

תשובות למבחן בגרות מספר 23 – קיץ תשע״ו, 2016:

1. א. 75 קמ״ש. ב. $\frac{1}{2}$ שעה, 2.5 שעות.

2. א. $1,064$. ג. $a_1 = 56$. ד. $11,704$.

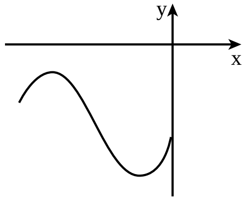
3. א. $\frac{1}{2}$. ב. (1) $\frac{1}{2}$. (2) $\frac{31}{32}$.

4. ב. $\frac{9}{8}S$. ג. $\frac{1}{16}S$.

5. א. $TC = \frac{k}{2\cos\beta}$. ב. (1) $\beta = 66.42^\circ$. (2) $\alpha = 37.37^\circ$.

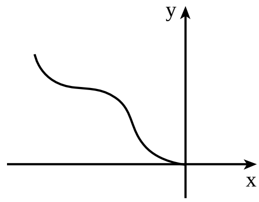
6. א. השיפוע הגדול ביותר הוא -0.886 ;
השיפוע הקטן ביותר הוא -2.255.

ב.



ג. (1) $\cup$: $-\frac{5\pi}{12} < x < -\frac{\pi}{2}$, $0 < x < -\frac{\pi}{12}$; $\cap$: $-\frac{\pi}{12} < x < -\frac{5\pi}{12}$.

(2)



7. א. כל x. ב. אי-זוגית. ג. $a = 4$. ד. (2) $0 < x < 2$.

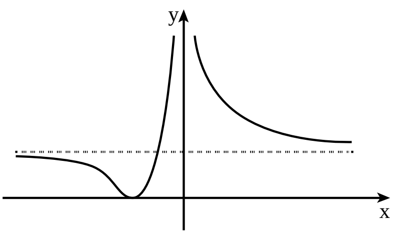
8. א. $x = 0$. ב. $y = 1$.

ג. (1) אין. (2) שתי נקודות פיתול.

ד. (1) נקודת קיצון אחת.

(2) נקודת פיתול אחת.

(3)



ה. חיובי.

מבחן בגרות מספר 24

קיץ תשע"ו, 2016, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

1. סרקו אותי לצפייה בפתרון

שני הטכנאים גל ודני עבדו בהרכבת מחשבים.
קצב העבודה של כל אחד מהם קבוע.

א. ביום העבודה הראשון הרכיבו שני הטכנאים אותו מספר של מחשבים.
גל התחיל לעבוד בשעה $8:00$, וסיים לעבוד בשעה $15:00$.
דני התחיל לעבוד לאחר השעה $8:00$ ולפני השעה $9:00$, וסיים לעבוד בשעה $13:00$.
ידוע שגל ודני הרכיבו אותו מספר של מחשבים מהרגע שכל אחד מהם התחיל לעבוד ועד השעה $9:00$.
כמה זמן אחרי השעה $8:00$ התחיל דני לעבוד?

ב. ביום העבודה השני, התחילו גל ודני לעבוד באותה שעה וסיימו לעבוד באותה שעה. ביום זה הם הרכיבו סך הכול יחד את אותו מספר מחשבים שהרכיבו יחד ביום העבודה הראשון.
כמה זמן עבדו הטכנאים ביום העבודה השני?

2. סרקו אותי לצפייה בפתרון

נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים. הפרש הסדרה הנתונה הוא 3.

א. בין כל שני איברים עוקבים הכניסו איבר אחד נוסף, ונוצרה סדרה חשבונית חדשה.
(1) הראה כי היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום האיברים בסדרה הנתונה הוא $\frac{2n-1}{n}$.
(2) נתון כי היחס שמופיע בתת-סעיף (1) שווה ל- 1.9.
הסכום של כל האיברים שהכניסו לסדרה הנתונה הוא 130.5.
מצא את האיבר הראשון בסדרה הנתונה.

ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת על ידי הכנסת k איברים בין כל שני איברים עוקבים של <u>הסדרה הנתונה</u>.
הבע באמצעות k את הפרש הסדרה המתקבלת.

3. שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו.
יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים.
ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.

א. בסבב הראשון יש 4 משחקים.
ההסתברות שיעל תנצח ב- 2 משחקים או ב- 3 משחקים גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב- 4 משחקים.
חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.

בסבב השני יש 2 משחקים.
ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון – היא 0.34 .

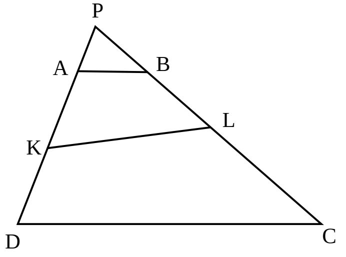
ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

4. נתון משולש PDC .
הנקודות B ו- L מונחות על הצלע PC .
הנקודות A ו- K מונחות על הצלע PD ,
כמתואר בציור.
נתון כי המרובע $ABLK$
הוא בר חסימה במעגל
וגם המרובע $KLCD$
הוא בר חסימה במעגל.



א. הוכח $AB \parallel DC$.

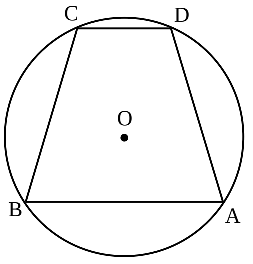
נתון: $PA = 3$ ס"מ , $PB = 4$ ס"מ , שטח המשולש ABP הוא S סמ"ר,
שטח המרובע $ABCD$ הוא $24S$ סמ"ר.

ב. האם אפשר לחסום במעגל את המרובע $ABCD$? נמק.

ג. מצא את אורך הצלע PD .

ד. נתון גם: $BL = 5$ ס"מ .
היעזר בדמיון משולשים והבע באמצעות S את שטח המרובע $KLCD$.

.5 במעגל חסום טרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$.



מרכז המעגל O בתוך הטרפז (ראה ציור).
רדיוס המעגל הוא R וגובה הטרפז הוא h.
נתון: $\sphericalangle COD = \alpha$, $\sphericalangle BOA = 3\alpha$.
א. הבע באמצעות α את $\sphericalangle DAB$.
ב. הבע את האורך של שוק הטרפז
באמצעות α ו- R.
ג. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו- h.

ד. נתון כי שטח המשולש COD הוא $\dfrac{h^2}{12\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.
מצא את α.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

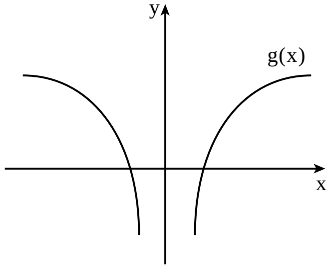
ענה על שתיים מבין השאלות 8-6.

.6 נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{2\cos^2 x}$.

א. בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$:
(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$
המאונכות לציר ה- x (אם יש כאלה).
(3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x
(אם יש כאלה).
(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה),
וקבע את סוגן.

ב. בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$:
(1) הראה שפונקציה $f(x)$ היא זוגית.
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ג. מצא את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y.

.7 בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $g(x)$.
הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$
מוגדרת לכל x השונה מ- 0 ,
ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול.
הישר $x=0$ הוא האסימפטוטה האנכית
לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.



א. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$. נמק את שיקולך.
(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g''(x)$. נמק את שיקולך.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=2$ שווה ל- 5.25 .

ב. הישר $x=1$ חותך את הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$ בנקודה A ,
והישר $x=2$ חותך גרף זה בנקודה B .
מצא את ההפרש בין שיעור ה- y של הנקודה A ובין שיעור ה- y של הנקודה B . נמק.

ג. הביטוי $y=\frac{a}{x^3}$ מתאר אחת מן הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$.
a הוא פרמטר גדול מ- 0 .
(1) קבע איזו מן הפונקציות הביטוי מתאר. נמק את קביעתך.
(2) מצא את הערך של a .

.8 במשולש ישר-זווית ABC $(\sphericalangle ABC=90^\circ)$ אורך היתר הוא k ס"מ (k הוא פרמטר).
הניצב AB הוא גם יתר במשולש ADB ,
שהוא שווה-שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle ADB=90^\circ)$.

א. סמן $AB=x$ והבע את BC באמצעות x ו- k .

ב. נתון כי הערך המקסימלי של המכפלה $BC\cdot AD^2$ הוא $3\sqrt{3}$.
מצא את שטח המשולש ADB (ערך מספרי), כאשר המכפלה $BC\cdot AD^2$ היא מקסימלית.

תשובות למבחן בגרות מספר 24 – קיץ תשע"ו, 2016, מועד ב:

1. א. 20 דקות. ב. 5.6 שעות.

2. א. **(2)** $a_1 = 1$. **ב.** $d = \frac{3}{k+1}$.

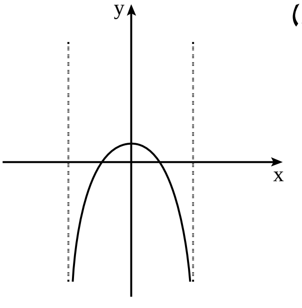
3. א. $\frac{1}{2}$. **ב.** 0.3 . **ג.** $\frac{15}{34}$.

4. ב. לא. ג. 15 ס"מ. ד. 16S סמ"ר.

5. א. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. **ב.** $2R\cos\alpha$. **ג.** $\frac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **ד.** 30° .

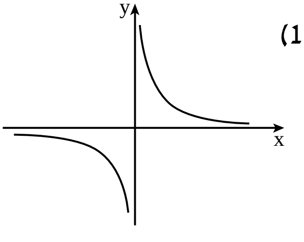
6. א. **(1)** $0 \le x < \frac{\pi}{2}$. **(2)** $x = \frac{\pi}{2}$. **ג.** $\left(\frac{\pi}{4};0\right)$, $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ מקסימום.

ב. **(2)**

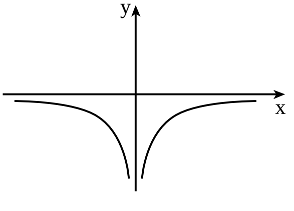


ג. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = 0.2854$.

7. א. **(1)**



(2)



ב. 5.25 .

ג. **(1)** $g'(x)$. **(2)** $a = 6$.

8. א. $\sqrt{k^2 - x^2}$. **ב.** 1.5 סמ"ר.

מבחן בגרות מספר 25

חורף תשע״ז, 2017

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 3-1.

1. שני צינורות א׳ ו-ב׳ מזרימים מים לברֵכה בקצב קבוע.
כאשר צינור א׳ בלבד פתוח, הברֵכה הריקה מתמלאת לגמרי ב- m שעות.
כאשר צינור ב׳ בלבד פתוח, הברֵכה הריקה מתמלאת לגמרי ב- $2m$ שעות.
כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל, הברֵכה הריקה מתמלאת לגמרי ביותר מ- 4 שעות.
ביום מסוים הברֵכה הייתה ריקה.
פתחו את צינור א׳ בלבד למשך שעתיים.
אחר כך פתחו גם את צינור ב׳, ושני הצינורות היו פתוחים בו בזמן שעתיים נוספות.
בתום אותן שעתיים נוספות יותר מ- $\frac{1}{2}$ הברֵכה הייתה מלאה.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. מצא את תחום הערכים האפשריים של m.

ב. ביום אחר $\frac{1}{2}$ הברֵכה הייתה מלאה. פתחו את שני הצינורות, אלא שבשל תקלה טכנית צינור ב׳ רוקן מים מן הברֵכה במקום למלא בה מים. שני הצינורות היו פתוחים בו בזמן במשך שעה אחת, ובמהלכה צינור א׳ מילא מים בברֵכה וצינור ב׳ רוקן ממנה מים.
בתום אותה שעה תוקנה התקלה, ושני הצינורות החלו למלא את הברֵכה יחד, עד שהיא התמלאה לגמרי כעבור שעתיים וחצי נוספות.
נתון שהקצב שבו צינור ב׳ מרוקן מים מהברֵכה שווה לקצב שבו הוא ממלא אותה במים. מצא את m.

2. נתונה סדרה a_n המקיימת את כלל הנסיגה: $a_{n+1} = \frac{a_n}{4 \cdot a_n + 3}$, $a_1 = -1$.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

נגדיר סדרה חדשה b_n : $b_n = \frac{1}{a_n} + 2$.

א. הוכח כי b_n היא סדרה הנדסית.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$.

ג. נתון: n הוא מספר זוגי.

הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \dots \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}$.

3. אביגיל משתתפת במשחק של זריקת חצים למטרה.
הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא P $(P > 0)$,
ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.
כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.
הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3
מן הסיכוי שלה לפגוע בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את P .

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות,
מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר ההחטאות שלו
(יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

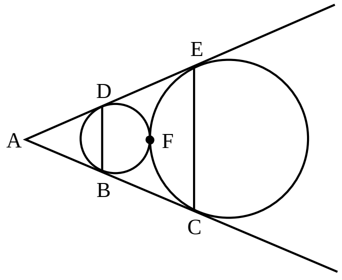
ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

(2) גם תמר משתתפת בַּמשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל- P ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.
תמר החטיאה בזריקה הראשונה.
מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

ענה על אחת מבין השאלות 5-4.

4. נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס שונה,
המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה F.
AC משיק לשני המעגלים
בנקודות B ו- C,
AE משיק לשני המעגלים
בנקודות D ו- E,
כמתואר בציור.

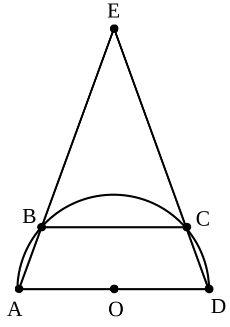


א. הוכח שהמרובע $BDEC$ הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. המשיק המשותף למעגלים עובר בנקודה F חותך את שוקי הטרפז, BC ו- DE, בנקודות G ו- H בהתאמה.
הוכח: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.

ג. נסמן ב- R את רדיוס המעגל הגדול וב- r את רדיוס המעגל הקטן.
הוכח כי $R \cdot BD = r \cdot CE$.

5. נתון טרפז $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ החסום
בחצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R
כך ש- AD הוא קוטר של חצי המעגל.
המשכי השוקיים AB ו- DC נפגשים
מחוץ למעגל בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle EAD = \alpha$.



א. הבע באמצעות R ו- α את אורך הקטע BC.

ב. מהו התחום של כל הערכים האפשריים עבור הזווית α? נמק.

ג. נתון כי שטח המשולש AED גדול פי 9 משטח משולש COD.
מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED לבין R?

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax^2+4x}{x^2+3x+b}$.

a ו- b הם פרמטרים.

נתון: $x=1$, $y=1$ הן אסימפטוטות של הפונקציה.

א. מצא את a ואת b .

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים (מלבד $x=1$ ו- $y=1$)? הסבר.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי x מתקיים: $|f(x)|=-f(x)$. נמק.

ה. נגדיר $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)$. הראה כי השטח המוגבל על ידי ציר ה- x , על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישר $x=0.5$ הוא $\frac{1}{3}$.

נמק את תשובתך.

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים א-ו עבור $a>0$.

הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. (1) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הנגזרת $f'(x)$.

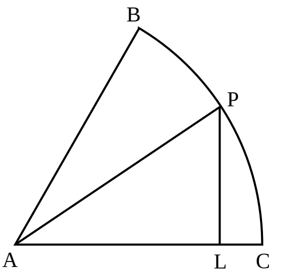
(2) סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

ו. מצא את ערך הביטוי: $\int_{-3a}^{-2a} f(x)dx+\int_{2a}^{3a} f(x)dx$.

ענה על סעיף ז עבור $a=0$.

ז. (1) מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



.8 נתונה גזרת עיגול BAC שהיא $\frac{1}{6}$ מעיגול שרדיוסו R ומרכזו A.
מנקודה כלשהי P, הנמצאת על הקשת BC, הורידו אנך ל- AC החותך את הרדיוס AC בנקודה L (ראה ציור).
השטח האפור שבציור הוא השטח הכלוא בין הקשת BC ובין הרדיוסים AB ו- AP, והקטעים LP ו- LC.
נתון שהשטח האפור המינימלי הוא $24\pi - 36$.

א. (1) מצא את הזווית PAC שעבורה השטח האפור שמתקבל הוא מינימלי.

(2) מצא את R.

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש APL? נמק.

תשובות למבחן בגרות מספר 25 – חורף תשע"ז, 2017:

.1 א. $6 < m < 10$. **ב.** $m = 8.5$.

.2 א. הוכחה: $(q = 3)$. **ב.** $S_n = \frac{3^n - 1}{2} - 2n$. **ג.** $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$.

.3 א. $P = \frac{5}{8}$. **ב.** 0.7248. **ג.** (1) 0.5188. (2) 0.5188.

.5 א. $BC = -2R\cos 2\alpha$. **ב.** $45^\circ < \alpha < 90^\circ$. **ג.** 1.59.

.6 א. $a = 1$, $b = -4$.

ב. (1) $x \neq -4$, $x \neq 1$.

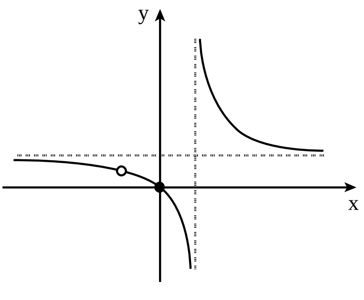
(2) $(0;0)$.

(3) אין. יש "חור" ב- $\left(-4;\frac{4}{5}\right)$.

(4) ירידה: $1 < x$ או $-4 < x < 1$ או $x < -4$

עלייה: אין.

ג.

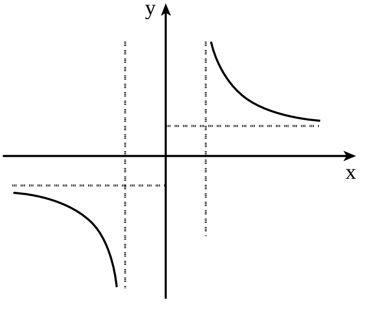


ד. $0 \le x < 1$.

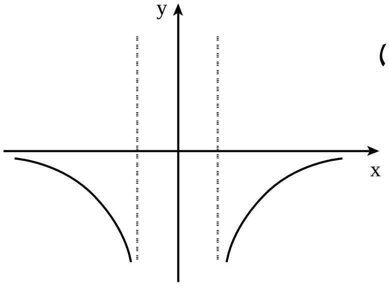
7. א. $x > a$ או $x < -a$.   ב. $x = a$, $x = -a$, $y = 1$, $y = -1$.

ג. ירידה : $x > a$ או $x < -a$; עלייה : אין.

ד.

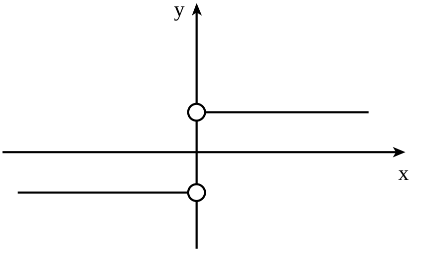


ה. (1) $x = a$, $x = -a$, $y = 0$.   (2)



ו. ערך הביטוי שווה ל- 0 .

ז.



8. א. (1) $\frac{\pi}{4}$.   (2) $R = 12$.   ב. 36 .

מבחן בגרות מספר 26

קיץ תשע"ז, 2017, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 נֹגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסוים, בארבע מהירויות קבועות שונות. בכל פעם, לאחר שעברה מִקְטע שאורכו רבע מן מהמסלול, היא הגבירה את מהירותה, ורכבה במהירות הגדולה פי 2 מן המהירות הקודמת. במקטע האחרון היא רכבה במהירות של 40 קמ"ש.
נֹגה יצאה לדרך בשעה $8:00$ בבוקר וסיימה את המסלול בשעה $11:45$ בבוקר.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. מהו אורך המסלול?

ב. דניאל יצא לדרך באותו מסלול בשעה $9:45$, ונסע במהירות קבועה לאורך כל המסלול. גם הוא הגיע לסוף המסלול בשעה $11:45$.
באיזה מארבעת מִקְטָעֵי המסלול פגש דניאל את נֹגה בפעם הראשונה, ובאיזו שעה?

.2 נתונה סדרה $a_n = \frac{(2^n+1)(2^n-1)}{2^n}$.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

b_n ו- c_n הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים,
המקיימות לכל n טבעי: $a_n = b_n - c_n$. נתון: $c_3 = \frac{1}{8}$, $b_6 = 64$.

א. (1) מצא את b_1 ואת המנה של הסדרה b_n.
(2) מצא את c_1 ואת המנה של הסדרה c_n.

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n נסמן ב- A_n,
את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n נסמן ב- B_n,
ואת סכום n האיברים הראשונים בסדרה c_n נסמן ב- C_n.

ב. הראה ש- $C_n = B_n - A_n$.

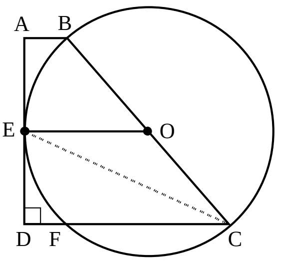
ג. עבור אילו ערכי n מתקיים האי-שוויון: $0.9 < B_n - A_n < 1$?

.3 בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.
אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה,
ההסתברות שלְ- 4 מהם בדיוק יש קלנועית גדולה פי 24
מן ההסתברות שלְ- 6 מהם בדיוק יש קלנועית.
א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?
ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות.
ידוע שלפחות ל- 3 מהם יש קלנועית.
מהי ההסתברות שלְ- 4 מהם בדיוק יש קלנועית?
ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות, בזה אחר זה,
עד שלְ- 3 מהם בדיוק יש קלנועית.
מהי ההסתברות שייבָּחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

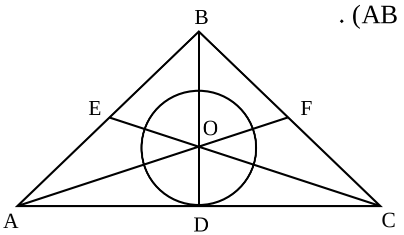
ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

.4 נתון מעגל שמרכזו O.
$ABCD$ הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel DC$, $\sphericalangle ADC = 90^\circ$).
הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E,
והנקודות B ו- C נמצאות על המעגל
כך ש- BC הוא קוטר.
הצלע DC חותכת את המעגל בנקודה F,
כמתואר בציור.



א. הוכח: $\sphericalangle BCD = 2\sphericalangle DEF$.
ב. הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta DFE$.
ג. הוכח: $BC = DF + DC$.

.5 ABC הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = BC$).
AF , CE ו- BD הם תיכונים במשולש.
הנחתכים בנקודה O (ראה ציור).
א. הוכח: $S_{\Delta BOE} = S_{\Delta COD}$.



מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC
בנקודה D.
נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC.
ב. חשב את גודל הזווית ACE.
ג. הבע את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת : $g(x)=f(x+5)$.

ב. (1) הוכח ש- $g(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. הסבר מדוע לכל $1<a<b$ מתקיים השוויון : $\int_{a+5}^{b+5} f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

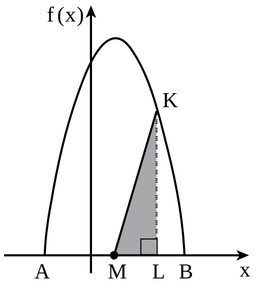
(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

ג. נתון : $0<a<\frac{\pi}{2}$.

השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $x=a$ וציר ה- x שווה ל- 1. מצא את a .

8. בציור שלפניך מתואר גרף
הפונקציה $f(x)=-x^2+2x+c$
בתחום האי-שליליות שלה.
A ו- B הן נקודות החיתוך
של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.
נתון: $x_A=-t$, $x_B=2t$ $(t>0)$.
א. מצא את t ואת c.



M היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה- x.
K היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$ מעל ציר ה- x.
מהנקודה K הורידו אנך לציר ה- x, החותך את הקטע AB בנקודה L.
ב. מצא עבור אילו שיעורי x של הנקודה K שטח המשולש KLM
הוא מקסימלי.
מצא את שני הפתרונות האפשריים.
תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

תשובות למבחן בגרות מספר 26 – קיץ תשע"ז, 2017, מועד א:

1. א. 40 קי"מ. ב. במקטע השני בשעה 10:30.

2. א. **(1)** $b_1 = 2$, $q_b = 2$. **(2)** $q_c = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{2}$. ג. $n \ge 4$.

3. א. $p = \frac{1}{5}$. ב. $\frac{16}{103} = 0.15534$. ג. $\frac{64}{15625} = 0.004096$.

5. ב. $\sphericalangle ACE = 17.66^\circ$. ג. $OE = \frac{R\sqrt{1+\pi^2}}{2} = 1.648R$.

6. א. **(1)** $x > 6$ או $x < 4$.

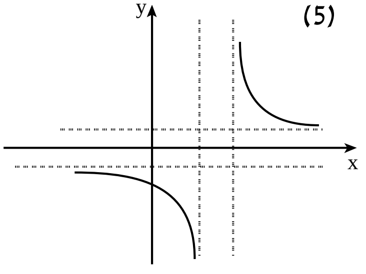
(2) $(0;-1.02)$.

(3) $x = 4$, $x = 6$, $y = 1$, $y = -1$.

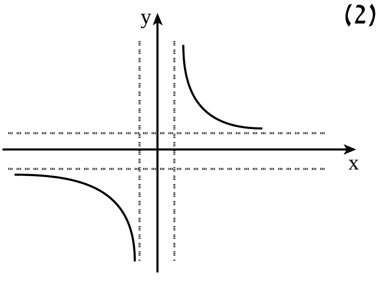
(4) ירידה: $x < 4$ או $x > 6$.

עלייה: אף x.

(5)



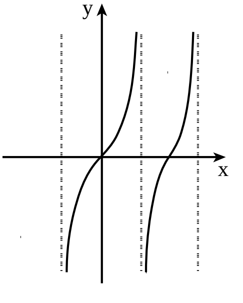
ב. **(2)**



7. א. **(1)** $x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k$. **(2)** $(\pi k;0)$. **(3)** $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

(4) $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה שלה.

ב.



ג. $a = \frac{\pi}{4}$.

8. א. $t = 2$, $c = 8$. ב. $x = 1+\sqrt{3}$ או $x = 1-\sqrt{3}$.

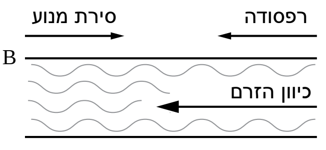
מבחן בגרות מספר 27

קיץ תשע״ז, 2017, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון



הערים A ו-B נמצאות על גדת נהר הזורם במהירות קבועה.
כיוון הזרם הוא מ-A ל-B.
מן העיירה B יצאה סירת מנוע לכיוון העיירה A.
הסירה שטה נגד כיוון הזרם.
באותו הזמן יצאה רפסודה מן העיירה A לכיוון העיירה B.
הרפסודה שטה עם כיוון הזרם.

מהירות סירת המנוע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 ממהירות הזרם של הנהר. מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס.
במים זורמים הרפסודה שטה עם הזרם.

הסירה והרפסודה נפגשו 3 שעות ו-45 דקות אחרי יציאתן לדרך והמשיכו בדרכן. סירת המנוע הגיעה לעיירה A ומיד הסתובבה ושטה בחזרה לעיירה B. כאשר סירת המנוע הגיעה לעיירה B, הרפסודה הייתה במרחק של 35 ק״מ מן העיירה B.

א. חשב את מהירות הזרם ואת מהירות סירת המנוע במים עומדים.

ב. בדרך חזרה לעיירה B פגשה סירת המנוע את הרפסודה בפעם השנייה.
כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיירה A עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה?

2. נתונה סדרה כללית a_n.
נסמן ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n.
נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. הבע את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $1<n$ באמצעות n ו- k במידת הצורך.
ב. מצא את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמק.
נגדיר: $T = {a_2}^2 + {a_5}^2 + {a_8}^2 + \ \ldots$
(סכום ריבועֵי כל איבר שלישי בסדרה a_n החל ב- a_2).
ג. חשב את T.

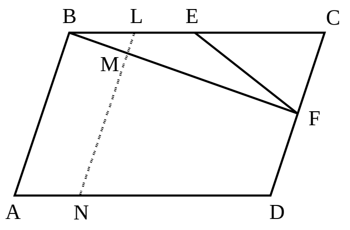
3. בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים,
בקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו-3 כדורים אדומים.
מוציאים באקראי כדור מקופסה I.
אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II.
אם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.
שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב,
אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II,
ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.
לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II.
א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות מקופסה I
יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.
חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.

ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.
ב. מהי ההסתברות שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?
ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.
מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

.4 המרובע $ABCD$ הוא מקבילית.
הזווית A היא זווית חדה.
הנקודה E היא אמצע הצלע BC
והנקודה F אמצע הצלע CD
(ראה ציור).



א. השטח המשולש ECF הוא S.
הבע את שטח המקבילית $ABCD$
באמצעות S. נמק את תשובתך.

ב. הנקודה L היא אמצע הקטע BE.
דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל ל- AB וחותך את BF ואת AD
בנקודות M ו- N בהתאמה. חשב את היחס $\frac{LM}{MN}$.

ג. נתון $BE = EF$. האם אפשר לחסום את המרובע $ABFD$ במעגל?
נמק את קביעתך.

.5 $ABCD$ הוא טרפז חסום במעגל $(AB \parallel DC)$.
נתון: $AB = a$, $CD = b$ $(a < b)$.
$\sphericalangle C = 60^\circ$.

א. הבע את שוקי הטרפז, BC ו- AD, באמצעות a ו- b.

נתון: $a = 4$, אורך האלכסון BD הוא $4\sqrt{7}$.

ב. חשב את b.

ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.
(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז $ABCD$.
(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=a-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א.(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x .

ב. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

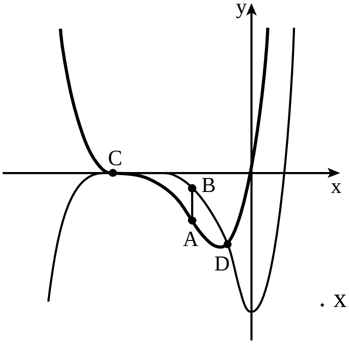
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)+k|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את k (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.

7. לפניך הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.



א. התאם בין הגרפים I ו- II לבין הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.
נמק.

נתון: $f'(x)=x(x+b)^3$.

$b>1$ הוא פרמטר.

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ב- $x=-1$.

ב. מצא את b .

C ו- D הן נקודות החיתוך של הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$ בתחום $x<0$, כמתואר בציור.

הנקודות A ו- B נמצאות על הגרפים I ו- II בהתאמה, כך הישר AB מאונך לציר ה- x .

נתון: $x_C < x_A < x_D$, $x_C = -4$, $x_D = 1-\sqrt{5}$.

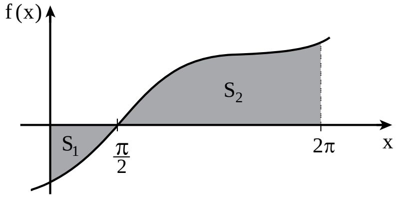
ג. מצא את שיעור ה- x של הנקודות A ו- B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי (אפשר לפתור את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה $f(x)$).

8. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- y בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x היא $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = 2\pi$ (השטח האפור בציור) שווה ל- $10\pi^2 + 16$.



נתון גם: $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 8\pi^2$.

א. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים (שטח S_1 המסומן בציור).

הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0) = 0$.

ב. מצא את $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

נתון: $f'(x) = 8\sin x + 8$.

ג. מצא את $f(x)$.

תשובות למבחן בגרות – קיץ תשע"ז, 2017, מועד ב:

1. א. מהירות הזרם: 5 קמ"ש, מהירות הסירה: 20 קמ"ש. ב. $6\frac{1}{4}$ שעות.

2. א. $a_1 = k - \frac{1}{9}$, $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$. ב. $k = \frac{1}{3}$. ג. $T = \frac{1}{182}$.

3. א. מספר הכדורים הכחולים הוא 5 . ב. 0.3595 . ג. 0.5338 .

4. א. $S_{ABCD} = 8S$. ב. $\frac{LM}{MN} = \frac{1}{7}$. ג. לא ניתן לחסום את המרובע ABFD במעגל.

5. א. $AD = BC = b - a$. ב. $b = 12$. ג. (1) $R = 6.11$. (3) $r = 2\sqrt{3}$.

6. א. (1) $x \neq 2$.

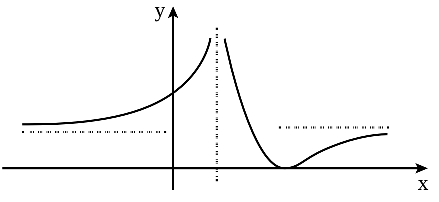
(2) $x = 2$, $y = a$.

(3) $(3;a-1)$ מינימום.

(4) עלייה: $x > 3$ או $x < 2$; ירידה: $2 < x < 3$.

ב. $a = 1$.

ג.



ד. $k = 1$ או $k = -1$.

7. א. $f(x): II$, $f'(x): I$. ב. $b = 4$. ג. $x_A = x_B = -2$.

8. א. $S_1 = \pi^2 + 8$. ב. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi^2 - 8$. ג. $f(x) = -8\cos x + 8x - 4\pi$.

מבחן בגרות מספר 28

חורף תשע"ח, 2018

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

.1 בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א' ובריכה ב'.
הנפח של בריכה א' הוא $V1$ והנפח של בריכה ב' הוא $V2$.
את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הֶספק.
ביום כלשהו שתי הבריכות היו ריקות.
התחילו למלא את בריכה א' באמצעות ארבעת הצינורות.
כאשר התמלאה בריכה א' לכדי $\frac{1}{6}$ מנפחה, העבירו אחד מן הצינורות לבריכה ב' והתחילו למלא אותה באמצעותו. כאשר התמלאה בריכה א' עד מחציתה, העבירו עוד שני צינורות למילוי בריכה ב'.
מילוי שתי הבריכות הסתיים באותו הזמן.
כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד שהתמלאו שתי הבריכות.
חשב את היחס $\frac{V1}{V2}$.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.2 a_n היא סדרה חשבונית שההפרש שלה, d, שונה מ- 0.
נתון: $a_7 = -a_{17}$.
א. מצא את a_{12}.
ב. (1) האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל- $-a_1$? נמק.
(2) מצא מספר טבעי n שעבורו סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל- 0.
ג. האם קיים n טבעי שעבורו: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$? אם כן — מצא n כזה, אם לא — נמק.
ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק (הבחן בין מקרים שונים).

סרקו אותי לצפייה בפתרון

.3 למיכל יש קובייה מאוזנת. על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2, ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4.
לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת. על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים: 1 או 3.
מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים. המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק.
בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.
המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר.

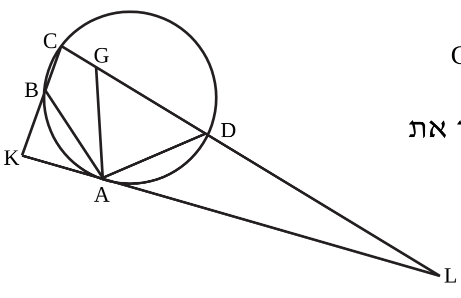
נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1? נמק את תשובתך.
ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?
ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

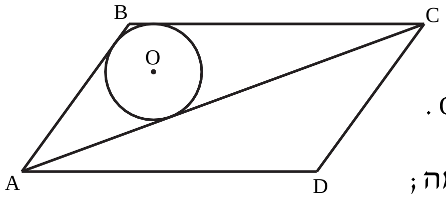
ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

.4 המרובע $ABCD$ חסום במעגל.
הנקודה G נמצאת על הצלע CD כך ש- $AB = AG$ וגם $CB = CG$.
המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה L, וחותך את המשך הצלע CB בנקודה K (ראה ציור).



א. הוכח כי $AD = AG$.
ב. (1) הוכח כי $\Delta ABK \sim \Delta CDA$.
(2) הוכח כי $AD^2 = BK \bullet CD$.
ג. הראה כי $\frac{S_{\Delta LDA}}{S_{\Delta KAB}} = \frac{LA}{AK}$.

5. נתונה מקבילית $ABCD$.
AC הוא האלכסון הארוך,
כמתואר בציור.
במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O .
נתון: הנקודה O נמצאת במרחקים
6 ו- 3 מן הישרים AD ו- AC בהתאמה;
$OA = 10$.



א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.
ב. חשב את אורך האלכסון AC .
ג. חשב את שטח המקבילית.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

6. נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

ענה על סעיף א עבור התחום: $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה- x .
(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה גם על סעיף ב עבור תחום: $-\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$.

ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
(2) הוכח: $g(x) = -f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.
(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ג. מצא את ערך הביטוי $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$. נמק את תשובתך.

.7 נתונה משפחת הפונקציות: $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-a}$. a הוא פרמטר, $a\neq 0$, $a\neq 4$.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a במידת הצורך.
הבחן בין $a>0$ ובין $a<0$ במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

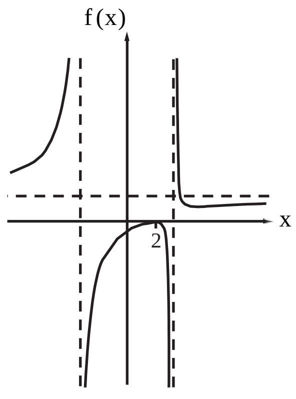
(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה- x.

(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x (אם יש כאלה).

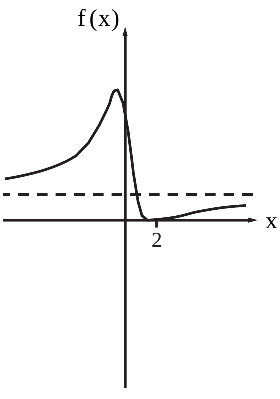
ענה על סעיף ב. הבע באמצעות a במידת הצורך.
הבחן בין $a>4$ ובין $a<4$ במידת הצורך.

ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

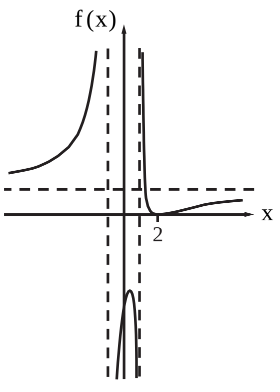
ג. לפניך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה $f(x)$, כל אחד עבור ערך אחר של a.
כתוב מהו תחום הערכים של a המתאים לכל אחד מן הגרפים I – III.
נמק את תשובתך.



I



II



III

8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=t$.

נתון: $1\le t\le 5$.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B .

הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

תשובות למבחן בגרות מספר 28 – חורף תשע״ח, 2018:

1. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{18}{29}$.

2. א. $a_{12}=0$. ב. (1) כן, $a_{23}=-a_1$. (2) $n=23$. ג. לא.

ד. אם האיבר הראשון שלילי, הסדרה עולה: 11 איברים שליליים.

אם האיבר הראשון חיובי, הסדרה יורדת: לא ניתן לדעת.

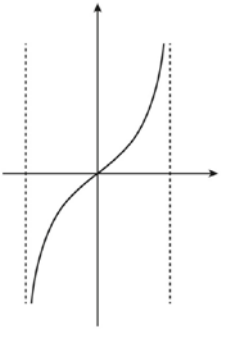
3. א. על פאה אחת. ב. 0.3466 . ג. 0.5533 .

5. א. 125.67°, 54.33° . ב. $AC=27.08$. ג. $S_{ABCD}=171.73$.

6. א. (1) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. (2) $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$.

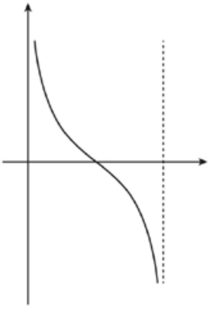
(3) עלייה: $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$. ירידה: אין.

(4)



ב. (1) $0 < x < \pi$.

(2) הוכחה. (3)



ג. 0 .

7. א. (1) עבור $a < 0$: כל x .

עבור $a > 0$: $x \neq \sqrt{a}$, $x \neq -\sqrt{a}$.

(2) $(2,0)$, $(0,-\frac{4}{a})$. (3) $y = 1$.

(4) עבור $a < 0$: אין.

עבור $a > 0$: $x = \sqrt{a}$, $x = -\sqrt{a}$.

ב. עבור $a > 4$: $(2,0)$ מקסימום, $(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a})$ מינימום.

עבור $a < 4$: $(2,0)$ מינימום, $(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a})$ מקסימום.

ג. I : $a > 4$.

II : $a < 0$.

III : $0 < a < 4$.

8. א. $x = \sqrt{3}$. ב. $x = 5$.

מבחן בגרות מספר 29

קיץ תשע״ח, 2018, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 3-1.

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון

שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה $06:00$ זה לכיוונו של זה.
אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א.
אמיר ומשה עברו זה על פני זה והמשיכו כל אחד ליעדו.
אמיר הגיע לעיר ב שעתיים אחרי שעבר על פני משה, ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.

א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?

נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V.
בדיוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה.
נתון שיסמין הגיעה לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שמשה הגיע לעיר א.

ב. (1) הבע באמצעות V את המרחק בין עיר א לעיר ב.

(2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.

.2 סרקו אותי לצפייה בפתרון

a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת שסכומה שלילי.
a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, ו-q היא מנת הסדרה.

א. לפניך ארבע טענות $(I - IV)$. רק אחת מהן בהכרח נכונה.
ציין את מספרה ונמק.

I) $q < 0$.

II) $a_1 < 0$ וגם $q < 0$.

III) $a_1 < 0$.

IV) $a_1 > 0$ או $q < 0$.

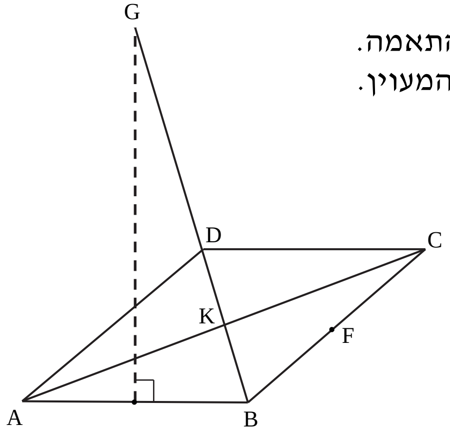
נסמן ב- T את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n,
ונסמן ב- R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a_n.
p הוא פרמטר.
נתון: $T + p \cdot R = 0$.
ב. הבע את p באמצעות q.

b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא p.
ג. האם b_n היא סדרה מתכנסת? נמק.
ד. נתון: p שלילי. הראה שלכל n טבעי $a_{n+1} > a_n$
(כלומר הראה שהסדרה a_n היא סדרה עולה).

3. בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון.
37% מן התלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן.
$\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.
מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.
א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן. מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?
ב. יעל והדס ניגשו למבחן. ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן.
האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.
ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.
מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?
ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן.
מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות $I - II$:
I) התלמיד נעזר בחבריו.
II) התלמיד לא עבר את המבחן.

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

4. ABCD הוא מעוין.
E ו- F הן אמצעי צלעות AB ו- BC בהתאמה.
הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין.
מן הנקודה E העלו אנך ל- AB,
החותך את המשך האלכסון BD
בנקודה G (ראה ציור).



א. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.

הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC.

ב. הוכח שהמשולשים MFC, BKC ו- BFG דומים זה לזה.

נסמן ב- R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC,
וב- r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

ג. (1) הוכח כי $\frac{MF}{CF}=\frac{MC}{GB}$ וכי $\frac{BK}{CK}=\frac{MF}{CF}$.

(2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל- $\frac{r}{R}$.

5. ABC הוא משולש ישר זווית ($\sphericalangle ABC=90^\circ$).
M היא נקודה על היתר כך ש- $AM:MC=\sqrt{3}:4$.
נתון: $\sphericalangle ABM=30^\circ$, $BM=8$.

א. (1) סמן: $MC=4x$ וחשב את זוויות המשולש ABC.

(2) חשב את הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו- CMB.

ב. נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו- CBM ב- O_1 ו- O_2 בהתאמה.

(1) הסבר מדוע המרובע BO_1MO_2 הוא דלתון.

(2) חשב את אורך הקטע O_1O_2.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$, a הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. הוכח: $a>1$.

ענה על סעיף ב. אם יש צורך, הבע באמצעות a .

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x .

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $a=3$.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x , ועל ידי הישרים $x=\frac{2}{3}$ ו- $x=2$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל x .

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו- $x=b$ $(b>\frac{1}{3})$.

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו- $x=b$ שווה ל- $2S$ בעבור כל b .

הבע את $g(x)$ באמצעות $f(x)$ בתחום $x>\frac{1}{3}$ (כתוב את שתי האפשרויות).
אין צורך להוכיח את תשובתך.

.7 $f(x)$ היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל x, כך ש- $f(x) \neq 0$ לכל x.

א. הוכח שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע; ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sin^2 x + \cos x + 2$, המוגדרת לכל x.

ב. האם קיים x שבעבורו $g(x) = 0$? נמק.

ג. (1) האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל x מתקיים: $g(x) = g(x + 2\pi)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \le x \le \pi$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\pi \le x \le 3\pi$.

נתונה הפונקציה $h(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \cos x + 2}$.

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$? נמק.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$ באותה מערכת צירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה $g(x)$.

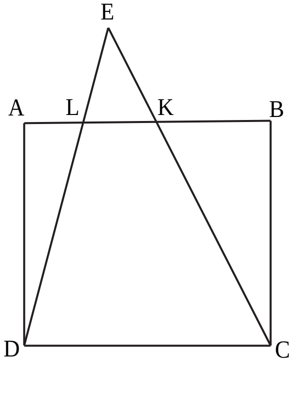
.8 $ABCD$ הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס״מ.

K ו- L הן נקודות על הצלע AB.

נתון כי הישרים CK ו- DL חותכים זה את זה בנקודה E,

הנמצאת מחוץ לריבוע $ABCD$ (ראה ציור).

נסמן: $LK = x$.



א. הבע באמצעות x את גובה המשולש KLE.

ב. עבור איזה ערך של x סכום שטחי המשולשים BCK, ADL ו- KLE הוא מינימלי? נמק.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

תשובות למבחן בגרות מספר 29 – קיץ תשע"ח, 2018, מועד א:

1. א. אמיר ומשה עברו זה על פני זה בשעה $10:00$.

ב. (1) $6V$. (2) x : מהירותה של יסמין, $\frac{3}{4}V < x < 3V$.

2. א. טענה III (סכום הסדרה הוא $\frac{a_1}{1-q}$, כמו כן $-1<q<1$, לכן כש-a_1 שלילי הסכום שלילי).

ב. $P=-\frac{1}{q}$. ג. לא מתכנסת ($-1<q<1$ $\leftarrow$ $p>1$ או $p<-1$). ד. הוכחה.

3. א. $\frac{2}{9}$. ב. כן ($\frac{35}{37} > \frac{56}{63}$). ג. 0.1763. ד. 0.44.

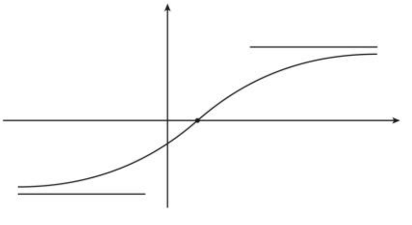
5. א. (1) 53.13°, 36.87°, 90°. (2) $R_{\Delta ABM}=5$, $R_{\Delta CBM}=6\frac{2}{3}$.

ב. (1) $BO_1=MO_1=5$, $BO_2=MO_2=6\frac{2}{3}$. (2) $8\frac{1}{3}$.

6. א. הוכחה.

ב. (1) $(\frac{1}{a},0)$ $(0,-1)$. (2) $y=\sqrt{a}$, $y=-\sqrt{a}$. (3) עולה לכל x.

(4)



ג. 2. ד. $g(x)=-f(x)$, $g(x)=3f(x)$.

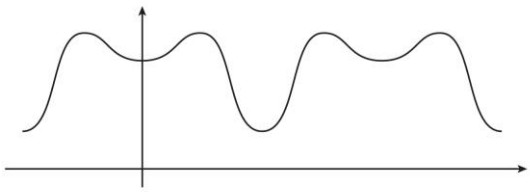
7. א. הוכחה.

ב. לא ($2+\sin^2 x \geq 2$, $\cos x \geq -1$ לכן סכומם גדול מ-1 או שווה לו ולכן לא יכול להיות שווה 0).

ג. (1) כן ($\sin^2 x$ ו- $\cos x$ הן פונקציות זוגיות). (2) הוכחה.

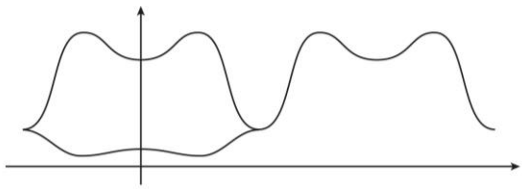
(3) $(0,3)$ מינימום, $(\frac{\pi}{3},3\frac{1}{4})$ מקסימום, $(\pi,1)$ מינימום.

(4)



ד. **(1)** כל x .

(2)



8. א. $\frac{6x}{6-x}$. ב. $6-3\sqrt{2}$.

מבחן בגרות מספר 30

קיץ תשע״ח, 2018, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 המרחק מביתה של רננה עד בית הספר הוא 500 מטרים.
רננה יצאה מביתה אל בית הספר והלכה במהירות קבועה.
3 דקות לאחר שיצאה מביתה, יצא משם אביה בעקבותיה כדי להביא לה כריך ששכחה. הוא רץ במהירות קבועה של 2.5 מטרים לשנייה.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

כאשר הגיע האב לרננה הם עמדו ושוחחו במשך 2 דקות והוא נתן לה את הכריך, ולאחר מכן הלך כל אחד מהם לדרכו – רננה לבית הספר והאב בחזרה אל הבית. רננה המשיכה ללכת באותה המהירות שהלכה לפני כן, והאב הלך במהירות של 1.5 מטרים לשנייה.
אביה של רננה הגיע אל הבית בדיוק באותו הזמן שהגיעה רננה אל בית הספר.

א. חשב את מהירות ההליכה של רננה.
ב. כמה זמן עבר מן הרגע שרננה יצאה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר?

.2 הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = -\frac{c^{n-2}}{a_n}$,
$a_1 = -\frac{1}{c}$. נתון: $c > 0$.

סרקו אותי
לצפייה בפתרון

א. הוכח כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה הנדסית, וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים גם הם סדרה הנדסית.

ב. (1) רשום את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .
הבע את תשובתך באמצעות c אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(3) הוכח שלכל n טבעי, הסכום של $2n-1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב- n .

ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הזה: $b_n = -\frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$.

(1) הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה יורדת?

(3) נתון שהסדרה האין-סופית b_n היא סדרה יורדת.
הבע באמצעות c את סכומה.

.3 במבחן רב-ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.
לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.
התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.
תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.
תלמיד שמסמן תשובה לא נכונה על השאלה אינו מקבל נקודות לשאלה.
כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.
בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.

(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

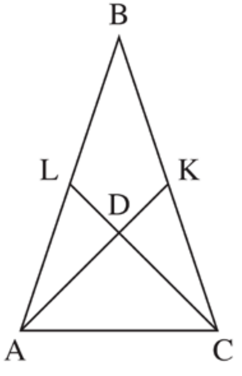
ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימן אותן.
בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה, ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.
מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות, וסימנה אותן.
בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש- k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה.
ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן.
מצא את k. נמק.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 4-5.

4. ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = BC)$.
AK ו- CL הם תיכונים במשולש, החותכים זה את זה בנקודה D.
נתון: $AK \perp CL$.
א. הוכח: $BD = AC$.
ב. חשב את היחס $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}}$.
ג. M הוא מרכז המעגל החוסם את המרובע $ALKC$.
(1) הוכח: $\measuredangle AML = 90^\circ$.
(2) מצא את היחס $\frac{AM}{AD}$.
תוכל להשאיר שורש בתשובתך.



.5 ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$.
BD הוא חוצה זווית במשולש ABC .
המשך הקטע BD חותך את המעגל החוסם את המשולש ABC בנקודה E .
גודל הזווית ABC הוא 2β .

א. הבע באמצעות β את $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$, היחס בין שטח המשולש ABC ובין שטח המשולש ADE .
אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלת.

נתון : BE שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC .

ב. חשב את היחס $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$.

נסמן ב- a את אורך השוק AB .
ג. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל החסום על ידי המשולש ABC .

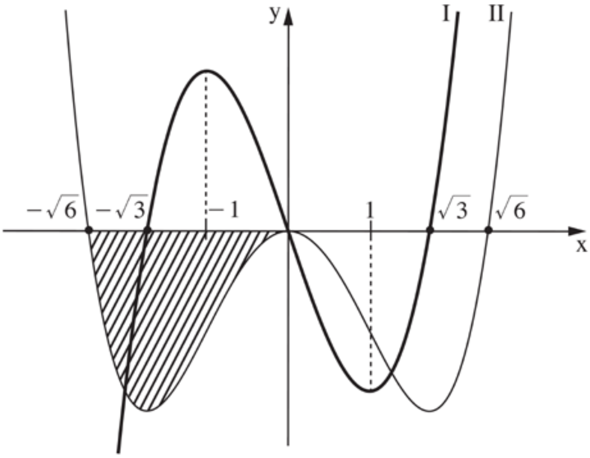
בתשובותיך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

.6 לפניך הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$ (פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$) בתחום $-2.5 \le x \le 2.5$.

שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.



א. התאם בין הגרפים I ו- II ובין הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$. נמק.

ב. (1) כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק את תשובתך.

ג. עבור איזה ערך של x בתחום $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ שיפוע המשיק לגרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, הוא מינימלי?

נתון: $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה הוא t.

ה. הבע באמצעות t את השטח המוגבל על ידי גרף II ועל ידי החלק השלילי של ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

ו. נתון: קיימים a, b ו- c ממשיים כך ש- $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$.
מצא את c ואת היחס $\frac{a}{b}$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin(\frac{\pi}{x})$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ענה על הסעיפים ב-ה עבור התחום $x \geq \frac{2}{7}$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית.
מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה על סעיף ו עבור התחום $x > 0$.

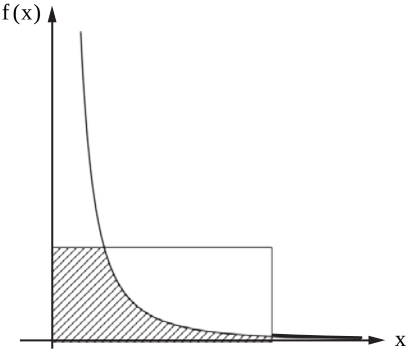
ו. נסתכל על נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x.
לפניך 3 טענות $(i-iii)$. אחת מהן נכונה. איזו מהן היא הנכונה? נמק.

i) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקטן.

ii) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.

iii) ככל שמתקרבים ל- $x = 0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וגדל.

8. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ בתחום $x>0$,
ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים
והוא נמצא ברביע הראשון.
נתון : שטח המלבן הוא 4 .
נסמן ב- a את אורך צלע המלבן שנמצאת
על ציר ה- x . נתון : $a\ge\frac{1}{4}$.



א. הבע באמצעות a את השטח המוגבל
על ידי הצירים, על ידי צלעות
המלבן ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$
(השטח המקווקו בציור).
ב. עבור איזה ערך של a השטח שמצאת
בסעיף א הוא מקסימלי?

תשובות למבחן בגרות מספר 30 – קיץ תשע"ח, 2018, מועד ב:

1. א. 1 מטר לשניה. ב. 620 שניות ($10\frac{1}{3}$ דקות).

2. א. הוכחה.

ב. (1) $a_7=-c^2$, $a_6=c^2$, $a_5=-c$, $a_4=c$, $a_3=-1$, $a_2=1$, $a_1=-\frac{1}{c}$.

(2) $S_7=-\frac{1}{c}$. (3) הוכחה.

ג. (1) הוכחה. (2) $c>1$. (3) $S=\frac{2c^2}{c-1}$.

3. א. (1) $\frac{27}{64}$. (2) $\frac{37}{64}$. ב. $\frac{4}{9}$. ג. $k=2$.

4. א. הוכחה. ב. $\frac{S_{BLDK}}{S_{ABC}}=\frac{1}{3}$. ג. (1) הוכחה. (2) $\frac{AM}{AD}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=0.79$.

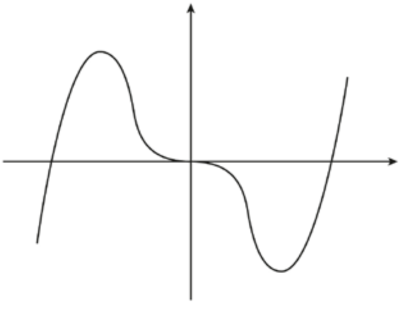
5. א. $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}=\frac{\sin 2\beta \sin 4\beta \sin 3\beta}{\sin^3\beta}$. **ב.** 20.99 . ג. $r=0.165a$.

6. א. I : $f''(x)$, II : $f'(x)$.

ב. (1) 2 (כמספר נקודות החיתוך של $f'(x)$ עם ציר x).

(2) 3 (כמספר נקודות החיתוך של $f''(x)$ עם ציר x).

ג. $x=1$. ד.



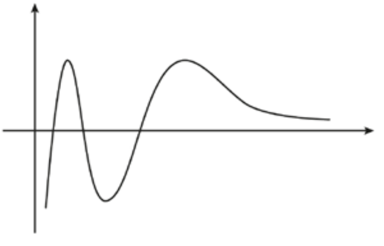
ה. $S=t$.

ו. $c=0$, $\frac{a}{b}=-\frac{1}{10}$.

7. א. $x\neq 0$. **ב.** $(1,0)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{3},0)$.

ג. $(2,1)$ מקסימום, $(\frac{2}{3},-1)$ מינימום, $(\frac{2}{5},1)$ מקסימום, $(\frac{2}{7},-1)$ מינימום.

ד. $y=0$. ה.



ו. אפשרות i .

נימוק בפתרון המלא.

8. א. $S=\frac{4\sqrt{a}-1}{a}$. **ב.** $a=\frac{1}{4}$.

מבחן בגרות מספר 31

חורף תשע״ט, 2019

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 קבוצת פועלים, חוטבי עצים מנוסים, תכננה לכרות 216 מ״ק עץ במספר ימים מסוים (ההספק של הפועלים הוא קבוע).

סרקו אותי לצפייה בפתרון

בשלושת הימים הראשונים עבדו הפועלים על פי ההספק המתוכנן. החל מן היום הרביעי הם הגבירו את קצב עבודתם ומדי יום כרתו 8 מ״ק עץ יותר מן המתוכנן. הם עבדו בפועל יום אחד פחות ממספר הימים המתוכנן, וכרתו 232 מ״ק עץ סך הכול.

א. (1) על פי התכנון, כמה מ״ק עץ היו אמורים הפועלים לכרות ביום?

(2) כמה ימים עבדו הפועלים בפועל?

ב. במהלך איזה יום מתחילת העבודה סיימו הפועלים לכרות $\frac{2}{3}$ מן הכמות המתוכננת?

לאחר מכן הוצמד פועל מתלמד לכל פועל מנוסה בקבוצה, וכך נוצרה קבוצה חדשה ובה $2m$ פועלים סך הכול (m מנוסים ו - m מתלמדים).

ההספק היומי של הפועלים המנוסים הוא ההספק היומי המתוכנן. כל הפועלים המנוסים עובדים באותו הספק יומי. ההספק היומי של פועל מתלמד קטן ב - 1 מ״ק מן ההספק היומי של פועל מנוסה. הקבוצה החדשה עבדה 8 ימים.

ג. (1) בטא את ההספק היומי של פועל מנוסה יחיד ושל פועל מתלמד יחיד באמצעות m .

(2) כמה פועלים יש בקבוצה החדשה אם ידוע שהם כרתו 336 מ״ק עץ סך הכול?

.2 נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, ..., a_{2n+3}$ ובה $2n+3$ איברים (n הוא מספר טבעי).

סרקו אותי לצפייה בפתרון

סכום הסדרה גדול פי 43 מן האיבר האמצעי. האיבר האמצעי שונה מ - 0 .

א. (1) הראה כי סכום הסדרה שווה ל- $(2n+3) \cdot a_{n+2}$.

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים הנמצאים במקומות האי - זוגיים גדול ב - 40 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים .

(1) מצא את האיבר האמצעי.

(2) מצא את סכום הסדרה.

נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא $-a_1$.

ג. קבע אם הסדרה עולה או יורדת.

מכל איברי הסדרה הנתונה בונים סדרה חדשה על ידי חיבור של כל k איברים סמוכים (k הוא מספר טבעי) באופן הזה :

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k), (a_2 + a_3 + ... + a_{k+1}), (a_3 + a_4 + ... a_{k+2}), ...$$

ד. הבע באמצעות k את מספר האיברים בסדרה החדשה.

.3 בבית ספר תיכון ניגשים תלמידי שכבת י״ב לבחינת המתכונת באזרחות ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות. נתון : גם בשנת 2017 וגם בשנת 2018 מספר התלמידים שעברו את בחינת המתכונת ונכשלו בבחינת הבגרות היה שווה למספר התלמידים שנכשלו בבחינת המתכונת ועברו את בחינת הבגרות.

א. בשנת 2017 ניגשו 250 תלמידים לבחינת המתכונת ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות. ידוע שאם תלמיד עבר את בחינת המתכונת, ההסתברות שהוא עבר את בחינת הבגרות היא 0.9 . שיעורם של הנכשלים בבחינת הבגרות מכלל התלמידים שניגשו לבחינות בשנה זו היה 20% .

(1) מהו מספר התלמידים שעברו גם את בחינת המתכונת וגם את בחינת הבגרות?

(2) ידוע שתלמיד מסוים נכשל בבחינת המתכונת. מהי ההסתברות שאותו תלמיד עבר את בחינת הבגרות?

(3) בוחרים באקראי (עם החזרה) שני תלמידים שנכשלו בבחינת הבגרות. מהי ההסתברות ששניהם נכשלו גם בבחינת המתכונת?

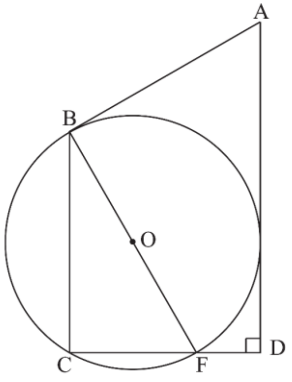
ב. נתון כי בשנת 2018 לא הייתה תלות בין המאורע "עובר את בחינת המתכונת" לבין המאורע "עובר את בחינת הבגרות", וכי ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת הבגרות בשנה זו היא a

(1) $(0 < a < 1)$. הבע באמצעות a את ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת המתכונת ונכשל בבחינת הבגרות בשנה זו.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 5-4.

.4 המשולש BCF חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R . BF הוא קוטר המעגל.
מן הנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל - האחד משיק למעגל בנקודה B והאחר חותך את המשך הצלע CF בנקודה D , כמתואר בציור שלפניך.



נתון: $AD \perp CD$.

א. הוכח: $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BAD$

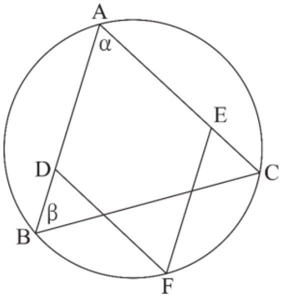
נתון: K היא נקודה על הצלע BC , כך ש - FK חוצה את $\sphericalangle BFC$.

ב. הוכח: $KC = \dfrac{CF \cdot BO}{AB}$.

ג. הוכח: $KB \cdot AB = 2R^2$.

ד. הסבר מדוע שטח $\triangle BFK$ גדול משטח $\triangle KFC$.

.5 ABC הוא משולש החסום במעגל שרדיוסו R .
הנקודות D ו - E נמצאות על הצלעות AB ו - AC בהתאמה, והנקודה F נמצאת על הקשת BC כך שהמרובע ADFE הוא מעוין (ראה ציור).



נתון: $\sphericalangle ABC = \beta, \sphericalangle BAC = \alpha$.

א. (1) הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle ABF$.

(2) הבע באמצעות R , α ו- β את אורך האלכסון AF .

ב. הבע באמצעות R , α ו- β את אורך צלע המעוין .

נתון כי AF הוא קוטר במעגל.

ג. הראה כי שטח המעוין הוא $2R^2 \tan\dfrac{\alpha}{2}$

נתון כי רדיוס המעגל החסום במעוין ADFE הוא $\dfrac{3}{5}R$.

ד. חשב את β .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

6. נתון: הפונקציה $g''(x)=-\frac{18}{x^4}+\frac{18}{(x-4)^4}$ היא פונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $g(x)$.

הפונקציות $g''(x), g'(x), g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

נתון כי משוואת המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודת הפיתול שלה היא $y=\frac{3}{2}x-3$.

א. (1) מצא את הפונקציה $g(x)$.

(2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(3) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נגדיר: $h(x)=|g(x)|$

ב. באותה מערכת צירים שבה סרטטת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, הוסף בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

ג. נתון כי $\int_a^2 g(x)dx=t$, $0<a<2$, t הוא פרמטר.

הבע באמצעות t את $\int_a^2 (h(x)-g(x))dx$.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=2\sin x+\cos 2x-1$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi$.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ הוזז שמאלה ב $\frac{\pi}{2}$ כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

ב. (1) בטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) הוכח כי $g(x)$ היא פונקציה זוגית.

לפניך שלושה ביטויים, I - III :

I : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x+\pi)dx$ II : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x+\frac{\pi}{2})dx$ III : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x-\frac{\pi}{2})dx$

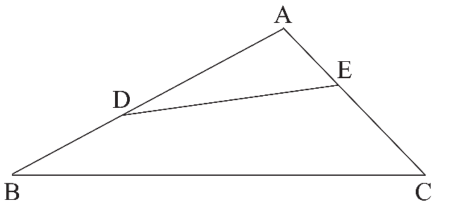
ג. ציין איזה מן הביטויים I - III שווה ל - $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

נמק את תשובתך. אין צורך בחישוב.

8. במשולש ABC נתון: $AB = 30$, $AC = 20$.

$\sphericalangle CAB=\alpha$. α הוא קבוע.

הנקודה D נמצאת על הצלע AB והנקודה E נמצאת על הצלע AC (ראי ציור)



נתון: שטח המשולש ADE שנוצר באופן הזה הוא רבע משטח המשולש ABC

סמן את אורך הקטע AD ב - x .

א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AE .

ב. (1) הבע באמצעות α את האורך המינימלי של הקטע DE.

(2) הסק מתת - סעיף ב(1) את הערך של x שבעבורו היחס $\frac{DE}{BC}$ הוא מינימלי. הסבר.

תשובות למבחן בגרות מספר 31 – חורף תשע"ט, 2019:

1. א. (1) 24 , (2) 8 ימים. ב. במהלך היום השישי.

ג. (1) $\frac{24}{m}$ הספק יומי של פועל מנוסה, $\frac{24}{m}-1$ הספק יומי של פועל מתלמד

(2) 12 פועלים.

2. א. (1) הוכחה. (2) 43 . ב. (1) 40 . (2) 1720. ג. עולה. ד. $44-k$

3. א. (1) 180 תלמידים. (2) 0.4 . (3) 0.36 ב. $a-a^2$.

4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה.

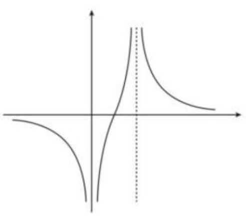
ד. $S_{\Delta BFK} > S_{\Delta KFC}$ כיוון שלשני המשולשים יש גובה משותף לצלעות KB ו KC

בנוסף לפי משפט חוצה זווית $KC < KB$.

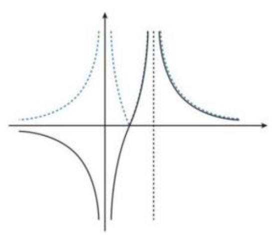
5. א. (1) $\beta+\frac{\alpha}{2}$. (2) $2R\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})$ ב. $\frac{R\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ ג. הוכחה. ד. $53.13°$

6. א. (1) $g(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{(x-4)^2}$. (2) $x\neq 4$, $x\neq 0$.

(3) ירידה: $x<0, 4<x$. עליה: $0<x<4$. (4)



ב.

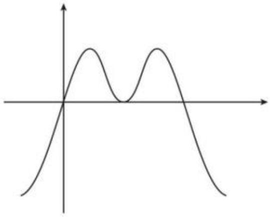


ג. $-2t$.

7. א. (1) $(\pi,0)$ $(\frac{\pi}{2},0)$ $(0,0)$:

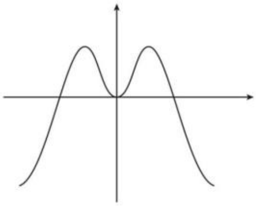
(2) $\min(\frac{3\pi}{2},-4)$ $\max(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2})$ $\min(\frac{\pi}{2},0)$ $\max(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2})$ $\min(-\frac{\pi}{2},-4)$.

(3)



ב. **(1)** $g(x)=f(x+\frac{\pi}{2})$.

(2)



(3) הוכחה.

ג. גרף II.

8. א. $\frac{150}{x}$.

ב. **(1)** $\sqrt{300-300\cos\alpha}$.

(2) $\sqrt{150}$

מבחן בגרות מספר 32

קיץ תשע"ט, 2019, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 3-1.

1. סרקו אותי לצפייה בפתרון

במאפייה יש שתי מכונות לייצור עוגות: מכונה I ומכונה II.
כל אחת מן המכונות מייצרת עוגות בקצב קבוע משלה.
ביום ראשון זמן העבודה של שתי המכונות היה שווה.
ביום ראשון מכונה I ייצרה 80 עוגות יותר ממספר העוגות שייצרה מכונה II.
ביום שני ייצרה מכונה II את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה I ביום ראשון, ומכונה I ייצרה את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה II ביום ראשון.

ביום שני היה זמן העבודה של מכונה II ארוך פי $\frac{25}{9}$ מזמן העבודה של מכונה I באותו יום.

א. חשב כמה עוגות סך הכל ייצרו שתי המכונות ביום ראשון.

נסמן: T_1 - הזמן הדרוש למכונה I לייצר עוגה אחת,
T_2 - הזמן הדרוש למכונה II לייצר עוגה אחת.

ב. חשב את היחס $\frac{T_1}{T_2}$. נמק.

ג. (1) בפרק זמן מסוים מכונה I ייצרה בדיוק 47 עוגות.
כמה עוגות שלמות ייצרה מכונה II בפרק הזמן הזה? הסבר.
(2) ידוע ששתי המכונות עבדו אותו פרק זמן, וכל אחת מהן ייצרה מספר שלם של עוגות. האם ייתכן שבפרק הזמן הזה שתי המכונות יחד ייצרו 26 עוגות? נמק.

.2 a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא q . $|q| \neq 1$.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

נתון: $a_3 \cdot a_7 = 1$.

א. חשב את a_5 (מצא את שתי האפשרויות).

נתון: $a_5 > 0$.

ב. (1) הבא את a_1 באמצעות q .

(2) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_1}$? אם כן- מצא אותו.

אם לא- נמק.

(3) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_{13}}$? אם כן- מצא אותו.

אם לא- נמק.

ג. (1) הבע באמצעות q את 7 האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

(2) נתון: $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k = 1$ (k הוא מספר טבעי).

מצא את הערך של k , והסבר מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של k .

.3 גלי ונטע משחקות משחק ובו אפשר לקבוע את מספר הסיבובים. בכל סיבוב אחת מהן זוכה והאחרת מפסידה. המנצחת במשחק כולו תהיה זו שתזכה ביותר סיבובים מחברתה.
אם לשתיהן מספר שווה של זכיות בסיבובים, התוצאה במשחק כולו תהיה תיקו.

נתון: בכל סיבוב הסיכוי של נטע לזכות הוא $\frac{1}{3}$.

א. ביום ראשון שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק.
(1) מהי ההסתברות שנטע נצחה במשחק כולו?
(2) מהי ההסתברות לתוצאת תיקו במשחק כולו?

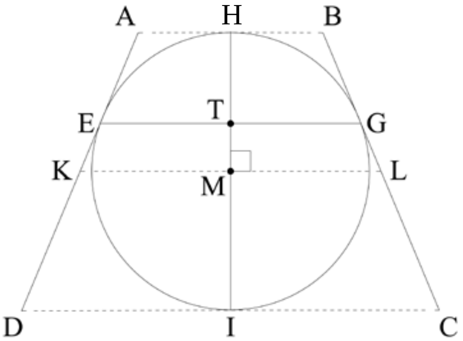
ב. גם ביום שני שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק. הפעם הן החליטו מראש שאם התוצאה במשחק של 4 הסיבובים תהיה תיקו- הן ישחקו עוד 3 סיבובים כדי להכריע את תוצאת המשחק, ומי שתזכה ביותר סיבובים, תנצח במשחק כולו.
מהי ההסתברות שנטע תנצח במשחק כולו?

ג. ידוע שנטע ניצחה במשחק כולו בדיוק באחד משני הימים: ראשון או שני. מהו הסיכוי שהיא ניצחה במשחק כולו ביום שני?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

.4 EG הוא מיתר במעגל שמרכזו M ורדיוסו r.
דרך נקודות E ו-G העבירו משיקים למעגל.
דרך מרכז המעגל, M, העבירו ישר המקביל למיתר EG
וחותך את המשיקים בנקודות K ו- L,



כמתואר בציור.
דרך מרכז המעגל, M, העבירו אנך
ל- KL אשר חותך את המיתר
EG בנקודה T ואת המעגל בנקודות
H ו-I, כמתואר בציור.
נסמן: $TG = a$.

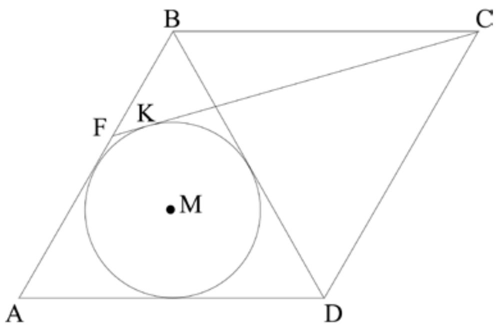
א. (1) הוכח: $TG \cdot ML = MG^2$.
(2) הבע את אורך הקטע KL
באמצעות a ו- r.

דרך הנקודות H ו- I העבירו משיקים למעגל כך שנוצר טרפז שווה שוקיים $ABCD$ שחוסם את המעגל, כמתואר בציור.

ב. (1) הוכח $BC = KL$.
(2) הבע את היקף הטרפז $ABCD$ באמצעות a ו- r.

ג. האם היחס בין היקף הטרפז $ABCD$ והיקף המעגל יכול להיות קטן מ- $\frac{4}{\pi}$? נמק.

.5 $ABCD$ הוא מעוין שאורך צלעו הוא a.
נתון: $\sphericalangle BAD = 60°$.
במשולש ABD חסום מעגל
שמרכזו M.
מן הקודקוד C העבירו משיק
למעגל שהמשכו חותך את הצלע
AB בנקודה F והוא משיק למעגל
בנקודה K (ראה ציור).



א. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.

ב. (1) הסבר מדוע הנקודה M נמצאת על אלכסון המעוין AC.
(2) חשב את גודל הזווית ACF.

ג. הבע באמצעות a את שטח המשולש ACF.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 8-6.

6. נתונה משפחת הפונקציות $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}$. a הוא פרמטר המקיים $-4<a<2$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הסבר מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה מקבילה לציר ה- y .

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה- x .

(4) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(5) מצא את תחומי החיובית והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) הבע באמצעות a את שיעורי ה- x שבעבורם $f'(x)=0$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את הערך של a שבעבורו $f'(x)\neq 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

הצב $a=-1$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את $\int_3^4 \frac{1}{f(x)}dx$. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3\sin x$ המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$

א. (1) קבע אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

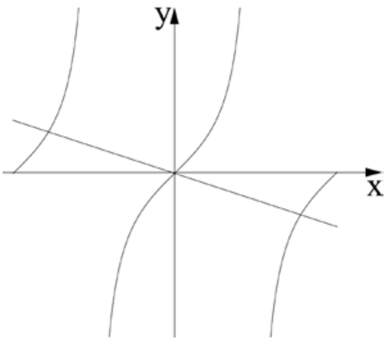
(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x בתחום הנתון.

(3) הסבר מדוע הפונקציה $f(x)$ היא אי-שלילית בתחום הנתון.

(4) קבע אם פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

ב. (1) הראה ששיעורי ה- x שבעבורם $f'(x)=0$ מקיימים $\tan x=-\frac{1}{3}x$

(2) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $h(x)=-\frac{1}{3}x$ ו- $g(x)=\tan x$ בתחום $-\pi\le x\le\pi$.
היעזר בציור,
וקבע כמה נקודות בתחום $-\pi\le x\le\pi$ מקיימות $f'(x)=0$.



נתון שיעור ה- x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא 2.46 בקירוב.
ענה על הסעיפים ג-ד בעבור התחום $-\pi\le x\le\pi$.

ג. (1) מהם שיעורי ה- x של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $f'(x)$, בתחום.

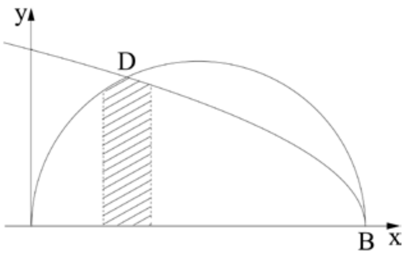
(2) כמה נקודות פיתול לכל הפחות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק.

8. בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\sqrt{-x^2+7x}$ ו- $g(x)=\sqrt{14-2x}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בראשית הצירים ובנקודה B, ואת גרף הפונקציה $g(x)$ הוא חותך בנקודות B ו- D, כמתואר בציור.

א. (1) מצא את תחומי ההגדרה של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי ה- x של הנקודות B ו- D.



a הוא פרמטר המקיים $1\le a\le 2$.
השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$,
על ידי האנכים $x=a$ ו- $x=a+1$
ועל ידי ציר ה- x, מסתובב סביב ציר ה- x.

ב. (1) חשב את a שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המקסימלי.

(2) מצא את a שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המינימלי.

אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

תשובות למבחן בגרות מספר 32 – קיץ תשע"ט, 2019, מועד א:

1. א. 320 עוגות. ב. $\frac{T_1}{T_2}=\frac{3}{5}$ ג. (1) 28 עוגות שלמות: (2) לא ייתכן.

2. א. $a_5=1$ או $a_5=-1$ ב. (1) $a_1=\frac{1}{q^4}$. (2) $n=9$. (3) אין כזה.

ג. (1) $q^2, q, 1, \frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^4}$. (2) $k=9$.

3. א. (1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{8}{27}$ ב. $\frac{137}{729}$. ג. $\frac{137}{211}$.

4. א. (1) הוכחה. (2) $KL=\frac{2r^2}{a}$. ב. (1) הוכחה. (2) $P_{ABCD}=\frac{8r^2}{a}$. ג. לא.

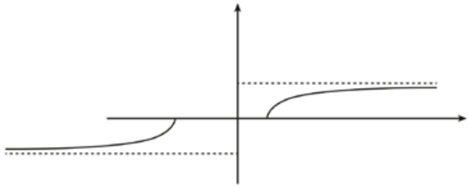
5. א. $R=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ ב (1) הוכחה. (2) $\sphericalangle ACF=14.478^\circ$. ג. $S_{ACF}=0.267a^2$

6. א. **(1)** $x \ge 1$, $x \le -2$. **(2)** הוכחה. **(3)** $y = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.

(4) $(1,0)$, $(-2,0)$. **(5)** $f(x) < 0$ עבור $x < -2$. $f(x) > 0$ עבור $x > 1$.

ב. **(1)** $x = \frac{8-a}{2a+2}$. **(2)** $a = -1$. ג. **(1)** $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.

(2)



ד. 2.16 יח"ר $= 6\sqrt{2} - 2\sqrt{10}$.

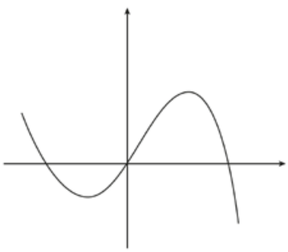
7. א. **(1)** $f(x)$ זוגית. **(2)** $(\pi,0)$, $(0,0)$, $(-\pi,0)$. **(3)** הוכחה. **(4)** $f'(x)$ אי זוגית.

ב. **(1)** הוכחה. **(2)** שלוש נקודות.

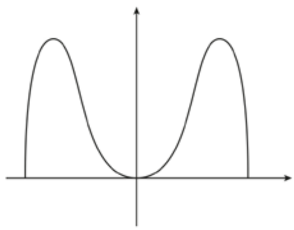
ג. **(1)** $x = \pi$ מינימום קצה, $x = 2.46$ מקסימום, $x = 0$ מינימום,

$x = -2.46$ מקסימום, $x = -\pi$ מינימום קצה.

ד. **(1)**



(2)



ד.(2) 2 נקודות פיתול לפחות.

8. א. **(1)** $f(x): 0 \le x \le 7$, $g(x): x \le 7$. **(2)** $x_D = 2$, $x_B = 7$.

ב. **(1)** $a = 1.63$. **(2)** $a = 1$.

מבחן בגרות מספר 33

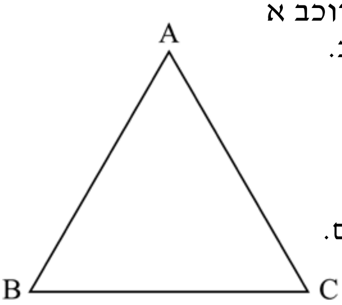
קיץ תשע״ט, 2019, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון

בציור שלפניך מתואר מסלול לרכיבה באופניים בצורת משולש שווה צלעות ABC, שאורך צלעו a מטר.
ביום מסוים יצאו שני רוכבי אופניים באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B.
הם רכבו לאותו הכיוון לאורך המסלול המשולש.
כל אחד מהם רכב במהירות קבועה. המהירות של רוכב א גדולה ב- 2 מטרים לשנייה מן המהירות של רוכב ב.
כאשר הגיע רוכב א אל הנקודה A לאחר שהשלים פעמיים את המסלול המשולש, הגיע רוכב ב אל הנקודה B בפעם השנייה.



א. מצא את המהירות של כל אחד מרוכבי האופניים.

ב. באיזו נקודה על המשולש יהיה רוכב ב, כאשר יגיע רוכב א אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול המשולש?

כאשר הגיע רוכב א אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול, הוא הסתובב והחל לרכוב לכיוון הנגדי- מן הנקודה A לכיוון הנקודה C - בלי לשנות את מהירותו.
רוכב ב המשיך לרכוב בכיוון הנסיעה המקורי, בלי לשנות את מהירותו.
הרוכבים נפגשו בנקודה M.

ג. מצא על איזו צלע של המשולש נמצאת הנקודה M, ומצא באיזה יחס הנקודה M מחלקת את הצלע שמצאת.

למחרת שוב יצאו הרוכבים מן הנקודה A , רכבו לכיוון הנקודה B והמשיכו לרכוב במסלול המשולש, כל אחד מהם רכב באותה המהירות שרכב ביום שלפני כן. רוכב א חלף על פני רוכב ב בפעם הראשונה 6 דקות אחרי שיצאו לדרך .

ד. מצא את היקף המשולש. נמק את תשובתך.

.2 נתונה סדרה a_n המקיימת לכל n את הכלל: $a_{n+1}+a_n=6n+5$

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. הוכח כי מתקיים $a_{n+2}=a_n+c$ (c הוא מספר קבוע), ומצא את c .

ב. כתוב דוגמה לסדרה a_n המקיימת את הכלל, והיא אינה סדרה חשבונית (כתוב לפחות 4 איברים ראשונים בסדרה).

נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית.

ג. חשב את a_1 .

בנו סדרה חדשה בת $2n+1$ איברים:

$a_1-1\,,\,a_2-2\,,\,a_3-3\,,\,\dots\,,\,a_{2n+1}-(2n+1)$

האיבר האמצעי בסדרה החדשה הוא 43 .

ד. חשב את סכום הסדרה החדשה.

3. בקופסה יש 12 כדורים כחולים, 20 כדורים אדומים ו- 8 כדורים צהובים. על 28 מן הכדורים רשומה הספרה 1, ועל השאר רשומה הספרה 0.

$\frac{1}{4}$ מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה 1 הם צהובים.

מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה 1 גדול פי 4 ממספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה 0.

דני מוציא באקראי כדור מן הקופסה.

א. מה ההסתברות שהכדור שהוציא דני הוא כדור כחול ושרשומה עליו הספרה 1?

ב. אם ידוע שדני הוציא באקראי כדור כחול או כדור שרשומה עליו הספרה 1, מהי ההסתברות שהוא הוציא כדור שרשומה עליו הספרה 0?

דני החזיר את הכדור לקופסה, וכעת הוא משחק במשחק: הוא מוציא באקראי כדור מן הקופסה, רושם לעצמו את הספרה שעליו ומחזיר את הכדור לקופסה.
בכל פעם שהוא מוציא כדור שרשומה עליו הספרה 1 הוא צובר נקודה.
הוא יפסיק לשחק כאשר יצבור 5 נקודות.

ג. מהי ההסתברות שדני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים בדיוק.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

.4 AB הוא קוטר במעגל. CD ו- AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים זה לזה. AB ו- CD נחתכים בנקודה K (ראה ציור).

נתון כי $\overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{AF}$

(הקשתות המסומנות בציור).

א. (1) הוכח כי $\sphericalangle FAB = \sphericalangle CAB$.

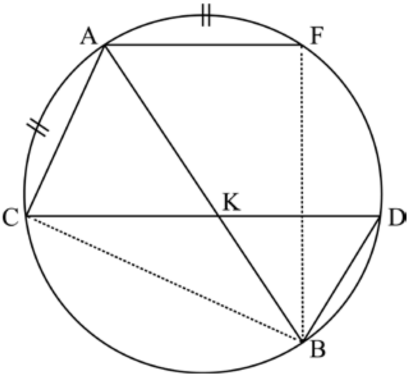
(2) הוכח כי $BK = BD$.

ב. הוכח כי המרובע $AFKC$ הוא מעוין.

ג. נתון גם כי $BD \cdot AB = CD \cdot AC$.

(1) הוכח כי $\Delta BDC \sim \Delta CAB$

(2) הוכח כי CD הוא קוטר במעגל.



.5 נתון מלבן $ABCD$. הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראה ציור).

נתון כי $\sphericalangle DAC = \alpha$,

$\sphericalangle ADE = \beta$.

R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן $ABCD$.

R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE .

א. הבע את היחס $\frac{R_1}{R_2}$

באמצעות α ו- β .

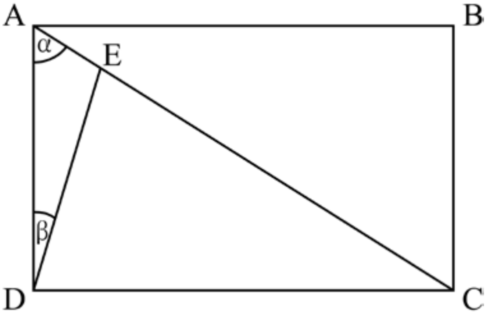
ב. הראה כי כאשר $\alpha = \beta$

מתקיים $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. נתון כי $\alpha = 60°$, $\beta = 15°$.

(1) הראה כי ΔDEC הוא משולש שווה שוקיים.

(2) הבע את BE^2 באמצעות R_1 .



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 6-8.

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=a\cdot\cos 2x+\sin^2 x$ המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.
a הוא פרמטר.

א. האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית או אף לא אחת מהן? נמק.

ב. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$
(הבע באמצעות a אם צריך), אם נתון כי הפונקציה אינה קבועה?
קבע את סוגן בהתאם לערך של a (התייחס לשתי האפשרויות עבור a).

ג. מצא את הערך של a שעבורו הפונקציה $f(x)$ היא קבועה. נמק.

נתון $a>1$.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ה. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x שווה ל- 12 . מצא את a .

.7 נתון מעגל ובו קוטר AB . רדיוס המעגל הוא 10 . הנקודה P נמצאת על הקוטר AB בין מרכז המעגל ובין הנקודה B .
דרך הנקודה P מעבירים אנך ל- AB החותך את המעגל בנקודות C ו- D .
מצא את השטח המקסימלי של המשולש ACD .

.8 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}$. c ו- b הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ב. מצא את b .

נתון: לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצא את תחום הערכים של c .

ד. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה (הבע באמצעות c אם צריך).

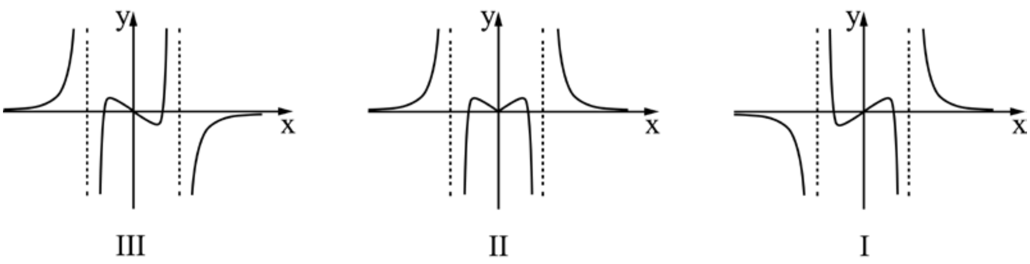
(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$.

לפניך גרפים $\text{I}-\text{III}$.

(1) איזה מן הגרפים, $\text{I}-\text{III}$, הוא גרף הפונקציה $g(x)$? נמק

(2) הבע באמצעות c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x .



תשובות למבחן בגרות מספר 33 – קיץ תשע״ט, 2019, מועד ב:

1. א. מהירות רוכב א׳: 6 מ׳/שנייה. מהירות רוכב ב׳: 4 מ׳/שנייה

ב. רוכב ב׳ יהיה על נקודה B .   ג. $\frac{BM}{MC}=\frac{4}{1}$, M נמצאת בין B ל- C .

ד. 720 מ׳ = $P_{\triangle ABC}$.

2. א. $c=6$. ב. $0,11,6,17,....$. ג. $a_1=4$. ד. סכום הסדרה החדשה הוא : $1,763$.

3. א. $\frac{9}{40}$. ב. $\frac{3}{31}$. ג. 0.252105 .

4. א. (1) הוכחה. (2) הוכחה. ב. הוכחה. ג. (1) הוכחה. (2) הוכחה

5. א. $\frac{R_1}{R_2}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$ ב. הוכחה. ג.(1) הוכחה. (2) $BE^2=R_1{}^2(4-\sqrt{3})$.

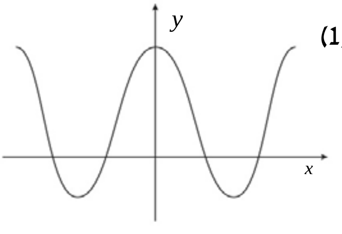
6. א. $f(x)$ זוגית. ב. עבור $a<\frac{1}{2}$:

$$\min(-\pi,a)\ ,\ \max(-\frac{\pi}{2},1-a)\ ,\ \min(0,a)\ ,\ \max(\frac{\pi}{2},1-a)\ ,\ \min(\pi,a)$$

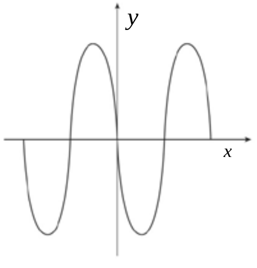
עבור $a>\frac{1}{2}$:

$$\max(-\pi,a)\ ,\ \min(-\frac{\pi}{2},1-a)\ ,\ \max(0,a)\ ,\ \min(\frac{\pi}{2},1-a)\ ,\ \max(\pi,a)$$

ג. $a=\frac{1}{2}$. ד. (1)



(2)

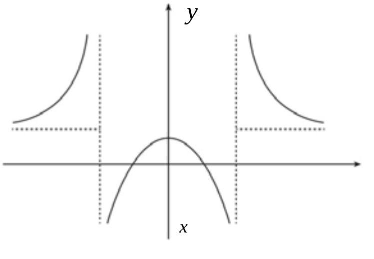


ה. $a=2$.

7. $S_{\triangle ACD}=75\sqrt{3}$

8. א. $x\neq -2\ ,\ x\neq 2$. ב. $b=0$. ג. $0<c<4$ ד. (1) $\max(0,\frac{c}{4})$.

(2) $y=1$.



ה.(1) III . (2) $S=\frac{C^2}{16}$.

מבחן בגרות מספר 34

חורף תש״ף, 2020

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. המרחק בין עיר א׳ ובין עיר ב׳ הוא 96 ק״מ.
מכונית ומשאית יצאו באותו הזמן מעיר א׳ ונסעו לכיוון עיר ב׳.
בתחילה נסעה המכונית במהירות קבועה של V_1 קמ״ש.
לאחר שעברה 15 ק״מ מן הדרך, היא עצרה בצד הדרך למשך חצי שעה, לצורך תיקון תקלה.
לאחר שתוקנה התקלה, המשיכה המכונית בדרכה במהירות קבועה של 90 קמ״ש.
המשאית נסעה כל הדרך במהירות קבועה של V_2 קמ״ש.
היא חלפה על פני המכונית 3 דקות לאחר שהמכונית עצרה בצד הדרך.
המכונית והמשאית הגיעו לעיר ב׳ באותו הזמן.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. מצא את V_1 ואת V_2.

ב. כמה זמן אחרי שהמכונית והמשאית יצאו לדרך היה המרחק ביניהן 3 ק״מ? (מצא שניים משלושת המקרים).

.2 סרקו אותי לצפייה בפתרון

a_n היא סדרה חשבונית.

k ו- p הם מספרים טבעיים $k < p$.

נתון: $a_k = p$, $a_p = k$.

א. (1) הוכח שהפרש הסדרה a_n הוא -1.

(2) הבע את a_1 באמצעות k ו- p.

הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n = a_n - n$.

נתון כי סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה c_n הוא 0.

ב. (1) מצא את a_1.

(2) מה הם ערכי k ו- p? מצא את כל האפשרויות.

ג. חשב את הסכום $(c_1 - c_2)^2 + (c_3 - c_4)^2 + ...(c_{99} - c_{100})^2$. נמק.

.3

בקופסה יש 12 כדורים. רובם כחולים והשאר אדומים.
הוציאו באקראי כדור מן הקופסה, החזירו אותו לקופסה, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו.

ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים היא $\frac{4}{9}$.

א. מצא כמה כדורים כחולים יש בקופסה.

ב. הוסיפו לקופסה כדורים צהובים.
לאחר ההוספה הוציאו באקראי כדור, החזירו אותו,
ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו.

ההסתברות שהוציאו שני כדורים בצבעים שונים נשארה $\frac{4}{9}$.

כמה כדורים צהובים הוסיפו לקופסה?

העבירו את כל הכדורים הצהובים לכלי אחר והשאירו בקופסה רק את הכדורים הכחולים והאדומים.

ג. הוציאו באקראי מן הקופסה כדור אחרי כדור שוב ושוב (ללא החזרה), עד שהוציאו כדור אדום.

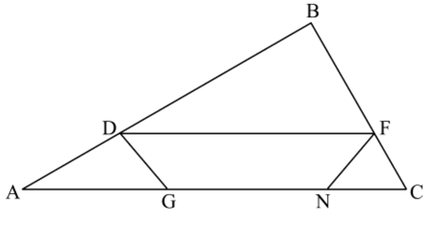
מהי ההסתברות שמספר ההוצאות היה גדול מ- 3?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על <u>אחת</u> מבין השאלות 4-5.

.4 AD ו- CE הם חוצי זווית במשולש ABC ,
ונקודת החיתוך שלהם היא F .
נתון: $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.
א. הוכח כי אפשר לחסום את המרובע $BDFE$ במעגל.
נתון: FB הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע $BDFE$.
ב. הוכח שהמשולש ABC הוא משולש שווה צלעות.
המשך הקטע BF חותך את הצלע AC בנקודה G .
ג. הוכח כי הקטע FG שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המרובע $BDFE$.
בנקודה F מעבירים משיק למעגל החוסם את המרובע $BDFE$.
המשיק חותך את הצלעות BA ו- BC בנקודות K ו- L בהתאמה.
ד. מצא את היחס $\frac{KL}{AC}$. נמק את תשובתך.

.5 במשולש ABC הנקודות D ו- F נמצאות על הצלעות BA ו- BC בהתאמה כך ש- $DF \parallel AC$.
הנקודות G ו- N נמצאות על הצלע AC כך שהמרובע $DFNG$ הוא טרפז שווה שוקיים, כמתואר בציור.
נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle FNC = \beta$.
נתון: $AD = 7$, $FC = 4$, $\sphericalangle FCN = 2\alpha$.



א. (1) הראה כי: $\frac{FN}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin\beta}$.
(2) חשב את α .
נתון: שטח המשולש BDF הוא 56 .
ב. מצא את אורך הקטע DF .
ג. מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש FCN ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש DAG ? נמק.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{6}{2\cos^2 x-5\cos x-3}$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $h(x)=|f(x)+2|$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

(2) k הוא פרמטר. מצא את כל הערכים של k שבעבורם הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ בארבע נקודות שונות.

נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)|+2$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. האם לכל x בתחום ההגדרה $h(x)<g(x)$? נמק.

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3x}{4x^2-1}$ שתחום הגדרתה הוא $x\neq\pm\frac{1}{2}$.

א. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{\frac{3x}{4x^2-1}}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת. שיעור ה- x של נקודה זו קטן מאפס.

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הנגזרת, $g'(x)$.

ד. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)=\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2-1}}$?

.8 נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+1$.

t הוא פרמטר. נתון: $0<t<1$.

בנקודה שבה $x=t$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ (ראה ציור).

א. הראה כי משוואת המשיק היא $y=-2tx+t^2+1$.

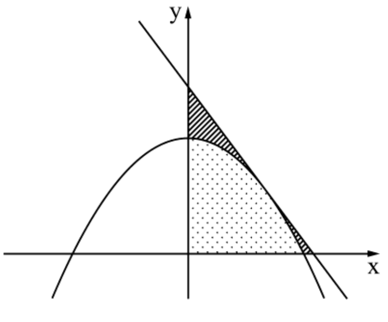
נסמן ב- S את השטח המקווקו בציור (השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי הצירים)

ב. מצא בעבור איזה ערך של t השטח S הוא מינימלי.
תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

נסמן ב- A את השטח המנוקד (השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים).

ג. קבע בעבור כל אחת משתי הטענות שלפניך (ii-i) אם היא נכונה או לא נכונה. נמק את תשובתך.

i) קיים ערך של t שבעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מקסימלי.



ii) קיים ערך של t שבעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מינימלי.

תשובות למבחן בגרות מספר 34 – חורף תש"ף, 2020:

1. א. $V_1 = 75$ קמ"ש, $V_2 = 60$ קמ"ש. ב. 12 דק' או 18 דק' או 90 דק'.

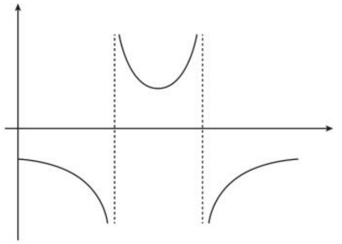
2. א. (1) הוכחה. (2) $a_1 = p + k - 1$. ב. (1) $a_1 = 6$. (2) $p = 6,\ k = 1$ או $p = 5,\ k = 2$ או $p = 4,\ k = 3$. ג. 200.

3. א. 8 ב. 30. ג. $\frac{14}{55}$.

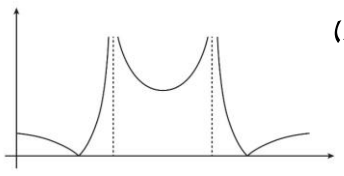
4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. $\frac{2}{3}$.

5. א. (1) הוכחה. (2) $\alpha = 28.995°$ ב. $DF = 16.51$. ג. $\frac{4}{7}$.

6. א. (1) $\frac{4\pi}{3} < x \le 2\pi$, $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$, $0 \le x < \frac{2\pi}{3}$. (2) $(0,-1)$ מקסימום, $(\pi, \frac{3}{2})$ מינימום, $(2\pi, -1)$ מקסימום. (3)



ב. (1)



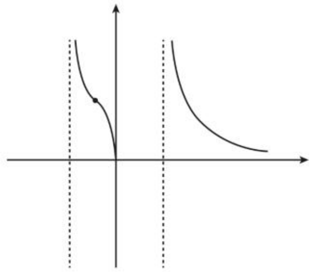
(2) $3.5 < k$ או $0 < k \le 1$. ג. לא.

7. א. (1) עלייה: אין, ירידה: $x > \frac{1}{2}$ או $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ או $x < -\frac{1}{2}$.

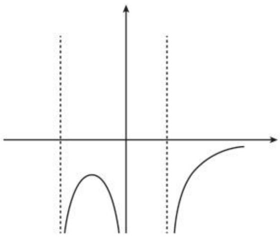
(2) חיוביות: $x > \frac{1}{2}$ או $-\frac{1}{2} < x < 0$, שליליות: $0 < x < \frac{1}{2}$ או $x < -\frac{1}{2}$.

ב. (1) $x > \frac{1}{2}$ או $-\frac{1}{2} < x \le 0$. (2) $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$.

ג. (1)



(2)



ד. $\frac{1}{2} < x$

8. א. הוכחה. ב. $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ג. (i) הטענה נכונה. (ii) הטענה לא נכונה.

מבחן בגרות מספר 35

קיץ תש״ף, 2020, מועד א

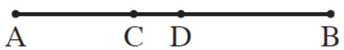
פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

.1

סרקו אותי לצפייה בפתרון

רויטל מתאמנת ברכיבה על אופניים, וזיוה מתאמנת בהליכה ובריצה. שתיהן יצאו באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B. רויטל רכבה במהירות קבועה, וזיוה הלכה במהירות קבועה. רויטל הגיעה לנקודה B כאשר זיוה הגיעה לנקודה C, הנמצאת בין הנקודה A לנקודה B כך ש- $\frac{3}{8}=\frac{AC}{AB}$.



א. מהו היחס בין מהירות ההליכה של זיוה למהירות הרכיבה של רויטל? נמק.

מייד לאחר מכן המשיכה זיוה ללכת מהנקודה C לכיוון הנקודה B במהירות ההתחלתית שלה, ואילו רויטל חזרה ברכיבה מהנקודה B לכיוון הנקודה A במהירות שגבוהה ב- 3 קמ״ש ממהירותה ההתחלתית. רויטל וזיוה נפגשו בנקודה D הנמצאת בין הנקודה C לנקודה B (ראה איור). נתון: $\frac{6}{19}=\frac{CD}{DB}$.

ב. חשב את המהירות ההתחלתית של רויטל, ואת המהירות ההתחלתית של זיוה.

מייד אחרי שרויטל וזיוה נפגשו בנקודה D, הן יצאו לכיוון הנקודה A: רויטל המשיכה לרכוב באותה המהירות שבה רכבה

לכיוון הנקודה A , ואילו זיוה הגבירה את מהירותה ב- k קמ״ש (k הוא מספר חיובי).

רויטל הגיעה אל הנקודה A לפני שזיוה הספיקה לעבור את מחצית הדרך מ- D ל- A .

ג. מהו תחום הערכים האפשריים בעבור k ? נמק.

.2

סרקו אותי לצפייה בפתרון

a_n היא סדרה הנדסית בעלת n איברים שהמנה שלה היא q .
כל האיברים בסדרה a_n הם מספרים טבעיים.

נתון : סכום $n-4$ האיברים הראשונים של הסדרה קטן פי 16 מסכום איברי הסדרה החֵל באיבר החמישי (כולל).

א. (1) הבע את סכום איברי הסדרה a_n החֵל באיבר החמישי (כולל) באמצעות a_5 ו- q .

(2) מצא את מנת הסדרה.

נגדיר סדרה חדשה, b_k , בת $n-2$ איברים, שבה מתקיים :
$b_k = a_k + a_{k+1} + a_{k+2}$ לכל $k \le n-2$.

ב. (1) הוכח שהסדרה b_k היא סדרה הנדסית.

(2) הוכח כי כל אחד מאיברי הסדרה b_k מתחלק ב-7 ללא שארית.

ג. c_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שבה $c_1 = \frac{1}{b_1}$ ו- $c_2 = \frac{1}{b_2}$.

סכום הסדרה c_n שווה ל- $\frac{1}{91}$.

חשב את a_1 .

3. בכד יש 11 כדורים הממוספרים בסדר עולה, מ- 1 עד 11.
מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור.
אם המספר שעל הכדור הוא אי-זוגי, מחזירים אותו לכד, ואם הוא זוגי, לא מחזירים אותו.
לאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.

א. מהי ההסתברות שנרשמו שני מספרים שמכפלתם זוגית?

ב. ידוע שהמכפלה של שני המספרים שנרשמו היא זוגית.
מצא את ההסתברות שהמספר שעל הכדור הראשון שהוציאו הוא אי-זוגי.

בכד אחר יש מספר זוגי של כדורים הממוספרים בסדר עולה (1, 2, 3..).

מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור, מחזירים אותו לכד, ולאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.

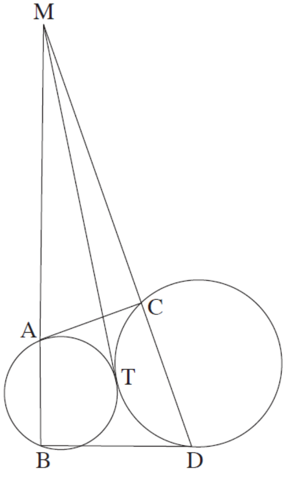
ג. (1) מצא את ההסתברות שמכפלת שני המספרים שנרשמו היא זוגית.

(2) מוציאים מן הכד k כדורים. בכל פעם שמוציאים כדור, רושמים את המספר שעליו ומחזירים אותו לכד. הבע באמצעות k את ההסתברות שמכפלת כל המספרים שנרשמו היא זוגית.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 5-4.

4.



נתונים שני מעגלים, המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה T.
דרך הנקודה T העבירו משיק המשותף לשני המעגלים.
מן הנקודה M שעל המשיק העבירו שני ישרים החותכים את המעגלים בנקודות A, B, C ו-D, כמתואר בציור.

א. (1) הוכח: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.

(2) הוכח כי המרובע $ABDC$ הוא בר חסימה בְּמעגל.

נתון: שטח המשולש MAC שווה לשטח המרובע $ABDC$.

ב. מצא את היחס $\frac{BD}{AC}$.

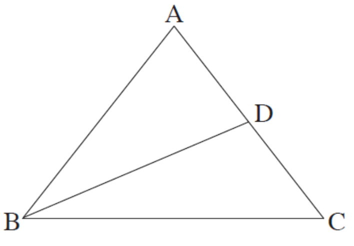
נתון: אלכסוני המרובע $ABDC$ מאונכים זה לזה, AD הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע $ABDC$.

ג. הוכח כי המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

.5 ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = AC = a$ (ראה ציור).

BD הוא תיכון במשולש ABC. נתון: $BD = a$.

הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.



א. הבע את BC באמצעות a.

ב. חשב את זוויות המשולש BMC.

ג. נתון: $AM = 6$.
חשב את שטח המשולש ABC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים,

של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 6-8.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{(x+1)(x-a)}}{x-2}$. $a>2$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a אם צריך.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

נתון: $f(a+2)=-f(2-a)$.

ב. מצא את a .

הצב $a=5$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x+2)$.

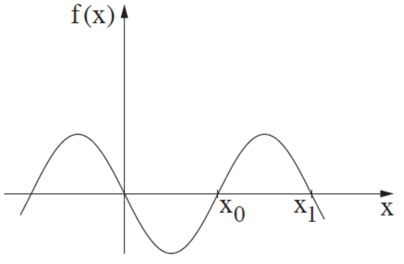
7. לפניך חלק מן הגרף של הפונקציה המחזורית $f(x)$.
גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בראשית הצירים, וחותך את ציר ה-x גם בנקודות שבהן $x = x_0$ ו-$x = x_1$, כמתואר בציור.
אחת המשוואות שלפניך $(\text{I} - \text{IV})$ מתארת את הפונקציה $f(x)$.
$a \neq 0$ הוא פרמטר.

I. $y = a^2 \sin x$

II. $y = a \sin 2x$

III. $y = a^2 \cos x$

IV. $y = a \cos 2x$



א. (1) קבע איזו מן המשוואות $\text{I} - \text{IV}$ היא משוואת הפונקציה $f(x)$. נמק.

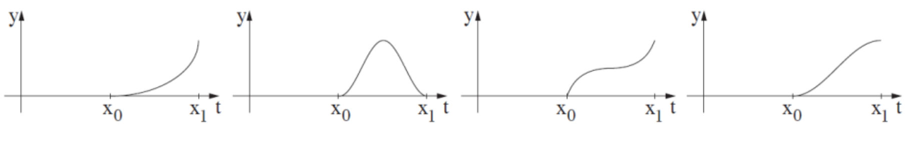
(2) קבע מהו תחום הערכים האפשריים עבור הפרמטר a. נמק.

(3) מה הם הערכים של x_0 ושל x_1?

ב. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום $x_0 \le x \le x_1$.

נסמן: $S(t) = \int_{x_0}^{t} f(x)dx$. נתון: $x_0 \le t \le x_1$.

ג. לפניך ארבעה גרפים $(\text{I} - \text{IV})$. איזה מן הגרפים $\text{I} - \text{IV}$ מתאר את הפונקציה $S(t)$? נמק.



8. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x+2}$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית? נמק.

נתונה הפונקציה $g(x)=x^3-21x+20$.

ב. (1) עבור אילו ערכים של x $f(x)=g(x)$? נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x הן (4,0) , (1,0) ו- (-5,0).

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. $t>0$ הוא פרמטר. עבור איזה ערך של t הביטוי $\int_0^t f(x)dx$ מקבל ערך מינימלי? נמק.

תשובות למבחן בגרות מספר 35- קיץ תש״ף , 2020, מועד א

1. א. $\frac{3}{8}$. ב. זיוה: 6 קמ״ש, רויטל: 16 קמ״ש. ג. $0<k<3.5$.

2. א. (1)
$$S_{\underset{\text{אחרונים}}{n-4}}=\frac{a_5(q^{n-4}-1)}{q-1}$$

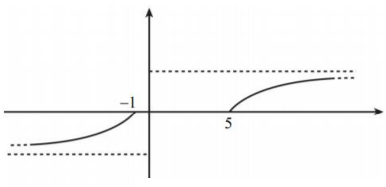
(2) $q=2$. ב. (1) הוכחה, $q=2$. (2) הוכחה. ג. $a_1=26$.

3. א. $\frac{85}{121}$. ב. $\frac{6}{17}$. ג. (1) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$. (2) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

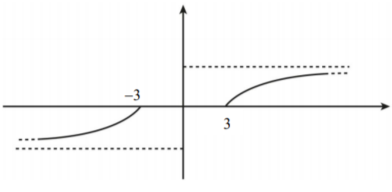
4. א. (1) הוכחה. (2) הוכחה. ב. $\sqrt{2}$. ג. הוכחה.

5. א. $\sqrt{1.5}\cdot a = 1.2247a$. ב. $133.44°$, $23.28°$, $23.28°$.
ג. $\frac{81\sqrt{15}}{5} = 62.74$.

6. א. (1) $a \le x$, $x \le -1$. (2) $(-1,0)$, $(a,0)$. (3) $y = 1$, $y = -1$.
ב. $a = 5$. ג. (1) עלייה: $5 < x$, $x < -1$, ירידה: אין .
(2)

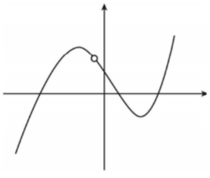


ד.



7. א. (1) משוואה II, $y = a\sin 2x$. (2) $a < 0$. (3) $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $x_1 = \pi$.
ב. $-a$. ג. גרף I.

8. א. (1) $x \neq -2$. (2) לא. ב. (1) $x \neq -2$. (2) $(\sqrt{7},-17.04)$ מינימום, $(-\sqrt{7},57.04)$ מקסימום.
ג.



ד. $t = 4$.

מבחן בגרות מספר 36

קיץ תש״ף, 2020, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענה על <u>שתיים</u> מבין השאלות 1-3.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

1. טל ואלון הם ספורטאים המשתתפים בתחרות טריאתלון.
התחרות מורכבת משלושה מקצים רצופים: המקצה הראשון הוא שחייה, המקצה השני הוא רכיבה על אופניים ואורכו 180 קילומטרים, והמקצה השלישי הוא ריצה ואורכו 42 קילומטרים.
בפתרון השאלה, הנח שמהירות השחייה, מהירות הרכיבה ומהירות הריצה של כל אחד מן הספורטאים, טל ואלון, הן קבועות לאורך כל אחד מן המקצים.

שחייה | **רכיבה על אופניים** | **ריצה**

נתון: טל התחיל את מקצה הריצה בשעה 13:30 ואלון התחיל את מקצה הריצה בשעה 15:00. טל הגיע לקו הסיום של הטריאתלון חצי שעה לפני אלון. מהירות הריצה של אלון גדולה ב-1 קמ״ש ממהירות הריצה של טל.

א. באיזו שעה סיים אלון את מקצה הריצה?

באותו היום התחיל אלון את מקצה השחייה בשעה 6:00 וסיים אותו לפני השעה 10:00.

ב. לפניך שני היגדים I – II. קבע בנוגע לכל אחד מהם אם הוא אפשרי או אינו אפשרי.
I. מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 18 קמ״ש.
II. מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 25 קמ״ש.

2. בסדרה a_n נתון כי לכל n טבעי, סכום n האיברים הראשונים של הסדרה הוא $S_n = 2\cdot 3^n - 2$.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. (1) מצא את a_1 ואת האיבר הכללי של הסדרה a_n בעבור $n>1$.
(2) הראה כי a_n היא סדרה הנדסית, ומצא את המנה שלה.

נתונה הסדרה $c_n = S_{n+1} - S_n$.

ב. (1) הראה כי הסדרה c_n היא סדרה הנדסית.
(2) הראה כי לכל k טבעי הסכום של k האיברים הראשונים בסדרה c_n גדול פי 3 מן הסכום של k האיברים הראשונים בסדרה a_n.

3. יעדי הטיסות של חברת תעופה מסוימת הם היבשות: אירופה, אמריקה ואסיה בלבד (אין טיסות ללא נוסעים). נתון כי מבין הנוסעים בחברה, מספר הנוסעים לאמריקה הוא $\frac{3}{5}$ ממספר הנוסעים לאירופה.

בוחרים באקראי נוסע מבין הנוסעים בחברה. נסמן ב- P את ההסתברות שנוסע זה טס לאירופה.
בוחרים באקראי 2 נוסעים מבין הנוסעים בחברה. נתון כי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו אינם טסים לאותה היבשת היא 0.62.
נתון: $P > 0.4$.

א. מצא את P.

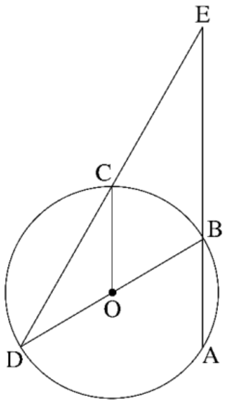
ב. בוחרים באקראי 5 נוסעים מבין הנוסעים בחברה.
מהי ההסתברות שלפחות 2 מן הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה וגם לפחות 2 מהם אינם טסים לאמריקה?

ג. באוטובוס לנמל התעופה היו 50 נוסעים שטסים בחברה זו. התפלגות יעדי הטיסה של הנוסעים באוטובוס זהה להתפלגות יעדי הטיסה של כל הנוסעים בחברת התעופה. בחרו באקראי 2 נוסעים מן האוטובוס זה אחר זה (ללא החזרה), והתברר ששניהם טסים לאותה היבשת. מהי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור

ענה על אחת מבין השאלות 5-4.

.4 AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O. הרדיוס OC מקביל למיתר AB, כמתואר בציור.
BD הוא קוטר במעגל.
הנקודה E היא מפגש הישרים AB ו- DC
(ראה ציור).

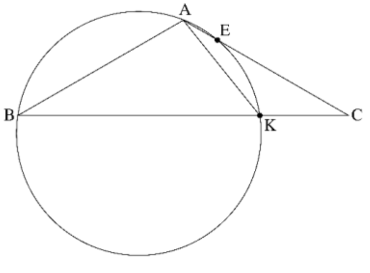


א. הוכח: $\sphericalangle AED = \sphericalangle CDO$.
ב. הוכח כי CO חוצה את הזווית DCA.

נתון: $\frac{EB}{BA} = 2$.

ג. הוכח כי המשולש ABO הוא שווה צלעות.
ד. נתון: שטח הטרפז $COBE$ הוא 9.
מצא את סכום שטחי המשולשים COD ו- ABO ($S_{\Delta COD} + S_{\Delta ABO}$).

.5 ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) ששניים מקודקודיו, A ו- B, נמצאים על מעגל שרדיוסו r, כמתואר בציור. המעגל חותך את הצלעות AC ו- BC בנקודות E ו- K בהתאמה.
נסמן: $\sphericalangle BAK = \alpha$, $\sphericalangle KAC = \beta$.



א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKC שווה ל- r.
(2) הוכח: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{BK}{KC}$.

ידוע: $\sphericalangle ABK > \beta$, נתון: $\alpha + \beta = 120°$.

ב. הראה כי α היא זווית קהה.

נתון: $AK = 28$, $BK = 55$.

ג. חשב את α ואת אורך הקטע BC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות, של פונקציות שורש ושל פונקציות טריגונומטריות

ענה על שתיים מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=(x+3)^4(2-x)$ המוגדרת לכל x.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{1}{f(x-3)}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) האם הפונקציה $g(x)$ חותכת את הצירים, ואם כן, באילו נקודות? נמק את תשובתך.

(3) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. (1) הראה כי $f(x)\ge 48$ לכל $-1\le x\le 1$.

(2) הסבר מדוע $\int_2^4 g(x)dx \le \frac{1}{24}$.

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-a}}{x^2}$. $a \neq 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות a ,
והבחן בין $a>0$ ובין $a<0$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
(3) הראה שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
(5) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a>0$ וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$.
בעבור כל גרף שסרטטת כתוב את התחום המתאים של הפרמטר a .

ג. מצא בעבור אילו ערכים של הפרמטר a גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הישר $y=1$ או משיק לו.

.8 המשולש ABC חסום במעגל.
נתון : $AB=1$, $AC=2$.
נסמן : $\sphericalangle BAC=x$.

א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה ל- $\frac{\sqrt{5-4\cos x}}{2\sin x}$.

(2) מצא את הערך של x שבעבורו רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא מינימלי.

ב. מצא את קוטר המעגל בעבור ערך ה- x שמצאת בסעיף א(2).

תשובות למבחן בגרות מספר 36 – קיץ תש״ף, 2020, מועד ב

1. א. $21:00$. ב. (I) אינו אפשרי. (II) אפשרי.

2. א. (1) $a_n = \frac{4}{3} \cdot 3^n = 4 \cdot 3^{n-1}$, $a_1 = 4$. (2) הוכחה, $q = 3$.

ב. (1) הוכחה, $\frac{C_{n+1}}{C_n} = 3$. (2) הוכחה.

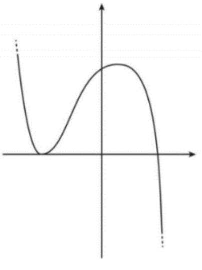
3. א. $p = 0.5$. ב. 0.441. ג. $\frac{7}{30}$.

4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. 6.

5. א. (1) הוכחה. (2) הוכחה. ב. הוכחה. ג. $BC = 73.376$, $\alpha = 100.844°$.

6. א. (1) $(-3,0)$, $(2,0)$, $(0,162)$.

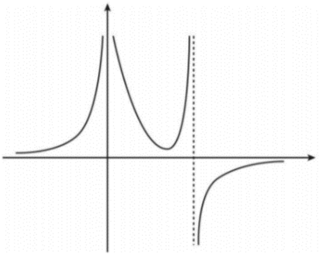
(2) $(1,256)$ max, $(-3,0)$ min. (3)



ב. (1) $x \neq 5$, $x \neq 0$. (2) לא חותכת.

(3) תחומי עלייה: $5 < x$, $4 < x < 5$, $x < 0$, תחומי ירידה: $0 < x < 4$.

(4)



ג. (1) הוכחה. (2) הוכחה.

7. א. (1) $\underline{0 < a}$: $\sqrt{a} \le x$, $x \le -\sqrt{a}$, $\underline{a < 0}$: $x \neq 0$.

(2) $\underline{0 < a}$: $(\sqrt{a},0)$, $(-\sqrt{a},0)$ $\underline{a < 0}$: אין. (3) הוכחה.

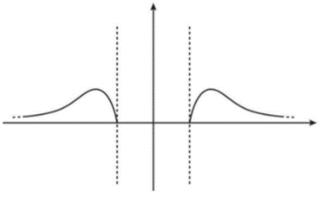
(4) $\underline{0<a}$: $y=0$, $\underline{a<0}$: $x=0$, $y=0$.

(5) $\underline{0<a}$: תחומי עלייה : $\sqrt{a}<x<\sqrt{2a}$, $x<-\sqrt{2a}$

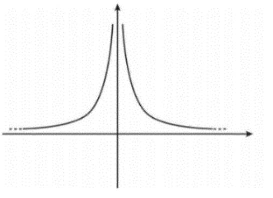
תחומי ירידה : $\sqrt{2a}<x$, $-\sqrt{2a}<x<-\sqrt{a}$

$\underline{a<0}$: תחומי עלייה : $x<0$, תחומי ירידה : $x>0$.

ב. $\underline{0<a}$:



$\underline{a<0}$:



ג. $0<a\le\frac{1}{4}$, $a<0$.

8. א.(1) הוכחה. (2) $x=60°$. ב. 2.

מבחן בגרות מספר 37

חורף תשפ״א, 2021, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

שני שליחים, אייל וברק, יצאו בשעה $8:00$ זה לקראת זה כדי למסור חבילה. אייל יצא מעיר A וברק יצא מעיר B.

לאחר שאייל עבר $\frac{1}{6}$ מן הדרך לכיוון עיר B, הוא גילה כי שכח את החבילה בעיר A. הוא חזר לעיר A, אסף את החבילה, ומייד יצא שוב לכיוון עיר B. אייל נסע כל הזמן במהירות קבועה.

ברק נסע גם הוא במהירות קבועה, הגבוהה ב- 20% ממהירות הנסיעה של אייל.

ברק ואייל נפגשו בנקודה הנמצאת 75 ק״מ מעיר A.

א. מצא את אורך הדרך שבין שתי הערים.

אייל וברק נסעו בכבישים בין-עירוניים, שמהירות הנסיעה המותרת בהם היא מ- 50 עד 110 קמ״ש. גם אייל וגם ברק נסעו במהירות מותרת.

ב. (1) האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה $9:40$? נמק.

(2) האם ייתכן שאייל וברק נפגשו בשעה $10:00$? נמק.

.2

סרקו אותי לצפייה בפתרון

a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא q.

נתון: $0 < a_1$, $0 < q < 1$.

b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית עולה שהמנה שלה היא r.

נתון: $b_1 = a_6$.

הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n = \frac{a_{n+5}}{b_n}$.

א. הסבר מדוע כל איברי הסדרות a_n , b_n ו- c_n הם חיוביים.

ב. הוכח כי c_n היא סדרה הנדסית, ומצא את c_1.

ג. (1) הסבר מדוע המנה של c_n גדולה מ- 0 וקטנה מ-1.

(2) נתון: סכום הסדרה של c_n הוא $\frac{6}{5}$, $\frac{b_2}{a_8} = 18$.

מצא את q ואת r.

3. ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיה שיער מתולתל היא x . ההסתברות שלילד שנולד במשפחת לוי יהיו עיניים חומות היא $2x$. ההסתברות שעיניו של ילד שנולד במשפחת לוי יהיו חומות, אם ידוע ששערו מתולתל, קטנה פי 1.5 מן ההסתברות ששערו לא יהיה מתולתל אם ידוע שעיניו חומות. יונתן הוא אחד הילדים במשפחת לוי.

א. (1) הראה שההסתברות שעיניו של יונתן הן חומות ושערו מתולתל היא $\frac{1}{2}x$.

(2) מצא את ההסתברות ששערו של יונתן הוא מתולתל, אם ידוע שעיניו חומות.

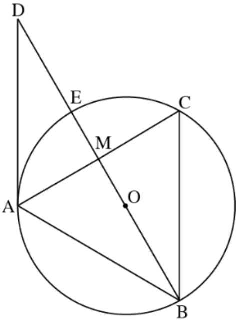
ב. (1) הבעת באמצעות x את ההסתברות ששערו של יונתן אינו מתולתל וגם עיניו אינן חומות.

(2) נתון: $x = 0.2$.

במשפחת לוי נולדו ארבעה ילדים בדיוק.

מהי ההסתברות שלפחות לשלושה מארבעת הילדים במשפחת לוי יש שיער מתולתל ועיניים חומות?

.4



הישר AD משיק למעגל בנקודה A .

הנקודה B נמצאת על המעגל כך שהקטע BD עובר דרך מרכז המעגל, O , וחותך את המעגל בנקודה נוספת, E .

הנקודה C נמצאת על המעגל כך ש- $AD \parallel BC$.

הישרים BD ו- AC חותכים זה את זה בנקודה M (ראה ציור).

א. הוכח: $AB = AC$.

נתון: AE חוצה את הזווית MAD .

ב. הוכח: $BM \perp AC$.

ג. הוכח כי הקטע AE שווה לרדיוס המעגל.

ד. הוכח כי $ABCD$ הוא מעוין.

.5

ABC הוא משולש קהה זווית $(\sphericalangle BAC > 90°)$.

נתון: $AB + AC = 4a$ (a הוא פרמטר),

$AB : AC = 3 : 5$,

שטח המשולש ABC הוא $\frac{15\sqrt{3}}{16}a^2$.

א. (1) חשב את גודל הזווית BAC .

(2) חשב את גודלי הזווית ABC ו- ACB .

במעגל החוסם את משולש ABC אפשר לחסום מחומש משוכלל ששטחו הוא 100.

ב. חשב את a .

6. נתונה הפונקציה $f(x)=6x(x^3-1)^3$, המוגדרת לכל x .

ענה על הסעיפים א-ג. אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

א. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(4) בעבור אלו ערכי k הישר $y=k$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$?

ב. נתונה המשוואה $6x(x^3-1)^3=m$. m הוא פרמטר.

הסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$, וקבע בעבור אילו ערכי m למשוואה הנתונה יש בדיוק שני פתרונות חיוביים שונים,

ובעבור אילו ערכי m יש לה פיתרון אחד שלילי ואחד חיובי.

נמק עת תשובותיך.

ג. היעזר בסרטוט וקבע אם קיים $a>0$ שבעבורו

האינטגרל $\int_0^a f(x)\,dx$ מקבל ערך מינימלי.

אם כן, מהו ערכו של a זה?

נמק את תשובתך.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=2\sin^2 x-1$, המוגדרת לכל x .

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום $-\pi \le x \le \pi$.

א. (1) הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{\cos 2x(1-\sin x)}{\sin x-1}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדה של הפונקציה $g(x)$?

(2) בעבור אילו ערכים של x $f(x)=g(x)$? נמק.

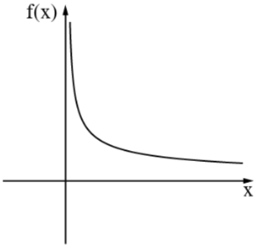
(3) האם לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטות אנכיות? נמק.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $h(x)=-f(x)+b$ (b הוא פרמטר), שתחום הגדרתה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון: $\int_{-\pi}^{0} h(x)\,dx=\frac{3\pi}{2}$. מצא את ערכו של הפרמטר b .

8. בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$,



שתחום הגדרתה הוא $x > 0$.

מבין כל הנקודות שעל גרף הפונקציה $f(x)$, הנקודה A היא הקרובה ביותר לראשית הצירים, O .

א. (1) מצא את שיעורי הנקודה A .

(2) האם הישר AO מאונך לישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ? נמק.

נתונה הפונקציה $g(x) = -f(-x)$, המוגדרת בתחום $x < 0$.

ענה על סעיף ב בעבור $-4 \le x \le -1$.

ב. (1) מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון, מה הם שיעורי הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים?

(2) מצא את שיעורי הנקודה הרחוקה ביותר מראשית הצירים, מבין כל הנקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון.

תשובות למבחן בגרות מספר 37 – חורף תשפ"א, 2021, מועד א:

1. א. 275 קמ"ש ב. (1) לא (2) כן .

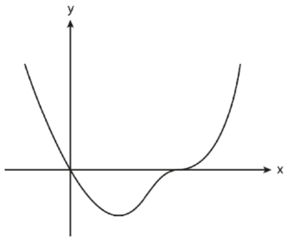
2. א. הוכחה ב. הוכחה, $c_1 = 1$ ג. (1) הסבר (2) $q = \frac{1}{3}$, $r = 2$.

3. א. (1) הוכחה (2) $\frac{1}{4}$ ב. (1) $1 - 2\frac{1}{2}x$ (2) 0.0037 .

4. א. הוכחה ב. הוכחה ג. הוכחה ד. הוכחה .

5. א. (1) $\measuredangle BAC = 120°$ (2) $\measuredangle ABC = 38.21°$, $\measuredangle ACB = 21.79°$.

ב. $a = 3.21$.



6. א. (1) $(0,0)$, $(1,0)$ (2) $(0.464, -2.03)$ מינימום (3)

(4) $k = 0$ או $k = -2.03$.

ב. שני פתרונות חיוביים : $-2.03 < m < 0$.

פתרון אחד שלילי ואחד חיובי : $m > 0$.

ג. $a = 1$.

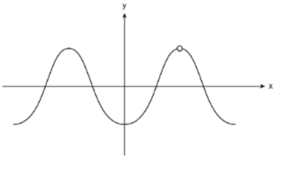
7. א. (1) הוכחה (2) $(\frac{3}{4}\pi, 0)$, $(\frac{1}{4}\pi, 0)$, $(-\frac{1}{4}\pi, 0)$, $(-\frac{3}{4}\pi, 0)$, $(0,-1)$.

(3) $(\pi, -1)$ מינימום, $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ מקסימום, $(0,-1)$ מינימום .

$(-\frac{1}{2}\pi, 1)$ מקסימום , $(-\pi, -1)$ מינימום. .

ב. (1) $-\pi \le x \le \pi$, $x \ne \frac{1}{2}\pi$ (2) $-\pi \le x \le \pi$, $x \ne \frac{1}{2}\pi$ (3) לא .

(4)



ג. $b = 1\frac{1}{2}$.

8. א. (1) $A\ (2, 2\sqrt{2})$ (2) כן ב. (1) $(-2, -2\sqrt{2})$ (2) $(-4, -2)$.

מבחן בגרות מספר 38

חורף תשפ"א, 2021, מועד נבצרים

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. סרקו אותי לצפייה בפתרון

יואב ואודי רכבו על אופניים מיישוב A ליישוב B, באותה הדרך.
יואב יצא מיישוב A, וכעבור 3 שעות הגיע ליישוב B.
זמן מה לאחר יציאתו של יואב מיישוב A, יצא גם אודי מיישוב A והגיע ליישוב B רבע שעה לפני יואב.
יואב ואודי נפגשו בדרך ליישוב B כעבור שעה וחצי מרגע יציאתו של אודי מיישוב A.
מהירות הרכיבה של יואב ומהירות הרכיבה של אודי היו קבועות.

א. מצא כמה זמן עבר מרגע יציאתו של יואב מיישוב A ועד רגע יציאתו של אודי מיישוב A (מצא את שתי האפשרויות).

ב. נתון: יואב ואודי נפגשו במרחק 12 ק"מ מיישוב B.
מהירות הרכיבה של אודי גדולה מ- 20 קמ"ש.
מצא מהי מהירות הרכיבה של יואב ומהי מהירות הרכיבה של אודי.

.2 סרקו אותי לצפייה בפתרון

נתונה סדרה הנדסית אין סופית יורדת: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ ,\ ...$

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 4 .

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה, ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה:

$a_1\ ,\ -a_2\ ,\ a_3\ ,\ -a_4\ ,\ ...$

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -2.4 .

א. מצא את האיבר הראשון ואת המנה של הסדרה a_n (הסדרה המקורית).

מן האיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית:

$$\frac{a_2}{a_1^2}\ ,\ \frac{a_3}{a_2^2}\ ,\ \frac{a_4}{a_3^2}\ ,\ ...\ ,\ \frac{a_{n+1}}{a_n^2}\ ,\ ...$$

נסמן את הסדרה השלישית ב- c_n .

ב. הוכח כי הסדרה c_n היא סדרה הנדסית, מצא את המנה שלה ואת c_1 .

ג. נתון כי הסכום $c_{k+1}+c_{k+2}+...+c_{3k}$ גדול פי $4{,}096$ מסכום $2k$ האיברים הראשונים בסדרה c_n .

מצא את k .

3. בחברת תקשורת גדולה נבדקו הרגלי הצפייה של הלקוחות.

נמצא כי מספר הלקוחות שצופים בערוצי מוזיקה גדול פי 1.5 ממספר הלקוחות שאינם צופים בהם.

$\frac{2}{3}$ מן הלקוחות שצופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.

40% מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט, צופים בערוצי מוזיקה.

בוחרים באקראי לקוח מן הלקוחות של החברה.

א. מהי ההסתברות שהלקוח שנבחר צופה גם בערוצי ספורט וגם בערוצי מוזיקה?

ב. נמצא שהלקוח שנבחר צופה בערוצי מוזיקה **או** בערוצי ספורט.

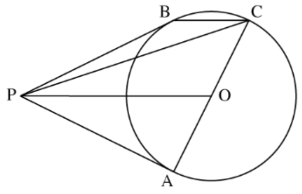
מהי ההסתברות שהוא אינו צופה בערוצי מוזיקה?

ג. מן הלקוחות שאינם צופים בערוצי ספורט,

בחרו באקראי 4 לקוחות.

מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם צופים בערוצי מוזיקה?

4. הנקודות A ו- B נמצאות על מעגל שמרכזו O.



המשיקים למעגל בנקודות A ו- B נפגשים בנקודה P.

ההמשך של AO חותך את המעגל בנקודה C (ראה סרטוט).

א. הוכח: $PO \parallel BC$.

נסמן: $k = \frac{PO}{BC}$.

ב. הבע באמצעות k את היחס בין שטח המשולש PBC ובין שטח המשולש OPC.

ג. נסמן ב- S את שטח המשולש PAO.
הבע באמצעות S ו- k את שטח המרובע $PACB$.

5. $ABCD$ הוא טרפז חסום במעגל $(AB \parallel DC)$.

נתון: $AB = a$, $CD = b$ $(a < b)$.

$\sphericalangle BCD = 60^\circ$

א. הבע את אורך שוקי הטרפז, BC ו- AD, באמצעות a ו- b.

נתון: $a = 6$, אורך האלכסון BD הוא $6\sqrt{7}$.

ב. חשב את b.

ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R.
(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז $ABCD$.
(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{ax}{\sqrt{x^2-16}}$, $a\neq 0$ הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ענה על סעיפים **ב-ד** בעבור $a>0$.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש צורך, הבע באמצעות a).

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$.

נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)\cdot f'(x)$ המוגדרת בתחום שבו מוגדרות הפונקציות $f(x)$ ו- $f'(x)$. נתון: $a=1$.

ו. (1) מצא את תחום השליליות של הפונקציה $g(x)$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, הישר $x=5$, הישר $x=6$ וציר ה- x .

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 4$.

ענה על הסעיפים **א-ה** בעבור התחום $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

ב. הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = -f(-x) + b$. b הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x .

מצא את b .

ו. מצא בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .

.8 נתונה הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$, ואת האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה- x .

הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A

ואת הישר $y = \frac{1}{2}x$ בנקודה B .

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t . נתון: $t < -1$.

מצא את הערך של t שבעבורו האורך של הקטע AB הוא מינימלי.

תשובות למבחן בגרות מספר 38 – חורף תשפ"א, 2021, מועד נבצרים:

.1 א. $t = \frac{3}{4}$ או $t = \frac{1}{2}$ ב. יואב: 16 קמ"ש, אודי: 24 קמ"ש .

.2 א. $a_1 = 12$, $q = \frac{1}{4}$ ב. $q_c = 4$, $c_1 = \frac{1}{48}$ ג. $k = 6$.

.3 א. $p = \frac{1}{2}$ ב. $p = \frac{5}{17}$ ג. $\frac{328}{625} = 0.5248$.

.4 א. הוכחה ב. $\frac{1}{k}$ ג. $\frac{2k+1}{k}S$.

.5 א. $b - a$ ב. $b = 18$ ג. (1) $R = 2\sqrt{21}$.

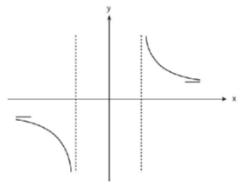
(2) $AB + CD = AD + BC = 24$ (3) $r = 3\sqrt{3}$.

.6 א. $x > 4$ או $x < -4$ ב. אנכית: $x = 4$, $x = -4$.

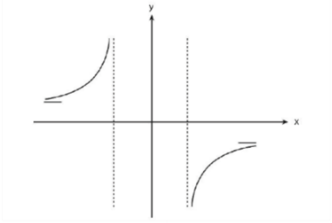
אופקית: $y = a$, $y = -a$.

ג. עליה: אין, ירידה: $x>4$ או $x<-4$.

ד.



ה.



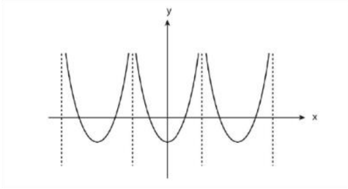
ו (1) $x>4$ (2) $\frac{22}{45}$.

7. א. (1) $-\frac{3\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$, $x\neq\frac{\pi}{2}$, $x\neq-\frac{\pi}{2}$.

א. (2) $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{3\pi}{2}$.

ב. הוכחה ג. $(\pi,-3)$ מינימום , $(0,-3)$ מינימום , $(-\pi,-3)$ מינימום .

ד.

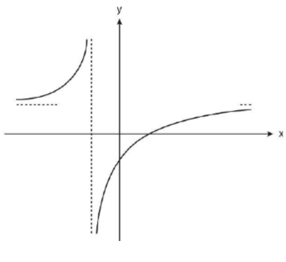


ה. $b=-3$ ו. 4.91 .

8. א. (1) $x\neq-1$, אסימפטוטות: $x=-1$, $y=1$.

(2) עלייה: $-1<x$ או $x<-1$, ירידה: אין .

(3)



ב. $t=-3$.

מבחן בגרות מספר 39

חורף תשפ״א, 2021, מועד מאוחר

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון

יואב ודני יצאו באותו הזמן לרכוב על אופניים.
הם רכבו במסלול ישר שהחל בנקודה A והסתיים בנקודה B.
לאורך המסלול רכב כל אחד מהם במהירות קבועה.
יואב הגיע לנקודה B, ומייד חזר באותו המסלול לנקודה A.
כאשר היה יואב בדרכו חזרה מ- B ל- A והגיע לאמצע
המסלול AB, הגיע דני לנקודה B.

א. מהו היחס בין המהירות של יואב ובין המהירות של דני? נמק.

40 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, כאשר יואב היה בדרכו חזרה
מ- B ל- A, נפגשו יואב ודני.

ב. הבע את אורך המסלול AB באמצעות המהירות של דני.

30 דקות לאחר שהתחילו לרכוב, יואב עדיין לא הגיע לנקודה B,
והמרחק של דני מן הנקודה A היה גדול ב- 5 ק״מ מן המרחק של
יואב מן הנקודה B.

ג. מצא את אורך המסלול AB.

ד. כמה זמן עבר מרגע יציאתם של יואב ודני מן הנקודה A
עד שהמרחק ביניהם היה 2 ק״מ?
מצא <u>שתיים</u> מבן שלוש האפשרויות.

2. סרקו אותי לצפייה בפתרון

הסדרה a_n היא סדרה המקיימת לכל n טבעי את הכלל:

$3a_{n+2}+5a_{n+1}-2a_n=0$.

א. מצא את שני הערכים האפשריים למנת הסדרה a_n.

נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל **ולא מתכנסת** ב- $b_1, b_2, b_3, \ldots$.

נסמן את איבריה של הסדרה המקיימת את הכלל **ומתכנסת** ב- $c_1, c_2, c_3, \ldots$.

ב. הסבר מדוע הסדרה $b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3, \ldots$ היא סדרה הנדסית מתכנסת.

נתון: $b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3+\ldots=15$,

$b_1=c_1=m$

ג. מצא את m (רשום את <u>שתי</u> האפשרויות).

ענה על סעיף ד בעבור ה- m הקטן מבין שתי האפשרויות שמצאת בסעיף ג.

ד. נתון: $b_1+b_2+b_3+\ldots+b_k=1{,}705$
מצא את k.

3. בכד יש כדורים בשלושה צבעים בלבד: **אדום, צהוב, כחול.**

נתון:

ההסתברות להוציא כדור אדום היא $\frac{5}{8}$.

מספר הכדורים הצהובים גדול פי 3 ממספר הכדורים הכחולים.

$\frac{4}{5}$ מן הכדורים האדומים שבכד ו- $\frac{8}{9}$ מן הכדורים הצהובים שבכד **מחוספסים**, וכל שאר הכדורים שבכד **חלקים.**

הוציאו באקראי כדור מן הכד והחזירו אותו לכד. את הפעולה הזאת (הוצאה באקראי והחזרה) עשו 8 פעמים.

א. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן הכדורים שהוציאו הם **מחוספסים**?

ענה על סעיף ב בעבור כד שבו 32 כדורים.

ב. הוציאו באקראי בזה אחר זה 2 כדורים מן הכד (ללא החזרה).

(1) מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים <u>שונים</u>?

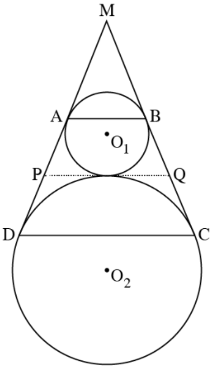
(2) ידוע ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים. מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוציאו היה בצבע אדום?

ענה על סעיף ג בעבור כד שבו n כדורים.

נתון: $50 < n < 100$.

ג. מצא את n (את <u>שתי</u> האפשרויות).

.4 בציור שלפניך מתוארים שני מעגלים המשיקים זה לזה מבחוץ.
מרכזי המעגלים הם הנקודות O_1 ו- O_2, והרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2 בהתאמה.



מן הנקודה M, הנמצאת מחוץ לשני המעגלים, יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל O_1 בנקודות A ו- B, ולמעגל O_2 בנקודות D ו- C, כמתואר בציור.
המשיק בנקודה המשותפת לשני המעגלים חותך את הישרים MD ו- MC בנקודות P ו- Q בהתאמה.

א. הוכח כי המרובע $ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. הוכח כי PQ שווה לשוק הטרפז $ABCD$.

ג. הוכח כי $\sphericalangle O_1QO_2 = 90°$.

נתון: $R_1 = 4$, $R_2 = 9$.

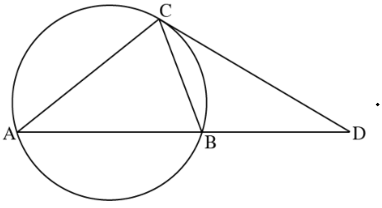
ד. מצא את PQ.

5. בציור שלפניך מתואר משולש חד-זווית ABC החסום במעגל שהרדיוס שלו R.

המשיק למעגל בנקודה C חותך את המשך הקטע AB בנקודה D.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא $2R$.

נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$.



א. הבע את BD באמצעות R ו- α.

נתון: $\frac{CD}{BD} = \frac{3}{2}$.

ב. מצא את α.

נתון: שטח המשולש CBD הוא 27.

ג. מצא את R.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos^3(x) \cdot \sin(x)$ בתחום $0 \le x \le \pi$.

א. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = a \cdot f(x)$. $a > 0$ הוא פרמטר.

ג. הבע באמצעות a את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 0$.

הישר שמצאת בסעיף **ג** אינו חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה נוספת. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי הישר שמצאת בסעיף **ג** ועל ידי הישר $x = \frac{\pi}{2}$ שווה ל- $\left(\frac{\pi^2}{2} - 1\right)$.

ד. מצא את a .

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x+a}{\sqrt{x}}$. a הוא פרמטר.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) בעבור אילו ערכים של הפרמטר a אין לפונקציה נקודות קיצון? נמק.

(2) במקרים שיש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון, הבע באמצעות a את שיעוריה וקבע את סוגה.

ג. סרטט בנפרד סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ <u>לכל אחד</u> מן התחומים i-iii של הפרמטר a שלפניך:

i $a>0$

ii $a<0$

iii $a=0$

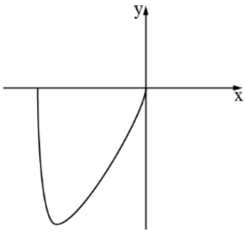
נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-b$. b הוא פרמטר.

נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x <u>בשתי</u> נקודות.

ד. (1) מצא את התחום של הפרמטר a . נמק.

(2) הבע את התחום של הפרמטר b באמצעות a . נמק.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = x \cdot \sqrt{a - x^2}$. $a > 0$ הוא פרמטר.



א. (1) הבע באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הוכח שהפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

(3) בסרטוט שלפניך מתואר חלק מגרף הפונקציה $f(x)$.
העתק את הסרטוט למחברתך והשלם אותו
כך שיתאר את גרף הפונקציה $f(x)$ כולו.

דרך הנקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון

מעבירים אנך לציר ה- x . האנך חותך את ציר ה- x בנקודה B .

ישר העובר דרך נקודה A ודרך ראשית הצירים, O ,

חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה נוספת, C .

דרך הנקודה C מעבירים אנך לציר ה- x .

האנך חותך את ציר ה- x בנקודה D .

נתון : הסכום המקסימלי של שטחי המשולשים AOB ו- COD

הוא $4\sqrt{2}$.

ב. מצא את a .

תשובות למבחן בגרות מספר 39 – חורף תשפ"א, 2021, מועד מאוחר :

1. א. 1.5 ב. $\frac{5}{6}v$ ג. 10 ק"מ ד. 20 דקות, 36 דקות, 44 דקות .

2. א. $q = \frac{1}{3}$ או $q = -2$ ב. הוכחה ג. $m = 5$ או $m = -5$ ד. $k = 10$.

3. א. $\frac{189}{8{,}192}$ ב.(1) $\frac{267}{496}$ (2) $\frac{40}{89}$ ג. $n = 64$ או $n = 96$.

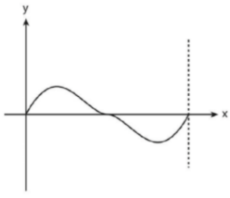
4. א. הוכחה ב. הוכחה ג. הוכחה ד. $PQ = 12$.

5. א. $2R\sin\alpha\sqrt{5-4\cos\alpha}$ ב. $\alpha = 36.34°$ ג. 5.696 .

6. א. $(0,0)$ מינימום, $(\frac{\pi}{6},\frac{3\sqrt{3}}{16})$ מקסימום,

$(\frac{5\pi}{6},-\frac{3\sqrt{3}}{16})$ מינימום, $(\pi,0)$ מקסימום .

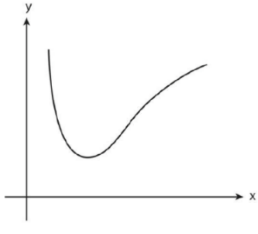
ב.



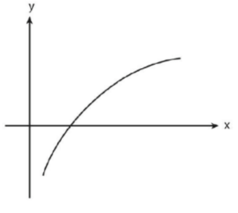
ג. $y = ax$ ד. $a = 4$.

7. א. $0 < x$ ב.(1) $a \le 0$ (2) $(a,2\sqrt{a})$ מינימום .

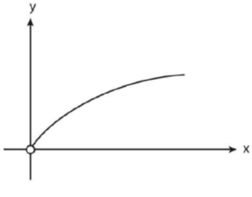
ג. I



II



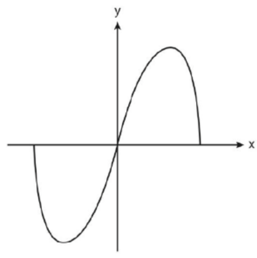
III



ד.(1) $0 < a$ (2) $2\sqrt{a} < b$.

8. א. (1) $-\sqrt{a} \le x \le \sqrt{a}$ (2) הוכחה .

(3)



ב. $a = 6$.

מבחן בגרות מספר 40

קיץ תשפ"א, 2021, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. סרקו אותי לצפייה בפתרון

בבית מלון יש שתי מעליות, מעלית א ומעלית ב.
שתי המעליות התחילו לעלות מקומת הקרקע (גובה 0) באותו זמן.
מעלית א עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 14 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים. מעלית ב עצרה בדרכה עצירת ביניים שנמשכה 7 שניות, ולאחר מכן המשיכה לעלות עד שהגיעה לקומה שגובהה 81 מטרים.
מעלית א הגיעה לקומה שגובהה 33 מטרים בדיוק באותו זמן שבו הגיעה מעלית ב לקומה שגובהה 81 מטרים.
לאחר מכן התחילו שתי המעליות לרדת בדיוק באותו זמן.
מעלית א ירדה 15 מטרים, ובדרכה עצרה עצירת ביניים, שנמשכה 9 שניות. בזמן שירדה מעלית א, ירדה מעלית ב 63 מטרים ברציפות, ללא עצירות ביניים.
ידוע כי המהירות של כל אחת מן המעליות בעלייה שווה למהירות של כל אחת מהן בירידה.
כמו כן ידוע כי המעליות נעות במהירויות קבועות.

א. חשב את המהירות של כל אחת משתי המעליות.

מעלית א הייתה בקומה הקרקע של בית המלון, ואילו מעלית ב הייתה בקומה הנמצאת מעל קומה שגובהה 42 מטרים.
שתי המעליות התחילו לנוע באותו זמן לכיוון הקומה שגובהה 42 מטרים. מעלית א עלתה לקומה זו מקומת הקרקע ללא עצירות ביניים. מעלית ב ירדה לקומה זו מן הקומה שבה היא הייתה ובדרכה עצרה עצירת ביניים אחת, שנמשכה 6 שניות.
שתי המעליות הגיעו לקומה שגובהה 42 מטרים בדיוק באותו זמן.

ב. האם מעלית ב הייתה בקומה העליונה של בית המלון כאשר היא התחילה לרדת? נמק את תשובתך.

2. נתונה סדרה a_n שסכום n האיברים הראשונים שלה,

סרקו אותי לצפייה בפתרון

לכל n טבעי, הוא:

$S_n = k\cdot n^2 - p\cdot n$. $p > 0$, $k > 0$ הם פרמטרים.

א. (1) הבע את האיבר הכללי של הסדרה באמצעות p , k ו- n ,

בעבור $n \geq 2$.

(2) הנוסחה שמצאת בתת-סעיף א(1) נכונה בעבור כל n טבעי.

הסבר מדוע.

(3) הוכח כי הסדרה היא סדרה חשבונית והבע את d , ההפרש

של הסדרה, באמצעות k .

נתונות שתי סדרות הנדסיות b_n ו- c_n . מנת הסדרה b_n שווה

ל- d (הפרש הסדרה החשבונית a_n). הסדרה c_n היא סדרה

הנדסית אינסופית שהמנה שלה שווה ל- $\frac{2}{d}$.

נתון: $a_1 = b_1 = c_1$, $k = 1.5$, $p = 4.5$.

ב. הסבר מדוע c_n היא סדרה מתכנסת.

נתון כי היחס בין סכום m האיברים הראשונים של הסדרה b_n

ובין סכום כל אברי הסדרה האינסופית c_n הוא $40\frac{1}{3}$.

ג. חשב את m .

ד. האם הסדרה c_n היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא

עולה ולא יורדת? נמק את תשובתך.

3. בבית ספר תיכון גדול מאוד, מספר התלמידים גדול פי 9 ממספר המורים. בבית הספר נערך סקר שהשתתפו בו כל המורים והתלמידים בבית הספר, והם בלבד.

המשתתפים בסקר נשאלו אם הם נבדקו לגילוי קורונה.

נמצא כי 80% מן המורים בבית הספר נבדקו לגילוי קורונה.

כמו כן נמצא כי $\frac{13}{15}$ מכלל המשתתפים בסקר (מורים ותלמידים), שנבדקו לגילוי קורונה, היו תלמידים.

א. מהי ההסתברות שמבין כלל המשתתפים בסקר ייבחר באקראי תלמיד שלא נבדק לגילוי קורונה?

בחרו באקראי בזה אחר זה 5 משתתפים מבין כלל משתתפי הסקר.

ב. מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נבדקו לגילוי קורונה?

ג. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, לפחות משתתף אחד נבדק לגילוי קורונה. מהי ההסתברות שלפחות 4 מן המשתתפים שנבחרו נבדקו לגילוי קורונה?

ד. ידוע כי מבין החמישה שנבחרו, בדיוק 2 נבדקו לגילוי קורונה. מהי ההסתברות שהאחרון שנבחר נבדק לגילוי קורונה?

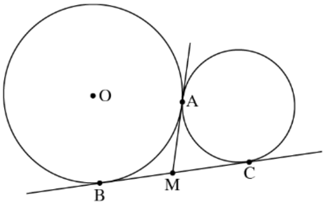
4. שני מעגלים משיקים זה לזה בנקודה A (ראה סרטוט).

הנקודה O היא מרכז המעגל השמאלי.

מעבירים בנקודה A משיק משותף לשני המעגלים.

B ו- C הן נקודות ההשקה של ישר נוסף שמשיק לשני המעגלים.

שני המשיקים נחתכים בנקודה M.



א. הוכח כי הזווית $\sphericalangle BAC$ ישרה.

ב. הוכח כי $4 \cdot AM^2 = AC^2 + AB^2$

נתון: $AB = 8$, $AC = 6$.

ג. חשב את רדיוס המעגל שמרכזו הוא בנקודה O .

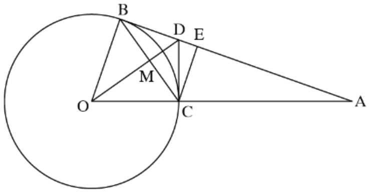
ד. חשב את יחס השטחים $\frac{S_{\Delta OBM}}{S_{\Delta AMC}}$.

5. DB ו- DC משיקים למעגל שמרכזו O, כמתואר בסרטוט.

רדיוס המעגל: R. המשך BD חותך את המשך OC בנקודה A. הקטע OD והמיתר BC נחתכים בנקודה M.

הקטע CE מאונך ל-AB. נסמן:

$\sphericalangle ABC = \alpha$.



א. הסבר מדוע אפשר לחסום במעגל:

(1) את המרובע $OBDC$.

(2) את המרובע $MDEC$.

נסמן: d_1 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע $OBDC$. d_2 הוא קוטר המעגל החוסם את המרובע $MDEC$.

d_3 הוא קוטר המעגל החוסם את המשולש AOD.

ב. הבע באמצעות α ו- R את d_1, את d_2 ואת d_3.

ג. מצא את הערך של α שבעבורו מתקיים: $\frac{d_2}{d_1} = \frac{d_1}{d_3}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונות הפונקציות : $g(x)=\frac{x}{(x^2-2)^3}$, $f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^2}$.

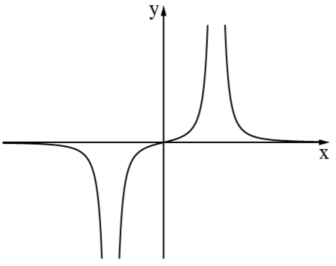
א. ענה על תת סעיפים (1)-(4) בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון.

(4) הוכח כי הפונקציה אי-זוגית.



ב. (1) הגרף שלפניך מתאר את אחת הפונקציות $g(x)$, $f(x)$.

קבע איזה מן הפונקציות הגרף מתאר. נמק את קביעתך.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה האחרת.

נתונה פונקציה $h(x)$ שמקיימת $h'(x)=f(x)$.

$f(x)$ ו- $h(x)$ מוגדרות באותו תחום.

ג. מה הם תחומי העלייה והירידה של $h(x)$?

ד. חשב את :

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$. נמק את תשובתך.

(2) השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x והישרים $x=-1$, $x=1$.

נתונה הפונקציה $k(x)=f(x)+b$. $b\neq 0$ הוא פרמטר.

ה. האם הפונקציה $k(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? נמק את תשובתך.

.7 נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{3x^2-4a}}{x^3}$. $a>0$ הוא פרמטר.

בסעיפים א-ה, בטא את תשובותיך באמצעות a, לפי הצורך.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ב. הוכח שהפונקציה $f(x)$ אי-זוגית.

ג. (1) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

ה. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה?

ידוע כי בכל אחת מנקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, יש לגרף של $f(x)$ ולגרף של $g(x)$ משיק משותף.

ו. (1) הוסף לסרטוט שבמחברתך סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ פרט את שיקוליך.

(2) מהו הערך של a ? נמק את תשובתך.

8. במשולש ABC אורך הצלע BC הוא a. נתון: $\measuredangle BAC = \alpha$

(α ברדיאנים). נסמן: $\measuredangle ABC = x$ $(0 < x < \pi - \alpha)$.

א. הבע באמצעות x, a, ו-α את היקף המשולש ABC.

ב. הבע באמצעות α את ערך ה-x שבעבורו היקף המשולש ABC הוא מקסימלי.

ג. הסבר מדוע מתקיים המשפט הזה: מכל המשולשים בעלי צלע נתונה וזווית מולה נתונה, המשולש בעל ההיקף המקסימלי הוא משולש שווה שוקיים.

תשובות למבחן בגרות מספר 40 – קיץ תשפ"א, 2021, מועד א:

1. א. מעלית א - 3 מטרים בשנייה, מעלית ב - 4.5 מטרים בשנייה ב. לא.

2. א.(1) $a_n = 2kn - k - p$ (2) הוכחה (3) $d = 2k$ ב. הסבר $(q = \frac{2}{3})$.

ג. $m = 5$ ד. עולה.

3. א. 0.38 ב. 0.33696 ג. 0.340446 ד. 0.4.

4. א. הוכחה ב. הוכחה ג. $\frac{20}{3}$ ד. $\frac{25}{18}$.

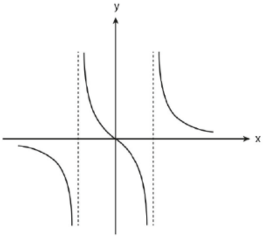
5. א.(1) הוכחה (2) הוכחה ב. $d_1 = \frac{R}{\cos\alpha}$, $d_2 = \tan\alpha$, $d_3 = \frac{R}{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}$.

ג. $\alpha = 30°$.

6. א.(1) $f(x)$: $x \neq \pm\sqrt{2}$, $g(x)$: $x \neq \pm\sqrt{2}$.

(2) $f(x)$ ו- $g(x)$: $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$, $y = 0$ (3) הוכחה (4) הוכחה.

ב.(1) $f(x)$ (2)



ג. עליה: $\sqrt{2} < x$ או $0 < x < \sqrt{2}$, ירידה: $-\sqrt{2} < x < 0$ או $x < -\sqrt{2}$.

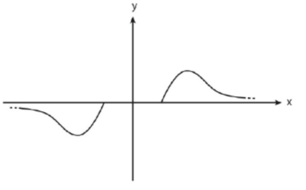
ד. (1) 0 (2) $\frac{1}{2}$ ה. לא זוגית ולא אי זוגית .

7. א. $\sqrt{\frac{4a}{3}} \le x$ או $x \le -\sqrt{\frac{4a}{3}}$ ב. הוכחה ג.(1) $(\sqrt{\frac{4a}{3}},0)$, $(-\sqrt{\frac{4a}{3}},0)$.

(2) $(\sqrt{2a},\frac{1}{2a})$ מקסימום , $(-\sqrt{2a},-\frac{1}{2a})$ מינימום , $(\sqrt{\frac{4a}{3}},0)$ מינימום ,

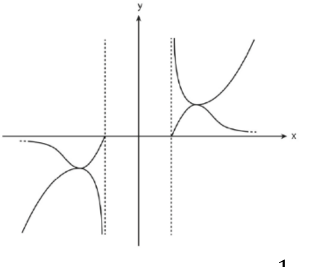
$(-\sqrt{\frac{4a}{3}},0)$ מקסימום .

ד.



ה.(1) $\sqrt{\frac{4a}{3}} < x$ או $x < -\sqrt{\frac{4a}{3}}$ (2) $x = \sqrt{\frac{4a}{3}}$, $x = -\sqrt{\frac{4a}{3}}$.

ו.(1)



(2) $a = \frac{1}{2}$.

8. א. $a+\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin x+\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin(\alpha+x)$ ב. $\frac{\pi-a}{2}$ ג. הוכחה .

מבחן בגרות מספר 41

קיץ תשפ"א, 2021, מועד מיוחד

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. סרקו אותי לצפייה בפתרון

ביום ראשון יצא אודי ברכיבה על אופניים ממטולה לכיוון טבריה. באותה שעה בדיוק יצאה רעות ברכיבה על אופניים מטבריה לכיוון מטולה, ורכבה באותה הדרך. כל אחד מן הרוכבים רכב במהירות קבועה. כעבור 2 שעות נפגשו שני רוכבי האופניים. הזמן שנדרש לאודי כדי לעבור את הדרך ממטולה לטבריה גדול ב- 54 דקות מן הזמן שנדרש לרעות לעבור דרך זו.

א. מצא את היחס בין מהירות הרכיבה של רעות ובין מהירות הרכיבה של אודי.

ב. מצא כמה זמן נדרש לכל אחד מן הרוכבים כדי לעבור את כל הדרך שבין מטולה לבין טבריה.

ביום שני יצאו 2 רוכבי האופניים יחד מטבריה לכיוון מטולה באותו הזמן. הם רכבו באותה הדרך ובאותן מהירויות כמו ביום ראשון. רעות הגיעה למטולה ומייד הסתובבה וחזרה לכיוון טבריה. היא נפגשה עם אודי לאחר שעברה מרחק של 7 ק"מ ממטולה.

ג. מצא את אורך הדרך בין מטולה ובין טבריה.

ד. מצא את המהירות שבה רכב כל אחד משני הרוכבים.

2. סרקו אותי לצפייה בפתרון

נתונה סדרה חשבונית ובה $2n+1$ איברים (n הוא מספר טבעי).
איברי הסדרה הם $a_1\ ,\ a_2\ \ ,\ a_3\ ,\ \ldots\ ,\ a_{2n+1}$ והפרש הסדרה הוא d.

א. הוכח כי ההפרש בין סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ובין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שווה לאיבר האמצעי בסדרה.

נסמן ב- T את ההפרש בין סכום האיברים ב- n המקומות

האחרונים ובין סכום האיברים ב- n המקומות הראשונים.

ב. הבע את T באמצעות d ו- n.

נתון:

- סכום כל איברי הסדרה שווה לסכום האיברים ב- $2n$ המקומות האחרונים.
- סכום האיברים הראשון והאחרון הוא 204.
- $T = 3,468$.

ג. מצא כמה איברים יש בסדרה.

3. בחממה גדולה של פרחים יש אך ורק פרחים לבנים וסגולים.
ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים לבנים גדולה פי 2.25 מן ההסתברות לבחור באקראי שני פרחים סגולים.

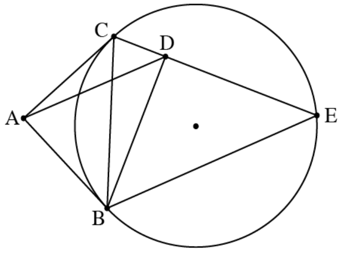
א. חשב את אחוז הפרחים הסגולים בחממת הפרחים.

בחממה זו, לכמה מן הפרחים הלבנים, ורק להם, יש עלים גדולים. לשאר הפרחים יש עלים קטנים. ירדן בחרה באקראי שני פרחים. ההסתברות שירדן בחרה פרח אחד שיש לו עלים קטנים ופרח אחד שיש לו עלים גדולים היא 0.455.

ב. (1) חשב את אחוז הפרחים בחממה שיש להם עלים גדולים.
(2) חשב את ההסתברות שירדן בחרה פרח סגול, אם ידוע שרק לאחד מן הפרחים שהיא בחרה יש עלים גדולים.

ג. כינרת הכינה זר מ- 7 פרחים לבנים בדיוק, שנבחרו באקראי בחממה. חשב את ההסתברות שיש בזר פרח אחד לפחות שיש לו עלים גדולים ופרח אחד לפחות שיש לו עלים קטנים.

4.



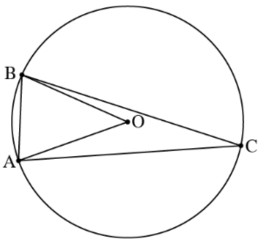
מקודה A יוצאים שני ישרים,
המשיקים למעגל בנקודות B ו- C
(ראה סרטוט). נתון כי $\sphericalangle CAB = 90^\circ$.
BE ו- CE הם מיתרים במעגל.
המעגל החוסם את המשולש ABC חותך
את המיתר CE בנקודה D .

א. הוכח כי $BD = DE$.

ב. הוכח כי $\Delta ADB \sim \Delta CEB$.

ג. הוכח כי $S_{\Delta CEB} = 2 \cdot S_{\Delta ADB}$.

5.



משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו
R . נתון כי $\sphericalangle BAC = 80^\circ$. נסמן את הזווית AOB
ב- α , ואת הצלע AB ב- k .

א. הוכח כי $\cos\alpha = 1 - \frac{k^2}{2R^2}$.

נתון כי $k = \frac{3}{4}R$.

ב. הבע באמצעות R (בלבד) את שטח המשולש ABC .

נסמן ב- r את רדיוס מהמעגל החסום במשולש AOB .

ג. חשב את היחס $\frac{R}{r}$.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

6. נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{x^2-x}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון : $f(k) = 1$, $t < k$, t הוא פרמטר.

ג. קבע איזה מן הביטויים שלפניך גדול יותר. נמק את קביעתך.

$$\int_t^k (f(x))^2\,dx \quad \underline{\text{או}} \quad \int_t^k f(x)\,dx$$

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = -8$ ו- $x = -1$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \cos(mx) + \cos(2x)$, המוגדרת לכל x .

m הוא פרמטר השונה מאפס. נתון כי בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$,

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא -2 .

א. הוכח כי m הוא מספר שלם שמתחלק ב- 4 ללא שארית.

הצב $m = 4$ וענה על סעיפים ב-ד שלפניך.

ענה על סעיף ב בתחום $0 \le x \le \pi$.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,

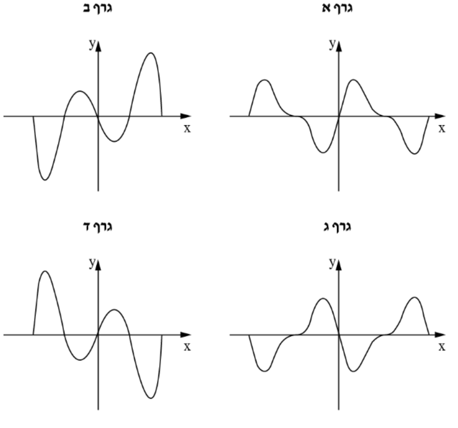
וקבע את סוגן.

ענה על סעיפים ג-ד בתחום $-\pi \le x \le \pi$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$. הסבר את שיקוליך.

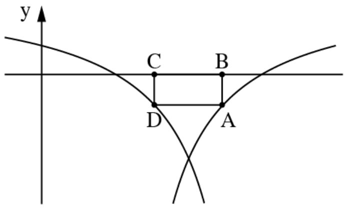
נתונה פונקציה $k(x)$ המקיימת: $k'(x) = f(x)$, $k(0) = 0$.

ד. אחד מן הגרפים א-ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$.
היעזר בתשובתך על סעיף ג וקבע איזה מן הגרפים שלפניך
מתאים לגרף הפונקציה $k(x)$. נמק את קביעתך.



8. נתונות הפונקציות:

$g(x) = \frac{x-3}{x-1}$, $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$.



ענה על סעיף א בעבור כל אחת משתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בסרטוט שלפניך מתואר חלק מן הגרף של הפונקציה $f(x)$, חלק מן הגרף של הפונקציה $g(x)$, ומלבן החסום ביניהם ובין ציר ה- x .

צלע BC של המלבן מונחת על ציר ה- x , והצלע הנגדית, AD , מחברת בין נקודה על הגרף של $f(x)$ ובין הנקודה על הגרף של $g(x)$, כמתואר בסרטוט.

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A .

ב. קבע מהו תחום הערכים האפשרי של t .

ג. (1) הבע באמצעות t את אורך הצלע AB .

(2) הוכח ששיעור ה- x של הנקודה D הוא $4-t$.

(3) הבע באמצעות t את שטח המלבן $ABCD$.

ד. מצא את t שבעבורו שטח המלבן $ABCD$ הוא מקסימלי.

תשובות למבחן בגרות מספר 41 – קיץ תשפ"א, 2021, מועד מיוחד:

.1 א. $\frac{5}{4}$ ב. רעות: 3.6 שעות, אודי: 4.5 שעות ג. 63 ק"מ.

ד. רעות: 17.5 קמ"ש, אודי: 14 קמ"ש.

.2 א. הוכחה ב. $T = n(n+1)d$ ג. 67.

.3 א. 40% ב.(1) 35% (2) $\frac{8}{13}$ ג. 0.9748.

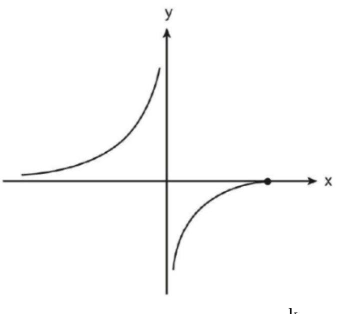
.4 א. הוכחה ב. הוכחה ג. הוכחה.

.5 א. הוכחה ב. $0.72R^2$ ג. 3.96.

.6 א.(1) $x \le \frac{1}{2}$, $x \neq 0$ (2) $(\frac{1}{2},0)$ (3) $x = 0$, $y = 0$.

(4) עליה: $0 < x < \frac{1}{2}$ או $x < 0$, ירידה: אין.

ב.



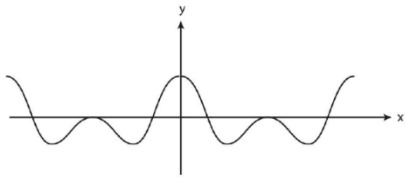
ג. $\int_t^k f(x)\,dx$ גדול יותר ד. $\frac{35}{72}$.

.7 א. הוכחה ב.(1) עם x: $(\frac{\pi}{6},0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{5\pi}{6},0)$ עם y: $(0,2)$.

(2) $(0,2)$ מקסימום, $(0.29\pi,-1.12)$ מינימום, $(\frac{\pi}{2},0)$ מקסימום,

$(0.71\pi,-1.12)$ מינימום, $(\pi,2)$ מקסימום.

ג.



ד. גרף א .

8. א. (1) $f(x)$: $x \neq 3$, $g(x)$: $x \neq 1$.

(2) $f(x)$: $(1,0)$, $(0,\frac{1}{3})$, $g(x)$: $(3,0)$, $(0,3)$.

ב. $2 < t < 3$.

ג. (1) $\frac{3-t}{t-1}$ (2) הוכחה (3) $\frac{(2t-4)(3-t)}{t-1}$ ד. $t = 2.41$.

מבחן בגרות מספר 42

קיץ תשפ״א, 2021, מועד ב

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. סרקו אותי לצפייה בפתרון

נטע, דניאלה ורוני מתאמנות בהליכה ובריצה במסלול AB שאורכו 40 ק״מ. בשעה 8:00 יצאה נטע מנקודה A והלכה במהירות של 4 קמ״ש לכיוון נקודה B.

בשעה 9:36 יצאה דניאלה מנקודה B ורצה לכיוון נקודה A.

שעתיים לאחר צאתה של נטע, יצאה רוני מנקודה B ורצה במהירות של 12 קמ״ש לכיוון נקודה A.

נטע ורוני נפגשו ולאחר מכן המשיכו בדרכן.

שעה ו- 36 דקות אחרי שנטע ורני נפגשו,

הגיעה דניאלה לנקודה A.

המהירות של כל אחת מן המתאמנות היא קבועה באימון כולו.

א. באיזו שעה נפגשו נטע ורוני?

ב. מהי מהירות הריצה של דניאלה? נמק את תשובתך.

ג. האם שלוש מהתאמנות נפגשו בנקודה אחת לאורך המסלול? נמק את תשובתך.

כל מתאמנת שמגיעה לקצה המסלול מייד מסתובבת וחוזרת לנקודה שממנה היא יצאה.

ד. באיזה מרחק מן הנקודה B נפגשו נטע ורוני בפעם השנייה? נמק את תשובתך.

2. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית, a_n, שאיבריה ... , a_3 , a_2 , a_1 ,
והמנה שלה q.

סרקו אותי
לצפייה בפתרון

א. הבע באמצעות a_1 ו- q את ערכי הסכומים שלפניך.

(1) $A = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{40}$

(2) $B = a_4 + a_8 + a_{12} + ... + a_{40}$

נתון כי a_n היא סדרה עולה וכי $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

ב. מצא את ערכו של q.

בונים מן הסדרה a_n הנתונה סדרה הנדסית אין-סופית b_n
המקיימת לכל n טבעי: $b_n = 3 \cdot a_{n+1}$.

ג. מצא את המנה של הסדרה b_n.

בונים סדרה הנדסית אין-סופית חדשה: $-\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, -\frac{1}{b_3}, \frac{1}{b_4}, ...$.

ד. הבע את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות a_1.

נתונה הסדרה: $\frac{1}{a_1}, a_1, b_1$.

ה. (1) האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמק את תשובתך.
(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמק את תשובתך.

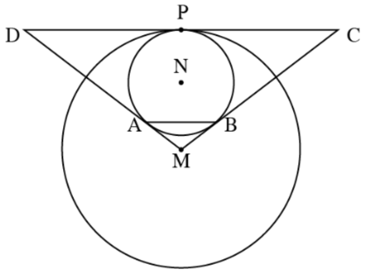
3. בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים.
כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים.
משתתף שמצליח לעבור את שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר. 28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

א. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.

ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני הוא 0.42 .

ב. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות לא יצליח לעבור את המכשול הראשון.

ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל וליאור.
ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.
(1) חשב את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.
(2) חשב את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.



.4 שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראה סרטוט).
מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו- N,
והרדיוסים שלהם הם R_1 ו- R_2
בהתאמה, $R_2 < R_1$. מעבירים משיק
משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P.
מן הנקודה M יוצאים שני ישרים
המשיקים למעגל שמרכזו N בנקודות A ו-B.
ישרים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים
בנקודות C ו- D, כמתואר בסרטוט.

א. הוכח כי $AB \perp MN$.

ב. הוכח כי $AB \parallel DC$.

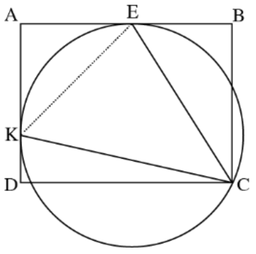
ג. הוכח כי $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

נתון: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$, $MN = 8$.

ד. (1) מצא את R_1 ואת R_2.

(2) מצא את DC.

.5 המרובע ABCD הוא מלבן ששתיים מצלעותיו, AB ו- AD , משיקות למעגל שרדיוסו R בנקודות E ו- K בהתאמה (ראה סרטוט). הנקודה C נמצאת על המעגל.



א. הוכח כי $\sphericalangle KCE = 45°$.

נתון : $\sphericalangle KCD = \alpha$, $0° < \alpha < 45°$.

ב. (1) הבע באמצעות α את הזוויות של המשולש KCE .

(2) הבע באמצעות R ו- α את האורכים של צלעות המשולש KCE .

ג. הבע באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.

נתון : $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{EB}{AE}$

ד. חשב את α .

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a>0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $(f(x))^2$ שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $(f(x))^2$, וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. הסתמך על הסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

הצב: $a=2$.

ו. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=3$ ו- $x=4$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + 3$.

ענה על הסעיפים שלפניך בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

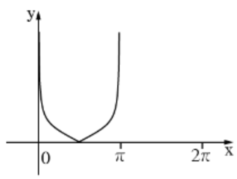
(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

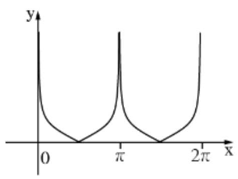
נתונות שתי פונקציות : $k(x) = f(x) - 3$, $g(x) = \sqrt{f(x) - 3}$.

ג. אחד מן הגרפים א-ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$, ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$.

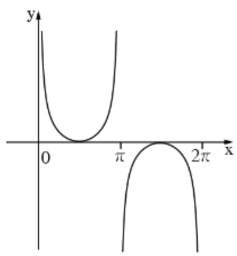
קבע איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות, ונמק את קביעתך.



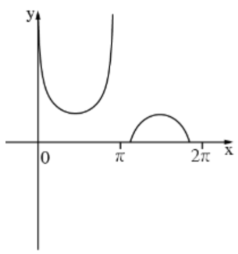
גרף א



גרף ב



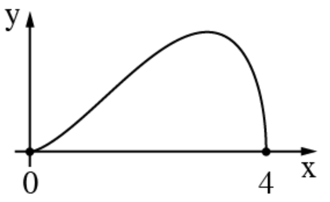
גרף ג



גרף ד

8. בסרטוט שלפניך מוצגת הפונקציה $f(x)=\sqrt{a\cdot x^4+b\cdot x^3}$.

נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $0\le x\le 4$.



א. (1) הוכח כי $b=-4\cdot a$.

(2) לפניך שתי טענות I-II. רק אחת מהן נכונה. קבע מהי הטענה הנכונה, ונמק את קביעתך.

I. $a>0$, $b<0$.

II. $a<0$, $b>0$.

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $(f(x))^2$ המוגדרת גם בתחום $0\le x\le 4$. מנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה- x . M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה- x , ו- O היא ראשית הצירים.

ב. מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

ג. בעבור שיעור ה- x שמצאת בסעיף ב, בטא באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO .

ד. אם ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $(f(x))^2$ <u>אינה</u> יורדת, מהו שיעור ה- x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

תשובות למבחן בגרות מספר 42 – קיץ תשפ"א, 2021, מועד ב:

1. א. $12:00$ ב. 10 קמ"ש ג. כן ד. 8 קמ"ש .

2. א.(1). $\frac{a_1q(q^{40}-1)}{q^2-1}$ (2) $\frac{a_1q^3(q^{40}-1)}{q^4-1}$ ב. $q=3$ ג. $q=3$ ד. $-\frac{1}{12a_1}$.

ה.(1) לא (2) כן .

3. א. 0.07 ב. 0.3 ג.(1) 0.027 (2) 0.009 .

4. א. הוכחה ב. הוכחה ג. הוכחה ד.(1) $R_1=14$, $R_2=6$ (2) $DC=12\sqrt{7}$.

5. א. הוכחה ב.(1) $\sphericalangle CKE=45°+\alpha$, $\sphericalangle CEK=90°-\alpha$, $\sphericalangle KCE=45°$.

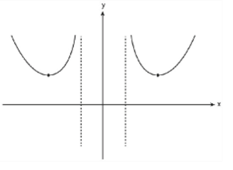
(2) $CE=2R\sin(45°+\alpha)$, $CK=2R\cos\alpha$, $KE=\sqrt{2}R$.

ג. $\frac{EB}{AE}=2\sin(45°+\alpha)\cdot\sin(45°-\alpha)=\sin(90°+2\alpha)=\cos 2\alpha$ ד. $22.5°$.

6. א. $a<x$ או $x<-a$ ב. הוכחה ג.(1) אין (2) $x=a$, $x=-a$.

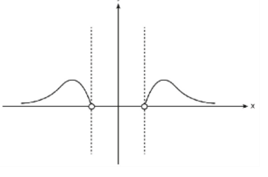
(3) $(\sqrt{2}a,2a)$ מינימום , $(-\sqrt{2}a,2a)$ מינימום .

(4)



ד. $(\sqrt{2}a,4a^2)$, $(-\sqrt{2}a,4a^2)$.

ה.



ו. $\frac{71}{1,296}$.

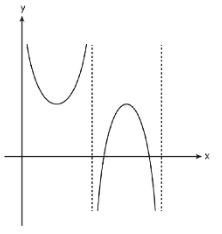
7. א.(1). $0 < x < 2\pi$, $x \neq 0$ (2) $x = 2\pi$, $x = \pi$, $x = 0$.

(3) עליה: $\pi < x < 1.5\pi$ או $\frac{\pi}{2} < x < \pi$,

ירידה: $1.5\pi < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

(4) $(\frac{3\pi}{2},3)$ מקסימום , $(\frac{\pi}{2},3)$ מינימום .

ב.



ג. $k(x)$: גרף ג' , $g(x)$: גרף א' .

8. א.(1) הוכחה (2) II ב. $x = 3.2$ ג. $-41.94a$ ד. $x = 3$.

מבחן בגרות מספר 43

חורף תשפ״ב, 2022, מועד א

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

.1 סרקו אותי לצפייה בפתרון

שלושה שחיינים – איתן, גל ויעקב – מתאמנים בשחייה בבריכה שאורכה 50 מטרים. כל שחיין מתחיל את שחייתו בתחילת הבריכה, שוחה עד סוף הבריכה, ומייד מסתובב ושוחה חזרה לתחילת הבריכה. מהירות השחייה של כל אחד מן השחיינים היא קבועה. ביום א׳ התחיל כל אחד משלושת השחיינים את שחייתו בזמן אחר. גל התחיל לשחות 10 שניות אחרי איתן. יעקב התחיל לשחות 15 שניות אחרי איתן. 15 שניות אחרי שהתחיל יעקב לשחות, עברו כל השחיינים את אותו המרחק מתחילת הבריכה, אך עדיין לא הגיעו לסוף הבריכה.

מייד לאחר שהגיע גל לסוף הבריכה, הוא הסתובב והתחיל לשחות חזרה לתחילת הבריכה. בדרכו חזרה, הוא פגש את איתן במרחק של 4 מטרים מסוף הבריכה.

א. חשב את המהירות של כל אחד משלושת השחיינים.

ב. במרחק של כמה מטרים מסוף הבריכה נפגשו איתן ויעקב בפעם השנייה?

ביום ב׳ התחילו גל ויעקב את שחייתם באותו זמן בתחילת הבריכה, וכל אחד מהם שחה באותה מהירות שבה שחה ביום א׳.
כשהגיע כל אחד משני השחיינים לסוף הבריכה,
הוא הסתובב מייד ושחה לכיוון תחילת הבריכה, וכשהגיע לשם, הסתובב שוב ושחה לכיוון סוף הבריכה, וחוזר חלילה.
שני השחיינים הפסיקו לשחות ברגע שהם נפגשו בתחילת הבריכה.

ג. כמה מטרים שחה יעקב ביום זה?

.2 נתונה סדרה חשבונית A עולה שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, ...$,
והפרשה d .
מסמנים ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים בסדרה A ,
לכל n טבעי.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

מגדירים סדרה נוספת, B , שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, ...$.
איברי הסדרה B מקיימים $b_n = S_{n+1} - S_n$, לכל n טבעי.

א. **(1)** האם הסדרה B היא סדרה חשבונית? נמק.
(2) האם הסדרה B זהה לסדרה A ? נמק.

מסמנים ב- T_n את סכום n האיברים הראשונים של הסדרה B ,
לכל n טבעי.

ב. הוכח כי לכל n טבעי זוגי מתקיים :

$$T_n = \frac{(b_1+b_2)(b_1-b_2)+(b_3+b_4)(b_3-b_4)+...+(b_{n-1}+b_n)(b_{n-1}-b_n)}{-d} .$$

נתון : $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + ... + b_{39}^2 - b_{40}^2 = -95$,
$T_5 = -20$.

ג. חשב את b_1 ואת d (אפשר להיעזר בסעיף ב).

מחברים בזה אחר זה את איברי הסדרה A הנמצאים במקומות האי-זוגיים, החל באיבר הראשון.

ד. מהו המספר המינימלי של איברים שיש לחבר באופן זה
כדי שהסכום שיתקבל יהיה מספר חיובי שלם? נמק.

.3 בקופסה יש שלוש סוכריות בטעם תות
ושתי סוכריות בטעם מנטה.
ליאור מוציא באקראי סוכרייה מן הקופסה.
אם הסוכרייה היא בטעם מנטה – הוא מחזיר אותה לקופסה,
ואם היא בטעם תות – הוא אוכל אותה מייד.

א. ליאור מוציא מן הקופסה שלוש סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה.

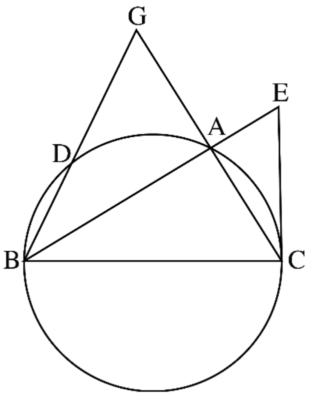
(1) חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק סוכרייה אחת.

(2) חשב את ההסתברות שליאור אכל את הסוכרייה השנייה שהוא הוציא, אם ידוע כי ליאור אכל בדיוק סוכרייה אחת.

ב. ליאור מוציא מן הקופסה n סוכריות בזו אחר זו באופן המתואר בתחילת השאלה. הבע בעזרת n את ההסתברות שליאור יאכל סוכרייה אחת לפחות.

ג. ליאור קיבל שתי קופסאות סוכריות, כל אחת מהן זהה לקופסה המתוארת בתחילת השאלה.
ליאור מוציא שלוש סוכריות מכל אחת משתי הקופסאות, באופן המתואר בתחילת השאלה.
חשב את ההסתברות שליאור יאכל בדיוק שלוש סוכריות, שלושתן מאותה קופסה.

4. משולש ABC חסום במעגל שרדיוסו R (ראה סרטוט). הצלע BC היא קוטר במעגל.



AG הוא המשך הצלע CA.

הקטע GB חותך את המעגל בנקודה D.

נתון: $GA = AC$.

א. הוכח כי הישר AB חוצה את $\sphericalangle GBC$.

ב. הוכח כי $\Delta GBC \sim \Delta GAD$.

נתון כי $\frac{S_{DBCA}}{S_{GAD}} = 15$.

ג. הבע באמצעות R את אורך הצלע AC.

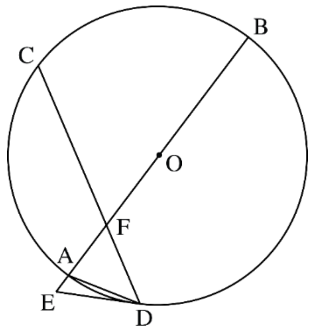
דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל שחותך את המשך הקטע BA בנקודה E.

ד. חשב פי כמה גדול שטח המשולש CBE משטח המשולש ABC.

5. AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ומרכזו O.

המיתר CD חותך את הקוטר AB בנקודה F.

המשיק למעגל בנקודה D חותך את המשך הקוטר AB בנקודה E (ראה סרטוט)



נסמן: $\sphericalangle ADE = \alpha$.

א. הראה כי $\sphericalangle BAD = 90^\circ - \alpha$.

נתון כי $ED = FD$.

ב. הבע באמצעות α את גודל $\sphericalangle CDA$.

ג. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש AFD.

ד. **(1)** הבע באמצעות α את יחסי השטחים $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}}$.

(2) נתון כי $\frac{S_{AFD}}{S_{AED}} = 1+\sqrt{3}$.

מצא את α.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{(x^3-m)^2}$, m הוא פרמטר חיובי.

א. הבע את תשובותיך באמצעות m , אם יש צורך.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x=(-1)$.

ב. מצא את הערך של m .

הצב בפונקציה $f(x)$ את הערך של m שמצאת,
וענה על הסעיפים ג-ה.

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$, k הוא פרמטר שלילי.

(1) סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $g(x)$.

(2) דרך נקודת הקיצון השמאלית של $g(x)$ מעבירים אנך לציר ה- x .
נתון כי השטח המוגבל על ידי האנך, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x הוא 1 (השטח שמימין לאנך).
מצא את הערך של k .

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 3x + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 2x}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(4) מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם ציר ה- x .

בתשובתך דייק שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

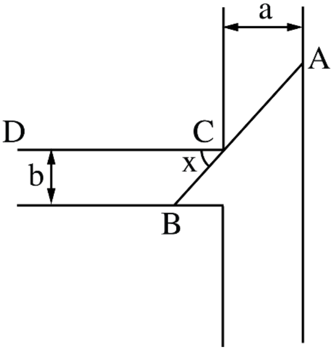
אם ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

ב. **(1)** מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. האם ייתכן שישר שמשוואתו $y = 4x + c$ (c פרמטר) ישיק לגרף הפונקציה $f(x)$? נמק.

8. תעלת מים ראשית ברוחב קבוע a מחוברת בניצב לתעלה משנית ברוחב קבוע b.



הנקודה C היא נקודת המפגש בין דופן של התעלה הראשית ובין דופן של התעלה המשנית (ראה סרטוט).
מהנדסת מתכננת סכר ישר, שיצא מן הנקודה A שבדופן התעלה הראשית, יעבור דרך הנקודה C ויגיע עד הנקודה B שבדופן התעלה המשנית. הסכר ייצור זווית שגודלה x עם הדופן CD של התעלה המשנית, כמתואר בסרטוט.

א. הבע באמצעות a, b ו-x את אורך הסכר AB.

נתון כי $a = 2b$.

ב. מצא את x שבעבורו אורך הסכר AB יהיה מינימלי.

ג. ידוע כי האורך המינימלי של הסכר הוא 8. מצא את b.

תשובות למבחן בגרות מספר 43 – חורף תשפ"ב, 2022, מועד א:

1. א. איתן: 1 מטר לשנייה, גל: 1.5 מטר לשנייה, יעקב: 2 מטר לשנייה.

ב. $6\frac{2}{3}$ מטרים. ג. 400 מטרים.

2. א.(1) כן. (2) לא. ב. הוכחה. ג. $b_1 = -5$, $d = \frac{1}{2}$. ד. 14 איברים.

3. א.(1) 0.366. (2) 0.32787. ב. $1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$. ג. 0.0128.

4. א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. $AC = \frac{1}{2}R$. ד. פי $\frac{16}{15}$.

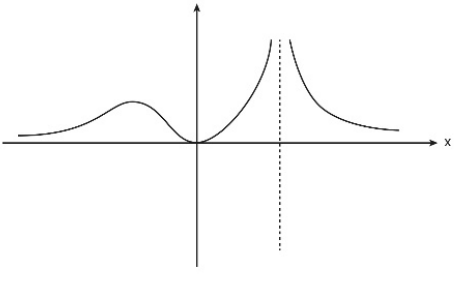
5. א. הוכחה. ב. 3α. ג. $\frac{R^2 \sin\alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha}{\cos 2\alpha}$.

ד.(1) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$. (2) $15°$.

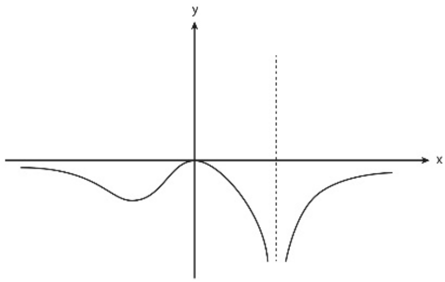
6. א.(1) $x \neq \sqrt[3]{m}$. (2) $x = \sqrt[3]{m}$, $y = 0$. ב. $m = 2$.

ג. $(0,0)$ מינימום , $\left(-1, \frac{1}{9}\right)$ מקסימום.

ד.



ה.(1)

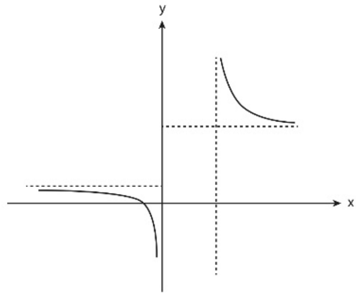


(2) $k = -18$.

7. א.(1) $x \geq 2$ או $x \leq 0$. (2) $x > 2$ או $x < 0$.

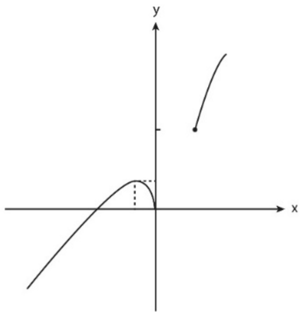
(3) $x = 2$, $x = 0$, $y = 5$, $y = 1$. (4) $(-0.342,0)$.

(5)



ב.(1) $(-0.342, 0.764)$ מקסימום , $(2,6)$ מינימום , $(0,0)$ מינימום.

(2)



ג. לא.

8. א. $AB = \frac{b}{\sin x} + \frac{a}{\cos x}$. ב. $x = 38.44°$. ג. $b = 1.922$.

מבחן בגרות מספר 44

חורף תשפ״ב, 2022, מועד נבצרים

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. סרקו אותי לצפייה בפתרון

בין הבית של תמר ויואב לבין ביתו של דן יש שביל אופניים.
לאורך שביל האופניים, בין שני הבתים, נמצא חדר כושר.
המרחק בין חדר הכושר ובין הבית של תמר ויואב הוא 24 ק״מ.
תמר יצאה מן הבית בשעה $6:00$ ורכבה על אופניים במהירות קבועה לעבר ביתו של דן.
בשעה $7:00$ יצא יואב גם הוא מן הבית ורכב על אופניו לעבר ביתו של דן במהירות שגבוהה ב- 5 קמ״ש ממהירות הרכיבה של תמר.
בשעה $7:30$ יצא דן מחדר הכושר ורכב על אופניו במהירות קבועה לעבר ביתו.
תמר, יואב ודן רכבו שלושתם על אותו שביל אופניים.
תמר השיגה את דן וחלפה על פניו בשעה $8:00$.
יואב ודן הגיעו שניהם לביתו של דן בשעה $9:15$.

א. מצא את המהירות של כל אחד משלושת הרוכבים.

ב. מה היה המרחק בין יואב ובין דן כאשר תמר הגיעה לביתו של דן?

.2 נתונה סדרה הנדסית A שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, \ldots$,
ומנתה היא q . כל איברי הסדרה A שונים מאפס.

סרקו אותי
לצפייה בפתרון

א. האם הסדרה $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots$ היא סדרה הנדסית?

הוכח את תשובתך.

ב. **(1)** מסמנים ב- S_n את הסכום של n האיברים הראשונים
של הסדרה A ‏(n טבעי).

הוכח כי לכל n מתקיים: $\frac{S_n}{a_1 \cdot a_n} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}$

(2) נתון: $a_1 = 1$, $q = 3$.

סכום n האיברים הראשונים בסדרה A גדול פי 6561
מן הסכום: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}$.

מצא את n .

הסדרה B מתקבלת מן הסדרה A על ידי הפיכת הסימנים
של האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה A .
איברי הסדרה B הם $b_1, b_2, b_3, \ldots$.
נסמן ב- T_m את הסכום של m האיברים הראשונים
של הסדרה B . נתון כי m הוא מספר טבעי אי-זוגי.

ג. נתונה נוסחה: $\frac{T_m}{b_1 \cdot b_m} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} - \ldots + \frac{1}{a_m}$

קבע אם הנוסחה הנתונה נכונה. הוכח את תשובתך.

3. כדי להתקבל ללימודים במכללה מסוימת יש לעבור מבחן קבלה.
כל השאלות במבחן הן מתוך מאגר שיש בו n שאלות שונות.
לנבחנים יש גישה למאגר והם יכולים להתכונן למבחן באמצעותו.
ביום הבחינה, כל נבחן מוציא באקראי מתוך קופסה מלאה בפתקים שלושה פתקים בזה אחר זה, ללא החזרה.
בכל אחד מן הפתקים כתובה שאלה אחת מתוך מאגר השאלות.
מספר הפתקים שבקופסה שווה למספר השאלות שבמאגר, ובכל פתק כתובה שאלה אחרת.
לאחר שהוציא הנבחן שלושה פתקים מן הקופסה וקרא את שלוש השאלות, הוא מחזיר את שלושת הפתקים לקופסה.
הנבחן יתקבל למכללה אם הוא יענה נכון על שתי שאלות לפחות מתוך שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא.
נתנאל התכונן למבחן באמצעות מאגר השאלות.
הוא ידע לענות נכון רק על 20 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר.
על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.
ידוע כי ההסתברות של נתנאל לענות נכון על שאלה אחת לפחות מבין שתי השאלות שבשני הפתקים הראשונים שהוא הוציא היא $\frac{34}{69}$.

א. **(1)** מצא את n .

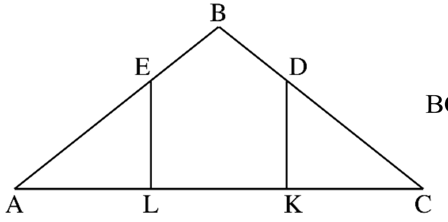
(2) מהי ההסתברות שנתנאל יתקבל למכללה?

ב. אם ידוע כי נתנאל התקבל למכללה, מהי ההסתברות שהוא לא ענה נכון על השאלה שבפתק הראשון שהוא הוציא?

רמי התכונן גם הוא למבחן באמצעות מאגר השאלות.
הוא ידע לענות נכון על 40 שאלות מתוך n השאלות שבמאגר.
על שאר השאלות הוא לא ידע לענות נכון.

ג. האם ההסתברות שרמי יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי גדולה פי 2 מן ההסתברות שנתנאל יענה נכון על כל שלוש השאלות שבפתקים שהוא הוציא באקראי? נמק את תשובתך.

4. בציור שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC , $BA = BC$.



מנקודה D הנמצאת על השוק BC הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה K .

מנקודה E הנמצאת על השוק BA הורידו אנך לבסיס, והוא חותך אותו בנקודה L .

נתון: $AL = LK = KC$.

א. חשב את $\frac{BD}{DC}$.

הקטעים DL ו- EK נפגשים בנקודה G .

ב. הוכח כי המרובע $BDGE$ הוא דלתון.

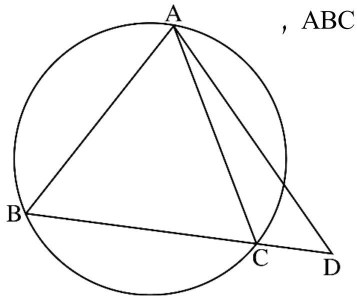
נתון: $AC = 45$.

היקף המרובע $EDKL$ הוא 54 .

ג. חשב את אורך הקטע BG .

ד. האם קיימת נקודה F שנמצאת על ה<u>ישר</u> BG שעבורה המרובע $BDFE$ הוא בר-חסימה במעגל? נמק את תשובתך.

.5 בציור שלפניך מתואר משולש שווה-שוקיים ABC ,



$AB = AC$, שחסום במעגל שרדיוסו R .

האריכו את הבסיס BC עד לנקודה D

והעבירו ישר מנקודה D לנקודה A .

נתון : $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle BAC = 2\alpha$.

א. הוכח כי רדיוס המעגל החוסם את משולש ABD שווה לרדיוס המעגל החוסם את משולש ACD .

ב. הבע את שטח משולש ACD באמצעות R ו- α .

נסמן ב- m את היחס בין שטח המשולש ACD לבין שטח המשולש ABC .

ג. **(1)** האם ייתכן כי $m = 0.5$? נמק את תשובתך.

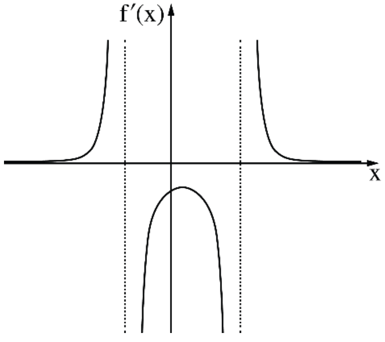
(2) נתון כי $m = 0.6$. מצא את גודלי זוויות המשולש ABC .

6. נתונה פונקציה $f(x)$ המוגדרת בתחום

$x < b$, $b < x < c$, $c < x$

וגזירה בכל תחום הגדרתה.

בסרטוט שלפניך מתואר הגרף של <u>פונקציית הנגזרת</u> $f'(x)$.



לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד ושלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים:

$y = 0$, $x = b$, $x = c$.

שיעור ה- x של נקודת הקיצון של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ הוא a .

a , b ו- c הם פרמטרים.

א. הבע את תשובותיך באמצעות a , b ו- c , אם יש צורך.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בנקודה $(a,0)$.

ב. סרטט סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון גם כי $f(x) = \dfrac{18-36x}{(x^2-x-6)^2}$.

ג. מצא את a , b ו- c .

ד. **(1)** הראה כי בתחום $b < x < c$ מתקיים: $f'(x)\cdot(f(x))^2 \le 0$.

(2) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)\cdot(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 0$ ו- $x = 2a$.

7. נתונה הפונקציה $f(x) = \tan(x) + \frac{1}{x}$.

ענה על הסעיפים א-ב בעבור התחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד ששיעוריה $(2.798,0)$ בקירוב.

ב. מצא את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה גם הפונקציה $g(x) = \frac{\cos(x)}{x}$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

ג. האם הפונקציה $g(x)$ היא זוגית, אי-זוגית, או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכח את תשובתך.

ד. **(1)** הראה כי בתחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{2}$ שיעור ה- x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ שווה לשיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x , וקבע את סוגה של נקודת קיצון זו.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

8. חותכים חוט שאורכו k לשני חלקים.
מחלק אחד של החוט יוצרים משולש שווה-צלעות
ומן החלק האחר יוצרים מעגל.
נסמן ב- x את אורך צלע המשולש.

א. הבע באמצעות k את תחום ההגדרה של x.

ב. הבע באמצעות k את אורך צלע המשולש,
שעבורו סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי.

ג. הראה כי כאשר סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי,
אי אפשר לחסום את המשולש שהתקבל במעגל שהתקבל.

תשובות למבחן בגרות מספר 44 – חורף תשפ"ב, 2022, מועד נבצרים:

1. א. תמר - 15 קמ"ש , יואב - 20 קמ"ש , דן - 12 קמ"ש. ב. 2 ק"מ.

2. א. כן. ב.(1) הוכחה. (2) $n = 9$. ג. הנוסחה נכונה.

3. א.(1) $n = 70$. (2) $\frac{76}{391}$. ב. $\frac{25}{84}$. ג. ההסתברות אינה גדולה פי 2 .

4. א. $\frac{1}{2}$. ב. הוכחה. ג. 12. ד. כן.

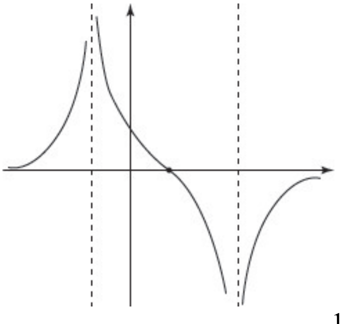
5. א. הוכחה. ב. $R^2\cos^2\alpha\tan 2\alpha$.

ג.(1) לא ייתכן. (2) $73.22°$, $33.56°$.

6. א.(1) עלייה: $x > c$ או $x < b$, ירידה: $b < x < c$.

(2) $\cup$: $x < b$ או $b < x < a$, $\cap$: $a < x < c$ או $c < x$.

ב.



ג. $a = \frac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 3$.

ד.(1) הוכחה. (2) $\frac{1}{12}$.

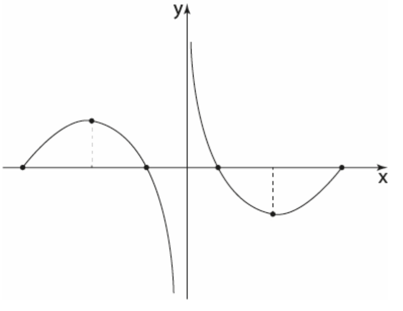
.7 א.(1) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$. (2) $x = \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$.

ב. תחומי החיוביות של $f(x)$: $2.798 < x < \frac{3\pi}{2}$ או $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

תחומי השליליות של $f(x)$: $\frac{\pi}{2} < x < 2.798$.

ג. $g(x)$ הינה פונקציה אי-זוגית. ד.(1) הוכחה. סוג הקיצון הוא מינימום .

(2)



.8 א. $0 < x < \frac{K}{3}$. ב. $0.21K$. ג. הוכחה.

מבחן בגרות מספר 45

קיץ תשפ״ב, 2022, מועד א

גרסה 1

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

1. מכונית יצאה מבאר שבע לחיפה במהירות קבועה v_1 . באותו הזמן בדיוק יצאה משאית מחיפה לבאר שבע במהירות קבועה v_2 .
המרחק בין חיפה לבאר שבע הוא 210 ק״מ.
המשאית נעצרה בצד הדרך עקב תקלה, לפני שחלפה המכונית על פניה. באותו הזמן המרחק בין המשאית לבין המכונית היה 96 ק״מ.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. הביעו באמצעות v_1 ו- v_2 את הזמן שחלף מרגע תחילת הנסיעה ועד שנעצרה המשאית בצד הדרך.

זמן שהיית המכונית בצד הדרך היה גדול פי 1.5 מן הזמן שחלף מרגע יציאתה מחיפה עד לרגע עצירתה.
המשאית יצאה שוב לדרך באותה המהירות, v_2 , בדיוק ברגע שבו חלפה המכונית על פניה.

ב. מצאו את היחס בין מהירות המכונית לבין מהירות המשאית.

128 דקות לאחר שיצאה המשאית שוב לדרך, היא הגיעה לבאר שבע.

ג. מצאו את מהירות המכונית ואת מהירות המשאית.

2. סדרה I היא סדרה הנדסית אין-סופית שאיבריה הם $a_1, a_2, a_3, ...$

ומנתה היא $9 \cdot r^2$.

נתון: $0 < r < \frac{1}{3}$.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

בין כל שני איברים בסדרה I הכניסו איבר נוסף, ונוצרה סדרה הנדסית חדשה יורדת, סדרה II, שאיבריה הם $b_1, b_2, b_3, ...$ ומנתה היא q.

א. **(1)** הביעו את q באמצעות r.

(2) הסבירו מדוע שתי הסדרות I ו-II מתכנסות.

נתון כי סכום סדרה II גדול פי $\frac{4}{3}$ מסכום סדרה I.

ב. חשבו את q.

נתון כי סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה II הוא 12.

ג. מצאו את סכום כל האיברים של סדרה II במקומות שמתחלקים ב-5 $(b_5, b_{10}, b_{15}, ...)$.

ד. מצאו בסדרה II את היחס בין האיבר החמישי לבין סכום כל האיברים שאחרי איבר זה.

ה. הוכיחו כי בכל סדרה הנדסית מתכנסת היחס בין איבר כלשהו לבין סכום כל האיברים שאחריו אינו תלוי במיקום של האיבר בסדרה.

3. נטע משחקת במשחק מסוים.

במשחק זה יש בדיוק שלוש תוצאות אפשריות: ניצחון, תיקו והפסד. ההסתברות שנטע תנצח במשחק גדולה פי 3 מן ההסתברות שהיא תפסיד במשחק.

נסמן ב- p את ההסתברות שנטע <u>תפסיד</u> במשחק $(p > 0)$.

בשאלה כולה תוצאות המשחקים אינן תלויות זו בזו.

נתון שאם נטע משחקת 2 משחקים בזה אחר זה, ההסתברות שהיא תנצח במשחק אחד לפחות היא $4.5p$.

א. מצאו את הערך של p.

נטע שיחקה 5 משחקים בזה אחר זה.

ב. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח ב- 3 משחקים לפחות.

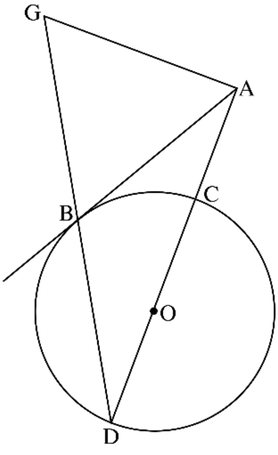
ג. מצאו את ההסתברות שנטע תנצח בשלושת המשחקים הראשונים לפחות.

ד. **(1)** מצאו את ההסתברות שנטע לא תפסיד בשום משחק.

(2) ידוע כי נטע הפסידה במשחק אחד לפחות.

מהי ההסתברות שהיא ניצחה בשלושת המשחקים הראשונים וקיבלה תוצאת תיקו במשחק האחרון?

4. נתון מעגל שרדיוסו R ומרכזו O.
מנקודה A שמחוץ למעגל יוצאים שלושה ישרים:
הישר AB משיק למעגל בנקודה B,
הישר AD עובר דרך מרכז המעגל O
וחותך את המעגל בנקודות C ו- D,
והישר AG מאונך לישר AD
(ראו סרטוט).



הנקודות D, B ו- G נמצאות על ישר אחד,
כמתואר בסרטוט.
נסמן: $\sphericalangle ADB = \alpha$.

א. הביעו את כל זוויות המשולש ABG באמצעות α.

ב. הוכיחו: $\frac{DB}{BC} = \frac{AB}{AC}$.

נתון: $AC = \frac{1}{2}DC$, $AG = 8$.

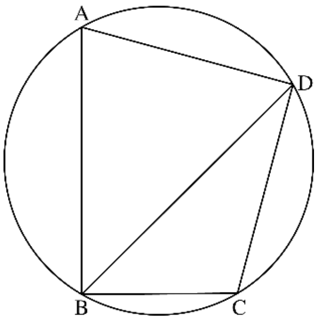
ג. חשבו את R.

נסמן ב- S את שטח המשולש BDC.

ד. **(1)** הוכיחו: $\Delta ADG \sim \Delta BDC$.

(2) הביעו את שטח המשולש ADG באמצעות S.

5. מרובע ABCD חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O (ראו סרטוט).



נסמן: $\sphericalangle DAB = \alpha$, α היא זווית חדה.

א. הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות α ו- R.

נתון: $BC = R$, $CD = R\sqrt{2}$.

ב. חשבו את α.

נתון: BD הוא חוצה זווית ABC.

ג. חשבו את גודל הזווית ABD.

נסמן ב- h_1 את הגובה שיורד מקודקוד A במשולש ABD,
וב- h_2 את הגובה שיורד מקודקוד O במשולש BOD.

ד. חשבו את $\frac{h_1}{h_2}$.

6. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את התשובה.

(3) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$.

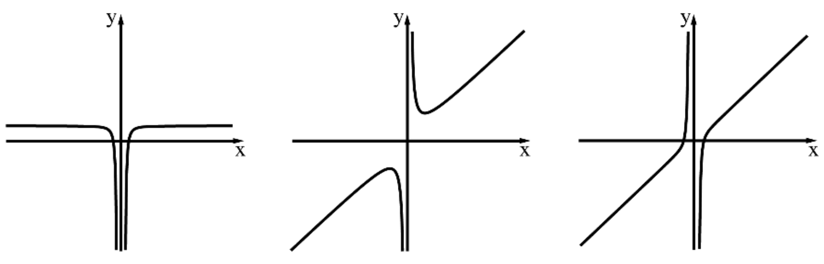
נתונות שתי פונקציות: $f'(x)$ ו- $g(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת של $f(x)$

ו- $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x) \cdot f'(x)$.

הפונקציות $f'(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרות באותו התחום כמו הפונקציה $f(x)$.

ב. כל אחד מן הגרפים I-III שלפניכם מתאר את אחת הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $g(x)$. <u>לכל אחת</u> מן הפונקציות כתבו איזה גרף מתאר אותה. נמקו את התשובה.



גרף I **גרף II** **גרף III**

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקצייה $g(x)$ עם ציר ה- x.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי הפונקצייה $g(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{4}$ ו- $x = 4$.

ה. נתון: $1 < a$ הוא פרמטר. חשבו את $\int_{\frac{1}{a}}^{a} g(x)\,dx$.

נתונה הפונקצייה $h(x) = \int_{1}^{x} f'(t)\,dt$.

נתון כי הפונקצייה $h(x)$ מוגדרת בתחום $1 \le x$.

ו. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $h(x)$, וקבעו את סוגה.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2(\cos x)^2+\sin 2x}{2\cos x}$ בתחום $0\le x\le 2\pi$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) הסבירו מדוע לפונקצייה $f(x)$ אין אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x .

(3) מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. **(1)** הראו כי לכל x בתחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$ מתקיים : $f'(x)=\cos x-\sin x$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. **(1)** סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) k הוא מספר. מצאו את כל ערכי k שבעבורם יש למשוואה $f(x)=k$ פתרון יחיד (בתחום $0\le x\le 2\pi$).

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי שני הישרים $x=\frac{3}{4}\pi$ ו- $x=\frac{5}{4}\pi$.

8. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם גרף הפונקציה $g(x)$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- x .

נתון כי שיעור ה- x של הנקודה A נמצא בין שיעורי ה- x של נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x)$.

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A . t הוא פרמטר.

ב. הביעו באמצעות t את אורך הקטע AB .

ג. הנקודה O היא ראשית הצירים.

מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OAB .

ד. האם השטח המקסימלי של המשולש OAB מתקבל כאשר אורך הקטע AB הוא מקסימלי? נמקו את התשובה.

תשובות למבחן בגרות מספר 45– קיץ תשפ"ב, מועד א, 2022 – גרסה 1:

1. א. $t = \frac{114}{v_1+v_2}$. ב. $\frac{v_1}{v_2} = \frac{32}{25}$.

ג. מהירות המכונית (v_1) : 96 קמ"ש ; מהירות המשאית (v_2) : 75 קמ"ש .

2. א.(1) $q = 3r$. (2) להסביר. ב. $q = \frac{1}{3}$. ג. $S = \frac{48}{121} \approx 0.397$. ד. 2 .

ה. להוכיח .

3. א. $\frac{1}{6}$. ב. $\frac{1}{2}$. ג. $\frac{1}{8}$. ד.(1) $\frac{3125}{7776} \approx 0.4019$. (2) $\frac{54}{4651} \approx 0.0116$.

4. א. $\sphericalangle BAG = 2\alpha$, $\sphericalangle AGB = \sphericalangle ABG = 90 - \alpha$. ב. להוכיח.

ג. $R = \frac{8}{\sqrt{3}} \approx 4.619$. ד.(1) להוכיח. (2) $S_{ADG} = 3S$.

5. א. $BD = 2R\sin(\alpha)$. ב. $\alpha = 75°$. ג. $\sphericalangle ABD = 45°$.

ד. $\frac{h_1}{h_2} = 3 + \sqrt{3} \approx 4.732$.

6. א.(1) $x \neq 0$. (2) אי זוגית.

(3) תחומי עלייה: $1 < x$, $1 < x$

תחומי ירידה: $0 < x < 1$, $-1 < x < 0$.

ב. f(x) - גרף II , f′(x) - גרף III , g(x) - גרף I . ג. $(-1,0)$, $(1,0)$.

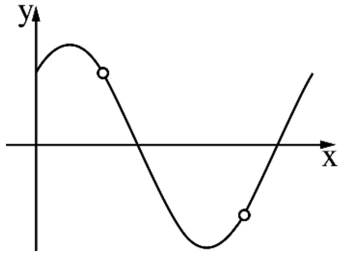
ד. 56.25 . ה. 0 . ו. מינימום: $(1,0)$.

7. א.(1) $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$ (2) להסביר .

(3) $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$, $(0,1)$ ב. (1) להראות (2) מינימום: $(0,1)$,

מקסימום: $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$, מינימום: $\left(\frac{5\pi}{4},-\sqrt{2}\right)$, מקסימום: $(2\pi,1)$.

ג. (1)



(2) $k=-1$, $k=-\sqrt{2}$, $k=\sqrt{2}$ ד. $\sqrt{2}$.

8. א. (1) תחום של $f(x)$: כל x , תחום של $g(x)$: $0 \le x$ (2) $(1,1)$, $(0,0)$.

ב. $AB = t - t^2$ ג. $S_{OAB} = \frac{128}{3125} \approx 0.04096$ ד. לא .

מבחן בגרות מספר 46

קיץ תשפ"ב, 2022, מועד ב

גרסה 1

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

.1 ארבעה רצים משתתפים במרוץ שליחים במסלול שאורכו 1,440 מטר. המסלול מחולק ל- 4 מקטעים שווים ובתחילת כל מקטע עומד אחד מן הרצים.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

כאשר נשמעת יריית הזינוק הרץ הראשון יוצא לדרך.
מייד כשהוא מגיע לסוף המקטע הראשון, הרץ השני יוצא לדרך, וכך הלאה עד שהרץ הרביעי מגיע לסוף המקטע שלו.

מהירות הרץ השני גדולה פי 1.5 ממהירות הרץ הראשון.
מהירות הרץ השלישי קטנה פי 2 ממהירות הרץ השני,
ומהירות הרץ הרביעי שווה למהירות הרץ השלישי.
המהירות של כל אחד מן הרצים קבועה לאורך המקטע שלו.
ארבעת הרצים השלימו יחד את המסלול כולו
בשלוש דקות ו- 54 שניות סך הכול.

א. מצאו את מהירות הריצה של כל אחד מן הרצים.

הרץ השלישי והרץ הרביעי התאמנו כדי להגדיל את מהירות הריצה שלהם. כעבור זמן שוב השתתפו ארבעת הרצים במרוץ שליחים, באותו המסלול. כל אחד מהם רץ באותו מקטע שבו רץ בפעם הקודמת. סך זמן הריצה של הרץ השלישי והרץ הרביעי היה גדול פי 1.5 מסך זמן הריצה של שני הרצים הראשונים.

הרץ הראשון והרץ השני רצו באותה המהירות שבה רצו בפעם הקודמת. הרץ השלישי עבר כל 100 מטר ב- 2.5 שניות פחות מן הרץ הרביעי.

ב. **(1)** מצאו בכמה שניות זמן הריצה של הרץ השלישי קטן מזמן הריצה של הרץ הרביעי.

(2) האם כל אחד משני הרצים האלה, השלישי והרביעי, הגדיל את מהירות הריצה שלו? נמקו את התשובה.

.2 נתונה סדרה הנדסית אין-סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.

סרקו אותי לצפייה בפתרון

א. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $a_1 \cdot a_{2n} = a_n \cdot a_{n+1}$.

בעבור $2k$ האיברים הראשונים בסדרה A מתקיים כי מכפלת שני האיברים האמצעיים בסדרה שווה $10{,}935 \cdot a_1$.

נתון: $a_{2k-2} = 1{,}215$.

ב. מצאו את q (שתי אפשרויות).

נתון: $a_1 = 5$.

ג. **(1)** קבעו אם הסדרה A היא סדרה עולה, סדרה יורדת או סדרה לא עולה ולא יורדת. נמקו את התשובה.

(2) מצאו את k.

מן הסדרה A בונים את הסדרה האין סופית B באופן הזה:

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$$

ד. הוכיחו שהסדרה B היא סדרה הנדסית.

בסדרה B מחליפים את הסימן של כל האיברים במקומות האי- זוגיים כך שמתקבלת הסדרה C שלפניכם:

$$-\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, -\frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$$

ה. מצאו את סכום הסדרה C.

3. בעיר גדולה בישראל נערך סקר ובו נבדקה רמת השליטה בשפה האנגלית בקרב תושבי העיר.

בסקר השתתפו אנשים רבים - מבוגרים וצעירים.

בסקר נמצא שמספר המבוגרים ששולטים באנגלית גדול פי 3 ממספר הצעירים ששולטים בה, ומספר המבוגרים שלא שולטים באנגלית גדול פי $2\frac{2}{3}$ ממספר המבוגרים ששולטים בה.

נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר ששולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

א. מצאו את ההסתברות לבחור באקראי מבוגר ששולט באנגלית מבין כלל המבוגרים שהשתתפו בסקר.

ב. בוחרים באקראי שלושה מבוגרים מבין המבוגרים שהשתתפו בסקר. מצאו את ההסתברות שבדיוק שניים מהם שולטים באנגלית.

ג. **(1)** הביעו באמצעות p את ההסתברות לבחור באקראי צעיר שלא שולט באנגלית מבין כלל המשתתפים בסקר.

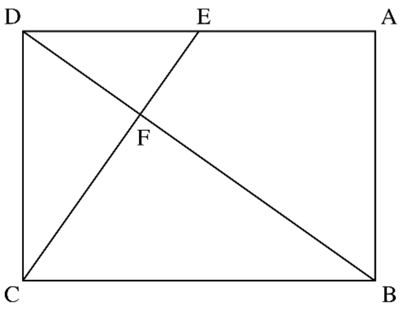
(2) הראו כי תחום הערכים האפשרי בעבור p הוא $0 < p < \frac{1}{12}$.

ידוע כי ההסתברות לבחור באקראי מבוגר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית שווה להסתברות לבחור באקראי צעיר מבין משתתפי הסקר שלא שולטים באנגלית.

ד. מצאו את הערך של p .

ה. האם המאורעות "לשלוט באנגלית" ו"להיות מבוגר" תלויים זה בזה? נמקו את תשובתכם.

4. במלבן $ABCD$, הנקודה E נמצאת על הצלע AD .
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה F .
המרובע $EABF$ הוא בר חסימה במעגל.



א. הוכיחו : $\Delta DAB \sim \Delta BFC$.

נתון : $DE = EA$.

ב. חשבו את היחס $\frac{EF}{FC}$.

נסמן את שטח המשולש DEF ב- S .

ג. הביעו את שטחי המשולשים DFC ו- BFC באמצעות S .

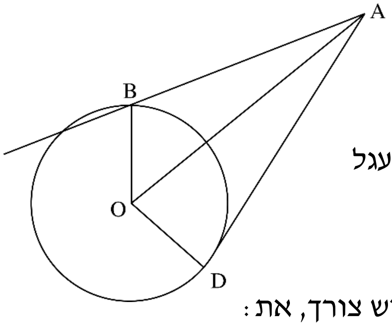
ד. חשבו את יחס הדמיון בין המשולש DAB ובין המשולש BFC .

נסמן : $DE = a$.

ה. **(1)** הביעו את אורך האלכסון BD באמצעות a .

(2) הביעו את קוטר המעגל החוסם את המרובע $EABF$ באמצעות a .

.5 נתון מעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R . מנקודה A , שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה D וישר אחר, שחותך את המעגל בנקודה B כמתואר בסרטוט.



נסמן: $\sphericalangle AOD = \alpha$, $\sphericalangle AOB = \beta$.

א. הביעו באמצעות α , β ו- R , אם יש צורך, את:

(1) אורך הקטע AO .

(2) אורך הקטע AB .

נתון: $AB = \sqrt{2}R$.

ב. הוכיחו כי $\cos\beta = \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

משולש ADO חסום במעגל אחר, שרדיוסו r .

נתון: $\frac{R}{r} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$.

ג. מצאו את גודלי הזוויות α ו- β .

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-9}{\sqrt{x+a}}$, a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטות מאונכות לצירים.

ב. **(1)** מצאו את a.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות הפונקציות $g(x)=-f(x+2)$, $h(x)=|f(x)|$.

ג. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

(2) האם שיעור ה-y של נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$ גדול משיעור ה-y של נקודת המקסימום של הפונקציה $h(x)$, קטן ממנו או שווה לו? נמקו את התשובה.

נתון כי $\int_{-3}^{k} g(x)dx=\int_{-1}^{3} h(x)dx$, $k>-3$.

ד. מצאו את k. הסבירו את התשובה.

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\sin^2(x)-\cos^2(x)-1$,
המוגדרת לכל x .

א. האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית? נמקו.

ב. הוכיחו כי לכל x מתקיים: $-2\le f(x)\le 0$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=f(2x)$, המוגדרת לכל x .

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$, וקבעו את סוגן.

ו. נתון כי $\int_0^{\frac{\pi}{8}}(g'(x)-f'(x))dx=S$.

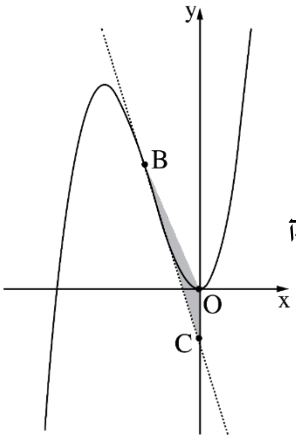
הביעו באמצעות S את $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0}(g'(x)-f'(x))dx$.

הסבירו את התשובה.

.8 נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 + 4x^2$,

המוגדרת לכל x .

הנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע השני (ראו סרטוט). מן הנקודה B מעבירים משיק לגרף הפונקציה $f(x)$. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C .



נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה B .

א. הביעו באמצעות t את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה B .

ידוע כי הנקודה C נמצאת מתחת לציר ה- x .

ב. מהו תחום הערכים של t ?

הנקודה O היא ראשית הצירים.

ג. מצאו את השטח המקסימלי של המשולש OBC .

תשובות למבחן בגרות מספר 46 – קיץ תשפ"ב מועד ב, 2022 – גרסה 1:

1. א. מהירות הרץ הראשון: $6\frac{2}{3}$ מטר לשנייה

מהירות הרץ השני: 10 מטר לשנייה

מהירות הרץ השלישי: 5 מטר לשנייה

מהירות הרץ הרביעי: 5 מטר לשנייה.

ב. (1) ב- 9 שניות. (2) הרץ השלישי הגדיל את המהירות שלו

הרץ הרביעי לא הגדיל את המהירות שלו.

2. א. הוכחה. ב. $q_2 = 3$, $q_1 = -3$. ג. (1) הסדרה עולה. (2) $k = 4$.

ד. הוכחה. ה. $S_C = -\frac{3}{20}$.

3. א. $\frac{3}{11}$. ב. $\frac{216}{1331}$. ג.(1) $1-12p$. (2) הוכחה. ד. $\frac{1}{20}$.

ה. המאורעות תלויים זה בזה.

4. א. הוכחה. ב. $\frac{1}{2}$. ג. $S_{\Delta DFC} = 2S$, $S_{\Delta BFC} = 4S$. ד. $\sqrt{1.5}$.

ה. (1) $\sqrt{6}a$. (2) $\sqrt{3}a$.

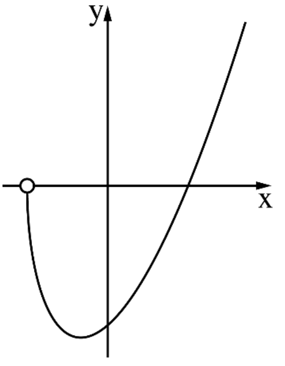
5. א. (1) $AO = \frac{R}{\cos\alpha}$. (2) $AB = R\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} + 1 - \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha}}$. ב. הוכחה.

ג. $\alpha = 58.05°$. , $\beta = 47.13°$.

6. א. $x > -a$. ב.(1) $a = 3$. (2) $(3,0)$, $(0,-3\sqrt{3})$.

(3) $(-1,-4\sqrt{2})$ מינימום.

(4)

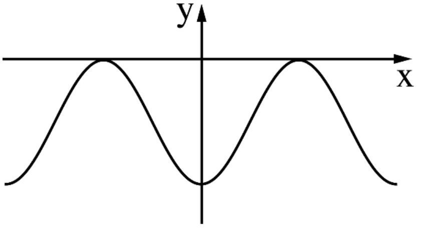


ג. (1) תחום ההגדרה של $g(x)$: $x > -5$

תחום ההגדרה של $h(x)$: $x > -3$. (2) שווה לו. ד. $k = 1$.

7. א. כן. ב. הוכחה. ג. $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,-2)$.

ד.



ה. $\left(-\frac{\pi}{2},-2\right)$ מינימום , $\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$ מקסימום , $(0,-2)$ מינימום,

$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ מקסימום , $\left(\frac{\pi}{2},-2\right)$ מינימום. ו. $-S$.

8. א. $y = (3t^2 + 8t)x - 2t^3 - 4t^2$. ב. $-2 < t < 0$. ג. $S_{\Delta OBC} = \frac{27}{16}$.

מבחן בגרות מספר 47

חורף תשפ״ג, 2023

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענו על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. לאורך גדת נהר יש שלוש תחנות: תחנה A, תחנה B ותחנה C שנמצאת בנקודה מסוימת בין תחנה A ובין תחנה B.
הנהר זורם מכיוון תחנה A לכיוון תחנה B במהירות קבועה.
שתי סירות, סירה I וסירה II, יצאו בשעה 8:00 מנקודה C ושטו לכיוונים הפוכים:
סירה I שטה (נגד הזרם) אל תחנה A, וסירה II שטה (עם הזרם) אל תחנה B.
מייד לאחר שכל אחת מן הסירות הגיעה לתחנה המתאימה, היא הסתובבה ושטה בכיוון ההפוך.
נתון כי המהירות של כל אחת מן הסירות במים עומדים היא קבועה.
המהירות של סירה I כאשר היא שטה עם הזרם הייתה גדולה פי 1.5 ממהירותה כאשר היא שטה נגד הזרם.
המהירות של סירה II כאשר היא שטה עם הזרם הייתה גדולה פי 4 ממהירותה של **סירה I** כאשר היא שטה נגד הזרם.
נסמן ב- x את מהירות הזרם בנהר.

א. הביעו באמצעות x את המהירות של סירה I במים עומדים ואת המהירות של סירה II במים עומדים.

סירה I הגיעה לתחנה A לאחר 3 שעות מרגע היציאה לדרך, ומייד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה B. סירה II הגיעה לתחנה B לאחר 7 שעות מרגע היציאה לדרך, ומייד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה A.

ב. **(1)** באיזו שעה נפגשו הסירות?

(2) האם הסירות נפגשו בין תחנה A לתחנה C או בין תחנה B לתחנה C? נמקו את תשובתכם.

הסירות נפגשו במרחק של 84 ק״מ מתחנה C.

ג. מהי מהירות הזרם בנהר?

2. נתונה סדרה הנדסית אין סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q.

בונים סדרה חדשה B שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

ב. בנוגע לכל אחד מן ההיגדים $(1)-(2)$ שלפניכם קבעו האם הוא נכון או לא נכון, ונמקו את קביעתכם.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת – בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

(2) אם הסדרה A יורדת – בהכרח היא גם מתכנסת.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{3}{5}$.

ג. מצאו את q.

נתון: n הוא מספר טבעי המקיים $\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+...+\frac{b_n}{a_n}=\frac{2059}{729}$.

ד. מצאו את n.

3. בחנות פירות יש ארגזים ובתוכם פירות.

בארגז א' יש a פירות: 3 תפוחים והשאר אגסים.

בארגז ב' יש b פירות: 5 תפוחים והשאר אגסים.

מוציאים באקראי פרי אחד מארגז א'. אם יצא תפוח – מעבירים אותו לארגז ב', ואם יצא אגס – מחזירים אותו לארגז א'.

לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.

א. הביעו באמצעות a ו- b את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.

נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא $\frac{9}{65}$.

ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ואחר כך אגס אחד היא $\frac{21}{130}$.

ב. מצאו את a ואת b.

ג. חשבו את ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח.

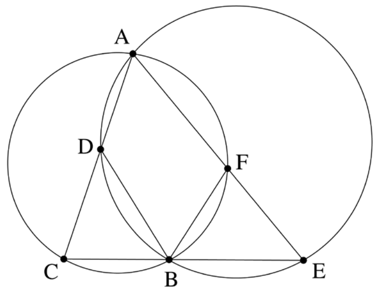
מעבירים את כל הפירות משני הארגזים לארגז אחר שהיה ריק, ומוציאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.

ד. מצאו את ההסתברות שב- 4 מן הפעמים יצא תפוח
או שבכל 6 הפעמים יצא אגס.

ה. ידוע שב- 4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח. מצאו את ההסתברות שהתפוחים יצאו ברציפות, בזה אחר זה.

ענו על אחת מבין השאלות 4-5.

4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו- B (ראו סרטוט).
המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D.
המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.
הקטע CE עובר דרך הנקודה B.



א. הוכיחו כי $\Delta ACE \sim \Delta BCD$.

נתון: $DC = FE$.

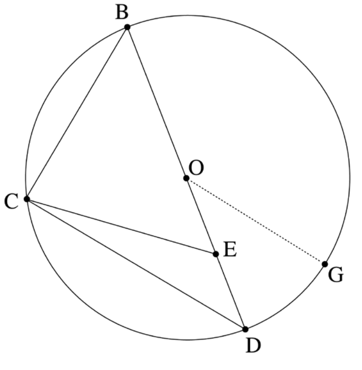
ב. הוכיחו כי $\Delta BFE \cong \Delta BCD$.

ג. **(1)** הוכיחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.

(2) הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE.

ד. הוכיחו כי $\sphericalangle DEC = \sphericalangle FCE$.

5. משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R.
הנקודות O ו- E נמצאות על הצלע BD, כך שמתקיים $OE = ED$ (ראו סרטוט).
נסמן: $CD = m$, $\sphericalangle CDB = \alpha$.



א. הביעו את $\cos\alpha$ באמצעות m ו- R.

ב. הוכיחו כי $CE = \frac{1}{2}\sqrt{2m^2 + R^2}$.

נתון: $BC = EC$.

ג. חשבו את α.

מעבירים רדיוס OG המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.

ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^n\cdot(x+1)^2$. $n>1$ הוא מספר טבעי.

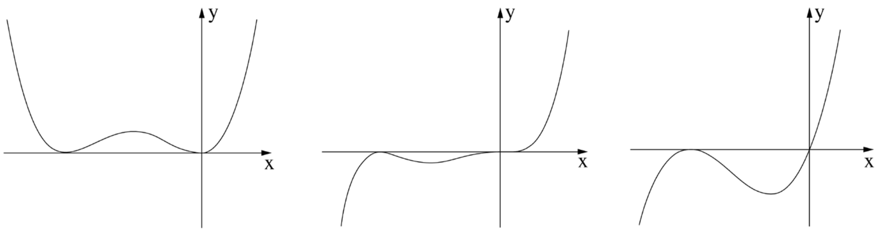
הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ב. מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה). הבחינו בין n זוגי ובין n אי-זוגי.

ג. מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות n , אם יש צורך. הבחינו בין n זוגי ובין n אי-זוגי.

לפניכם שלושה גרפים $\mathrm{I}-\mathrm{III}$. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור $n>1$ ואי-זוגי.



III II I

ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה גרף מתאר את הפונקציה $f(x)$ עבור $n>1$ ואי-זוגי. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקציה $g(x)=a\cdot f(x-2)$, a הוא פרמטר חיובי.

נסמן ב- T את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $g(x)$ ובין ציר ה- x .

ה. הביעו באמצעות a ו- T את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$ ובין ציר ה- x . נמקו את תשובתכם.

7. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{2\sin(x)}{\cos^2(x)-1}$ בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x.

(3) האם הפונקצייה זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את תשובתכם.

ב. ענו על התת-סעיפים $(1)-(2)$ שלפניכם בעבור התחום $0 \le x \le 2\pi$.

(1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ (בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$).

ד. הוכיחו כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה- x, בתחום $1.7 \le x \le 2$.

8. לפניכם שלוש פונקציות שלכל אחת מהן שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x)=\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}\ ,\ h(x)=\frac{x^3}{x(x+2)}\ ,\ k(x)=\frac{x^3-1}{x^2(x+2)}$$

ידוע שלאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקצייה מקיימת את כל התכונות האלה. נמקו את קביעתכם.

ענו על סעיפים ב-ד עבור הפונקציה שקבעתם בסעיף א.

ב. **(1)** מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ואת המשוואה של האסימפטוטה האנכית של הפונקצייה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה עם הצירים.

נתון כי לפונקצייה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה.

נסמן נקודה A על גרף הפונקצייה, שעבורה $x=t$, $-1<t<1$.

מן הנקודה A מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה- x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקצייה, כך שנוצר מלבן על ידי שני הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- x .

ד. מצאו את ערכו של t שבעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

תשובות למבחן בגרות מספר 47 - חורף תשפ"ג, 2023:

1. א. מהירות סירה I במים עומדים היא $5x$,

מהירות סירה II במים עומדים היא $15x$.

ב. (1) בשעה $20:00$. **(2)** בין תחנה B לתחנה C . **ג.** 2 קמ"ש.

2. א. הוכחה. $\frac{b_{n+1}}{b_n}=q^2$. **ב.** היגד (1) הוא נכון , היגד (2) הוא לא נכון .

ג. $q=\frac{2}{3}$. **ד.** $n=7$.

3. א. $\frac{18}{a(b+1)}=\frac{3}{a}\cdot\frac{6}{b+1}$. **ב.** $a=10$, $b=12$. **ג.** $\frac{7}{13}$. **ד.** 0.1726 . **ה.** $\frac{1}{5}$.

4. א. הוכחה . **ב.** הוכחה . **ג. (1)** הוכחה . **(2)** הוכחה . **ד.** הוכחה .

5. א. $\cos\alpha=\frac{m}{2R}$. **ב.** הוכחה . **ג.** $\alpha=37.76^\circ$. **ד.** $\sphericalangle OEG=115.38^\circ$.

6. א. $(-1,0)$, $(0,0)$.

ב. <u>עבור n זוגי</u> : תחום חיוביות : $0<x$ או $-1<x<0$ או $x<-1$;

תחום שליליות : אין .

<u>עבור n אי-זוגי</u> : תחום חיוביות : $0<x$;

תחום שליליות : $-1<x<0$ או $x<-1$.

ג. <u>עבור n זוגי</u> : $x=0$ מינימום , $x=-1$ מינימום , $x=-\frac{n}{n+2}$ מקסימום .

<u>עבור n אי-זוגי</u> : $x=-1$ מקסימום , $x=-\frac{n}{n+2}$ מינימום.

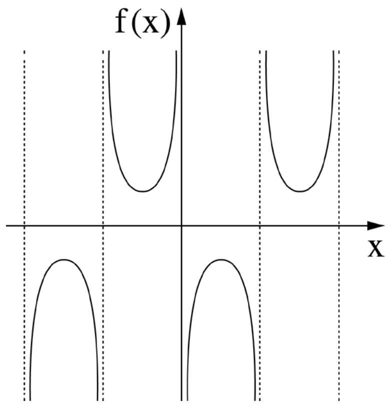
ד. <u>עבור n זוגי</u> : גרף III <u>עבור n>1 אי-זוגי</u> : גרף II . **ה.** $\frac{T}{a}$.

7. א. (1) $-2\pi < x < 2\pi$, $x \neq -\pi$, $x \neq \pi$, $x \neq 0$.

(2) $x = -\pi$, $x = -2\pi$, $x = 2\pi$, $x = \pi$, $x = 0$.   **(3)** אי-זוגית .

ב. (1) אין נקודות חיתוך עם הצירים. **(2)** $\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$ מקסימום , $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ מינימום.

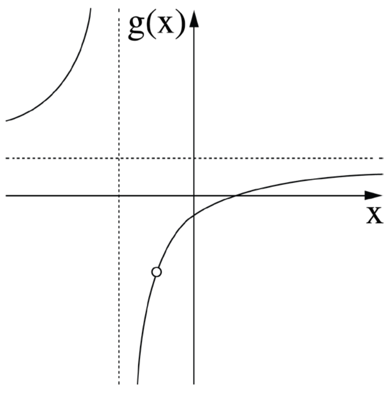
ג.



ד. הוכחה. **ה.** 0.182 .

8. א. g(x) . **ב. (1)** $y = 1$, $x = -2$. **(2)** $(1,0)$, $(0,-0.5)$.

ג.



ד. $t = -2 + \sqrt{3} = -0.268$.

מבחן בגרות מספר 48

קיץ תשפ"ג, מועד א, 2023

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענו על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. שני רוכבי אופניים, רוכב א' ורוכב ב', יצאו משני מקומות, A ו-B, בהתאמה, ורכבו זה לקראת זה.

המרחק בין המקומות A ו-B הוא $3d$ ק"מ (d הוא פרמטר חיובי).

רוכב ב' יצא לדרך 2.5 שעות אחרי שרוכב א' יצא לדרך.

בשעה $15:30$ התברר שכל אחד מן הרוכבים עבר שליש מן המרחק בין המקומות A ו-B. המהירות של כל אחד מן הרוכבים הייתה קבועה.

למוחרת שוב יצאו הרוכבים מאותם המקומות, A ו-B, ורכבו זה לקראת זה.
כל אחד מן הרוכבים רכב באותה המהירות שבה רכב ביום הראשון.
הפעם הם יצאו באותו הזמן ונפגשו כעבור 9 שעות.

א. **(1)** באיזו שעה ביום הראשון יצא רוכב א' ממקום A?

(2) הביעו באמצעות d את המהירות של כל אחד מן הרוכבים.

הזמן שנדרש לרוכב א' לעבור קילומטר אחד גדול ב-1.25 דקות מן הזמן שנדרש לרוכב ב' לעבור קילומטר אחד.

ב. מצאו את המרחק בין A ל-B.

2. נתונות שתי סדרות הנדסיות אין-סופיות מתכנסות, A ו- B ,
שכל איבריהן שונים מ- 0 .
האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A .
האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B .
משתי הסדרות ההנדסיות A ו- B , בונים סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת
חדשה, שאיבריה הם : $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, ..., \frac{a_n}{b_n}, ...$.
כל שלוש הסדרות, הסדרה A , הסדרה B והסדרה החדשה אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו- q_B .

הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת והסדרה B עולה.

ב. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים $(1)-(2)$ שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.

(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.

המספרים c_1 , c_2 ו- c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.

נתון כי c_2 שווה ל- $-c_1$, ומתקיים גם : $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{45}$.

ג. מצאו את c_1 .

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל- c_1 ,

ומתקיים גם : $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + ... = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ...}{b_1 + b_2 + b_3 + ...}$

ד. מצאו את הערך של q_B .

.3 במכללה גדולה, הועלתה הצעה לקצר את הפסקת הצוהריים כדי לסיים מוקדם יותר את יום הלימודים.
בעקבות זאת ערכו משאל ובו השתתפו כל תלמידי שנה א׳ וכל תלמידי שנה ב׳.
על פי תוצאות המשאל התברר כי 80% מן המשתתפים שבעד ההצעה הם תלמידי שנה א׳. עוד התברר כי מספר תלמידי שנה א׳ שבעד ההצעה שווה למספר תלמידי שנה ב׳ שנגד ההצעה. מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים.
נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה מבין כל התלמידים שהשתתפו במשאל.

א. בחרו באקראי אחד מתלמידי שנה ב׳. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה?

ידוע כי ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה א׳ הוא בעד ההצעה, גדולה ב- $\frac{13}{35}$ מן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה ב׳ הוא בעד ההצעה.

ב. חשבו את הערך של p.

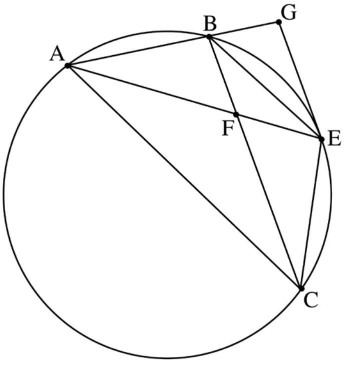
ג. בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל.
חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה:
I. המשתתף שנבחר הוא תלמיד שנה ב׳.
II. המשתתף שנבחר הוא בעד ההצעה.

ד. בחרו באקראי 5 מן המשתתפים במשאל.
ידוע כי כל החמישה שנבחרו הם תלמידי שנה ב׳.
מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם בעד ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

ענו על <u>אחת</u> מבין השאלות 5-4.

4. הנקודות A , B ו- C נמצאות על מעגל.



נקודה E היא אמצע הקשת BC , כמתואר בסרטוט שלפניכם.
בנקודה E מעבירים משיק למעגל.
המשיק חותך את המשך המיתר AB בנקודה G .
המיתרים AE ו- BC נחתכים בנקודה F .

א. הוכיחו: $\Delta ACE \sim \Delta AEG$.

נתון: $AG = 6$, $AE = 3\sqrt{6}$.

ב. חשבו את אורך המיתר AC .

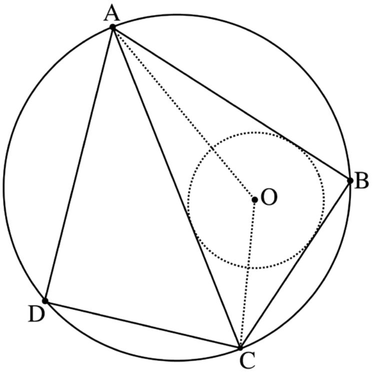
ג. הוכיחו: $BC \parallel GE$.

נתון: שטח המשולש ABF גדול פי 2 משטח המשולש BFE .

ד. חשבו את אורך המיתר AB .

ה. מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC ? נמקו.

5. דלתון $ABCD$ חסום במעגל שרדיוסו R .



המיתר AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון.
הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט).
נסמן: $\sphericalangle CAB = \alpha$.

א. **(1)** מצאו את זוויות המשולש AOC (הביעו באמצעות α במידת הצורך).

(2) הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו- R .

נתון כי אורך הקטע AO הוא $R\sqrt{2}$.

ב. מצאו את גודל הזווית α .

נתון כי שטח הדלתון הוא $25\sqrt{3}$.

ג. מצאו את R .

ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום במשולש ABC .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על <u>שתיים</u> מבין השאלות 8-6.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2a-x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x\neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו את תשובותיכם באמצעות a, אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

(2) הראו שהפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה אי-זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

(4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$, אם יש כאלה.

(5) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה $(\cup)$ ואת תחום הקעירות כלפי מטה $(\cap)$ של הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה גם הפונקצייה $g(x)=|f(x)|-b$, b הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת באותו תחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ היא: $(2,-3)$.

ד. מצאו את הערכים של a ו- b.

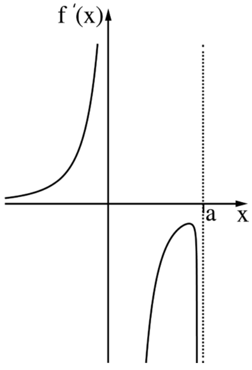
נתונה גם הפונקצייה $s(x)=\int_1^x g(t)dt$, המוגדרת בתחום $1<x$.

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.

7. נתונה הפונקצייה $f(x)$, המוגדרת בתחום $x \le a$, $x \neq 0$.

a הוא פרמטר חיובי.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x \neq 0$, $x < a$.

לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים שמשוואותיהן:

$x = 0$, $x = a$, $y = 0$.

בתחום $x < 0$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה.

הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקצייה $f(x)$. $f(a) = 0$.

א. **(1)** מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקצייה $f(x)$ (הביעו את תשובתכם באמצעות a, אם יש צורך). נמקו.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם בתת-סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים $I - IV$ שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

I. $\dfrac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ **II.** $\dfrac{\sqrt{x-a}}{x^2}$ **III.** $\dfrac{\sqrt{a-x}}{x}$ **IV.** $\dfrac{\sqrt{x-a}}{x}$

ג. איזה מן הביטויים $I - IV$ מייצג את הפונקציה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = (-2)$, הוא: $\frac{7}{16}$.

ד. מצאו את הערך של a .

ה. הציבו $a = 2$, וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $\left(f(x)\right)^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 1$.

8. נתון מעוין $ABCD$, נקודה E היא אמצע הצלע BC .

נסמן: $\sphericalangle ECD = x$. נתון: שטח המשולש ECD הוא 18.

א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.

ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE .

תשובות למבחן בגרות מספר 48 - קיץ תשפ"ג, מועד א, 2023:

1. א. (1) $08:00$. **(2)** מהירות רוכב א': $\frac{2}{15}d$, מהירות רוכב ב': $\frac{1}{5}d$.

ב. 360 קמ"ש.

2. א. $\frac{q_A}{q_B}$. **ב. (1)**. לא נכון. **(2)** נכון. **ג.** $-\frac{1}{15}$. **ד.** $\frac{1}{5}$.

3. א. 0.8. **ב.** $p = \frac{5}{12}$. **ג.** $\frac{3}{4}$. **ד.** $\frac{32}{125} = 0.256$.

4. א. הוכחה. **ב.** $AC = 9$. **ג.** הוכחה. **ד.** $AB = 4$. **ה.** $\frac{4}{9}$.

5. א. (1) $135°$, $\frac{1}{2}\alpha$, $45° - \frac{1}{2}\alpha$. **(2)** $AO = 2\sqrt{2}R\sin(45° - \frac{1}{2}\alpha)$.

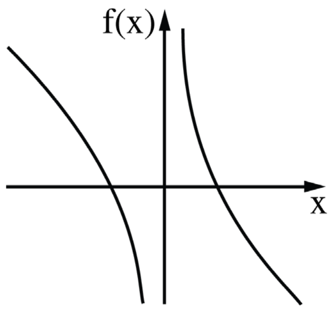
ב. $\alpha = 30°$. **ג.** $R = 5$. **ד.** 2.59.

6. א. (1) $x = 0$. **(2)** הוכחה. **(3)** $(\sqrt{2a},0)$, $(-\sqrt{2a},0)$.

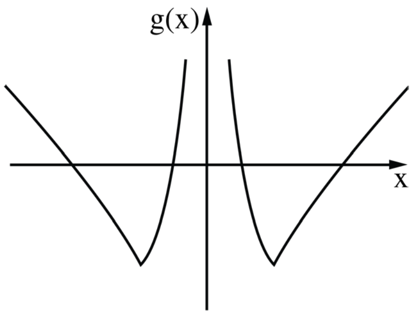
(4) תחומי עלייה: אין, תחומי ירידה: $x < 0$ או $x > 0$.

(5) קעירות כלפי מעלה $(\cup)$: $x > 0$, קעירות כלפי מטה $(\cap)$: $x < 0$.

ב.



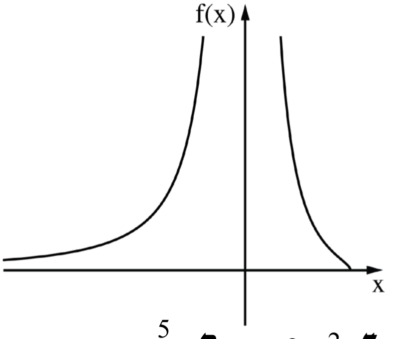
ג.



ד. $a = 2$, $b = 3$. **ה.** מינימום.

7. א. (1) תחום עלייה: $x < 0$, תחום ירידה: $0 < x < a$. **(2)** נקודת פיתול אחת.

ב.



ג. I . **ד.** $a = 2$. **ה.** $\frac{5}{24}$.

8. א. $\sqrt{\frac{72}{\sin x}}$. **ב.** $\sqrt{54}$.

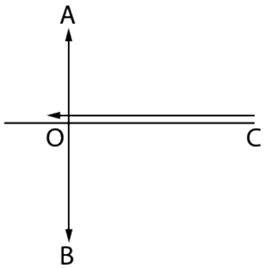
מבחן בגרות מספר 49

קיץ תשפ״ג, מועד ב, 2023

פרק ראשון – אלגברה והסתברות

ענו על שתיים מבין השאלות 1-3.

1. הנקודה A נמצאת מצפון לנקודה O והנקודה B נמצאת מדרום לנקודה O.
הנקודה C נמצאת ממזרח לנקודה O,
במרחק של 15 ק״מ ממנה, כמתואר בסרטוט.



ביום ראשון יצא אורי להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה A. באותו הזמן יצאה סמדר לריצה מן הנקודה C לכיוון הנקודה O.
מהירות הריצה של סמדר גדולה פי 3 ממהירות ההליכה של אורי.
נתון כי ברגע שהגיע אורי לנקודה A, המרחק האווירי בינו לבין סמדר היה $\sqrt{145}$ ק״מ. המהירויות של אורי ושל סמדר קבועות.

א. מצאו את המרחק שהלך אורי ואת המרחק שרצה סמדר ביום ראשון, אם נתון שסמדר חלפה בריצתה על פני הנקודה O.

באותו יום יצא בועז להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה B.
בועז יצא להליכה 20 דקות לאחר שיצא אורי להליכה. מהירות ההליכה של בועז הייתה קבועה וגדולה ב- 50% ממהירות ההליכה של אורי. כאשר הגיע אורי לנקודה A, המרחק בינו לבין בועז היה 18 ק״מ, ובאותו רגע שניהם עצרו.

ב. מצאו את מהירות ההליכה של אורי ואת מהירות ההליכה של בועז.

ביום שני יצאו אורי ובועז להליכה באותו הזמן. כל אחד מהם יצא מאותה הנקודה שבה עצר ביום ראשון, והמשיך ללכת באותו הכיוון שהלך ביום ראשון. בועז הקטין את מהירות הליכתו ב- v קמ״ש, ואורי הגדיל את מהירות הליכתו ב- v קמ״ש. שניהם עצרו כאשר המרחק ביניהם היה 24 ק״מ.

ג. מצאו כמה דקות הלך אורי ביום שני.

2. נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, ... a_{3n}$ שבה $3n$ איברים, וההפרש שלה הוא d.

נסמן ב- S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל- 0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים $a_1 = 19 \cdot |d|$.

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה:

$a_2, a_5, a_8, ..., a_{3n-4}$. סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 36.

ד. מצאו את d.

3. עיתון יומי המופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל ביתם בכל יום עד השעה $6:00$. מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן.

כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא.

מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא $\frac{3}{4}$, וההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא $\frac{5}{9}$.

נסמן ב- p את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה.

בוחרים באקראי אחד מן המנויים.

א. הביעו באמצעות p את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5 ממספר המנויים שגרים בתל אביב וקיבלו את העיתון בזמן.

ב. כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מנויים.

ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

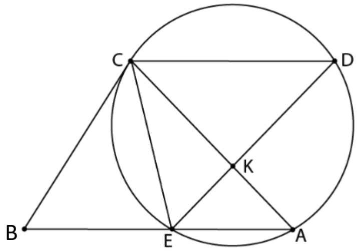
באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מהם גרים בחיפה?

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

ענו על אחת מבין השאלות 4-5.

4. מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C,
וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו- A, כמתואר בסרטוט.
הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA.
המיתרים ED ו- AC נחתכים בנקודה K.



א. הוכיחו: $\Delta CEB \sim \Delta DCE$.

נתון: $AK = 3$, $ED = 7$.
נסמן את שטח המשולש CEK ב- S.

ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.

נתון: $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$.

ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.

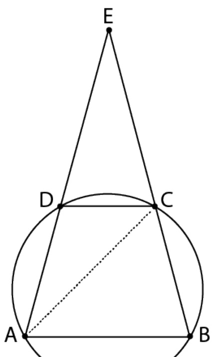
הנקודה O היא מרכז המעגל.

ד. הוכיחו: $\sphericalangle COE = \sphericalangle CKE$.

נתון: $\sphericalangle CAE = 45°$.

ה. הסבירו מדוע הנקודות O, C, E ו- K נמצאות על מעגל אחד.

5. נתון טרפז $ABCD$ $(AB \parallel DC)$, החסום במעגל.
המשכי הצלעות AD ו- BC נפגשים בנקודה E,
כמתואר בסרטוט. נתון: $\sphericalangle ACB = 60°$.
נסמן: $AC = k$, $\sphericalangle CDE = \alpha$.



א. **(1)** מצאו את זוויות המשולש ACE
(הביעו באמצעות α אם יש צורך).
(2) הביעו באמצעות α ו- k את אורכי
הצלעות AB ו- DC.

נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.

ב. מצאו את גודל הזווית α.

ג. מצאו את הערך של k שבעבורו אורך התיכון לצלע EC
במשולש AEC הוא $\sqrt{7}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש ,של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

ענו על שתיים מבין השאלות 6-8.

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-a^2}{(x-4)^2}$, $0<a<4$ הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים $(1)-(5)$. הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{x^2}{(x-4)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

ב. **(1)** הוכיחו כי גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי הישר $x=1$ ועל ידי ציר ה- y .

.7 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.

(3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

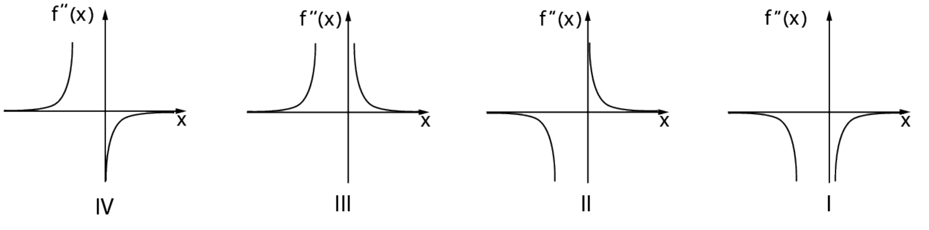
(4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. היעזרו בגרף הפונקציה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים $I-IV$ שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$. נמקו את קביעתכם.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=2$.

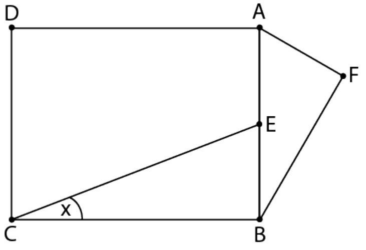


.8 הנקודה E היא אמצע הקטע AB .

על הקטע AB בונים מלבן $ABCD$ ומשולש ישר זווית AFB , $\sphericalangle AFB=90°$, כמתואר בסרטוט.

נתון : $\sphericalangle ECB=x$, $\sphericalangle FAB=2x$.

נסמן את אורך הקטע AB ב- h .



א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x ? הסבירו את תשובתכם.

ב. הביעו באמצעות x ו- h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF .

ג. מצאו את הערך של x שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.

ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן $ABCD$ לשטח המשולש AFB .

תשובות למבחן בגרות מספר 49 - קיץ תשפ״ג, מועד ב, 2023:

1. **א.** אורי - 8 ק״מ, סמדר - 24 ק״מ. **ב.** אורי - 4 קמ״ש, בועז - 6 קמ״ש.

ג. 36 דקות.

2. **א.** הוכחה. **ב.** שלילי. **ג.** 39. **ד.** -2.

3. **א.** $\frac{3}{5}p$. **ב.** 54%. **ג.** $\frac{90}{529}$. **ד.** 0.998.

4. **א.** הוכחה. **ב.** $\frac{4}{3}S$. **ג.** $\frac{175}{96}S$. **ד.** הוכחה. **ה.** הסבר.

5. **א.** **(1)** 120°, $180^\circ-2\alpha$, $2\alpha-120^\circ$. **(2)** $AB=\frac{\sqrt{3}k}{2\sin\alpha}$, $DC=\frac{k\cdot\sin(2\alpha-120^\circ)}{\sin\alpha}$.

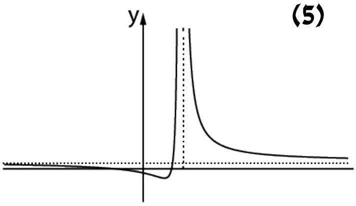
ב. $\alpha=75^\circ$. **ג.** $k=2$.

6. **א.** **(1)** $x\neq 4$. **(2)** $x=4$, $y=1$.

(3) $(0,-\frac{a^2}{16})$, $(a,0)$, $(-a,0)$.

(4) $x=\frac{a^2}{4}$, מינימום.

(5)



ב. **(1)**. הוכחה. **(2)** $\frac{a^2}{12}$.

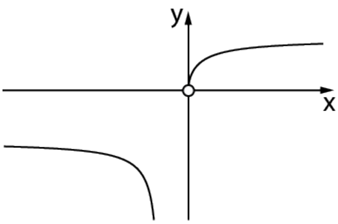
7. **א.** **(1)** $x<-1$ או $0<x$. **(2)** לא.

(3) $x=-1$, $y=2$ עבור $x\to\infty$,

$y=-2$ עבור $x\to-\infty$.

(4) עלייה: $x>0$, ירידה: $x<-1$.

ב.



ג. גרף I. **ד.** 0.217.

8. **א.** $0<x<45^\circ$. **ב.** $\frac{0.5h}{\sin x}-h\cdot\cos(2x)$. **ג.** $x=30^\circ$. **ד.** 4.

נוסחאון מתמטיקה

5 יחידות לימוד

אלגברה

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

משוואה ריבועית: $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

סדרות:

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה:	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n + d \end{cases}$	$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = a_n \cdot q \end{cases}$
איבר n־י:	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום:	$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ סכום אין־סופי: $S = \frac{a_1}{1-q}$

גדילה ודעיכה: כעבור זמן t : $M_t = M_0 \cdot q^t$, q — שיעור הגדילה (או הדעיכה) ליחידת זמן

לוגריתמים:

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \quad , \quad a^{\log_a b} = b \quad , \quad \log_a(a^b) = b \qquad (a, b, c > 0 \ ; \ a, b \neq 1)$$

$$\log_a(b^t) = t \cdot \log_a b \quad , \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad , \quad \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

הסתברות

נוסחת ברנולי — ההסתברות ל־k הצלחות מתוך n נסיונות בהתפלגות בינומית כאשר ההסתברות להצלחה היא p: $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ נוסחת בייס: $P(A/B) = \frac{P(B/A) \cdot P(A)}{P(B)}$

טריגונומטריה וגאומטריה

זהויות:

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$ $\qquad$ $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ $\qquad$ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

משפט הסינוסים: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (R — רדיוס המעגל החוסם)

משפט הקוסינוסים: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$ (γ היא הזווית הכלואה בין a ל- b)

אורך קשת של α רדיאנים: $\ell = \alpha R$ $\qquad$ שטח גזרה של α רדיאנים: $S = \frac{1}{2}\alpha R^2$

שטח משולש: $S = \frac{1}{2}\cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (α היא הזווית הכלואה בין b ל- c)

גופים במרחב

פירמידה וחרוט: נפח: $V = \frac{B \cdot h}{3}$ (B — שטח הבסיס, h — גובה הגוף)

חרוט: שטח מעטפת: $M = \pi R \ell$ (R — רדיוס העיגול, ℓ — הקו היוצר)

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

נגזרות:

$(x^t)' = tx^{t-1}$ (t ממשי) $\qquad$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x$ $\qquad$ $(\sin x)' = \cos x$

$(\ell og_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ell na}$ $\qquad$ $(a^x)' = a^x \cdot \ell na$

נגזרת של מכפלת פונקציות: $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

נגזרת של מנת פונקציות: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

נגזרת של פונקציה מורכבת: $[f(u(x))]' = f'(u)\cdot u'(x)$

$u'(x)$ היא נגזרת של u לפי x (נגזרת פנימית)

ו- $f'(u)$ היא נגזרת של f לפי u (נגזרת חיצונית)

אינטגרלים:

$\int x^t dx = \frac{x^{t+1}}{t+1} + C$ (t ממשי, $t \neq -1$)

אם F(x) היא פונקציה קדומה של הפונקציה f(x) אז: $\int f(mx+b)dx = \frac{1}{m}F(mx+b) + C$

$\int f[u(x)] \cdot u'(x)\,dx = F[u(x)] + C$

מספרים מרוכבים

משפט דה־מואבר: $[R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

פתרונות המשוואה $z^n = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$: $z_k = \sqrt[n]{R}\,[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)]$

$k = 0, 1, 2, ..., n-1$

וקטורים

אורך של וקטור: $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

מישור דרך קצות הווקטורים $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$: $\underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) + s(\underline{c} - \underline{a})$

מכפלה סקלרית: $\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = |\underline{x}| \cdot |\underline{y}| \cos\alpha$

מרחק בין נקודה $\underline{p}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\frac{|\underline{v} \cdot \underline{p} + e|}{|\underline{v}|}$

מציאת זווית בין הישר $\underline{a} + t\underline{b}$ למישור $\underline{v} \cdot \underline{x} + e = 0$: $\sin\beta = \frac{|\underline{v} \cdot \underline{b}|}{|\underline{v}| \cdot |\underline{b}|}$

מציאת זווית בין המישורים $\underline{v}_1 \cdot \underline{x} + e_1 = 0$, $\underline{v}_2 \cdot \underline{x} + e_2 = 0$: $\cos\alpha = \frac{|\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2|}{|\underline{v}_1| \cdot |\underline{v}_2|}$

גאומטריה אנליטית

קו ישר:

שיפוע, m , של ישר העובר דרך הנקודות (x_1, y_1) (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר $y = mx + b$ עם שיפוע m , העובר בנקודה (x_1, y_1) : $y - y_1 = m(x - x_1)$

שיעורי הנקודה C המחלקת (בחלוקה פנימית) את הקטע
שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ביחס $\frac{AC}{BC} = \frac{k}{\ell}$: $\left(\frac{\ell x_1 + kx_2}{k + \ell}, \frac{\ell y_1 + ky_2}{k + \ell}\right)$

שני ישרים, בעלי שיפועים m_1, m_2 מאונכים זה לזה אם ורק אם $m_1 \cdot m_2 = -1$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $Ax + By + C = 0$: $d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$

מעגל:

משוואת המשיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ בנקודה (x_0, y_0) על המעגל:

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = R^2$$

פרבולה:

משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה (x_0, y_0) על הפרבולה: $y \cdot y_0 = p(x + x_0)$

מדריך של פרבולה: $x = -\frac{p}{2}$

מוקד של פרבולה: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

אליפסה:

משוואת אליפסה: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

מרחק המוקד מהראשית: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

סכום מרחקי נקודה על האליפסה מהמוקדים: $r_1 + r_2 = 2a$