

פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשפ"ד, 2024, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. במפעל אלקטרוניקה החלו לייצר מחשבים.

בכל שבוע כמות המחשבים שייצרו הייתה גדולה במספר קבוע מכמות המחשבים שייצרו בשבוע שלפניו. בשבוע הראשון ייצרו 600 מחשבים.

הייצור נמשך 45 שבועות. בתקופה זו ייצרו 175,500 מחשבים סך הכול.

א. בכמה הייתה גדולה כמות המחשבים שייצרו בכל שבוע מן הכמות שייצרו בשבוע שלפניו?

בגמר הייצור מכר המפעל את המחשבים במשך כמה חודשים.

כמות המחשבים שנמכרו בכל חודש הייתה גדולה פי q מכמות המחשבים שנמכרו בחודש שלפניו.

בחודש ה-4 נמכרו 160 מחשבים. בחודש ה-7 נמכרו 1,280 מחשבים.

ב. כמה מחשבים נמכרו בחודש הראשון?

החודש ה-7 היה החודש האמצעי של חודשי המכירה.

ג. כמה חודשים נמשכה המכירה?

ד. כמה מן המחשבים שייצרו במפעל לא נמכרו?

פתרון:

א. כמה היחידים המיוצרים במפעל בכל שבוע
להלן סדרה חשבונית.

נתון:

$$\begin{cases} a_1 = 600 \\ S_{45} = 175,500 \end{cases}$$

נשתמש בנוסחה לסכום n האיזונים

הדואוניה מסדרה חשבונית:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

נציב $n=45$ הנתונים:

(1)

$$175,500 = \frac{45}{2} \{ 2 \cdot 600 + 44 \cdot d \}$$

$$175,500 = 27,000 + 990d$$

$$990d = 148,500$$

$$d = 150$$

תשובה: דכל שבוע יצרו בהפגן

150 מהשבוע יצרו יותר מאשר בשבוע לפניו.

ב. כמה המשטרה שנמכרו בכל חודש
מהווה סדרה הנדסית.

ניתן:

$$\begin{cases} a_4 = 160 \\ a_7 = 1,280 \end{cases}$$

נשמע בנוסחה האינר הנ"ל. סדרה

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{הנכונה!}$$

$$\begin{cases} a_1 \cdot q^3 = 160 \\ a_1 \cdot q^6 = 1,280 \end{cases} / :$$

נחלק משוואות:

$$q^3 = \frac{1,280}{160} = 8 \Rightarrow q = 2$$

|||

$$a_1 \cdot 2^3 = 160 \Rightarrow a_1 = 20$$

תשובה: חוזש הראשון נמכרו **20 מחשבים**

ד. חוזש השני היה חוזש האחרון.
 כלומר היו שישה חוזשים אחריו, ושישה חוזשים אחריו.

המכירה נמשכה **13 חוזשים**

3. נשאלנו בנוסחה סכום האגרות, הוא 175,500
 הוא 163,820 בסדרה הנדסית:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_{13} = \frac{20 \cdot (2^{13} - 1)}{2 - 1} = 163,820$$

נחסר 4 - כלומר המחשבונים שנמכרו
 נמכרו המחשבים שיוקרה:

$$175,500 - 163,820 = 11,680$$

תשובה: המכירה לא נמכרה **11,680 מחשבים**



כגת נוכח להטב א - נפח הפירמידה:

$$V_{PABCD} = \frac{S_{ABCD} \cdot OP}{3} = \frac{16 \cdot 14,588 - 4\sqrt{3}}{3}$$

$$V_{PABCD} = 539.03$$

3. נפח של קובייה מהקל ע"י
 הפלגה של אורך המקצוע של הקובייה
 בהנחה שלישית:

$$x^3 = 539.03 / 3$$

נוביתו שורש שלישית ונקבל:

$$x = 8.138$$

אורך מקצוע הקובייה 8.138





3. נתונה הפונקצייה $f(x) = \cos(2x) + 6 \sin(x) + a$, a הוא פרמטר.
 הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
- מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך).
 - נתון כי הישר $y = 8$ משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודת המקסימום המוחלט שלה. מצאו את הערך של הפרמטר a .
 - סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ (הפונקצייה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x בשתי נקודות). חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי הישר $y = 8$ ועל ידי ציר ה- y .

ע. נמצא את הנקודות

$$f'(x) = -2\sin 2x + 6\cos x$$

נשתמש בנוסחה $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ כדי לכתוב את הנגזרת בצורה פשוטה יותר.

$$f'(x) = -2 \cdot 2\sin x \cos x + 6\cos x$$

$$f'(x) = -4\sin x \cos x + 6\cos x$$

$$f'(x) = 2\cos x (-2\sin x + 3)$$

$$2\cos x (-2\sin x + 3) = 0 \quad \text{(מזהה את המקרים שבהם המכפלה היא 0)}$$

$$2\cos x = 0$$

$$\cos x = 0$$

בנקודות אלו:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$-2\sin x + 3 = 0$$

$$\sin x = 1.5$$

אין פתרון.





$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

נסת → פתרונות → קבוצה

$$k=0: \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$$

$$k=1: \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 1 \rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{2}}$$

$$k=2: \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 2 \quad x = \frac{5\pi}{2} \quad \text{ללא צורך}$$

$$k=-1: \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot (-1) \quad x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{ללא צורך}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 6 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + a = 5 + a \quad \text{נקודה}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{3\pi}{2}\right) + 6 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + a = -7 + a$$

$$f(2\pi) = \cos(2 \cdot 2\pi) + 6 \sin(2\pi) + a = 1 + a \quad \text{נקודה}$$

$$f(0) = \cos(2 \cdot 0) + 6 \sin 0 + a = 1 + a$$

נקודה → קבוצה:

$$(2\pi, 1+a)$$

$$\left(\frac{3\pi}{2}, -7+a\right)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 5+a\right)$$

$$(0, 1+a)$$





אם נראה וולקס:

x		0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	2π	
f'(x)		27	+	0	-	0	+	27	
f(x)		1+a	↗	5+a	↘	-7+a	↗	1+a	

נקודות קיצוניות:

$$f'(\frac{\pi}{4}) = 2 \cos(\frac{\pi}{4}) (-2 \sin(\frac{\pi}{4}) + 3) = 0.725$$

$$f'(\pi) = 2 \cos(\pi) (-2 \sin(\pi) + 3) = -6$$

$$f'(\frac{3\pi}{4}) = 2 \cos(\frac{3\pi}{4}) (-2 \sin(\frac{3\pi}{4}) + 3) = 6.24$$

נקודות יוקצון:

$$(2\pi, 1+a)$$

$$(\frac{3\pi}{2}, -7+a)$$

$$(\frac{\pi}{2}, 5+a)$$

$$(0, 1+a)$$

מקסימום קטן

מינימום

מקסימום

מינימום קטן



(ג) נקודת המפגש (המחול) של הפונקציות
($\frac{\pi}{2}, 5+a$) היא

נמצא את הנקודה בה $y=8$,
אם $5+a=8$, נובע $a=3$

(ד) נמצא את נקודת המפגש של הפונקציות $a=3$:

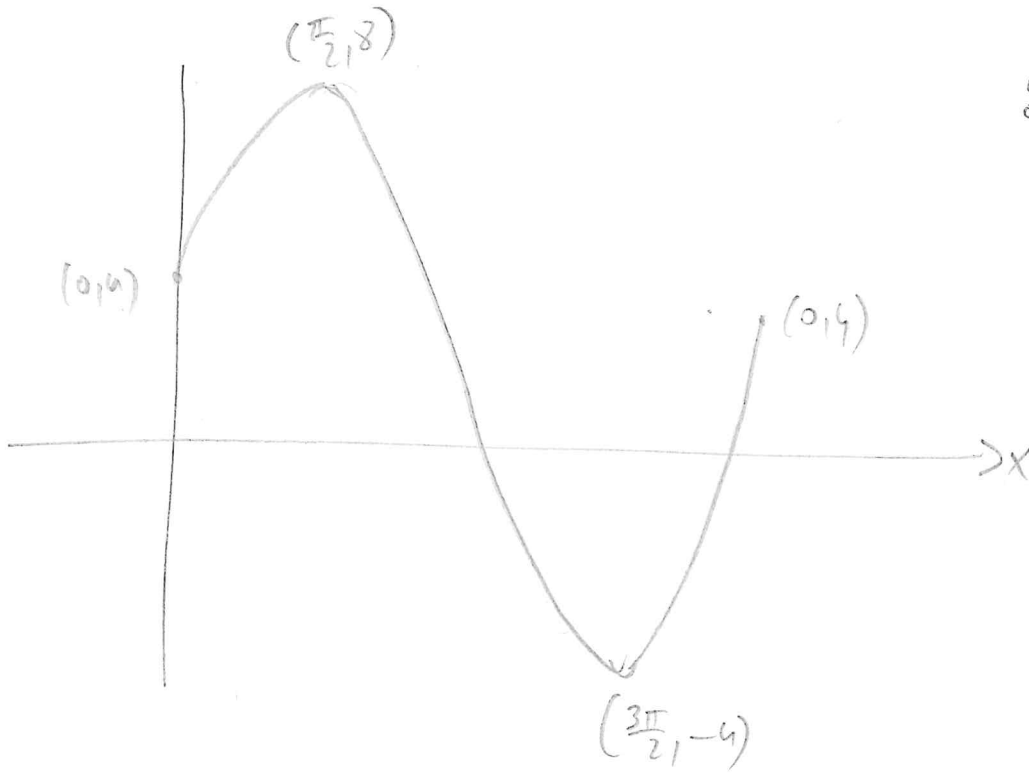
($2\pi, 4$)

($\frac{3\pi}{2}, -4$) נחמק

($\frac{\pi}{2}, -8$) נחמק

($0, 4$)



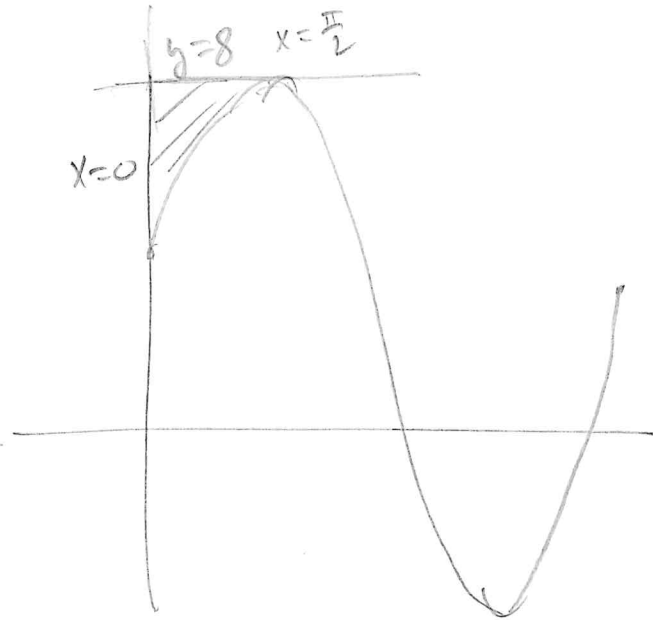


$f(x) = 4 \sin(x)$

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





(3) נוסף לפרט של קישר
 $y=8$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 - f(x)) dx$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 - (\cos 2x + 6\sin x + 3)) dx$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (8 - \cos 2x - 6\sin x - 3) dx$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos 2x - 6\sin x + 5) dx$$

$$S = \left[\frac{-\sin 2x}{2} - 6(-\cos x) + 5x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$S = \left[\frac{-\sin 2x}{2} + 6\cos x + 5x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$



$$S = \left[\frac{-\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{2} + 6 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 5\pi \right]$$

(רביעי)

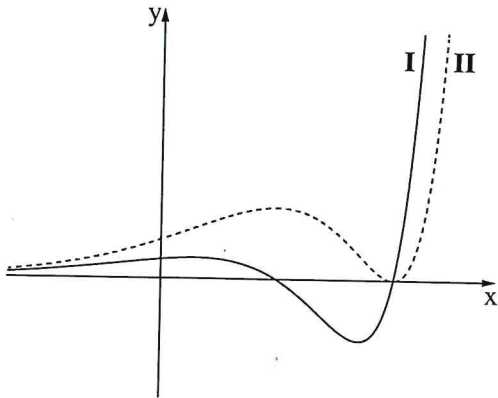
$$- \left[\frac{-\sin(2 \cdot 0)}{2} + 6 \cos 0 + 5 \cdot 0 \right]$$

$$S = 2.5\pi - (0)$$

$$S = 2.5\pi - 6$$

$$S = 1.853 \text{ אגל}$$

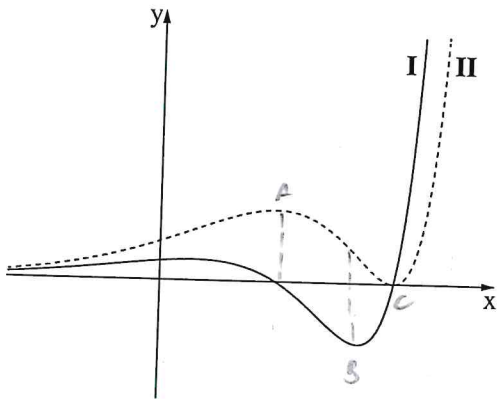




4. בסרטוט שלפניכם מוצגים הגרפים I ו-II.
אחד מן הגרפים הוא הגרף של פונקצייה $f(x)$,
והאחר הוא הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
א. איזה מן הגרפים I-II מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$?
נמקו את תשובתכם.

נתון כי $f(x) = (x - 5)^2 \cdot e^{x-3}$.

- ב. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן על פי הגרף.
ג. חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה- x .
נתונה הפונקצייה $g(x) = -f'(x)$.
ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. נמקו את תשובתכם.



א. גרף II הוא גרף הפונקציה $f(x)$
גרף I הוא גרף הפונקציה $f'(x)$.
ציר ה- x הוא נשוא של גרף הפונקציה $f(x)$
של הנקודות $A \rightarrow B, C$.

ציר ה- x הוא נשוא של גרף הפונקציה $f'(x)$
של הנקודות A ו- C , גרף I הוא גרף הפונקציה $f(x)$.
שטח זה שואף לקבוע הקצב של גרף I שיהיה הקצב B,
גרף II שואף לקבוע גרף הפונקציה $f(x)$.



$$f(x) = (x-5)^2 \cdot e^{x-3} \quad (1) \quad \checkmark$$

נתון: הפונקציה: $f(x)$

(2) מצא את הנקודות של $y=0$:

$$(x-5)^2 \cdot e^{x-3} = 0$$

$$(x-5)^2 = 0 \quad \sqrt{\quad}$$

$$x-5 = 0$$

$$x = 5$$

$$\boxed{(5, 0)}$$

$$e^{x-3} = 0$$

אין פתרון

האם אפשר להניח שיש פתרון?

אם $x=5$ אז $f(5) = 0$
אם $x=0$ אז $f(0) = \frac{25}{e^3}$

חשב את הנקודה של $x=0$:

$$f(0) = (0-5)^2 \cdot e^{0-3} = \frac{25}{e^3} \approx 1.244$$

$$\boxed{\left(0, \frac{25}{e^3}\right)}$$



(3) נסתח סוגיית הפונקציה הנמוכה:

$$f(x) = (x-5)^2 \cdot e^{x-3}$$

$$f(x) = (x^2 - 10x + 25) \cdot e^{x-3}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2x-10 & & e^{x-3} & & (x^2-10x+25) \end{matrix}$$

$$f'(x) = (2x-10) e^{x-3} + e^{x-3} (x^2-10x+25)$$

$$f'(x) = e^{x-3} [2x-10 + x^2-10x+25]$$

$$f'(x) = e^{x-3} (x^2 - 8x + 15)$$

$$e^{x-3} (x^2 - 8x + 15) = 0 \quad \text{נניח (אם אפשר):}$$

$$e^{x-3} = 0$$

על פניו, לא
אפשר למצוא
פתרון

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$x = 3$$

$$x = 5$$

$$f(5) = (5-5)^2 \cdot e^{5-3} = 0$$

$$(5, 0)$$

נכנס, הנקודה הנמוכה

$$f(3) = (3-5)^2 \cdot e^{3-3} = 4$$

$$(3, 4)$$





טבלה עזרה ויזכור!

x	0	3	4	5	6
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

הצגה - יק קצרים הואני אן האופנה כי האני האני

האני האני

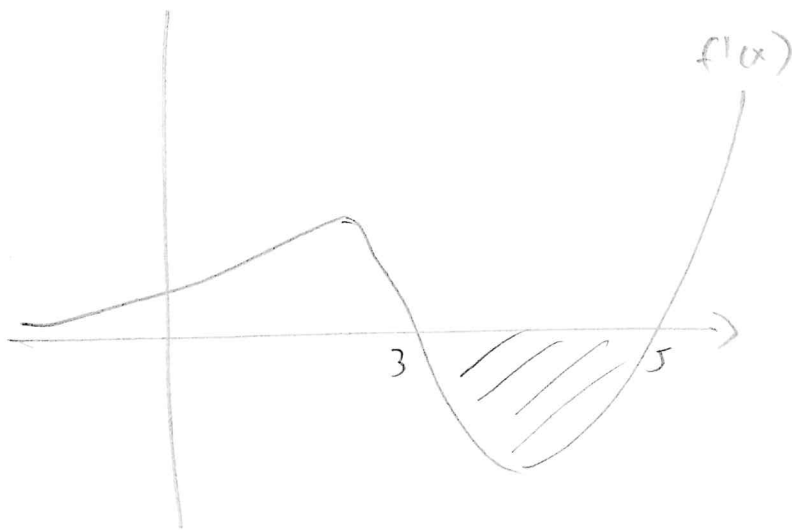
$$f'(6) = 6^2 - 8 \cdot 6 + 15 = 3$$

$$f'(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 15 = -1$$

$$f'(0) = 0^2 - 8 \cdot 0 + 15 = 15$$

נקודות הקיצון: $(3,4) \max$, $(5,0) \min$





(ג) נתון ש-
השטח הנמצא:

$$S = \int_3^5 -f'(x) dx$$

$$S = [-f(x)]_3^5$$

$$S = [-f(5)] - [-f(3)]$$

$$S = -f(5) + f(3)$$

$$f(3) = 4$$

$$, f(5) = 0$$

$$S = -0 + 4$$

$$S = 4 \text{ יחידות}^2$$

$$\int f'(x) dx = f(x) \text{ נקודות}$$

נקודות:

(נקודות)

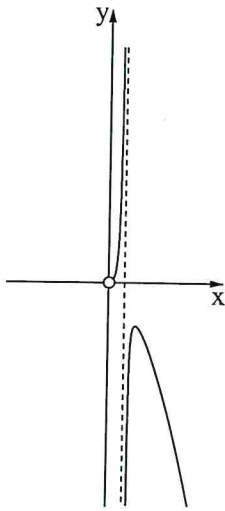
נקודות נקודות

(נקודות)

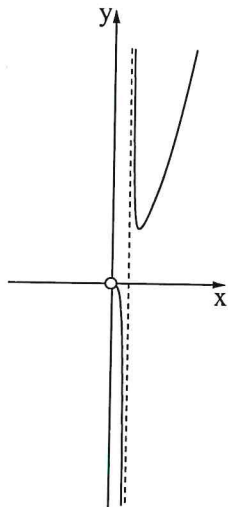


5. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{3x^2}{2\ln(x) + 1}$

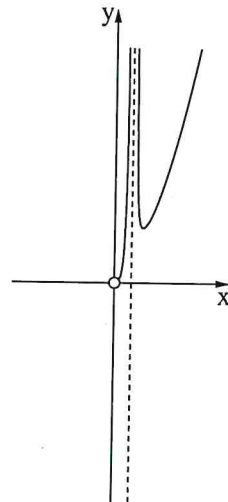
- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) האם גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את ציר ה- x ? נמקו את תשובתכם.
 (3) מצאו את משוואת האסימפטוטה המאונכת לציר ה- x של הפונקצייה $f(x)$.
 ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
 ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.
 ד. קבעו איזה מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה הוא גרף הפונקצייה $f(x)$.
 הישר $y = t$ משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$.
 ה. האם הישר $y = t - 5$ חותך את גרף הפונקצייה $f(x)$?
 אם כן - מצאו בכמה נקודות הוא חותך. אם לא - נמקו.



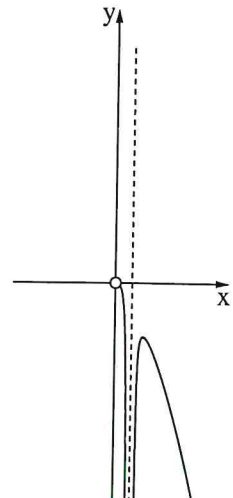
IV



III



II



I



א. (1) נקודת המפגש היחידה
היא $x = e^{-\frac{1}{2}}$

המשוואה היא:

$$2 \ln x + 1 = 0$$

$$2 \ln x = -1$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

$$\log_e x = -\frac{1}{2}$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.606$$

תמונת הפונקציה: $x > 0, x \neq e^{-\frac{1}{2}}$

(2) נקודת המפגש היחידה היא $x = 0$

$$0 = \frac{3x^2}{2 \ln x + 1}$$

$$0 = 3x^2$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

הפונקציה היא אסימטוטה אנכית ב- $x = 0$ ולכן אין לה נקודת מפגש.

אין נקודת מפגש אחרת.

(3) הפונקציה היא אסימטוטה אנכית ב- $x = 0$ ולכן אין לה נקודת מפגש.

$$x = e^{-\frac{1}{2}}$$



טבלת עזר ויילדג!

x	/	0	0.1	$e^{-0.5}$	0.8	1	2
f(x)	/	/	-	/	-	0	+
f'(x)	/	/	↘	/	↘	3	↗

הנגזרת במאונך המוגדר כי הנלמדה קיוב קיובים:

$$f'(0.1) = 0.1 \ln 0.1 = -2.763$$

$$f'(0.8) = 0.8 \ln 0.8 = -2.142$$

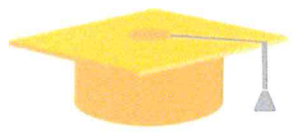
$$f'(2) = 2 \ln 2 = 16.635$$

נקודת הקיצון: $\min(1, 3)$

א. תחום עלייה: $x > 1$

$$e^{-0.5} < x < 1$$

תחום ירידה:



$$f(x) = \frac{3x^2}{2\ln x + 1}$$

$\rightarrow 6x$ $\rightarrow \frac{2}{x}$

ג. נגזרת של (הטורקיזיה):

$$f'(x) = \frac{6x(2\ln x + 1) - \frac{2}{x} \cdot 3x^2}{(2\ln x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x \ln x + 6x - 6x}{(2\ln x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{12x \ln x}{(2\ln x + 1)^2}$$

$$12x \cdot \ln x = 0$$

$$\begin{aligned} \downarrow & \quad \searrow \\ 12x = 0 & \quad \ln x = 0 \\ x = 0 & \quad \log_e x = 0 \end{aligned}$$

(סוף זמן) $x = e^0$
גובה הקוביות $x = 1$

שניה של אולי (הגזרת) $f=0$:

שניה של גובה הקוביות $f=0$:

$$f(1) = \frac{3 \cdot 1^2}{2\ln 1 + 1} = 3$$

גובה הקוביות

גובה הקוביות (13)

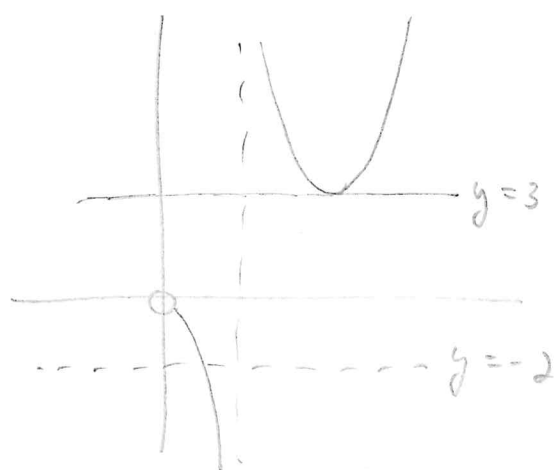


3. הוגד הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ כי יש לה נקודת מינימום בנקודה $(1, 3)$ והיא נקודת שיתוף של הפונקציה עם המישור $y = 3$.

הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ היא פונקציה רציפה ויציבה. נקודת המינימום שלה היא $(1, 3)$.

הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ היא פונקציה רציפה ויציבה. נקודת המינימום שלה היא $(1, 3)$.

ה. השר $y = t$ מתן אפיקים קבוצת המינימום $(1, 3)$ וזכור שיש לה נקודת מינימום בנקודה $(1, 3)$.



השר $y = t - 5$ יש השר $y = -2$ והוא חוצה את השר $y = t - 5$ בנקודה $(1, -2)$.

