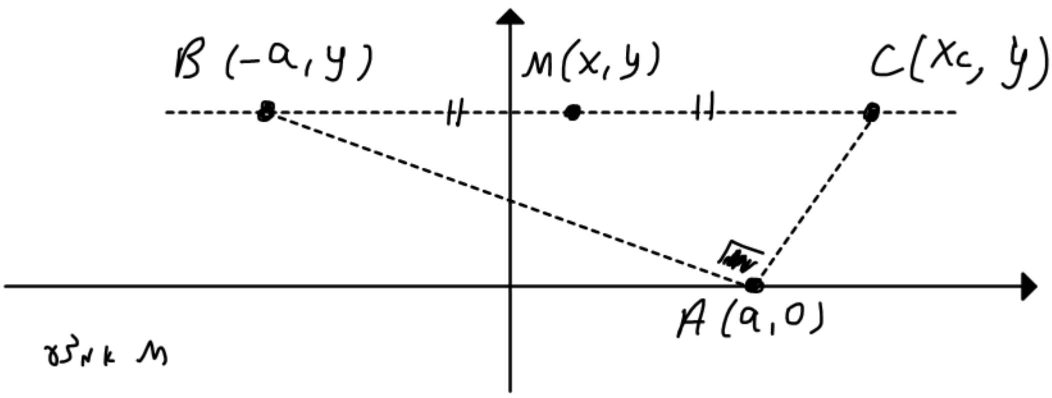
פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ד, 2024, שאלון: 35582

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

1. במשולש ישר זווית ABC $(\measuredangle BAC = 90^\circ)$, שיעורי הקודקוד A הם $(a , 0)$, a הוא פרמטר שונה מאפס.
שיעור ה־ x של הקודקוד B הוא $-a$. הצלע BC מקבילה לציר ה־ x.
הנקודה M היא אמצע הצלע BC.

א. הביעו באמצעות a את משוואת המקום הגאומטרי שעליו נמצאות כל הנקודות M.



נסמן $M(x,y)$, $B(-a,y)$, $C(x_c,y)$ לפי נתוני השאלה.

M אמצע BC ולכן:

$$x = \frac{-a+x_c}{2}$$

$$x_c - a = 2x$$

$$x_c = 2x + a$$

$$C(2x+a, y)$$

AB ו- AC מאונכים ולכן:

$$AC \perp AB \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{AB} = -1$$

$$m_{AC} = \frac{y-0}{2x+a-a} = \frac{y}{2x}$$

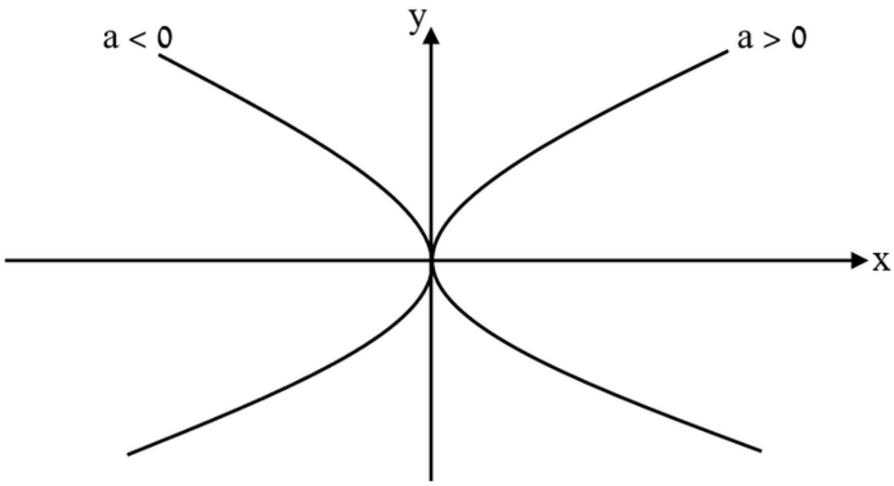
$$m_{AB} = \frac{y-0}{-a-a} = -\frac{y}{2a}$$

$$-\frac{y}{2a} \cdot \frac{y}{2x} = -1$$

$$\boxed{y^2 = 4ax}$$

ב. סרטטו את העקום המתואר על ידי המשוואה שמצאתם בסעיף א.

סרטטו את שתי האפשרויות במערכת צירים אחת.



באחת מן הנקודות M, שנמצאת ברביע הראשון, העבירו ישר ℓ המשיק למקום הגאומטרי שמצאתם בסעיף א.

ג. הוכיחו כי הישר ℓ מקביל לישר AC.

הרביע הראשון מתאים למקרה שבו $a>0$.

$A(a,0)$. נסמן $M\left(\frac{t^2}{4a}, t\right)$ נקודה על $y^2=4ax$

$$X_C = 2X_M + a = \frac{2t^2}{4a} + a \Rightarrow C\left(\frac{t^2}{2a}+a, t\right)$$

$$m_{AC} = \frac{t-0}{\frac{t^2}{2a}+a-a} = \frac{t}{\frac{t^2}{2a}} = t \cdot \frac{2a}{t^2} = \frac{2a}{t}$$

משוואת המשיק לפרבולה $y^2=2px$ בנק' M: $\quad y y_M = p(x+x_M)$

עבור $y^2=4ax$ מתקיים $p=2a$ $\qquad m_{\text{משיק}} = \frac{p}{y_M}$

ולכן $m_{\text{משיק}} = \frac{2a}{t}$

לסיכום $\boxed{m_{AC} = m_\ell = \frac{2a}{t}}$

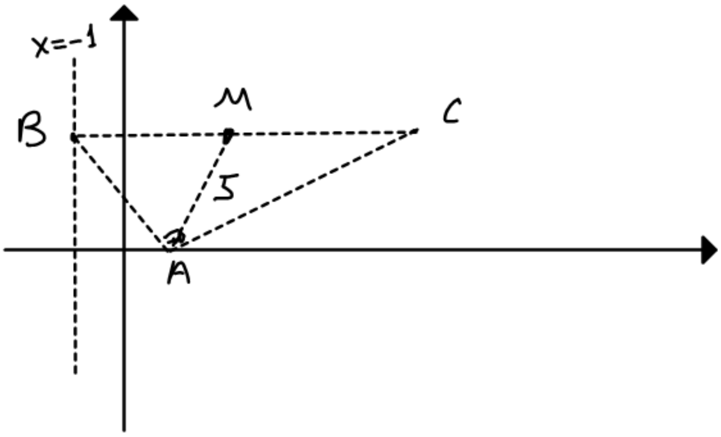
נתון גם כי $AM=5$ (הנקודה M נמצאת ברביע הראשון), והקודקוד B נמצא על הישר $x=-1$.

ד. מצאו את שיעורי הקודקודים B ו־C.

נתון בתחילת השאלה $x_B=-a$

לכן $-a=-1$

$a=1$



$BM=MC=AM=5$

במשולש ישר זווית, תיכון ליתר שווה למחצית היתר.

$x_M=x_B+5=4$

$x_C=x_M+5=9$

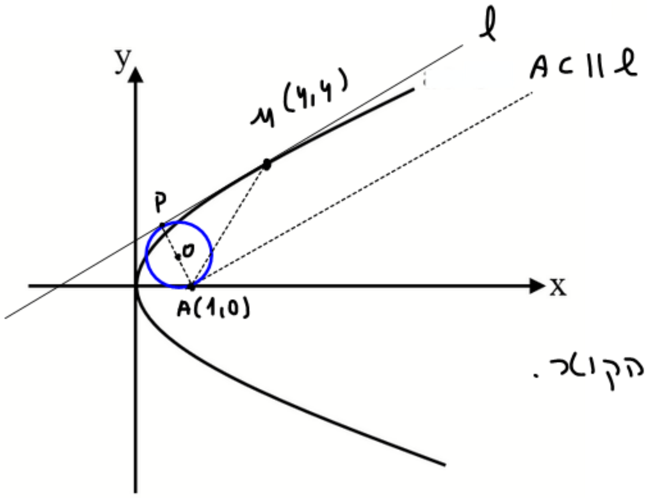
$y_M^2=4\cdot a\cdot x_M=4\cdot 1\cdot 4$

$y_M=4$ $\qquad y_B=y_C=y_M=4 \Rightarrow \boxed{B(-1,4)\ ,\ C(9,4)}$

עד כה: $p=2\ ,\ \ a=1$ $\qquad y_M=t=4$

דרך הקודקוד A העבירו מעגל המשיק לישרים ℓ ו- AC.

ה. מצאו את שיעורי מרכז המעגל.



$A(1,0) \qquad M(4,4)$

המעגל משיק בנקודה A לשני הישרים המקבילים, לכן האנך למקבילים בנק' A הוא קוטר המעגל, מאונך לשניהם. נק' O מרכז המעגל היא אמצע הקוטר. נסמן P הקצה השני של הקוטר.

קוטר $AP \perp \ell$

$$m_\ell = \frac{2a}{t} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$m_{AP} = -2 \qquad A(1,0) \qquad \Rightarrow$$

נמצא את משוואת AP:

$$y-0 = -2(x-1)$$

$$AP:\ y=-2x+2$$

נמצא את משוואת ℓ ואת הנק' P:

משוואת המשיק

$$\ell:\ yy_M = p(x+x_M)$$

$$y\cdot 4 = 2(x+4) \quad \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{2}x+2$$

$$P\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+2 \\ y=-2x+2 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x+2 = -2x+2$$

$$x=0 \qquad y=2$$

$$P(0,2)$$

נמצא את אמצע AP

$$x_0 = \frac{x_P+x_A}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = \frac{y_P+y_A}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$$

$$\boxed{\text{מרכז המעגל}\ \ O\left(\frac{1}{2},1\right)}$$

.2 נתונים הישר ℓ והמישור π .

ההצגה הפרמטרית של הישר ℓ היא $\underline{x} = (-1, 5, -11) + t \cdot (m-1, 5-m, -2)$.

משוואת המישור π היא $3x + my + (m+6)z + 4 = 0$.

m הוא פרמטר.

א. הראו כי לכל ערך של m הישר ℓ אינו מקביל למישור π .

נתון כי הישר ℓ ניצב למישור π וחותך אותו בנקודה A .

ב. מצאו את הערך של הפרמטר m .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A .

ד. לפניכם טענה:

קיים מישור אחד בלבד המכיל את הישר ℓ ועובר דרך הנקודה $(11, -15, -7)$.

קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

פתרון:

א. כדי שקו ישר יקביל למישור, לוקטור הכיוון שלו צריך להיות מאונך לנורמל של המישור. כלומר המכפלה הסקלרית של וקטור הכוון של הישר, ושל הנורמל של המישור צריכה להיות אפס.

וקטור הכיוון של הישר: $(m-1, 5-m, -2)$

הנורמל של המישור: $(3, m, m+6)$

נחשב את המכפלה הסקלרית:

$(m-1, 5-m, -2) \cdot (3, m, m+6) = 3m - 3 + 5m - m^2 - 2m - 12$

$= -m^2 + 6m - 15$

נשווה את המכפלה לאפס: $-m^2 + 6m - 15 = 0$

זו משוואה שאין לה פתרון, כלומר המכפלה הסקלרית לא יכולה להיות שווה לאפס.

לכן לכל ערך של m הישר לא מקביל למישור.

יואל גבע
לא מתפשרים.

ב. נתון כי הישר ניצב למישור, כלומר הוא ~ הקו' לנורמל של המישור, ולכן וקטור הכיוון של הישר תלוי לינארית בנורמל של המישור, כלומר מתקיים:

$$\frac{m-1}{3}=\frac{5-m}{m}=\frac{-2}{m+6}$$

נפתור את המשוואה של האיבר הראשונים:

$$\frac{m-1}{3}=\frac{5-m}{m} \Rightarrow m^2-m=15-3m$$

$$m^2+2m-15=0$$

הפתרונות הם: $m=3$, $m=-5$

כעת נפתור את המשוואה של האיברים האחרונים:

$$\frac{5-m}{m}=\frac{-2}{m+6} \Rightarrow 5m+30-m^2-6m=-2m$$

$$m^2-m-30=0$$

הפתרונות הם: $m=6$, $m=-5$

כלומר שלושת האיברים שווים עבור $\boxed{m=-5}$

ג. נציב $m=-5$ בהצבה הפרמטרית של הישר ובמשוואת המישור:

$$l: (-1,5,-11)+t(-6,10,-2)$$

$$\pi: 3x-5y+z+4=0$$

נמצא את נקודת החיתוך בין הישר למישור:

$$3(-1-6t)-5(5+10t)-11-2t+4=0$$
$$-3-18t-25-50t-11-2t+4=0$$
$$70t=-35$$
$$t=-\frac{1}{2}$$

נציב את $t=-\frac{1}{2}$ בהצגה הפרמטרית של הישר ונקבל את נקודה A:

$$\boxed{A(2,0,-10)}$$

3. נבדוק האם הנקודה הנתונה נמצאת על הישר:

$$(11,-15,-7)=(-1,5,-11)+t(-6,10,-2)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases}11=-1-6t\\-15=5+10t\\-7=-11-2t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-2\\t=-2\\t=-2\end{cases}$$

קיים למערכת פתרון יחיד, ולכן הנקודה על הישר.
כלומר קיימים אינסוף מישורים המכילים את הישר ואת הנקודה.

הטענה לא נכונה

3. $z = x + yi$ הוא מספר מרוכב (x ו־ y הם מספרים ממשיים).

א. הראו כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות (x , y) במישור גאוס המקיימות:

$|6 - \bar{z} - 8i|^2 - |5i| = |12 + 16i|$ הוא מעגל.

הנקודה M היא מרכז המעגל המתואר בסעיף א.

המספרים המרוכבים z_A ו־ z_M מייצגים את הנקודות A ו־ M, בהתאמה.

נתון: למספרים z_A ו־ z_M יש אותו ארגומנט (זווית).

$2|z_A| = |z_M|$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה A.

נתונה סדרה הנדסית $z_1 , z_2 , z_3 , \ldots$.

האיבר הראשון בסדרה מייצג את הנקודה A, והאיבר החמישי בסדרה מייצג את הנקודה M.

ג. מצאו את מנת הסדרה (כל האפשרויות).

ד. חשבו את הסכום: $z_1 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} + \ldots + z_{10} \cdot \overline{z_{10}}$.

פתרון:

א. נסמן, $z=x+yi$, כלומר $\bar{z}=x-yi$ ונציב

למשוואה הנתונה:

$$|6-x+yi-8i|^2-|5i|=|12+16i|$$

נפשט את המשוואה:

$$|6-x+(y-8)i|^2-|5i|=|12+16i|$$

נציב את הערך המוחלט:

$$\left(\sqrt{(6-x)^2+(y-8)^2}\right)^2-5=\sqrt{12^2+16^2}$$

$$(x-6)^2+(y-8)^2=20+5$$

ונקבל: $(x-6)^2+(y-8)^2=25$

המקום הגיאומטרי הוא מעגל שמרכזו בנקודה $(6,8)$ ורדיוסו 5

ב. הנקודה M היא מרכז המעגל,
כלומר $M=6+8i$
נעבור להצגה קוטבית:

$$R=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$$

$$\tan\theta=\frac{8}{6}\Rightarrow\theta=53.13^\circ+180^\circ K$$

המספר ברביע הראשון ולכן $\theta=53.13^\circ$

קיבלנו $M=10\,\text{cis}\,53.13^\circ$

למספר A אותו ארגומנט, והערך המוחלט שלו קטן פי 2 משל המספר M
כלומר $A=5\,\text{cis}\,53.13^\circ$

נעבור להצגה ישרה:

$$x=5\cdot\cos 53.13^\circ=3$$
$$y=5\cdot\sin 53.13^\circ=4$$

הנקודה היא $\boxed{A(3,4)}$

ד. כעת נתונים סדרה הנדסית –

$z_1, z_2, z_3, \dots$

ונתון:

$z_1 = A = 3+4i$

$z_5 = M = 6+8i$

לפי נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית – $a_5 = a_1 \cdot q^4$, לכן:

$$6+8i = (3+4i)\cdot q^4$$

$$q^4 = \frac{6+8i}{3+4i} = \frac{2(3+4i)}{3+4i} = 2$$

נוציא שורש רביעי ונמצא את כל הערכים האפשריים של q:

$$q = \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2\,\text{cis}\,0^\circ} = \sqrt[4]{2}\cdot \text{cis}\,90k, \; k=0,1,2,3$$

נציב ונקבל:

$$\boxed{\begin{aligned} q_1 &= \sqrt[4]{2}\cdot \text{cis}\,0^\circ = \sqrt[4]{2} \\ q_2 &= \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\,90^\circ = \sqrt[4]{2}\cdot i \\ q_3 &= \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\,180^\circ = -\sqrt[4]{2} \\ q_4 &= \sqrt[4]{2}\,\text{cis}\,270^\circ = -\sqrt[4]{2}\cdot i \end{aligned}}$$

3. לכל מספר מרוכב מתקיימת התכונה הבאה:

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2=R^2$$

מכיוון שהארגומנט לא משפיע על התוצאה הנ"ל, משנה איפה ערך של q נבחר עבור הטענה הזה, משום שנקבל את אותה תוצאה.

לכן נבחר $q=\sqrt[4]{2}$.

כעת:

$$z_1\cdot\bar{z}_1=|z_1|^2=25$$

$$z_2\cdot\bar{z}_2=|z_2|^2=(5\cdot\sqrt[4]{2})^2=\sqrt{2}\cdot25$$

$$z_3\cdot\bar{z}_3=|z_3|^2=(5\cdot(\sqrt[4]{2})^2)^2=2\cdot25$$

ובאופן כללי:

$$z_k\cdot\bar{z}_k=|z_k|^2=(5\cdot(\sqrt[4]{2})^{k-1})^2=(\sqrt{2})^{k-1}\cdot25$$

כלומר המכפלות מהוות סדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא $q_1=25$ והמנה היא $q=\sqrt{2}$

נחשב את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה:

$$S_{10}=\frac{25((\sqrt{2})^{10}-1)}{\sqrt{2}-1}$$

ונקבל:

$$S_{10}=\frac{25\cdot31}{\sqrt{2}-1}=\boxed{\frac{775}{\sqrt{2}-1}}$$

4. נתונות הפונקציות: $f(x)=\frac{a-x^2}{e^x}$, $g(x)=\frac{(x+1)^2}{e^x}$ המוגדרות לכל x .

a הוא פרמטר.

א. מצאו את הערך של a שבעבורו $f(x)=g'(x)$ לכל ערך של x .

הציבו את הערך של a שמצאתם, וענו על הסעיפים ב–ה שלפניכם.

ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של כל אחת מן הפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה־ x .

ה. חשבו את הערך של הביטוי: $\int_1^4\left(\frac{e^{2x}}{(x+1)^4}\right)\cdot\left(\frac{x^2-1}{e^x}\right)dx$.

א. $g'(x)=\frac{2(x+1)e^x-(x+1)^2e^x}{e^{2x}} \longrightarrow g'(x)=\frac{\cancel{e^x}(x+1)(2-(x+1))}{e^{\cancel{2x}}}$

$g'(x)=\frac{1-x^2}{e^x}$

$f(x)=g'(x):\quad \frac{a-x^2}{e^x}=\frac{1-x^2}{e^x}\ \backslash\cdot e^x \longrightarrow a-x^2=1-x^2 \longrightarrow \boxed{a=1}$

ב(1). $\frac{1-x^2}{e^x}=0 \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow x=\pm1$

חיתוך עם ציר x: $(-1,0)$ $(1,0)$

$f(0)=\frac{1-0^2}{e^0} \longrightarrow f(0)=1$

חיתוך עם ציר y: $(0,1)$

(2) $\frac{(x+1)^2}{e^x}=0 \longrightarrow (x+1)^2=0 \longrightarrow x=-1$

$g(0)=\frac{(0+1)^2}{e^0} \longrightarrow g(0)=1$

חיתוך עם ציר x: $(-1,0)$

חיתוך עם ציר y: $(0,1)$

(3)

$$f'(x) = \frac{-2x\cdot e^x - (1-x^2)e^x}{e^{2x}} \to \frac{\cancel{e^x}(x^2-2x-1)}{e^{\cancel{2x}}}$$

$$f'(x)=0 \to \frac{x^2-2x-1}{e^x} = 0 \quad /\cdot e^x \to x^2-2x-1=0$$

$$x = 1+\sqrt{2}$$
$$x = 1-\sqrt{2}$$

x	$x < 1-\sqrt{2}$	$< x <$ $1+\sqrt{2}$	$< x$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$f'(-1) = +$
$f'(0) = -$
$f'(3) = +$

$$f(1+\sqrt{2}) = \frac{1-(1+\sqrt{2})^2}{e^{1+\sqrt{2}}} \to \boxed{\min(1+\sqrt{2},\ -0.431)}$$

$$f(1-\sqrt{2}) = \frac{1-(1-\sqrt{2})^2}{e^{1-\sqrt{2}}} \to \boxed{\max(1-\sqrt{2},\ 1.253)}$$

$$g'(x) = f(x) = 0 \to \frac{1-x^2}{e^x} = 0 \quad /\cdot e^x \to x^2 = 1 \to x = \pm 1$$

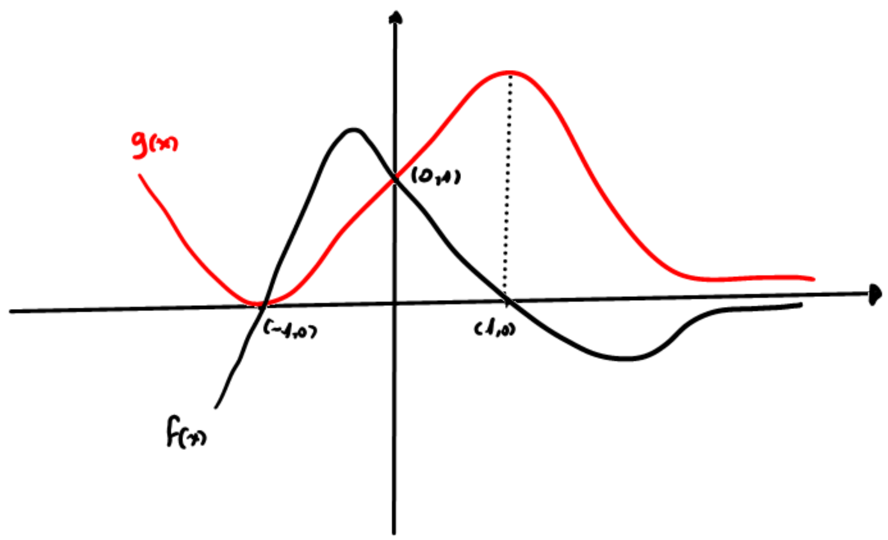
x	$x <$	-1 $< x <$	1 $< x$
$g'(x)$	−	+	−
$g(x)$	↘	↗	↘

$g'(2) = -$
$g'(0) = +$
$g'(-2) = -$

$$g(-1) = \frac{(-1+1)^2}{e^{-1}} \to \boxed{\min(-1,0)}$$

$$g(1) = \frac{(1+1)^2}{e^1} \to \boxed{\max\left(1, \frac{4}{e}\right)}$$

ג.



הערה:

ניתן לראות שבעבור $x\to\infty$ שתי הפונ' שואפות ל-0 מכיוון ו-e^x ישאף יותר מהר ל-∞ מ-$\pm x^2$.

ואילו בעבור $x\to-\infty$

$$f(x): \lim_{x\to-\infty} \frac{-\infty}{0} = -\infty$$
$$g(x): \lim_{x\to\infty} \frac{\infty}{0} = \infty$$

ד. $\int_{-1}^{1} f(x)dx \longrightarrow \int_{-1}^{1} g'(x)dx \longrightarrow g(x)\Big]_{-1}^{1} \longrightarrow g(1) - g(-1) = \frac{4}{e} - 0 = \frac{4}{e} \approx \boxed{1.471}$

ה. ניתן לראות כי הביטויים

$$\frac{e^{2x}}{(x+1)^4} = \left(\frac{1}{g(x)}\right)^2 = (g(x))^{-2} \quad ! \quad \frac{x^2-1}{e^x} = -f(x) = -g'(x)$$

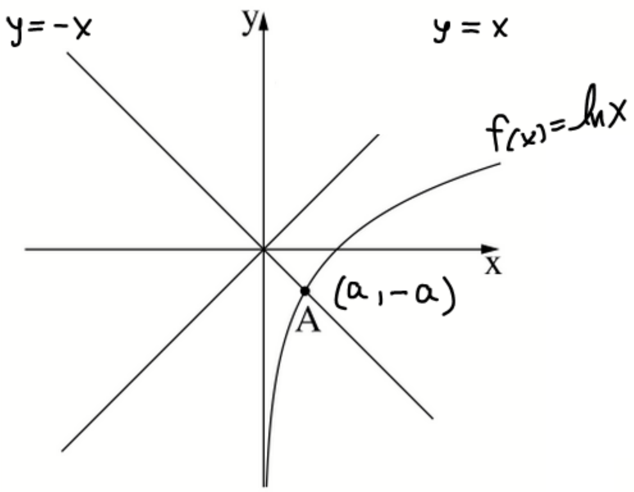
$$-\int_{1}^{4} (g(x))^{-2} g'(x)dx$$

לפי הנוסחה: $\int (f(x))^n f'(x)dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$ נקבל:

$$-\frac{(g(x))^{-1}}{-1}\Big]_{1}^{4} \longrightarrow \frac{1}{g(x)}\Big]_{1}^{4} \longrightarrow \frac{1}{g(4)} - \frac{1}{g(1)} = \frac{e^4}{25} - \frac{e}{4} \approx \boxed{1.504}$$

יואל גבע
לא מתפשרים.

.5 בסרטוט שלפניכם מתואר הגרף של הפונקציה $f(x)=\ln(x)$ המוגדרת בתחום $x>0$,
ומתוארים הישרים $y=x$ ו־ $y=-x$.
הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם אחד מן הישרים.
נסמן את שיעור ה־ x של הנקודה A ב־ a.
היעזרו בסרטוט, וענו על הסעיפים א–ה שלפניכם.
הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.



$x_A=a$. נק' A נמצאת על $y=-x$

לכן $y_A=-a$. $A(a,-a)$

נתונה הפונקציה: $g(x)=\dfrac{\ln(x)-x}{\ln(x)+x}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

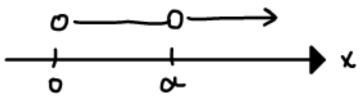
$x>0$ וגם $\ln(x)+x\neq 0$

נפתור את המשוואה $\ln(x)+x=0$ $\Leftarrow$ $\ln x=-x$

זוהי משוואת החיתוך של $y=-x$ ושל $f(x)=\ln x$ ולכן פתרונה היחיד הוא $x=a$.

תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא $x>0$ ולכן $a>0$ (וגם לפי הסרטוט)

תחום הגדרה: $x>0$ וגם $x\neq 0$.



$\boxed{0<x<a \ , \ x>a}$

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה־ x (אם יש כאלה).

אין כאלה. נסביר: המשוואה $\ln x-x=0$

$\Downarrow$

$\ln x=x$

זו משוואת החיתוך של $y=x$ ושל $f(x)=\ln x$

ולפי הסרטוט אין נקודות חיתוך לשני הגרפים

והם מתרחקים זה מזה כאשר x גדל.

לכן – אין פתרון למשוואה.

לכן – לגרף הפונקציה $g(x)$ אין חיתוך עם ציר ה-x.

תשובה: אין חיתוך של גרף g(x) עם ציר ה-x

(3) מצאו את משוואת האסימפטוטה המקבילה לציר ה־ x של הפונקציה $g(x)$.

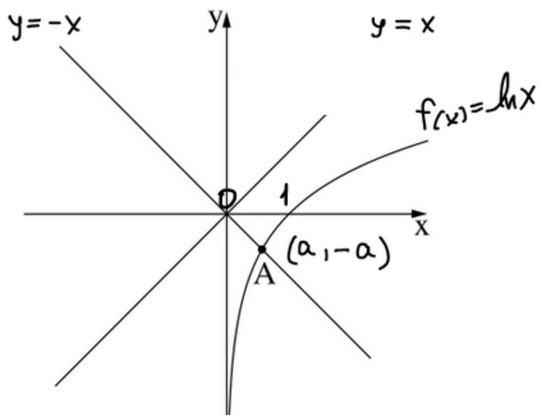
$$g(x)=\frac{\ln(x)-x}{\ln(x)+x}$$

עבור $x>0$ ניתן את הגבול $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-1$$

$\boxed{\text{האסימפטוטה היא } y=-1}$

ב. הסבירו מדוע מתקיים $0<a<1$.



עבור תחום ההגדרה $x>0$

הפונקציה $y=-x$ שלילית.

הפונקציה $f(x)=\ln x$

שלילית רק עבור $0<x<1$.

לכן הנקודה המשותפת שלהן, שהיא $x=a$

תתקיים רק בתחום $0<a<1$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

נגזור לפי כלל המנה

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$u=\ln x-x \qquad v=\ln x+x$

$u'=\frac{1}{x}-1 \qquad v'=\frac{1}{x}+1$

$$g'(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}-1\right)(\ln x+x)-\left(\frac{1}{x}+1\right)(\ln x-x)}{(\ln x+x)^2}$$

מונה $g'(x)$ $=\frac{1}{x}\ln x+1-\ln x-x-\left(\frac{1}{x}\ln x-1+\ln x-x\right)=$

$$=\cancel{\frac{1}{x}\ln x}+1-\ln x-\cancel{x}-\cancel{\frac{1}{x}\ln x}+1-\ln x+\cancel{x}=2-2\ln x$$

$$\left[\,g'(x)=\frac{2-2\ln x}{(\ln x+x)^2}\,\right]$$

$g'(x)=0 \Rightarrow \ln x=1$

$x=e$

$0<a<1$

x	0		a		e	
$g'(x)$	//	$+$	//	$+$	0	$-$
$g(x)$	//	↗	//	↗	max	↘

הסבר לקביעת סימן $g'(x)$ עבור $0<x<a$:
המונה $2-2\ln x$ מחליף סימן
רק כאשר $x=e$ והמכנה $(\ln x+x)^2$
הוא חיובי בתחום. לכן $g'(x)$ אומנם לא
מוגדרת עבור $x=a$ אבל היא
לא מחליפה סימן פעם נוספת.

$f'(2)=+$ $\qquad f'(3)=-$

$$f(e)=\frac{1-e}{1+e}\approx -0.462$$

ג(1) $\boxed{\max\left(e,\frac{1-e}{1+e}\right)}$

ג(2)

ירידה:	$x>e$
עלייה:	$0<x<a,\ a<x<e$

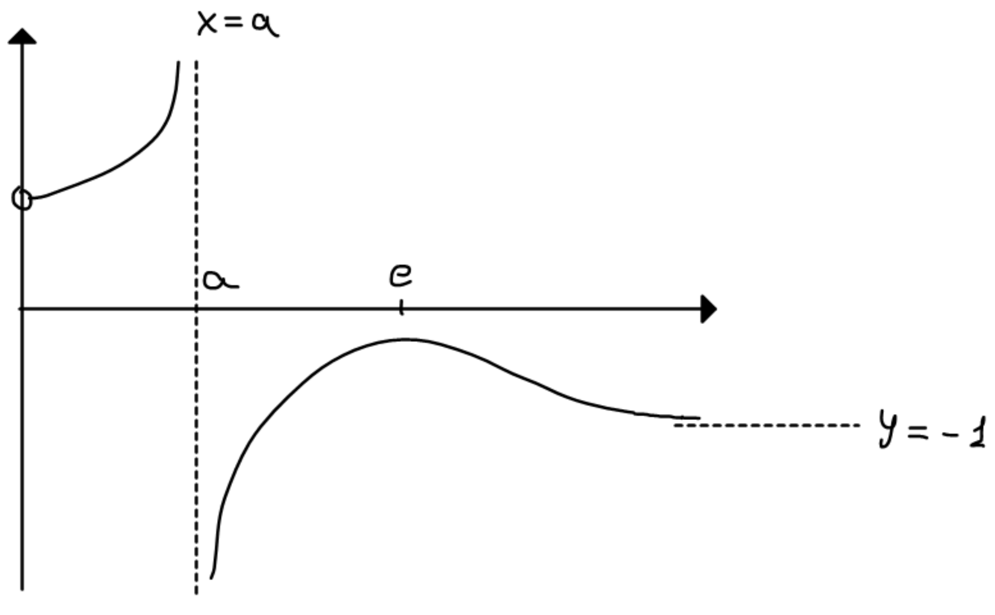
ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

עבור $x\to 0$ מתקיים $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, כלומר ישנה נקודת אי-הגדרה $(0,1)$

$x=a$ מאפס את המכנה של $g(x)$. הרי $\ln(a)=-a$

$$g(a)=\frac{\ln a-a}{\ln a+a}=\frac{-2a}{0}$$

ולכן $x=a$ אסימפטוטה אנכית



ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $h(x)=e^{g(x)}$.

$h(x)$ פונקציה חיובית

עבור $x\to a_+$ (מימין) מתקיים $g(x)\to-\infty$ ולכן $h(x)\to 0$

כלומר יש נקודת אי-הגדרה $(a,0)$

עבור $x\to a_-$ (משמאל) מתקיים $g(x)\to+\infty$ ולכן $h(x)\to+\infty$

כלומר יש אסימפטוטה אנכית.

עבור $x\to+\infty$ מתקיים $g(x)\to-1$ ולכן $h(x)\to\frac{1}{e}$

עבור $x\to 0_+$ מתקיים $g(x)\to 1$ ולכן $h(x)\to e$

$h'(x)=g'(x)e^{g(x)}$ בעלת אותם סימני נגזרת

ולכן אותם תחומי עלייה וירידה

		0		a		e	
h'	////		+	////	+	0	−
h	////		↗	////	↗	max	↘

$h_{max}=h(e)=e^{-0.462}\approx 0.63$