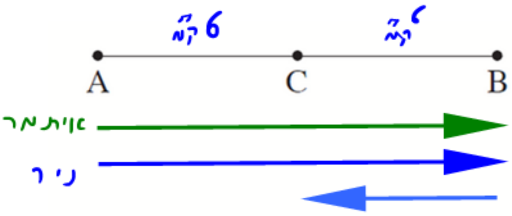
פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ד, 2024, שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"



.1 היישובים A ו־ B נמצאים במרחק 12 ק"מ זה מזה.

היישוב C נמצא באמצע הדרך ביניהם (ראו סרטוט).

איתמר וניר יצאו להליכה בשעה 8:00 .

איתמר הלך במהירות קבועה מיישוב A ליישוב B .

ניר הלך מיישוב A ליישוב B , ומייד כשהגיע ליישוב B חזר ליישוב C .

המהירות של ניר בדרך ליישוב B הייתה גדולה ב־ 2 קמ"ש מן המהירות של איתמר.

המהירות של ניר בדרך חזרה מן היישוב B (עד ליישוב C) הייתה שווה למהירות של איתמר.

איתמר הגיע אל היישוב B חצי שעה לפני שהגיע ניר אל היישוב C .

א. מצאו את מהירות ההליכה של איתמר, אם נתון כי המהירות שלו קטנה מ־ 5 קמ"ש.

ב. מצאו באיזו שעה הגיע ניר ליישוב B .

כאשר היה ניר בדרכו חזרה ליישוב C הוא פגש את איתמר.

ג. מצאו באיזו שעה נפגשו ניר ואיתמר.

פתרון שאלה 1

א. נסמן: x = מהירותו של איתמר

ולכן מהירותו של ניר בדרך מ A ל- B נבטא כ: x+2

הדרך כולה היא 12 ק"מ ונקודה C נמצאת באמצע ולכן הדרך מ B ל- C היא 6 ק"מ

	זמן	מהירות	דרך
איתמר ל-B		x	12
ניר ל- B		$x+2$	12
ניר בחזור ל- C		x	6

בעזרת הקשר, זמן כפול מהירות שווה דרך, נוכל לבטא את זמני כל מקטע:

הזמן שלקח לאיתמר להגיע מ A ל- B: $\frac{12}{x}$

הזמן שלקח לניר להגיע מ A ל- B: $\frac{12}{x+2}$

הזמן שלקח לניר לחזור ל- C: $\frac{6}{x}$

המשך שאלה 1

סך הזמן בו נער רצה היה ארוך בחצי שעה מסך הזמן בו אתמר רצה. נבנה משוואת זמנים

	זמן	מהירות	דרך
אתמר B-A	$\frac{12}{x}$	x	12
ניר B-A	$\frac{12}{x+2}$	$x+2$	12
ניר בחזור C-B	$\frac{6}{x}$	x	6

נכפול במ"מ $\cdot 2x(x+2)$

$$\frac{12}{x+2}+\frac{6}{x}=\frac{12}{x}+\frac{1}{2}$$

$$x\cdot 12+6\cdot 2(x+2)=2(12)+x(x+2)$$

$$24x+12x+24=24x+48+x^2+2x$$

$$0=x^2-10x+24$$

נפתור בעזרת נוסחת שורשים:

$$x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 24}}{2\cdot 1}\;\rightarrow\; x_1=6,\quad x_2=4$$

נתון כי מהירות של אתמר קטנה מ 5 קמ"ש ולכן נבחר בתוצאה $x=4$

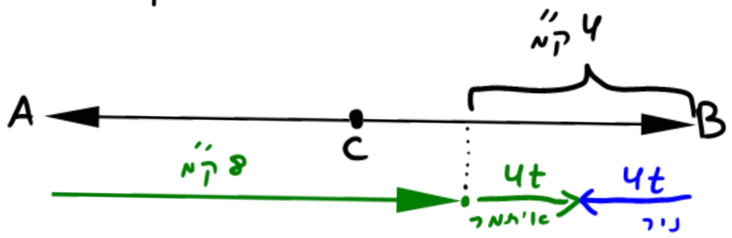
מהירות של אתמר היא 4 קמ"ש

ב. נציב $x=4$ ב לחשב זמן הריצה של ניר מ A-B

$$\frac{12}{x+2}=\frac{12}{4+2}=2$$

נער רצה שעתיים החל מ 8:00 ולכן הגיע ל B-A ב **10:00**

	זמן	מהירות	דרך
איתמר בשעתיים הראשונות	2	4	8
איתמר אחרי שניר הגיע ל B	t	4	$4t$
ניר אחרי שהגיע ל B	t	4	$4t$



ג. נחשב מה המרחק שעבר איתמר בשעתיים בהן הגיע ניר ל-B

$2\cdot4=8$

כלומר, בזמן שניר עבר 12 ק"מ והגיע ל-B, ניר התקדם 8 ק"מ לכיוון B ולכן המרחק בין ניר לאיתמר בסוף השעתיים הראשונות היה 4 ק"מ

$12-8=4$

נסמן: t = משך הזמן שחלף מהרגע בו הגיע ניר ל-B ועד לרגע הפגישה.

נכפול את מהירות כל אחד ב t כדי לבטא את המרחק:

המרחק שעבר ניר מ-B ועד לפגישה: $4t$

המרחק שעבר איתמר בזמן זה: $4t$

נבנה משוואת מרחקים - סכום המרחקים שעברו אחרי 10:00 יהיה 4:

$$4t+4t=4$$

$$8t=4$$

$$t=\frac{1}{2}$$

כלומר ניר ואיתמר נפגשו חצי שעה אחרי עשר בשעה **10:30**

2. מעגל שמרכזו M משיק לציר ה־ x בנקודה A . הנקודה O היא ראשית הצירים.
המעגל חותך את ציר ה־ y בנקודות B ו־ D , כמתואר בסרטוט.

נתון: $A(8,0)$, $D(0,16)$.

א. **(1)** מצאו את שיעורי הנקודה M .

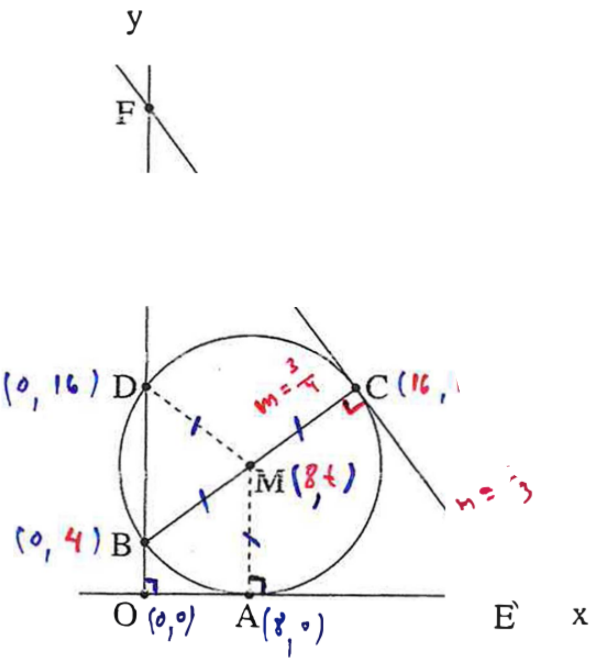
(2) מצאו את משוואת המעגל.

(3) מצאו את שיעורי הנקודה B .

הנקודה C נמצאת על המעגל כך ש־ BC הוא קוטר.
דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל, החותך את ציר ה־ x בנקודה E , ואת ציר ה־ y בנקודה F .

ב. מצאו את משוואת המשיק.

ג. האם הנקודה C היא מרכז המעגל החוסם את המשולש EFO ? נמקו את תשובתכם.



פתרון

א(1) נתון שהמעגל משיק לציר ה-x בנקודה A.
אם מעגל משיק לציר ה-x, אז לנקודת ההשקה ולמרכז המעגל יש אותו שיעור של x כלומר $x_M = x_A = 8$.
שיעור ה-y של M לא ידוע, ונוכל לסמן את M בהתאם נקבל $M(8,t)$.
במעגל הרדיוסים שווים, ולכן $MA=MD$.
נרשום את אורכי הרדיוסים MA ו-MD ונקבל משוואה.

$MA = t-0 = t$

ניעזר בנוסחא למרחק בין שתי נקודות, על-מנת לגלות את אורך MD.

מרחק $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$M(8,t)$; $D(0,16)$

$MD \rightarrow d = \sqrt{(0-8)^2+(16-t)^2}$

$\Downarrow$

$MD = \sqrt{(0-8)^2+(16-t)^2}$

נבנה משוואה:

* $\underbrace{t}_{MA} = \underbrace{\sqrt{(0-8)^2+(16-t)^2}}_{MD} \quad / (\ )^2$

נעלה בריבוע את המשוואה, ונקבל:

$t^2 = (0-8)^2+(16-t)^2$

$t^2 = 64 + (16-t)^2$

$\cancel{t^2} = 64 + 256 - 32t + \cancel{t^2}$

$32t = 320 \quad /:32$

$t = 10$

מכיוון שהעלנו בריבוע, יש לבדוק שהפתרון מקיים את המשוואה המקורית (*).
נבדוק זאת.

$$t = \sqrt{(0-8)^2 + (16-t)^2}$$

נציב $t=10$:

$$10 \stackrel{?}{=} \sqrt{(0-8)^2 + (16-10)^2}$$

$$10 = 10$$

✓

$m(8,t) \Rightarrow m(8,10)$

(ג)

רדיוס המעגל $= MA = t = 10$

$\uparrow$

מצאנו
בסעיף ה' (1)

נתון:

$M(8,10)$

$R = 10$

נציב בנוסחה למציאת משוואת מעגל על פי נקודת המרכז והרדיוס.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

$$\Downarrow$$

$$(x-8)^2+(y-10)^2=10^2$$

$$\Downarrow$$

$$(x-8)^2+(y-10)^2=100$$

ג) נמצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-y:

$$(x-8)^2+(y-10)^2=100$$

$$x=0 \rightarrow (0-8)^2+(y-10)^2=100$$

$$64+(y-10)^2=100$$

$$(y-10)^2=100-64$$

$$(y-10)^2=36$$

$$(y-10)=\pm\sqrt{36}$$

$$y-10=\pm 6$$

$y-10=6$ או $y-10=-6$

$$y=6+10 \qquad y=-6+10$$

$$y=16 \qquad y=4$$

נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-y:

$(0,16)$; $(0,4)$

נקודה C

תשובה: $B(0,4)$

ד) נתון BC קוטר, ולכן m (נקודת מרכז המעגל) היא אמצע הקטע BC.

נעזר בנוסחת אמצע קטע ונמצא נקודה C.

$B(0,4)$; $m(8,10)$; $C(\ ,\ )$

נקודת אמצע

$$x_{\text{אמצע}} = \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$8 = \frac{0+x_C}{2} \quad / \cdot 2$$

$$16 = 0 + x_C$$

$$16 = x_C$$

$$y_{\text{אמצע}} = \frac{y_1+y_2}{2}$$

$$10 = \frac{4+y_C}{2} \quad / \cdot 2$$

$$20 = 4 + y_C$$

$$16 = y_C$$

מכאן, $C(16,16)$

נעזר בשרטוט, משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

נמצא את שיפוע הרדיוס mC, ונמצא את שיפוע המשיק.

$M(8,10)$; $C(16,16)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{MC} = \frac{16-10}{16-8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

ישרים מאונכים (שאינם מקבילים לצירים) מקיימים: מכפלת השיפועים $= -1$

לכן,

$$m_{MC} \cdot m_{\text{משיק}} = -1$$

נציב ונקבל:

$$\frac{3}{4} \cdot m_{\text{משיק}} = -1 \quad / : \frac{3}{4}$$

$$m_{\text{משיק}} = -\frac{4}{3}$$

לכן, שיפוע המשיק הוא $-\frac{4}{3}$

נמצא את משוואת המשיק.

$$m = -\frac{4}{3}$$

$$C(16,16)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Downarrow$$

$$y - 16 = -\frac{4}{3}(x - 16)$$

$$y-16=-\frac{4}{3}x+21\frac{1}{3}$$

$$y=-\frac{4}{3}x+21\frac{1}{3}+16$$

$$y=-\frac{4}{3}x+37\frac{1}{3}$$

ג) המשולש EFO הוא ישר זווית ($\angle EOF = 90°$, EF - יתר).
נקודת מרכז המעגל החוסם משולש ישר זווית נמצאת באמצע היתר
(היתר הוא קוטר, מכיוון שהזווית ההיקפית הנשענת עליו שווה $90°$).
נמצא את נקודת אמצע היתר, וזוהי גם מרכז המעגל נקודה C.
E ו- F הן נקודות החיתוך של הישר עם ציר ה-x.
נמצא אותן.

$$y = -\frac{4}{3}x + 37\frac{1}{3}$$

$E(\ ,0)$; $F(0, \ )$

$$0 = -\frac{4}{3}x + 37\frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3}x = 37\frac{1}{3} \quad / : \frac{4}{3}$$

$$x = 28$$

$\Downarrow$

$E(28, 0)$

$$y = -\frac{4}{3} \cdot 0 + 37\frac{1}{3}$$

$$y = 37\frac{1}{3}$$

$F(0, 37\frac{1}{3})$

נמצא את אמצע EF בעזרת הנוסחה לאמצע קטע.

$E(28,0)$; $F(0,37\frac{1}{3})$

$x_{\text{אמצע}} = \frac{x_1+x_2}{2}$

$\Downarrow$

$x_{\text{אמצע}} = \frac{28+0}{2} = 14$

$y_{\text{אמצע}} = \frac{y_1+y_2}{2}$

$\Downarrow$

$y_{\text{אמצע}} = \frac{0+37\frac{1}{3}}{2} = 18\frac{2}{3}$

נקודת האמצע EF: $(14, 18\frac{2}{3})$

נקודה זו שונה מנקודה $C(16,16)$, מכאן שנקודה C אינה מרכז המעגל החוסם את המשולש EFO.

3. חנן משחק במשחק קליעה למטרה. במשחק זה יש שתי תוצאות אפשריות בלבד: קליעה או החטאה.

ההסתברות שחנן יקלע בניסיון הראשון היא $\frac{4}{5}$.

ההסתברות שחנן יקלע בניסיון השני תלויה בתוצאה של הניסיון הראשון:

אם חנן קולע בניסיון הראשון, ההסתברות שהוא יקלע בניסיון השני היא $\frac{3}{4}$.

אם חנן מחטיא בניסיון הראשון, ההסתברות שהוא יקלע בניסיון השני היא $\frac{3}{5}$.

לחנן יש שני ניסיונות קליעה למטרה.

א. מהי ההסתברות שחנן החטיא בניסיון הראשון וקלע בניסיון השני?

ב. **(1)** מהי ההסתברות שחנן קלע פעם אחת לפחות?

(2) ידוע שחנן קלע פעם אחת לפחות.

מהי ההסתברות שהוא קלע פעם אחת בדיוק?

גם לדני יש שני ניסיונות קליעה למטרה.

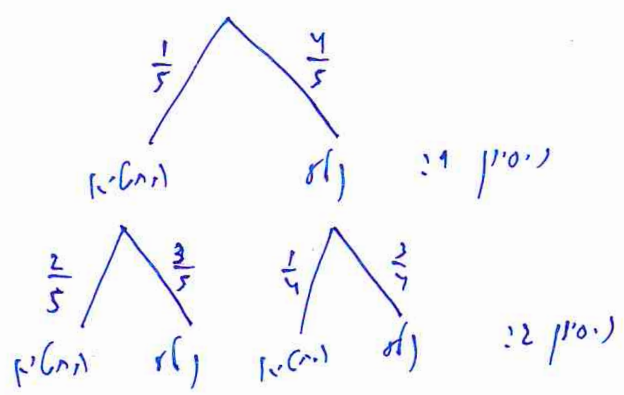
ההסתברות שדני יקלע בכל אחד מן הניסיונות היא p .

נתון כי ההסתברות שדני יקלע פעם אחת בדיוק שווה להסתברות שחנן יקלע פעם אחת בדיוק.

ג. מצאו את p (את שתי האפשרויות).

פתרון

נעזר בדיאגרמת עץ לתיאור כל המקרים האפשריים.



א) $P(\text{החטיא}, \text{קלע}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{25}$

ב) (1) $P(\text{קלע לפחות פעם אחת}) = 1 - P(\text{החטיא}, \text{החטיא}) = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$

ונכון גם:

$$P\left(\text{ילד נבחר לפחות פעם אחת}\right) = P(\text{ילד}, \text{ילד}) + P(\text{ילד}, \text{אחר}) + P(\text{אחר}, \text{ילד}) =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{23}{25}$$

(2) $P\left(\text{ילד דניאל פעם ראשונה} \,/\, \text{ילד נבחר פעם אחת}\right) = ?$

ניעזר בנוסחה להסתברות מותנית:

$$P(A/B) = \frac{P(A \overset{\text{וגם}}{\cap} B)}{P(B)}$$

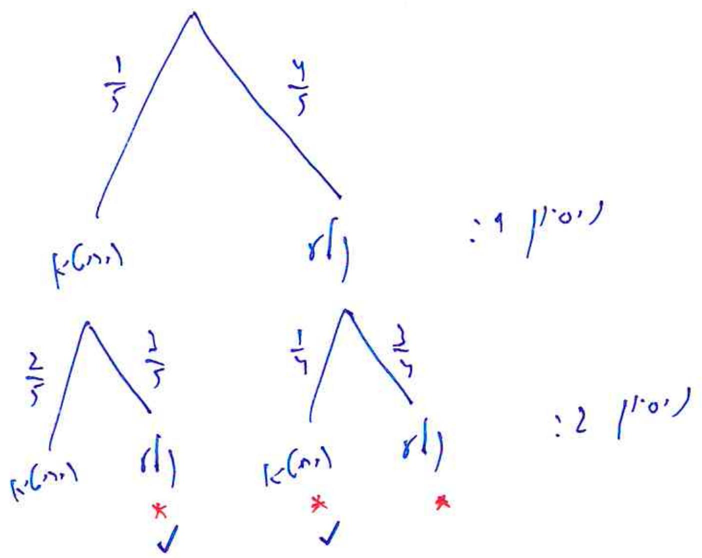
$$P\left(\text{ילד דניאל פעם ראשונה} \,/\, \text{ילד נבחר פעם אחת}\right) = \frac{P\left(\text{ילד דניאל פעם ראשונה וגם ילד נבחר פעם אחת}\right)}{P\left(\text{ילד נבחר פעם אחת}\right)} = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{23}{25}} =$$

$$= \frac{\frac{8}{25}}{\frac{23}{25}} = \frac{8}{23}$$

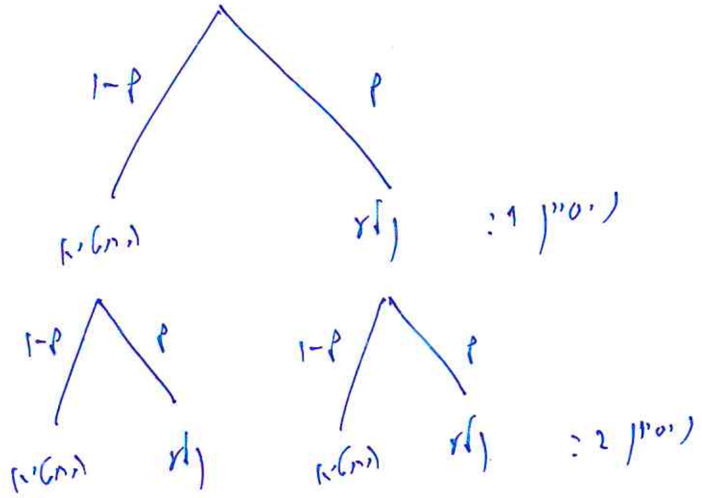
נסכם:

במכנה: מופיע המאורע שכן מתרחש (החלק התחתון), רק המסלולים המסומנים ב *.

במונה: מופיע המאורע שאנו מחפשים, מתוך המאורע שכן מתרחש. רק המסלולים המסומנים ב ✓



ו'



נתון: ההסתברות שבני ינצח פעם אחת בדיוק שווה להסתברות שחנן ינצח פעם אחת בדיוק.

נמצא תחילה: את ההסתברות שחנן ינצח בדיוק פעם אחת.
ונשווה להסתברות הזו שמצאנו לבני בסעיף ה.

$$P(\text{חנן ינצח בדיוק פעם אחת}) = P(\text{נצח, הפסד}) + P(\text{הפסד, נצח}) =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{8}{25}$$

נציב במשוואה p את ההסתברות שבני ינצח בדיוק פעם אחת.

נחשב בבינומית הזו שבדיוק אחד יעלה.

$$P\left(\text{מבין שני, בדיוק אחד עולה}\right) = P(\text{עלה}, \text{לא עלה}) + P(\text{לא עלה}, \text{עלה}) =$$

$$= p(1-p) + (1-p)p$$

נקבל משוואה בהתאם לנתון:

$$p(1-p) + (1-p)p = \frac{8}{25}$$

ההסתברות שמבין שניים יעלה בדיוק אחד

ההסתברות שמתוך שניים יעלה בדיוק אחד

נפתור את המשוואה:

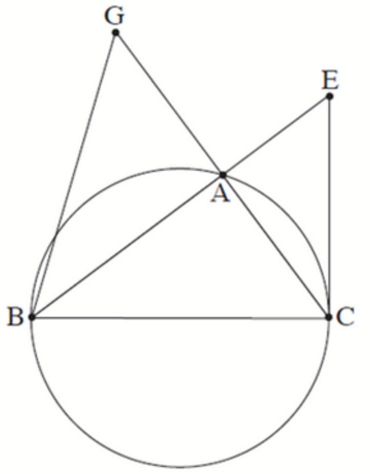
$$p - p^2 + p - p^2 = \frac{8}{25}$$

$$-2p^2 + 2p - \frac{8}{25} = 0$$

בעזרת מחשבון נקבל:

$$p_1 = \frac{4}{5}$$

$$p_2 = \frac{1}{5}$$



4. משולש ABC חסום במעגל. הצלע BC היא קוטר במעגל.

הנקודה G נמצאת על המשך הצלע CA, כמתואר בסרטוט.

דרך הנקודה C העבירו משיק למעגל, החותך את המשך הצלע BA בנקודה E.

נתון: $AC = AG$.

א. הוכיחו: $BC = BG$.

ב. הוכיחו: $\sphericalangle ECA = \sphericalangle ABG$.

ג. הוכיחו: $\Delta ACE \sim \Delta ABG$.

נתון: $AE \cdot AB = 12.25$.

ד. מצאו את אורך הקטע AC.

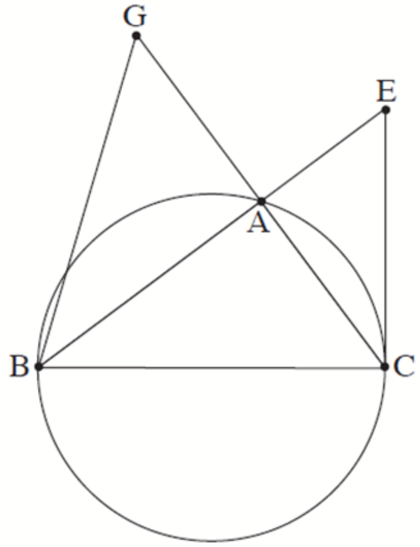
פתרון:

המספר	טענה	נימוק
1	BC קוטר	נתון
2	G על המשך AC	נתון
3	CE משיק למעגל	נתון
4	$AC = AG$	נתון
5	$\sphericalangle BAC = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה 90°, לפי 1
6	AB תיכון לצלע CG במשולש BCG	הגדרת תיכון, לפי 4
7	AB גובה לצלע CG במשולש BCG	הגדרת גובה, לפי 5

המספר	טענה	נימוק
8	משולש BCG שווה שוקיים	משולש שבו הגובה והתיכון לאותה צלע מתלכדים הוא שווה שוקיים. לפי 6, 7
9 מ.ש.ל. א'	$BG = BC$	לפי 8
10	$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABG$	הגובה התיכון וחוצה הזווית לבסיס, במשולש שווה שוקיים מתלכדים. לפי 8
11	$\sphericalangle ECA = \sphericalangle ABC$	זווית בין משיק למיתר לפי 3
12 מ.ש.ל. ב'	$\sphericalangle ECA = \sphericalangle ABG$	כלל המעבר. לפי 10, 11
13	$\sphericalangle EAC = \sphericalangle BAG$	זוויות קדקודיות שוות זו לזו
14 מ.ש.ל. ג'	$\triangle ACE \sim \triangle ABG$	משפט דמיון ז.ז. לפי 12, 13
15	$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{CE}{BG}$	יחס הצלעות המתאימות. המשולשים הדומים לפי 14

יואל גבע
לא מתפשרים.

המספר	טענה	נימוק
16	$AC \cdot AG = AB \cdot AE$	לפי 15
17	$AC^2 = AB \cdot AE$	הצבה. לפי 4
18	$AB \cdot AE = 12.25$	נתון
19	$AC^2 = 12.25$	הצבה. לפי 17, 18
20 משל. 3'	$AC = 3.5$	חישוב.



5. משולש ABC הוא משולש <u>שווה צלעות</u> החסום במעגל שרדיוסו 17 .

הנקודה D נמצאת על המשך הצלע BC , כמתואר בסרטוט.

א. מצאו את אורך הצלע AC .

נתון: $CD = 16$.

ב. מצאו את אורך הקטע AD .

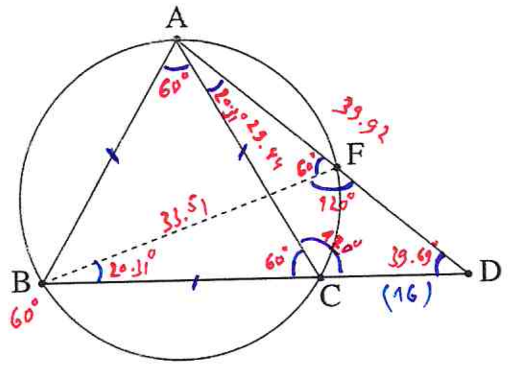
ג. מצאו את גודל הזווית CAD .

הנקודה F היא נקודת החיתוך של הקטע AD עם המעגל.

ד. מצאו את אורך המיתר BF .

ה. (1) מהו גודל הזווית FBC ?

(2) מצאו את שטח המשולש FBD .



פתרון

א) במשולש שווה צלעות, כל הצלעות שוות זו לזו, וכל זוויות המשולש הן 60°.

$AB = AC = BC$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 60°$

ΔABC חסום במעגל, רדיוס המעגל החוסם שווה 17 $(R=17)$.

נעזר במשפט הסינוס:
$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$

ΔABC:

$$\frac{AC}{\sin \sphericalangle ABC} = 2R$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AC}{\sin 60°} = 2 \cdot 17$$

$$\frac{AC}{\sin 60°} = 34 \quad / \cdot \sin 60°$$

$$AC = 29.44$$

ד)

$\angle ACD = 180° - \angle ACB =$

$= 180° - 60° = 120°$

(זוויות צמודות - סכומן 180°)

נעזר במשפט הקוסינוסים

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$\underline{\Delta ACD:}$

לפי משפט הקוסינוסים:

$$(AD)^2 = (AC)^2 + (CD)^2 - 2 \cdot AC \cdot CD \cdot \cos\angle ACD$$

נציב ונקבל:

$$(AD)^2 = (29.44)^2 + 16^2 - 2 \cdot 29.44 \cdot 16 \cdot \cos 120°$$

$$(AD)^2 = 1593.8$$

$$AD = \sqrt{1593.8}$$

$$AD = 39.92$$

ג) נעזר במשפט הסינוסים.

DACD:

$$\frac{CD}{\sin\measuredangle CAD} = \frac{AD}{\sin\measuredangle ACD}$$

נציב ונקבל:

$$\frac{16}{\sin\measuredangle CAD} = \frac{39.92}{\sin 120^\circ}$$

$$\sin\measuredangle CAD = \frac{16\cdot\sin 120^\circ}{39.92}$$

$$\measuredangle CAD = 20.31^\circ$$

הערה:

הפתרון השני $180^\circ-20.31^\circ$, שהוא 159.69°, נפסל
מכיוון שיש במשולש זווית קהה $(\measuredangle ACD=120^\circ)$, ולא תיתכנה
שתי זוויות קהות במשולש.

3) נמצא זווית.

$\sphericalangle DBF = \sphericalangle CAF = 20.31^\circ$

(זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת
שוות זו לזו)

$\sphericalangle AFB = \sphericalangle ACB = 60^\circ$

(זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת
שוות זו לזו)

$\sphericalangle BFD = 180^\circ - \sphericalangle AFB =$

$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

(זוויות צמודות - סכומן 180°)

<u>$\triangle BDF$:</u>

$\sphericalangle D = 180^\circ - (20.31^\circ + 120^\circ) = 39.69^\circ$

(סכום זוויות במשולש הוא 180°)

$BD = BC + CD =$

$= 29.44 + 16 = 45.44$

$\underline{\Delta BDF:}$

לפי משפט הסינוסים:

$$\frac{BF}{\sin \measuredangle D} = \frac{BD}{\sin \measuredangle BFD}$$

נציב ונקבל:

$$\frac{BF}{\sin 39.69^\circ} = \frac{45.44}{\sin 120^\circ}$$

$$BF = \frac{45.44 \cdot \sin 39.69^\circ}{\sin 120^\circ}$$

$BF = 33.51$

ו) 1)

$\sphericalangle FBC = \sphericalangle DBF = 20.31^\circ$

(מצאנו בסעיף ג)

2) נשתמש בנוסחה לשטח משולש לפי שתי צלעות והזווית שביניהן:

$$S_\Delta = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$

$$S_{\Delta FBD} = \frac{FB \cdot BD \cdot \sin\sphericalangle FBD}{2}$$

נציב ונקבל:

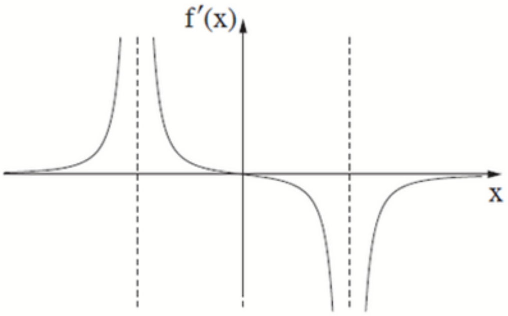
$$S_{\Delta FBD} = \frac{33.51 \cdot 45.44 \cdot \sin 20.31^\circ}{2} = 264.3$$

יואל גבע
לא מתפשרים.

6. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $x \neq \pm 3$.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,
המוגדרת באותו התחום.

גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה־ x רק בנקודה $(0, 0)$.



א. מצאו את שיעור ה־ x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$,
וקבעו את סוגה.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה היא $y = 2$.
אחד מן הביטויים I–III שלפניכם מייצג את הפונקציה $f(x)$.

I. $\frac{x^2}{x^2+9}+1$ **II.** $\frac{x^2}{x^2-9}+2$ **III.** $\frac{x^2}{x^2-9}+1$

ג. קבעו איזה מן הביטויים I–III מייצג את הפונקציה $f(x)$. נמקו את קביעתכם.

ד. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ו. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישר $x = 2$.

פתרון שאלה 6

א. בנק' הקיצון של $f(x)$ מתקיים $f'(x)=0$
לפי הנתונים רק עבור $x=0$ נקבל שהנגזרת מתאפסת.
משמאל ל $x=0$ הנגזרת חיובית, ומימין ל $x=0$ הנגזרת
שלילית מכאן נסיק שב $x=0$ יש נק' מקסימום.

ב. תחומי עלייה: $-3<x<0$ או $x<-3$

תחומי ירידה: $3<x$ או $0<x<3$

המשך שאלה 6

ג. נבחר בביטוי III

ניתן לפסול את ביטוי I כיוון שתחום ההגדרה שלו אינו תואם לנתונים

ניתן לפסול את ביטוי II כיוון שהאסימפטוטה האופקית שלו אינה $y=2$

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-9}+1$$

3. נציב $f(x)=0$ לקבלת נק' חיתוך עם ציר x:

$$\frac{x^2}{x^2-9}+1=0 \quad / \text{נכפול במ״מ } \cdot(x^2-9)$$

$$x^2+x^2-9=0$$
$$2x^2=9$$
$$x^2=4.5$$
$$x=\pm 2.121$$

נק' חיתוך עם ציר x:

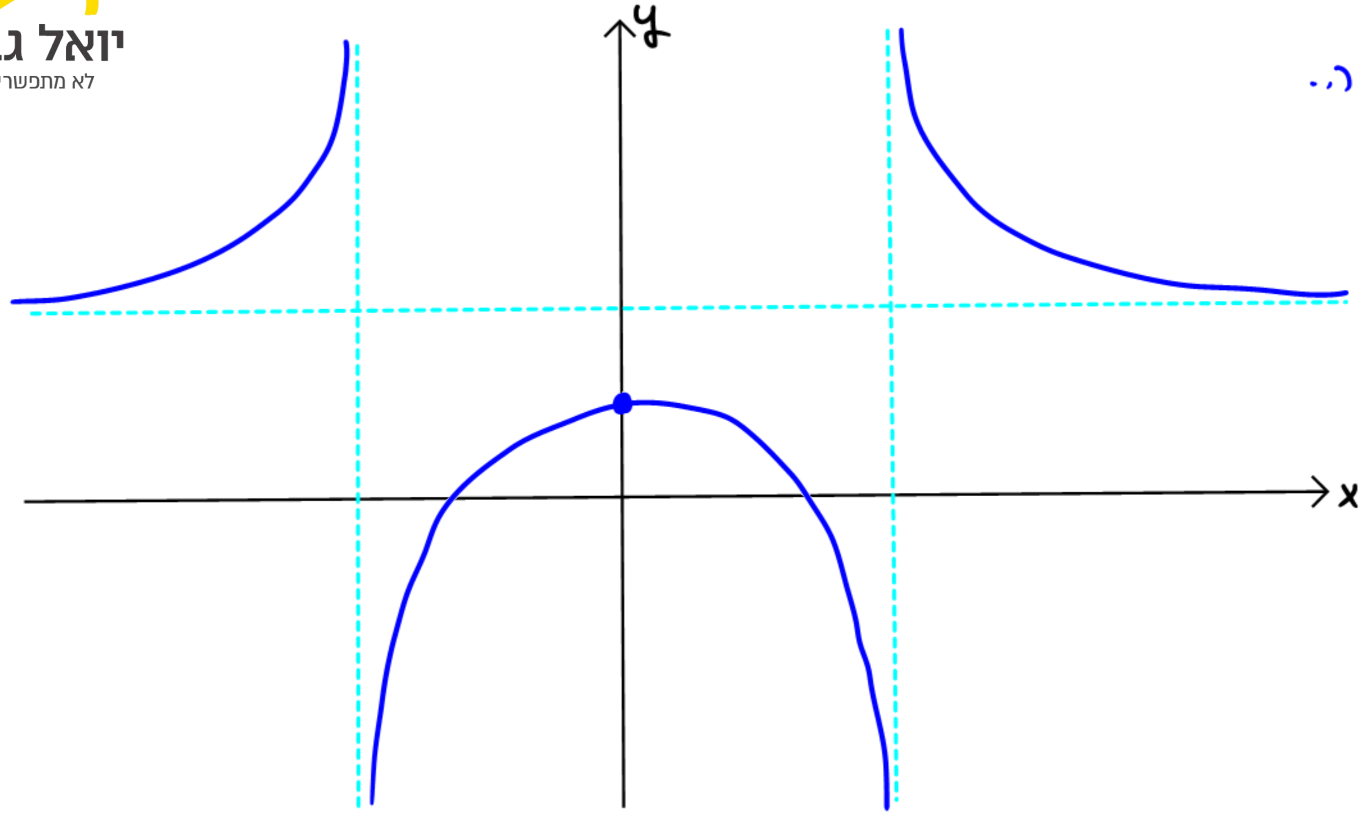
$(-2.121,0)$ $(2.121,0)$

נציב $x=0$ לקבלת נק' חיתוך עם ציר y:

$$f(0)=\frac{0}{0-9}+1=1$$

$(0,1)$

ה.



ו. לפי הציור השטח המתואר נמצא מתחת לציר ה X

נחשב בעזרת אינטגרל מסוים:

$$S=\int_0^2 (0-f'(x))\,dx=\Big[-f(x)\Big]_0^2=(-f(2))-(-f(0))=-\frac{1}{5}+1=\frac{4}{5}$$ יח"ר

.7 נתונה הפונקצייה $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{-2x+10}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = f(x) - c$, c הוא פרמטר חיובי.

הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו התחום.

גרף הפונקצייה $g(x)$ משיק לישר $y = 20$.

ה. מצאו את הערך של c .

פתרון שאלה 7

א. תחום הגדרה:

$0 \le -2x+10$

$2x \le 10$

$\boxed{x \le 5}$

ב. נק' חיתוך עם ציר x, נציב $f(x)=0$

$0 = x^2 \cdot \sqrt{-2x+10}$

$x^2 = 0$ $\qquad$ $-2x+10=0$

$x = 0$ $\qquad$ $x = 5$

נק' החיתוך הן:

$\boxed{(0,0)}$ $\qquad$ $\boxed{(5,0)}$

המשך שאלה ב

ג. נגזור:

$$f(x)=x^2\cdot\sqrt{-2x+10}$$

$$f'(x)=2x\sqrt{-2x+10}-\frac{x^2}{\sqrt{-2x+10}}$$

נשווה לאפס:

$$f'(x)=0$$

$$2x\sqrt{-2x+10}-\frac{x^2}{\sqrt{-2x+10}}=0 \quad / \cdot\sqrt{-2x+10}$$

כפל במכ״מ

נחלץ שיעורי x בנק' הקיצון

$$2x(-2x+10)-x^2=0$$

$$-4x^2+20x-x^2=0$$

$$20x-5x^2=0$$

$$5x(4-x)=0$$

$x=0$, $x=4$

בכדי לסווג את נק' הקיצון ולהסיק תחומי עליה/ירידה נציב בנגזרת ערכים מימין ומשמאל ונסדר בטבלה:

x	-1	0	1	4	4.5	5
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	//
$f(x)$	↘	min	↗	Max	↘	min

נציב בפונק' לקבלת שיעורי ה-y

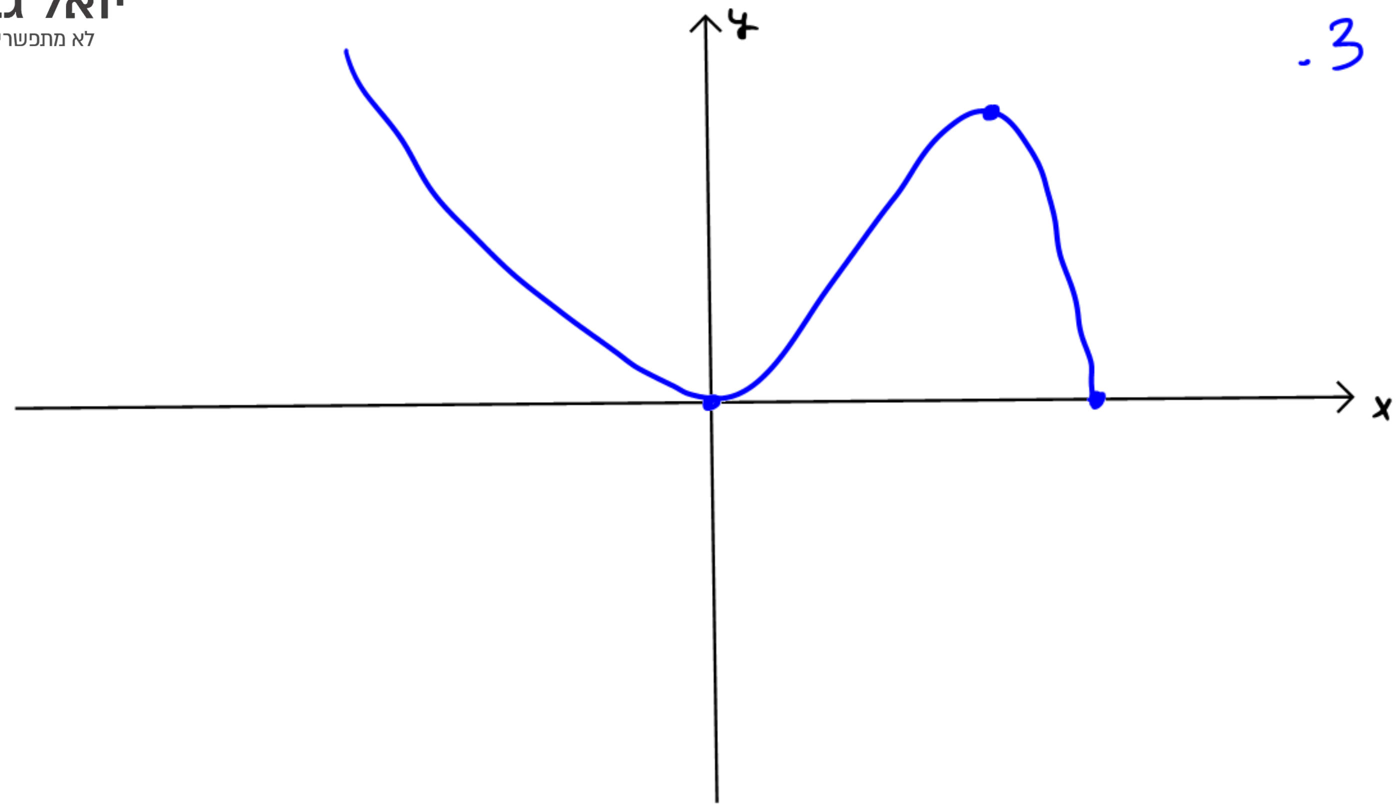
$f(0)=0$

$f(4)=16\sqrt{2}$

$f(5)=0$

מינימום $(0,0)$
מקסימום $(4,16\sqrt{2})$
מינימום $(5,0)$

3.



ה.

$$g(x)=f(x)-C$$

הנק' קיצון היחידה שניתן להוריד אותה ל $y=20$

היא נק' המקסימום

$$f(4)=16\sqrt{2}$$

$$g(4)=20$$

$$g(4)=f(4)-C$$

$$C=f(4)-g(4)$$

$$C=16\sqrt{2}-20$$

$$\boxed{C=2.627}$$

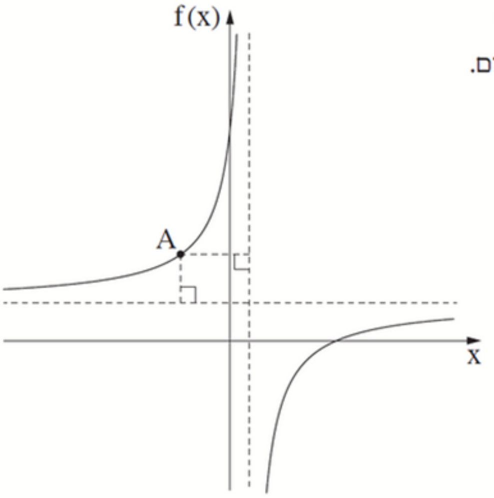
8. לפניכם סרטוט של גרף הפונקצייה $f(x)=\frac{25}{1-x}+2$, המוגדרת לכל $x\neq 1$.

א. מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים.

מנקודה A , הנמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$ ברביע השני,
העבירו אנכים לאסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ כך שהאסימפטוטות
והאנכים יוצרים מלבן.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A שבעבורה היקף המלבן מינימלי.

ג. חשבו את שטח המלבן בעבור שיעורי הנקודה A שמצאתם בסעיף ב.



פתרון שאלה 8

א. משוואות האסימפטוטות הן $y=2$
$x=1$

ב. נבטא את צלעות המלבן בעזרת x.

גובה המלבן: $f(x)-2=\frac{25}{1-x}+2-2=\frac{25}{1-x}$

רוחב המלבן: $1-x$

נבטא את היקף המלבן כפונקציה של x:

$$P_{(x)}=2\cdot\frac{25}{1-x}+2(1-x)=\frac{50}{1-x}+2-2x$$

נגזור את פונקציית ההיקף:

$$P'_{(x)}=\frac{50}{(1-x)^2}-2$$

נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ שיעורי x בנק' הקיצון:

המשך שאלה 8 סעיף ב

$$f'(x)=0$$

$$\frac{50}{(1-x)^2}-2=0$$

$$\frac{50}{1-2x+x^2}=2$$

$$50=2(1-2x+x^2)$$

$$0=2x^2-4x-48$$

נפתור עם נוסחת שורשים:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot2\cdot(-48)}}{2\cdot2}$$

$$x_1=6$$

$$x_2=-4$$

נבחר בפתרון השלילי כיוון ש A נמצאת ברביע השני.

$$x=-4$$

נציב בפונקציה:

$$f(-4)=\frac{25}{1+4}+2=7$$

$$(-4,7)$$

נמצא שזו אכן נקודת מינימום על ידי הצבת $x=-4$ בנגזרת השנייה ובדיקת ערך חיובי

$$P'(x)=\frac{50}{(1-x)^2}-2$$

$$P'(x)=50(1-x)^{-2}-2$$

$$P''(x)=-100(1-x)^{-3}\cdot(-1)=\frac{100}{(1-x)^3}$$

המשך:

$$f''_{(-4)}=\frac{100}{(1+4)^3}=\frac{4}{5}>0$$

ולכן נסיק שבנק' $(-4,7)$ יש למלבן היקף מינימלי.

ג. בסעיף הקודם ביטאנו את צלעות המלבן:

גובה המלבן: $f_{(x)}-2=\frac{25}{1-x}+2-2=\frac{25}{1-x}$

רוחב המלבן: $1-x$

נכפול אותן כדי לקבל את השטח:

$$S_{(x)}=\frac{25}{1-x}\cdot(1-x)=25$$

שטח המלבן הוא 25 יח"ר