

פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשפ"ד , 2024 , מועד א', שאלון: 35571

תודה מייוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

נוכיח שהטענה $48+144+288+\dots+6n(n+2)=n(n+2)(n+4)$, נכונה לכל n טבעי זוגי.

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=2$.

$$\text{אגף ימין: } 2 \cdot (2+2) \cdot (2+4) = 48 \quad \text{אגף שמאל: } 48$$

קבלנו שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ טבעי זוגי כלשהו (הנחת האינדוקציה),

$$\text{כלומר: } 48+144+288+\dots+6k(k+2)=k(k+2)(k+4),$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+2$ (הטבעי הזוגי העוקב):

$$48+144+288+\dots+6k(k+2)+6(k+2)(k+4)=(k+2)(k+4)(k+6)$$

$$\Leftrightarrow \underline{48+144+288+\dots+6k(k+2)+6(k+2)(k+4)}=(k+2)(k+4)(k+6)$$

↓

$$\Leftrightarrow k(k+2)(k+4)+6(k+2)(k+4)=(k+2)(k+4)(k+6)$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל (על ידי הוצאת גורם משותף $(k+2)(k+4)$).

$$\Leftrightarrow k(k+2)(k+4)+6(k+2)(k+4)=(k+2)(k+4)(k+6)$$

$$\Leftrightarrow (k+2)(k+4)(k+6)=(k+2)(k+4)(k+6)$$

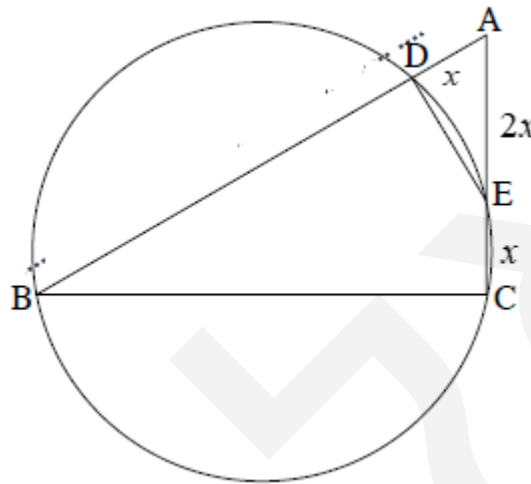
מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n טבעי.

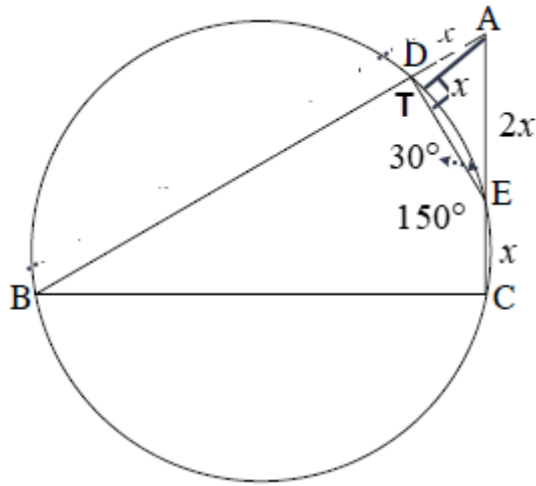
תשובה: הוכחנו שהטענה $48+144+288+\dots+6n(n+2)=n(n+2)(n+4)$, נכונה לכל n טבעי זוגי.

נתונים

1. BCED חסום במעגל . 2. $AE = 2CE$. 3. $AD = CE$ עבור (3) 4. $\angle DEC = 150^\circ$
 צ"ל: (1) $\triangle AED \sim \triangle ABC$ (2) $\frac{AB}{AC}$ (3) האם BE קוטר ?



נימוק	טענה	מס'	הסבר
זוויות נגדיות משלימות ל- 180° במרובע חסום במעגל	$\angle DEC + \angle B = 180^\circ$	5	1
זוויות צמודות משלימות ל- 180°	$\angle AED + \angle DEC = 180^\circ$	6	
	$\angle B = \angle AED$ (ז)	7	6, 5
זווית משותפת	$\angle A = \angle A$ (ז)	8	
משפט דמיון זווית זווית	$\triangle AED \sim \triangle ABC$	9	8, 7
מ.ש.ל. (1)			
סימון , חישוב	$AD = CE = x \rightarrow AE = 2x$	10	3, 2
יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים	$\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC}$	11	10, 9
	$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{2x}{x} = \frac{2}{1}$	12	11, 10
מ.ש.ל. (2)			



נוכיח בדרך הסתירה

הנחה	$\angle ADE \neq 90^\circ$	13	
בניית עזר אנך מ- A לצלע DE (או להמשכה)	$AT \perp DE, \angle ATE = 90^\circ$	14	
זוויות צמודות משלימות ל- 180°	$\angle AED = 30^\circ$	15	4
במשולש ישר זווית AET ניצב מול זווית 30° שווה למחצית היתר	$AT = x$	16	15, 14
	$AT = AD$	17	16, 10
במשולש ישר זווית ADT היתר היא הצלע הארוכה במשולש	$AT < AD$	18	14
	סתירה להנחה	19	18, 17
	$\angle ADE = 90^\circ$	20	19, 13
זוויות צמודות משלימות ל- 180°	$\angle EDB = 90^\circ$	22	21, 20
נשען על זווית היקפית ישרה	BE קוטר	23	22
מ.ש.ל. (3)			

פתרון חלופי בגאומטריה אנליטית

$$\angle AED = 30^\circ \text{ (זוויות צמודות משלימות ל- } 180^\circ \text{)}$$

$\triangle ADE$

$$\frac{AD}{\sin \angle AED} = \frac{AE}{\sin \angle ADE}$$

$$\sin \angle ADE = \frac{2x \sin 30^\circ}{x} = 1$$

$$\boxed{\angle ADE = 90^\circ} \quad \angle EDB = 90^\circ$$

ולכן BE הוא קוטר כי נשען על זווית היקפית ישרה.

תשובה: כן, BE הוא קוטר.

שימו לב שלא קיים, בתוכנית הלימודים, משפט הפוך (ולכן נדרשנו להוכיח) למשפט "אם במשולש ישר זווית יש זווית חדה של 30° אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר"

(1) נתון כי לפונקציה $f(x)$ יש שתי אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x ושתיים המאונכות לציר ה- y .

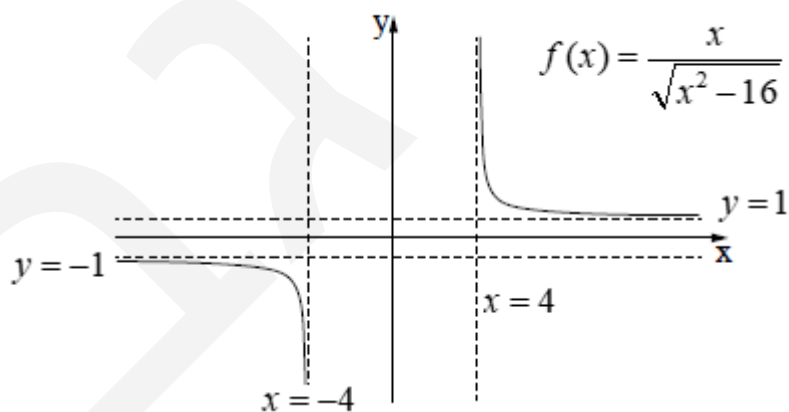
$$\text{I. } \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \quad \text{II. } \frac{x}{\sqrt{x^2-16}} \quad \text{III. } \frac{x^2}{\sqrt{x^2+16}} \quad \text{IV. } \frac{x^2}{\sqrt{x^2-16}}$$

תחום ההגדרה של ביטוי I ו-III הוא כל x , ושל II ו-IV הוא $x > 4$ או $x < -4$, ושני הביטויים האחרונים מתאימים לפונקציה עם שתי אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x , $x = 4$ ו- $x = -4$.

בביטוי III ו-IV חזקת המונה גדולה מחזקת המכנה, ולפונקציה המתאימה אין אסימפטוטות אופקיות. בביטויים I ו-II המונה קובע את סימן הביטוי, ולפונקציות המתאימות תהיינה שתי אסימפטוטות אופקיות: $y = 1$ ו- $y = -1$ ($x \rightarrow \infty$) ו- $y = -1$ ($x \rightarrow -\infty$).

ולכן הביטוי שעונה על כל הדרישות הוא ביטוי II, כלומר $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}$.

תשובה: ביטוי II מתאר את הפונקציה $f(x)$.



(2) נתונה הפונקציה $g(x)$ המוגדרת גם בתחום $x > 4$ או $x < -4$ ומקיימת $g'(x) = f(x) + \frac{5}{3}$.

מכאן שסימני הנגזרת $g'(x)$

קובעים את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ובתחומי הירידה, אולם עלינו למצוא את נקודת האפס, שעל פי הציור תהייה בתחום ההגדרה $g'(x) = f(x) + \frac{5}{3}$ היא הזזה $\frac{5}{3}$ יחידות כלפי מעלה של $f(x)$, ללא שינוי בתחום ההגדרה

, $x < -4$ ובתחומי הירידה, כדי למצוא את תחומי החיוביות והשליליות של $g'(x)$ גם בתחום זה.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}} + \frac{5}{3} = 0$$

$$3x + 5\sqrt{x^2 - 16} = 0$$

$$3x = -5\sqrt{x^2 - 16} \quad ()^2 \rightarrow test$$

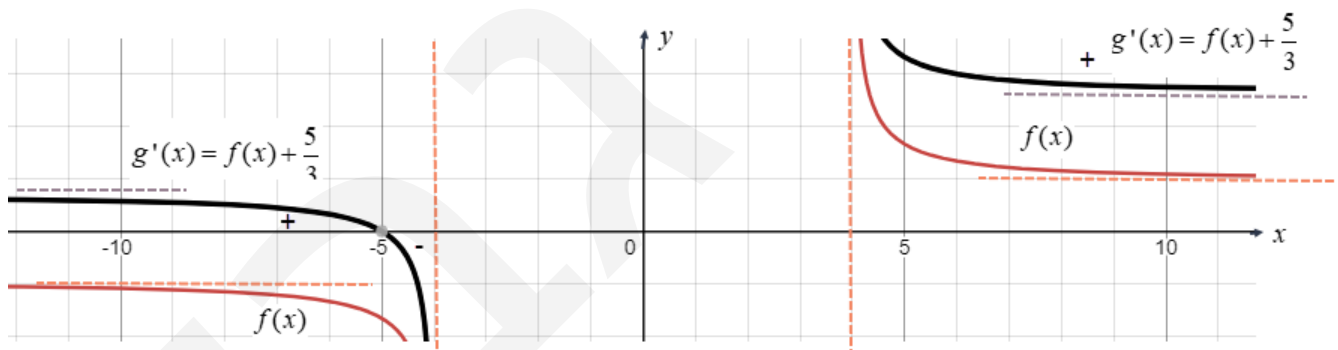
$$9x^2 = 25(x^2 - 16)$$

$$-16x^2 = -400$$

$$x^2 = 25$$

$$\cancel{x=5} \leftarrow x < -4$$

$$x = -5: 3(-5) + 5\sqrt{(-5)^2 - 16} = 0 \rightarrow 0 = 0 \checkmark \rightarrow x = -5 \text{ o.k.}$$



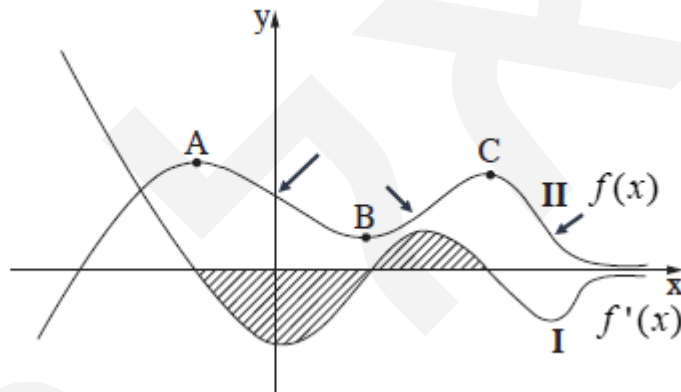
תשובה: עבור $g(x)$ עלייה בתחום $x > 4$ או $x < -5$ וירידה בתחום $-5 < x < -4$.

בגרות פד מארס 24 מועד חורף שאלון 35571

- (1) עבור x_A גרף I עובר מחיוביות לשליליות וגרף II מעלייה לירידה, עם מקסימום בנקודה A .
 עבור x_B גרף I עובר משליליות לחיוביות וגרף II מירידה לעלייה, עם מינימום בנקודה B .
 עבור x_C גרף I עובר מחיוביות לשליליות וגרף II מעלייה לירידה, עם מקסימום בנקודה C .
 זה כבר מספיק לצורך זיהוי גרף I כגרף של $f'(x)$, ואת גרף II כגרף של $f(x)$.

בנוסף

- $f(x)$ קעורה כלפי מטה \cap עבור $x < 0$ כאשר $f'(x)$ יורדת בתחום זה.
 וניתן לראות את המשך ההשפעה של עלייה וירידה של $f'(x)$,
 על הקעירות כלפי מעלה \cup או מטה \cap של $f(x)$.



תשובה: גרף II מתאר את הפונקציה $f(x)$.

- (2) ל- $f'(x)$ יש שלוש נקודות קיצון, שבהן היא עוברת מעלייה לירידה, או מירידה לעלייה, ועבור אותם שיעורי x מתקבלות נקודות פיתול של $f(x)$, המסומנות בחיצים בסרטוט מעל.
 תשובה: ל- $f(x)$ יש 3 נקודות פיתול.

- (3) נתון: $f(x_A) = 6$, $f(x_B) = 2$ וגודל השטח המקווקו שווה ל- 7 .

$$\int_{x_A}^{x_B} (0 - f'(x)) dx + \int_{x_B}^{x_C} (f'(x)) dx = 7$$

$$-f(x) \Big|_{x_A}^{x_B} + f(x) \Big|_{x_B}^{x_C} = 7$$

$$-f(x_B) - (-f(x_A)) + f(x_C) - f(x_B) = 7$$

$$-2 + 6 + f(x_C) - 2 = 7$$

$$\boxed{f(x_C) = 5}$$

תשובה: $f(x_C) = 5$.

א. נתונה סדרה חשבונית A שבה: $a_1 = -4 - 4k$ ו- $a_3 = -16 + 2k$ (k הוא פרמטר).

$$\begin{cases} a_3 = -16 + 2k \\ a_1 = -4 - 4k \end{cases} \\ 2d = -12 + 6k \\ \boxed{d = 3k - 6}$$

זהו ביטוי ליניארי, העובר משליליות לחיוביות עבור $k = 2$.
תשובה: (1) הסדרה A עולה עבור $k > 2$ (2) יורדת עבור $k < 2$ (3) קבועה עבור $k = 2$.

ב. נתון: $a_{17} = -232$.

$$\begin{aligned} a_1 + 16d &= -232 \\ -4 - 4k + 16(3k - 6) &= -232 \\ -4k + 48k - 96 &= -228 \\ 44k &= -132 \\ \boxed{k = -3} \end{aligned}$$

ולכן הסדרה A יורדת, כי $k < 2$.
תשובה: $k = -3$.

ג. נציב $k = -3$ ובהתאם בסדרה החשבונית A: $a_1 = 8$ ו- $d_a = -15$.

נתונה סדרה חדשה B שבה: $b_n = a_n + 24n + 17$.

נכיח שהסדרה B היא סדרה חשבונית.

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + 24(n+1) + 17 - (a_n + 24n + 17)$$

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + 24n + 24 + 17 - a_n - 24n - 17$$

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + 24$$

$$b_{n+1} - b_n = -15 + 24$$

$$\boxed{b_{n+1} - b_n = 9}$$

ולכן זו סדרה חשבונית עולה, כי הפרש $d_b = 9$ קבוע (אינו תלוי ב- n),

$$\text{כאשר } b_1 = a_1 + 24 \cdot 1 + 17 = 8 + 41 = 49.$$

$$\text{לסיכום: } b_1 = 49 \text{ ו- } d_b = 9.$$

תשובה: הוכחנו שהסדרה B היא סדרה חשבונית.

ד. נחשב את הסכום $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{29}^2 - b_{30}^2$

$$\begin{aligned} & (b_1 + b_2)(b_1 - b_2) + (b_3 + b_4)(b_3 - b_4) + \dots + (b_{29} + b_{30})(b_{29} - b_{30}) = \\ & (b_1 + b_2)(-d_b) + (b_3 + b_4)(-d_b) + \dots + (b_{29} + b_{30})(-d_b) = \\ & -9 \cdot (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_{29} + b_{30}) = \\ & -9 \cdot \frac{30 \cdot (2 \cdot 49 + 9 \cdot 29)}{2} = -48,465 \end{aligned}$$

תשובה: הסכום של $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \dots + b_{29}^2 - b_{30}^2$ הוא $-48,465$.

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - מבוגר \bar{A} - צעיר

B - תומכים בהקמת הפארק \bar{B} - לא תומכים בהקמת הפארק

נתונים ומשמעויות מידיות

נסמן p - ההסתברות שתושב שנבחר היה צעיר $(P(\bar{A}) = p)$.

נסמן k - ההסתברות שתושב שנבחר היה תומך $(P(B) = k)$.

כל התושבים המבוגרים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק,

לכן: $p(A \cap \bar{B}) = 0$ ו- $p(A \cap B) = p(A) = 1 - p$

ומכאן ש-: $p(A \cap B) = 1 - p$ ו- $p(\bar{A} \cap B) = k - (1 - p) = k + p - 1$

	\bar{A} צעיר	A מבוגר	
k	$k + p - 1$	$1 - p$	B - תומך
$1 - k$	$1 - k$	0	\bar{B} - לא תומך
1	p	$1 - p$	

תשובה: ההסתברות, שתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק, היא $k + p - 1$.

ב. (1) $P(B/\bar{A}) = 0.5 \rightarrow P(\bar{B}/\bar{A}) = 0.5$

(2) $P(\bar{A}/B) = \frac{3}{7} \rightarrow P(A/B) = \frac{4}{7}$

פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)}$$

$$0.5 = \frac{k + p - 1}{p}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{k + p - 1}{k}$$

$$0.5p = k + p - 1$$

$$3k = 7k + 7p - 7$$

$$k = 1 - 0.5p$$

$$4k = 7 - 7p$$

$$\begin{cases} 4k = 7 - 7p \\ k = 1 - 0.5p \end{cases}$$

$$4 - 2p = 7 - 7p$$

$$4 - 2p = 7 - 7p$$

$$\boxed{p = 0.6} \rightarrow \boxed{k = 0.7}$$

תשובה: $k = 0.7$, $p = 0.6$.

ג. מצאנו כי ההסתברות לתומכים היא 0.7 וההסתברות לצעירים היא 0.6 .
 וגם ההסתברות לתומך מבין הצעירים היא , כבר על פי הנתונים, $P(B/\bar{A}) = 0.5$, וגם $P(\bar{B}/\bar{A}) = 0.5$.
 ההסתברות שלפחות אחד מששת הצעירים שנבחרו על ידי יוסי תומך ואחד מתנגד,
 היא המאורע המשלים לאין מתנגדים או אין תומכים.

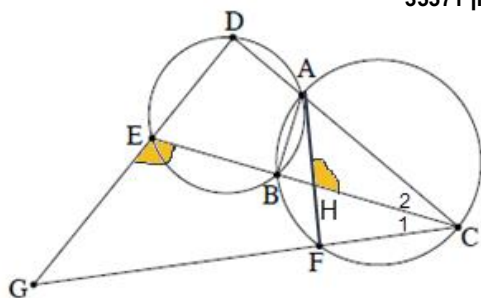
$$p = 1 - (0.5^6 + 0.5^6) = \frac{31}{32}$$

תשובה: ההסתברות, שלפחות אחד מששת הצעירים שנבחרו תומך ולפחות אחד מתנגד, היא $\frac{31}{32}$.

ד. יוסי ראיין באקראי 5 תושבים שהשתתפו בסקר .
 נחשב את ההסתברות שהמרואיין האחרון היה צעיר (0.6) וגם שבדיוק 2 מ-4 האחרים היו צעירים.
 אלו מאורעות בלתי תלויים ולכן נכפול את ההסתברויות.
 את $P_4(2)$ נחשב בעזרת נוסחת ברנולי, כאשר $n = 4, k = 2, p = 0.6$.

$$\begin{aligned} 0.6 \cdot P_4(2) &= \\ 0.6 \cdot \binom{4}{2} \cdot 0.6^2 \cdot (1-0.6)^{4-2} &= \\ 0.6 \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^2 &= \\ 0.6 \cdot 6 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^2 &= \frac{648}{3,125} \end{aligned}$$

תשובה: ההסתברות, שבדיוק 3 מהמרואינים האלו היו צעירים ושהאחרון היה צעיר, היא $\frac{648}{3,125}$.



עבור ג: 1. $\angle GEC = \angle CHA$.

עבור ד: 2. $\angle CBA = 90^\circ$. 3. $DE = 18$. 4. $CD = 36$.

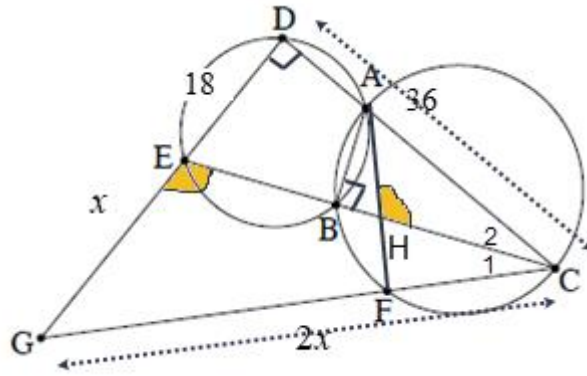
צ"ל: א. $\angle EDA = \angle CBA$ ב. $GDAF$ בר חסימה

ג. $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$ ד. CG, EG .

נימוק	טענה	מס'	הסבר
סכום זוויות נגדיות 180° במרובע חסום במעגל	$\angle EDA + \angle ABE = 180^\circ$	5	
זוויות צמודות משלימות ל- 180°	$\angle CBA + \angle ABE = 180^\circ$	6	
	$\angle EDA = \angle CBA$	7	6, 5
מ.ש.ל. א			
זוויות היקפיות שוות על קשת משותפת AC	$\angle AFC = \angle CBA$	8	
זוויות צמודות משלימות ל- 180°	$\angle AFG + \angle AFC = 180^\circ$	9	
	$\angle EDA + \angle AFG = 180^\circ$	10	9, 8, 7, 5
סכום זוויות נגדיות 180° ולכן בר חסימה	$GDAF$ בר חסימה	11	10
מ.ש.ל. ב			
זווית חיצונית ל- $\triangle AFC$ שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שאינן צמודות לה	$\angle CHA = \angle AFC + \angle C_1$	12	
זווית חיצונית ל- $\triangle CDE$ שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שאינן צמודות לה	$\angle GEC = \angle EDA + \angle C_2$	13	
	$\angle AFC = \angle EDA$	14	8, 7, 1
	$\angle C_1 = \angle C_2$	15	14, 13, 12
משפט חוצה זווית $\triangle GDC$	$\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$	16	15
מ.ש.ל. ג			

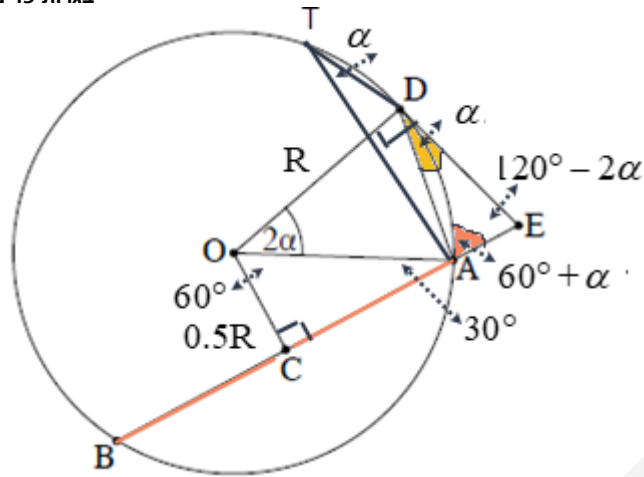
דרך חלופית להוכחת סעיף ג

זוויות צמודות משלימות ל- 180°	$\angle CAF + \angle DAF = 180^\circ$	12	
זוויות נגדיות משלימות ל- 180° במרובע חסום במעגל	$\angle EGC + \angle DAF = 180^\circ$	13	11
	$\angle CAF = \angle EGC$	14	13, 12
סכום זוויות 180° ב- $\triangle HAC$ ו- $\triangle GEC$	$\angle C_1 = \angle C_2$	15	14, 1
משפט חוצה זווית $\triangle GDC$	$\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$	16	15



נימוק	טענה	מס'	הסבר
	$\frac{CG}{36} = \frac{GE}{18} \rightarrow CG = 2GE$	17	16, 4, 3
	$EG = x, CG = 2x$	18	17
	$\sphericalangle EDA = 90^\circ$	19	7, 2
משפט פיתגורס $\triangle GDC$	$36^2 + (18 + x)^2 = (2x)^2$ $1,296 + 324 + 36x + x^2 = 4x^2$ $0 = 3x^2 - 36x - 1,620$ $x = 30, x = -18 \leftarrow x > 0$	20	,18, 4, 3 19
	$EG = 30, CG = 60$	21	20, 18
מ.ש.ל. ד			

בגרות פד מארס 24 מועד חורף שאלון 35571



- א. $\sphericalangle ADE = \alpha$ (זווית בין משיק למיתר, וזווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת)
 $\sphericalangle ODE = 90^\circ$ (הרדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה)
 $\sphericalangle OCA = 90^\circ$ (קטע שעובר במרכז המעגל וחוצה מיתר גם מאונך לו).
 $\sphericalangle OAC = 30^\circ$ (אם ניצב שווה למחצית היתר ב- $\triangle OAC$ אז הזווית מולו שווה 30°).
 $\sphericalangle COA = 60^\circ$ (סכום זוויות 180° ב- $\triangle OAC$).
 $\sphericalangle COD = 60^\circ + 2\alpha$.
 $\sphericalangle E = 120^\circ - 2\alpha$ (סכום זוויות 360° במרובע DOCE).
 תשובה: $\sphericalangle E = 120^\circ - 2\alpha$, $\sphericalangle COD = 60^\circ + 2\alpha$, $\sphericalangle OCA = 90^\circ$, $\sphericalangle ODE = 90^\circ$.

- ב. $\sphericalangle ATD = \alpha$ (זווית מרכזית כפולה מזווית היקפית הנשענת על אותה קשת,
 כאשר T נקודה כלשהי על המעגל)
 לחילופין ניתן משפט סינוסים ב- $\triangle AOD$ וזהויות בהמשך,
 או להוריד תיכון שהוא גובה וחוצה זווית הראש במשולש שווה שוקיים ($\triangle AOD$)
 $\triangle ADT$ לפי משפט הסינוסים.

$$\frac{AD}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\boxed{AD = 2R \sin \alpha}$$

- $\triangle ADE$ לפי משפט הסינוסים, כאשר $\sphericalangle DAE = 60^\circ + \alpha$.

$$\frac{DE}{\sin (60^\circ + \alpha)} = \frac{AD}{\sin (120^\circ - 2\alpha)}$$

$$\boxed{DE = \frac{2R \sin \alpha \cdot \sin (60^\circ + \alpha)}{\sin (120^\circ - 2\alpha)}}$$

- תשובה: $\frac{2R \sin \alpha \cdot \sin (60^\circ + \alpha)}{\sin (120^\circ - 2\alpha)}$.

ג. נתון כי רדיוס המעגל החוסם את $\triangle AOD$ הוא $\frac{4}{7}R$. נמצא את α .

$\triangle ADO$ לפי משפט הסינוסים.

$$\frac{AD}{\sin 2\alpha} = 2R_{\triangle ADO}$$

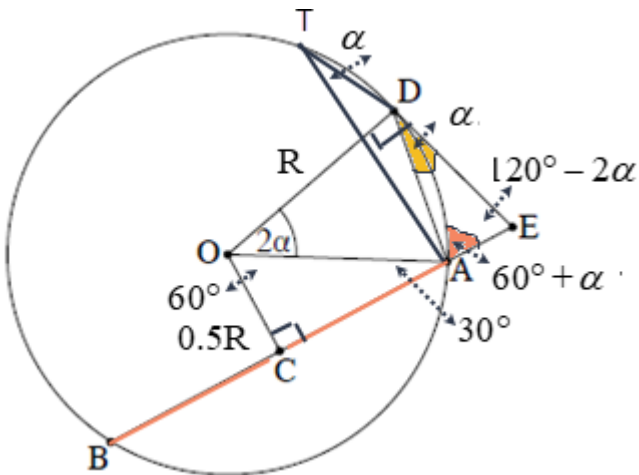
$$\frac{2R \sin \alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \cdot \frac{4}{7}R \quad /: 2R > 0$$

$$7 \sin \alpha = 8 \sin \alpha \cos \alpha /: 8 \sin \alpha > 0$$

$$\frac{7}{8} = \cos \alpha$$

$$\boxed{\alpha = 28.96^\circ}$$

תשובה: $\alpha = 28.96^\circ$.



ד. נציב $\alpha = 28.96^\circ$, ונקבל $DE = 1.0955R$ (לא דומה לסרטוט, אבל זה מה שיש).

כיוון ש- $\angle ODE = 90^\circ$, אז OE הוא קוטר במעגל החוסם את מרובע DOCE (ע"פ סעיף א).

$$\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{OE}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{(OE)^2}{4R^2}$$

$\triangle DOE$ משפט פיתגורס

$$(OE)^2 = (OD)^2 + (DE)^2$$

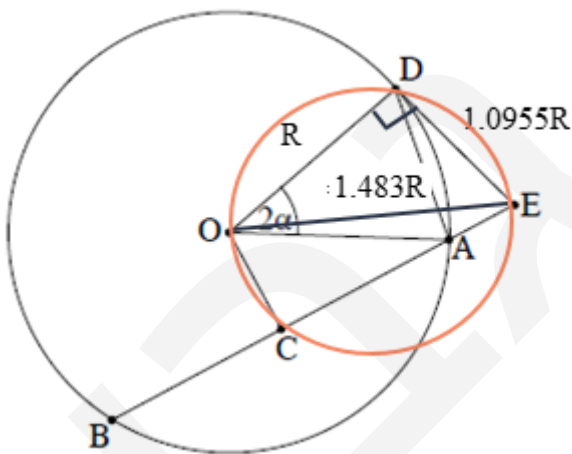
$$(OE)^2 = R^2 + (1.0955R)^2$$

$$(OE)^2 = 2.2R^2$$

$$\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}} = \frac{2.2R^2}{4R^2}$$

$$\boxed{\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}} = 0.55}$$

תשובה: $\frac{S_{\odot CODE}}{S_{\odot O}} = 0.55$.



א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$.

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי, לכן $x \geq 0$,

$$\text{והמכנה שונה מ- } 0, \text{ ולכן } x \neq 4 \rightarrow \sqrt{x} \neq 2 \rightarrow \sqrt{x} - 2 \neq 0.$$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x \geq 0, x \neq 4$.

(2) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים.

(ניתן למצוא גם על ידי הצבות, או נימוקים. אין חובה לרשום בעזרת גבולות!, ואין צורך לנמק!!!)

$x = 4$ מאפס מונה ולא מכנה, ולכן הישר $x = 4$ אסימפטוטה אנכית.

חזקת המונה קטנה מחזקת המכנה ולכן $y = 0$ אסימפטוטה אופקית לימין.

תשובה: אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y : $y = 0 (x \rightarrow +\infty)$.

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x : $x = 4$.

(3) $(0, -1)$ היא נקודת החיתוך עם ציר ה- y , שהיא גם קיצון קצה.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$,

$$\text{ולכן } \sqrt{x} - 4 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 4 \rightarrow x = 16 \rightarrow (16, 0)$$

תשובה: $(0, -1), (16, 0)$.

(4) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, ונקבע את סוגן.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-2)^2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}-2) - 2\sqrt{x} \cdot 2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2-2\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}-2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-2)(-\sqrt{x}+6)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^4}$$

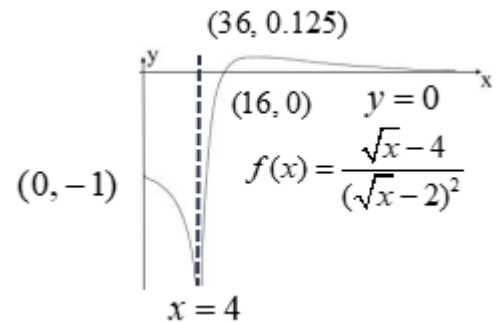
$$-\sqrt{x}+6=0 \rightarrow \sqrt{x}=6 \rightarrow x=36 \rightarrow (36, 0.125)$$

$$f'(1) = \frac{-5}{(+)} > 0 \searrow \rightarrow (0, -1), \max$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(35) = \frac{0.32}{(+)} > 0 \nearrow \\ f'(37) = \frac{-0.34}{(+)} < 0 \searrow \end{array} \right\} (36, 0.125), \max$$

תשובה: (36, 0.125) מקסימום, (0, -1) מקסימום.

ב. נסרטט את גרף הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$ (לא בפרופורציה מדויקת על ציר ה- x).



תשובה: הסרטוט מעל.

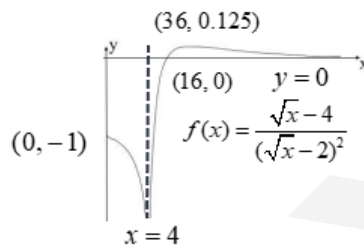
ג. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x}-2}$, המוגדרת כמו הפונקציה $f(x)$ בתחום $x \geq 0, x \neq 4$.

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{\sqrt{x}-2 - \frac{x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-2)^2}$$

$$g'(x) = 2 \cdot \frac{0.5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)^2} \leftarrow \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \leftarrow x > 0$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}} \rightarrow \boxed{g'(x) = f(x)}$$

תשובה: הראינו שלכל $x > 0$, בתחום ההגדרה של הפונקציות, מתקיים $g'(x) = f(x)$.



ד. נבדוק את שתי הטענות.

I. יש משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ ששיפועו הוא 2.

הערך המקסימלי של $f(x)$ הוא 0.125, המתקבל בנקודת המקסימום המוחלט שלה.

מכאן שזה גם הערך המקסימלי של $g'(x)$ ואין ל- $g(x)$ משיק ששיפועו הוא 2.

תשובה: הטענה אינה נכונה.

II. לפונקציה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

$g'(x) = f(x)$, ולכן ל- $g'(x)$ יש נקודת קיצון פנימית אחת בלבד,

שבו היא עוברת מעלייה, כאשר $g''(x) > 0$ ו- $g(x)$ קעורה כלפי מעלה (\cup),

לירידה, כאשר $g''(x) < 0$ ו- $g(x)$ קעורה כלפי מטה (\cap), ומתקבלת נקודת פיתול שבה $x = 36$.

תשובה: הטענה נכונה.

ה. נחשב את ערך הביטוי $\int_{0.25}^1 g(x) \cdot f(x) dx$, בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$\int_{0.25}^1 g(x) \cdot f(x) dx = \int_{0.25}^1 g(x) \cdot g'(x) dx = \left. \frac{(g(x))^2}{2} \right|_{0.25}^1$$

$$\left. \begin{aligned} x=1: \frac{(g(1))^2}{2} &= 2 \\ x=0.25: \frac{(g(0.25))^2}{2} &= \frac{1}{18} \end{aligned} \right\} 2 - \frac{1}{18} = 1\frac{17}{18}$$

$$\int_{0.25}^1 g(x) \cdot f(x) dx = 1\frac{17}{18} \text{ תשובה:}$$

א. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin(x) - a}{\sin(x) + a}$ ($a > 0$ פרמטר), המוגדרת לכל x המקיים $\sin(x) \neq -a$.

נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x בכל נקודות הקיצון שלה.

כלומר, בכל נקודות הקיצון מתקיים $f'(x) = 0$ וגם $f(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{\cos(x)(\sin(x) + a) - \cos(x)(\sin(x) - a)}{(\sin(x) + a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos(x)[\sin(x) + a - (\sin(x) - a)]}{(\sin(x) + a)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2a \cos(x)}{(\sin(x) + a)^2}$$

$$0 = \cos(x) \leftarrow a > 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

כיוון שמדובר על כל נקודות הקיצון, אז למשל עבור $x = \frac{\pi}{2}$,

• מונה הנגזרת מחליף סימן עבור $x = \frac{\pi}{2}$, ולכן זה שיעור x של נקודת קיצון.

• נקבל ש- $f(x) = 0$ כאשר $\sin(\frac{\pi}{2}) - a = 0$ ולכן $a = 1$.

במקרה זה מתקיים $\sin(x) \neq -a$ כי $\sin(\frac{\pi}{2}) \neq -1$ (ולא היה מתקיים עבור $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$).

תשובה: $a = 1$.

ב. נציב $a = 1$ והפונקציה היא $f(x) = \frac{\sin(x) - 1}{\sin(x) + 1}$ ונחקור אותה בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס, לכן $\sin x \neq -1 \rightarrow x \neq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, $x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

(2) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y = 0$.

$$\sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right) \leftarrow x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x = 0$, ונקבל $(0, -1)$.

תשובה: $(0, -1)$, $\left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(3) נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x בכל נקודות הקיצון שלה.

מכאן שנקודות הקיצון הפנימיות הן: $(-\frac{3\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 0)$.

ונקודות הקיצון בקצה הן: $(2\pi, -1)$ ו- $(-2\pi, -1)$.

נשים לב שהפונקציה $f(x) = \frac{\sin(x)-1}{\sin(x)+1}$ היא אי-חיובית,

כי המכנה חיובי בתחום ההגדרה והערך המקסימלי של המונה הוא אפס.

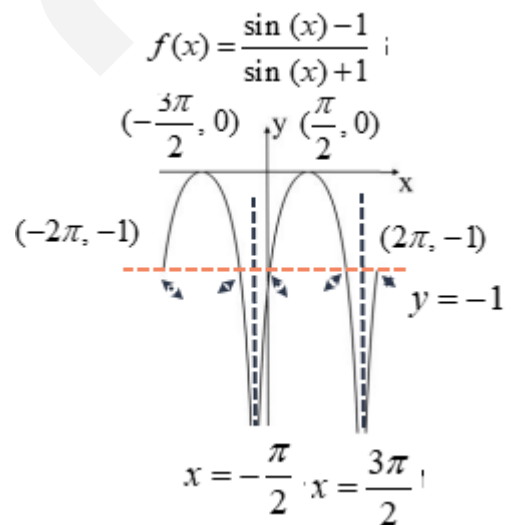
לכן, בהתאם ניתן לקבוע ש- $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ו- $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ הן נקודות מקסימום.

עקב הצורך להיצמד לאסימפטוטה האנכית $x = \frac{3\pi}{2}$ אז $(2\pi, -1)$ היא נקודת מקסימום.

כאשר $(-2\pi, -1)$ היא מינימום כי עולים ממנה לנקודת המקסימום $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$.

תשובה: $(2\pi, -1)$ מקסימום, $(\frac{\pi}{2}, 0)$ מקסימום, $(-\frac{3\pi}{2}, 0)$ מקסימום, $(-2\pi, -1)$ מינימום.

ג. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, כולל שתי האסימפטוטות האנכיות שלה, וסימון הישר $y = -1$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ד. לישר $y = -1$ יש חמש נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $f(x)$, מסומנות בחיצים.

תשובה: למשוואה $f(x) = -1$ יש 5 פתרונות בתחום הנתון.

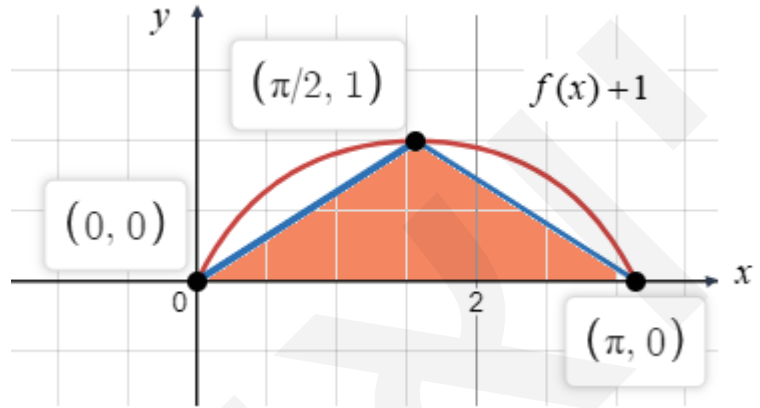
ה. נבדוק את נכונות הטענה $\int_0^{\pi} (f(x)+1) dx > \frac{\pi}{2}$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בתחום $-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, $x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

ולכן היא קעורה כלפי מטה גם בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

$f(x)+1$ היא הזזה אנכית ב-1 יחידות כלפי מעלה של $f(x)$.

מכאן שבתחום זה הגרף ייראה כך (כולל סימון של משולש שחסום בו):



כיוון שהפונקציה, בתחום $0 \leq x \leq \pi$, היא אי-שלילית,

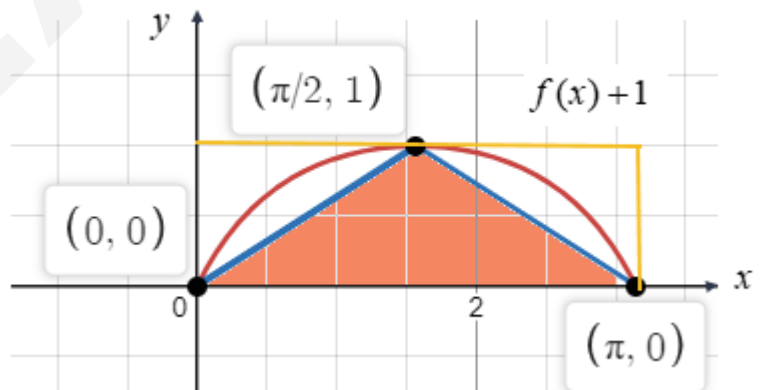
הרי שהאינטגרל המסוים $\int_0^{\pi} (f(x)+1) dx$ מחזיר את השטח שבין הפונקציה לציר ה- x .

עקב הקעירות כלפי מטה (\cap) של $f(x)$ ניתן לחסום בעקום משולש, ששטחו הוא $\frac{\pi \cdot 1}{2} = \frac{\pi}{2}$.

ולכן הטענה $\int_0^{\pi} (f(x)+1) dx > \frac{\pi}{2}$ היא טענה נכונה.

תשובה: הטענה נכונה.

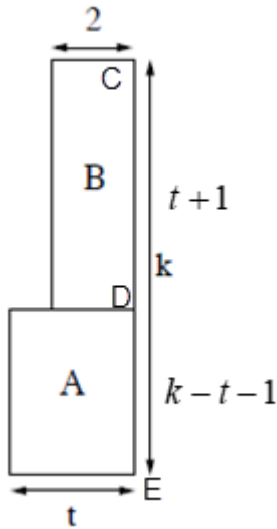
הערה חשובה: ניתן להראות שיש גם חסם עליון לביטוי.



ניתן לחסום את העקום במלבן, ששטחו הוא $\pi \cdot 1 = \pi$,

ולכן $\frac{\pi}{2} < \int_0^{\pi} (f(x)+1) dx < \pi$.

הערה נוספת: $f(x)+1 = f(x) - (-1)$, ובצורה דומה ניתן לחסום גם בגרף המקורי משולש בשטח $\frac{\pi}{2}$.



$$. \text{א. } S_B = 2t + 2, \text{ ולכן } CD = \frac{2t + 2}{2} = t + 1$$

$$\text{מכאן ש- } DE = k - (t + 1) = k - t - 1$$

$$S_A = t(k - t - 1) = -t^2 - kt - t \text{ הוא שטח המלבן התחתון הוא}$$

$$\text{תשובה: שטח הגינה A הוא } -t^2 - kt - t$$

$$\text{ב. הפונקציה שיש להביא לאינ'אום היא היחס } f(t) = \frac{S_B}{S_A}$$

נשים לב שהמשתנה הוא t , כאשר k הוא קבוע (פרמטר).

$$f(t) = \frac{2(t+1)}{-t^2 + kt - t}$$

$$f'(t) = 2 \cdot \frac{-t + kt - t - (t+1)(-2t + k - 1)}{(-t^2 + kt - t)^2}$$

$$f'(t) = 2 \cdot \frac{-t^2 + kt - t - (-2t^2 + kt - t - 2t + k - 1)}{(-t^2 + kt - t)^2}$$

$$f'(t) = 2 \cdot \frac{-t^2 + kt - t + 2t^2 - kt + t + 2t - k + 1}{(-t^2 + kt - t)^2}$$

$$f'(t) = 2 \cdot \frac{t^2 + 2t - k + 1}{(-t^2 + kt - t)^2}$$

$$t^2 + 2t + k + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-k+1)}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4k}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{k}}{2} = -1 \pm \sqrt{k}$$

$$. t_1 = -1 + \sqrt{k}, \quad t_2 = -1 - \sqrt{k}$$

המונה של הנגזרת הוא של פרבולה ישרה, בעלת מינימום ("צוחקת"),

העוברת משליליות לחיוביות עבור $t = -1 + \sqrt{k}$,

ולכן $f(t)$ עוברת מירידה לעלייה ו- $t = -1 + \sqrt{k}$ מינימום.

(נשים לב ש- $t_1 = -1 + \sqrt{k}$ חיובי כי $k > 1$, ו- $t_2 = -1 - \sqrt{k}$ שלילי ואינו מתאים כי t גודל חיובי))

תשובה: $t = -1 + \sqrt{k}$, עבורו היחס $\frac{S_B}{S_A}$ הוא מינימלי.

ג. הפונקציה שיש להביא ל**מקסימום** היא היחס $g(t) = \frac{S_A}{S_B}$.

קל לראות ש- $g(t) = \frac{1}{f(t)}$, כאשר שתיהן מוגדרות באותו תחום $t > 0$.

טרנספורמציה שכזו הופכת את תחומי העלייה והירידה,

כאשר היא שומרת על ערכי ה- t בנקודות הקיצון, כאשר סוגן משתנה וערכי הפונקציה מתהפכים.

ניתן לראות זאת גם על ידי $g'(t) = -\frac{f'(t)}{f^2(t)}$, כאשר סימני הנגזרת משתנים,

אך היא עדיין מתאפסת עבור אותם ערכי t .

תשובה: $t = -1 + \sqrt{k}$, עבורו היחס $\frac{S_A}{S_B}$ הוא מקסימלי.