פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ד, 2024, שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

1. אלון יצא בשעה 8:00 מעיר א' לעיר ב'. אלון הלך במהירות קבועה במשך חצי שעה, ולאחר מכן עצר למנוחה של 10 דקות.
לאחר המנוחה התחיל אלון לרוץ לכיוון עיר ב' במהירות הגדולה פי 2 ממהירות הליכתו.
אלון רץ במשך חצי שעה $\frac{1}{6}$ מן המרחק בין שתי הערים, ולאחר מכן עצר שוב למנוחה של 10 דקות.
לאחר המנוחה השנייה המשיך אלון לרוץ באותה המהירות עד שהגיע לעיר ב'.
דני יצא מעיר ב' ורכב על אופניים לעיר א'. הוא רכב במהירות קבועה. אחרי שעה ו־ 50 דקות הוא הגיע לנקודה שבה נח אלון לראשונה.

א. מצאו פי כמה גדולה מהירות הרכיבה של דני ממהירות ההליכה של אלון.

לקורא:
(הסימנים (x) הם עבור סדר החישובים)

תנועה	זמן t שעות	מהירות V קמ"ש	דרך S ק"מ
אלון הולך $A \to C$	$\frac{1}{2}$	x	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}AB = \frac{1}{12}AB$
מנוחה ב-C	$\frac{1}{6}$	0	0
אלון $C \to D$ ריצה	$\frac{1}{2}$	$2x$	$\frac{1}{6}AB$
מנוחה ב-D	$\frac{1}{6}$	0	0
אלון $D \to B$ ריצה	$\frac{4\frac{1}{2}x}{2x} = \frac{9}{4}$	$2x$	$AB - \frac{1}{6}AB - \frac{1}{12}AB = \frac{3}{4}AB = 4\frac{1}{2}x$
דני $B \to C$ אופניים	$1\frac{5}{6}$	y	(3) $AB - \frac{1}{12}AB = \frac{11}{12}AB$

(2) $\to \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}AB = \frac{1}{12}AB$

(1) $\to \frac{1}{2}\cdot 2x = \frac{1}{6}AB \Rightarrow x = \frac{1}{6}AB$

$AB = 6x$

(6) $\to \frac{3}{4}AB = \frac{3}{4}\cdot 6x = 4\frac{1}{2}x$

(4) $\to 1\frac{5}{6}y = \frac{11}{12}AB \Rightarrow y = \frac{1}{2}AB$

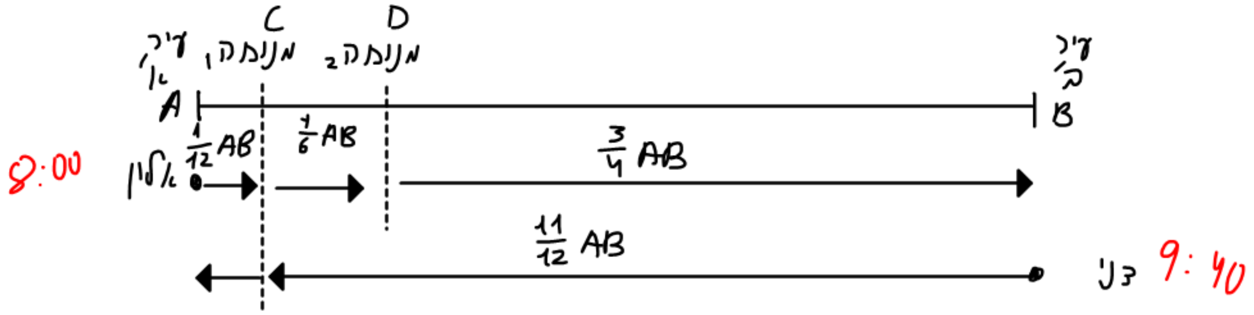
(5) $? = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{6}AB} = 3$

$\boxed{\text{מהירותו של דני גדולה פי שלוש ממהירותו של אלון}}$

כאשר הגיע דני לנקודה שבה עצר אלון למנוחה בפעם הראשונה הוא הגביר את מהירות הרכיבה שלו למהירות הגדולה ב־ 15.3 קמ"ש ממהירותו ההתחלתית.

אלון ודני הגיעו ליעדם בדיוק באותה השעה.

ב. מצאו את מהירות ההליכה של אלון אם נתון כי דני יצא מעיר ב' בשעה 9:40.



תנועה	t זמן בשעות	V מהירות קמ"ש	S דרך ק"מ
דני C→A V מוגברת	$\frac{0.5x}{3x+15.3}$	$y+15.3$ $3x+15.3$	$\frac{1}{12}AB = \frac{1}{2}x$

סה"כ t אלון $A \to B$: $t = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{9}{4} = \frac{43}{12} = 3\frac{7}{12}$ שעות $\Rightarrow$

אלון הגיע ל-B בשעה 11:35

לכן דני הגיע ל-A בשעה 11:35

$t_{B\to A}$ דני $=$ שעה ו-55 דקות $= 1\frac{11}{12}$

(יצא ב- 09:40)

t_{B-A} דני $= 1\frac{11}{12} = 1\frac{5}{6} + \frac{0.5x}{3x+15.3}$

$$\frac{1}{12} = \frac{0.5x}{3x+15.3}$$

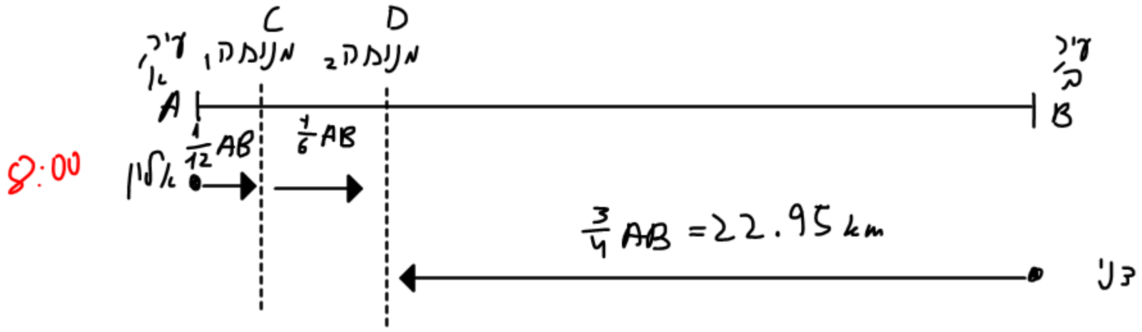
$$3x+15.3 = 6x$$

$x = 5.1$ קמ"ש

$\boxed{\text{מהירות ההליכה של אלון היא 5.1 קמ"ש}}$

ג. מצאו בין אילו שעות היה צריך דני לצאת מעיר ב', אילו היה רוצה לחלוף על פני אלון במהלך המנוחה השנייה שלו.

$AB = 6X = 30.6$ km



$t_{\text{אלון}}$ A→D $= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} =$ שעה ו-10 דקות

$y = 3x = 15.3$ קמ"ש
מהירות דני B→D

מנוחתו השנייה של אלון
הייתה ב- 9:10 ל- 9:20

$t_{\text{דני}}$ B→D $= \frac{22.95 \text{ km}}{15.3 \text{ קמ"ש}} =$ שעה וחצי

$9\frac{1}{6} - 1\frac{1}{2} = 7\frac{2}{3} = 7{:}40$

$9\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2} = 7{:}50$

$\boxed{\text{דני היה צריך לצאת מעיר ב' בין 7:40 ל- 7:50}}$

2. בסדרה חשבונית A נתון: $a_1 = -4 - 4k$, $a_3 = -16 + 2k$. k הוא פרמטר.

א. מצאו עבור אילו ערכים של k:

(1) הסדרה A עולה, (2) הסדרה A יורדת, (3) הסדרה A קבועה.

$d>0$ $d<0$ $d=0$

$a_3 - a_1 = 2d$ $\quad /:2$

$2d = -16+2k-(-4-4k) = -16+2k+4+4k = 6k-12$

$d = 3k-6$

$3k-6>0$

$3k>6$

$k>2$

(1) $d>0 \Rightarrow k>2$

באותו אופן:

(2) $d<0 \Rightarrow k<2$

(3) $d=0 \Rightarrow k=2$

$\boxed{(1)\ k>2,\quad (2)\ k<2,\quad (3)\ k=2}$

נתון כי $a_{17} = -232$.

ב. מצאו את הערך של k .

$a_{17} = a_1 + 16\cdot d$

$-232 = -4-4k+16\cdot(3k-6)$

$-232 = -4-4k+48k-96$

$-232 = 44k-100$

$44k = -132$

$\boxed{k=-3}$

הציבו את הערך של k שמצאתם וענו על הסעיפים ג–ד.

נתונה סדרה חדשה, B, שאיבריה מוגדרים כך: לכל n טבעי, $b_n = a_n + 25n + 12$.

ג. הוכיחו כי הסדרה B היא חשבונית.

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 25(n+1) + 12 = a_{n+1} + 25n + 25 + 12$$

$$b_{n+1} - b_n = a_{n+1} + 25n + 25 + 12 - (a_n + 25n + 12)$$

$$= a_{n+1} + \cancel{25n} + 25 \cancel{+12} - a_n \cancel{-25n} \cancel{-12}$$

$$= a_{n+1} - a_n + 25 = d + 25$$

$$d = 3k - 6$$
$$k = -3$$
$$d = -15 \Rightarrow d + 25 = 10$$

$$\boxed{b_{n+1} - b_n = 10}$$

הסדרה B אכן סדרה חשבונית,
אשר הפרשה קבוע $d_B = 10$

ד. חשבו את הסכום: $b_1^2 - b_2^2 + b_3^2 - b_4^2 + \ldots + b_{29}^2 - b_{30}^2$. $= \underset{\text{הסכום המבוקש}}{S}$

$$b_1^2 - b_2^2 = \underbrace{(b_1 - b_2)}_{-d_B}(b_1 + b_2) = -d_B \cdot (b_1 + b_2)$$

ובאופן דומה שאר האיברים

ולכן:

$$S = -d_B(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \ldots + b_{29} + b_{30})$$

$$S = -d_B \cdot \underset{\text{של } B}{S_{30}}$$

לחישוב S_{30} נמצא את b_1, לפני a_1:

$$a_1 = -4 - 4k = -4 - 4 \cdot (-3) = -4 + 12 = 8 \qquad a_1 = 8$$

$$b_n = a_n + 25 \cdot n + 12$$

$$b_1 = a_1 + 25 + 12 = 45 \qquad d_B = 10 \qquad -d_B = -10$$

$$\underset{\text{של } B}{S_{30}} = \frac{30}{2}[2 \cdot b_1 + 29 \cdot d_B] = 5700$$

$$\underset{\text{הסכום המבוקש}}{S} = -10 \cdot 5{,}700$$

$$\boxed{S = -57{,}000}$$

3. ביישוב מסוים הוחלט לערוך סקר בנוגע להקמת פארק ביישוב.

בסקר השתתפו תושבים מבוגרים וצעירים בלבד.

כל אחד מן התושבים שהשתתף בסקר כתב אם הוא תומך בהקמת הפארק או מתנגד להקמתו (לא היו נמנעים).

כל התושבים המבוגרים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.

בחרו באקראי בתושב אחד מבין התושבים שהשתתפו בסקר.

נסמן ב־ p את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר.

נסמן ב־ k את ההסתברות שהתושב שנבחר תמך בהקמת הפארק.

א. הביעו באמצעות p ו־ k את ההסתברות שהתושב שנבחר היה צעיר התומך בהקמת הפארק.

מחצית מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר תמכו בהקמת הפארק.

$\frac{1}{9}$ מן המשתתפים בסקר שתמכו בהקמת הפארק היו צעירים.

ב. מצאו את p ואת k.

יוסי, כתב חדשות מקומי, ריאיין באקראי 6 מן התושבים הצעירים שהשתתפו בסקר.

ג. מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם תמך בהקמת הפארק ולפחות אחד מהם התנגד להקמת הפארק?

לאחר מכן ריאיין יוסי באקראי, בזה אחר זה, 5 תושבים שהשתתפו בסקר.

ד. מהי ההסתברות שבדיוק 3 מן המרואיינים האלה היו צעירים, ושהמרואיין האחרון מהם היה צעיר?

3(א)

נגדיר את המאורעות הבאים: $\bar{B}$ - מתנגד B - תומך $\bar{A}$ - צעיר A - מבוגר

נתון:

$P(\bar{A}) = p$

$P(B) = k$

$P(B/A) = 1$

	מבוגר A	צעיר $\bar{A}$	
תומך B	$1-p$		k
מתנגד $\bar{B}$			
	$1-p$	p	1

$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 \longrightarrow P(B \cap A) = P(A)$

$P(A) = 1-p$

$P(A \cap B) = P(A) = 1-p$

$\boxed{P(\bar{A} \cap B) = k - (1-p) = k+p-1}$

לקוי

ב. נתון:

$P(B/\bar{A}) = \frac{1}{2}$

$P(\bar{A}/B) = \frac{1}{9}$

$I: P(B/\bar{A}) = \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{k+p-1}{p} = \frac{1}{2}$

$II: P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)} = \frac{k+p-1}{k} = \frac{1}{9}$

נפתור את שתי המשוואות:

$I \quad k+p-1 = \frac{1}{2}p$

$I \rightarrow II \quad \frac{\frac{1}{2}p}{k} = \frac{1}{9} \rightarrow k = 4.5p$

נציב במשוואה I:

$\frac{5.5p-1}{p} = \frac{1}{2} \rightarrow 11p-2 = p \rightarrow \boxed{p = \frac{1}{5}}$

$k = 4.5\cdot\frac{1}{5} \rightarrow \boxed{k = \frac{9}{10}}$

הטבלה לאחר המספרים & k ו p:

	$\bar{A}$ עצר	A לזוקי	
$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	B תשמך
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\bar{B}$ מנוגן
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	

ג. לפי נתון: $P(B/\bar{A}) = \frac{1}{2}$

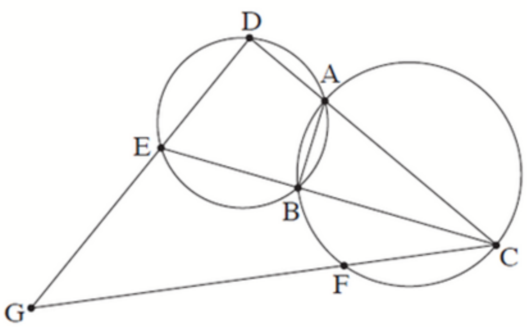
$P(\text{לפחות אחד תקין ולפחות אחד הנעצר}) = 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6\right) = \frac{31}{32}$

✓	x
0	6
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1
6	0

ד.

$\underbrace{\square\ \square\ \square\ \square}_{4}$ (בדיוק 2 תקין) $\square$ עצור $\times \frac{1}{5}$

$$\boxed{P(\text{בדיוק 3 פגומים ועצור בבחינה}) = \binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5} = \frac{96}{3125}}$$



4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו־ B . C היא נקודה על המעגל הימני.
המשכי הקטעים CA ו־ CB חותכים את המעגל השמאלי
בנקודות D ו־ E בהתאמה.
הנקודה F נמצאת על הקשת BC , כמתואר בסרטוט.
המשכי הקטעים CF ו־ DE נפגשים בנקודה G .

א. הוכיחו: $\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$.

ב. הוכיחו: המרובע GDAF הוא בר חסימה במעגל.

המיתרים AF ו־ BC נפגשים בנקודה H .
נתון: $\sphericalangle GEC = \sphericalangle CHA$.

ג. הוכיחו: $\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{DE}$.

נתון: CE מאונך ל־ AB .
$CD = 24$, $DE = 12$.

ד. חשבו את אורכי הקטעים EG ו־ CG .

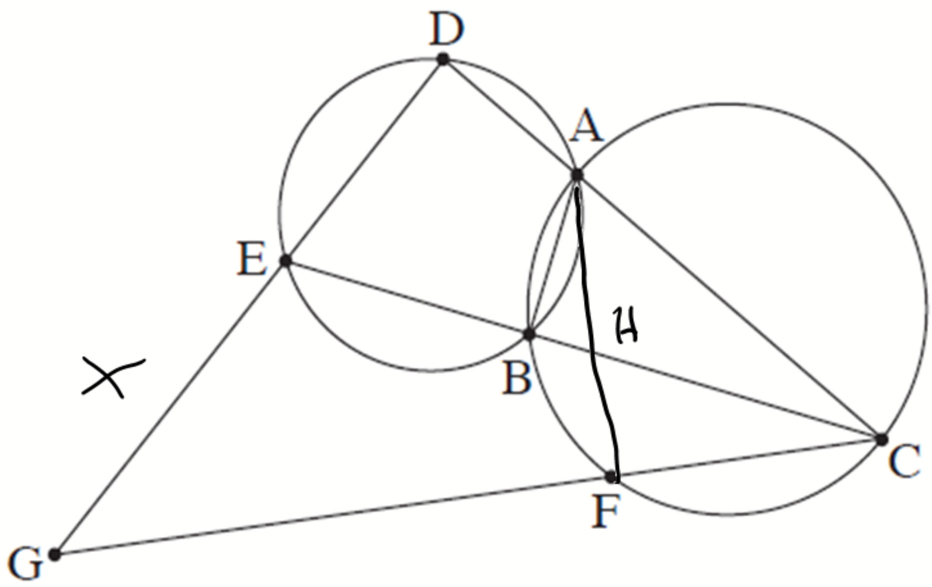
פתרון:

המספר	טענה	נימוק
1	A, B, D, E על מעגל	נתון
2	מרובע ABED חסום במעגל	לפי 1
3	$\sphericalangle ABE + \sphericalangle EDA = 180°$	סכום זוויות נגדיות במעגל 180°. לפי 2
4	$\sphericalangle ABE + \sphericalangle CBA = 180°$	סכום זוויות צמודות 180°
5	$\sphericalangle EDA = \sphericalangle CBA$	כלל המעבר
מש.ל. א'		

המספר	טענה	נימוק
6	F אמצע BC	נתון
7	המשכי הגבהים BE ו- CF נפגשים בנקודה G	נתון
8	$\angle AFC = \angle CBA$	זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות (ב) המעגל.
9	$\angle AFC = \angle ADE$	לפי 8,5
10	$\angle AFG + \angle AFC = 180^\circ$	סכום זוויות צמודות 180°
11	$\angle AFG + \angle ADE = 180^\circ$	לפי 9,10
12	מרובע GDAF בר חסימה במעגל	מרובע בעל זוג אחד של זוויות נגדיות שסכומן 180° הוא בר חסימה במעגל. לפי 11
מ.ש.ל. ב'		
13	AF ו- BC נפגשים בנקודה H	נתון
14	$\angle GEC = \angle CHA$	נתון
15	$\angle DGF + \angle DAF = 180^\circ$	סכום זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל 180°. לפי 12

טענה	טענה	המספר
סכום זוויות צמודות $180°$	$\sphericalangle CAH + \sphericalangle DAF = 180°$	16
כנ"ל המקבר. לפי 15, 16	$\sphericalangle CAH = \sphericalangle DGF$	17
משלימות ל- $180°$ שתי זוויות שוות במשולשים CHA ו- CGE. לפי 14, 17	$\sphericalangle ACH = \sphericalangle ECG$	18
לפי 18. הגדרה חוצה זווית	CE חוצה זווית במשולש CDG	19
משפט חוצה הזווית במשולש CGD.	$\frac{CG}{CD} = \frac{GE}{GD}$	20
		מ.ש.ל ג'
נתון	$CE \perp AB$	21
נתון	$CD = 24$, $DE = 12$	22
לפי 21	$\sphericalangle ABG = 90°$	23
לפי 3, 23, חישוב	$\sphericalangle ADG = 90°$	24
לפי 24	משולש CDG ישר זווית	25

המספר	טענה	נימוק
26	נסמן $GE=x$	סימון
27	$DG=12+x$	חיבור קטעים. לפי 26,22
28	$GC=2x$	חישוב. לפי 26,22,20
29	$24^2+(12+x)^2=(2x)^2$	משפט פיתגורס במשולש CDG
30	$x=20$	חישוב. לפי 29
31 מ.ש.ל ד'	$EG=20, CG=40$	לפי 26,28,30



5. נתון מעגל שמרכזו O והרדיוס שלו R.

מנקודה E, הנמצאת מחוץ למעגל, העבירו ישר החותך את המעגל

בנקודות A ו־ B, כמתואר בסרטוט.

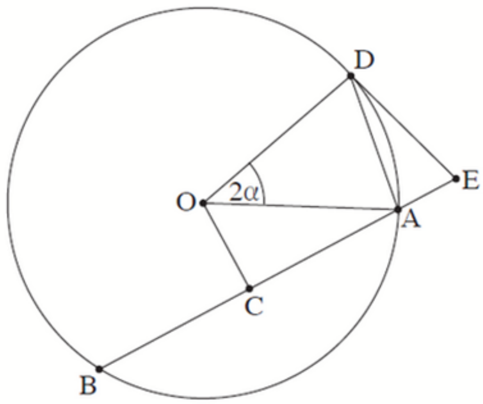
הנקודה D נמצאת על הקשת הגדולה AB,

כך שהקטע ED משיק למעגל.

הנקודה C היא אמצע המיתר AB.

נסמן את הזווית בין הרדיוסים OD ו־ OA ב־ 2α ($\alpha < 60^o$).

נתון: המרחק של הנקודה O מן המיתר AB הוא 0.5R.



א. מצאו את זוויות המרובע DOCE. הביעו באמצעות α אם יש צורך.

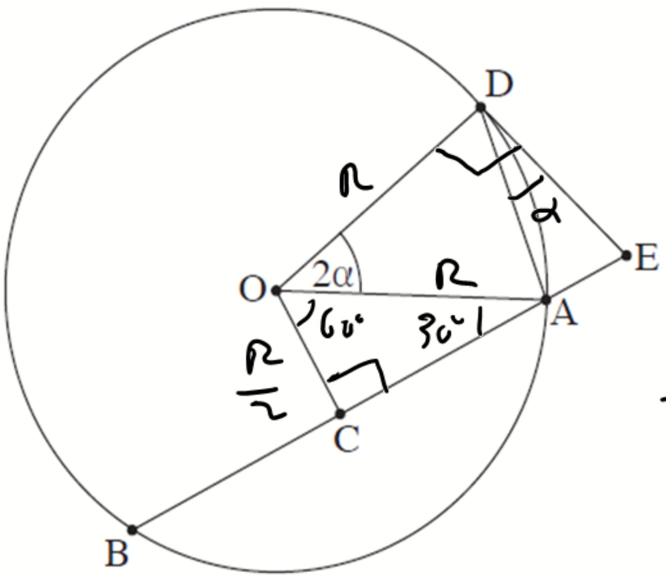
ב. הביעו באמצעות R ו־ α את אורך הקטע DE.

נתון כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOD הוא $\frac{4}{7}R$.

ג. מצאו את α.

ד. מצאו את היחס בין שטח המעגל החוסם את המרובע DOCE ובין שטח המעגל הנתון.

פתרון:



א. לפי המשפט על
זווית בין משיק
למיתר נקבל:
והמשפט על זווית
היקפית וזווית מרכזית
שנשענות על אותה
קשת נקבל כי
$\measuredangle ADE = \alpha$

המרחק של O ממיתר AB הוא הקטע OC
כי רדיוס שחוצה מיתר מאונך למיתר

ולכן $OC = \frac{R}{2}$.

משולש ACO הוא ישר זוית והניצב OC שווה למחצית היתר AO, ולכן

$$\angle CAO = 30^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\angle AOC = 60^\circ$$

לפי זוית בין משיק לרדיוס בנקודת ההשקה:

$$\angle ODE = 90^\circ$$

ולכן זוויות מרובע $DOCE$ הן:

$$\boxed{\begin{aligned} \angle OCE &= \angle ODE = 90^\circ \\ \angle COD &= 2\alpha + 60^\circ \\ \angle CED &= 120^\circ - 2\alpha \end{aligned}}$$

ב. נתבונן במשולש OAD:

$$\frac{AD}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\sin(90^\circ - \alpha)} \Rightarrow \frac{AD}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$$

$$AD = 2R\sin\alpha$$

נעבור למשולש ADE:

$$\angle DAE = 60^\circ + \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{DE}{\sin(60^\circ+\alpha)}=\frac{AD}{\sin(180^\circ-2\alpha)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{DE}{\sin(60^\circ+\alpha)}=\frac{2R\sin\alpha}{\sin(60^\circ+2\alpha)}$$

$$\boxed{DE=\frac{2R\sin\alpha\cdot\sin(60^\circ+\alpha)}{\sin(60^\circ+2\alpha)}}$$

ג. נשתמש במשפט הסינוסים
במשולש AOD:

$$\frac{AD}{\sin2\alpha}=2\cdot\frac{4}{7}R$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2R\sin\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{8}{7}R \quad /:R\neq0$$

זוית כפולה של sin:

$$\frac{2\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{8}{7}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos\alpha=\frac{7}{8}\Rightarrow\boxed{\alpha=28.955^\circ}$$

$$\Downarrow$$

3. הנוסחה לשטח מעגל היא $S=\pi R^2$

ולכן יחס השטחים של שני מעגלים שווה ליחס הרדיוסים של שני המעגלים, בריבוע.

נתחיל מחישוב האלכסון CD במרובע DOCE. נתבונן במשולש OCD:

$$DC^2 = OD^2+OC^2-2\cdot OD\cdot OC\cdot \cos(\measuredangle DOC)$$

$$DC^2 = R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2-2\cdot R\cdot \frac{R}{2}\cdot \cos 117.91^\circ$$

$$DC^2 = 1,718\, R^2$$

$$DC = 1,31R$$

המעגל החוסם את מרובע DOCE חוסם גם את משולש DOC.

נסמן את הרדיוס הזה ב- R^*

ונביע אותו בעזרת R

$$\frac{DC}{\sin\measuredangle DOC}=2R^*$$

$$R^* = \frac{1.31R}{2\sin 117.9^\circ} = 0.741R$$

כעת נחשב את יחס השטחים:

$$\frac{(0.741R)^2}{R^2} = 0.741^2 = 0.549$$

<u>תשובה</u>: יחס השטחים המבוקש

הינו $\boxed{0.549}$

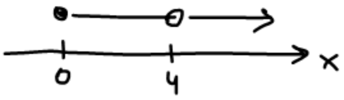
6. נתונה הפונקצייה: $f(x)=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

עבור $\sqrt{x}$ תחום ההגדרה הוא $x\geq 0$.

בנוסף נדרוש $(\sqrt{x}-2)^2\neq 0$ כלומר $\sqrt{x}\neq 2 \quad \backslash()^2$

$x\neq 4$



לסיכום: $x\geq 0$ וגם $x\neq 4$

$\boxed{\text{תחום ההגדרה: } 0\leq x<4\ ,\ x>4}$

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

$x=4$ מאפס את המכנה ולא מאפס את המונה ולכן $\boxed{x=4 \text{ אסימפטוטה אנכית}}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow \boxed{y=0 \text{ אסימפטוטה אופקית (עבור } x\to+\infty)}$$

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

$$f(0)=\frac{-4}{(-2)^2}=-1$$

$\boxed{(16,0)\quad(0,-1)}$

$$f(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x}-4=0$$

$$\sqrt{x}=4 \ \backslash()^2 \Rightarrow x=16$$

(4) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נגזור לפי כלל המנה

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$u=\sqrt{x}-4 \qquad v=(\sqrt{x}-2)^2$$

$$u'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad v'=2(\sqrt{x}-2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}-2)^2-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-4)}{((\sqrt{x}-2)^2)^2}=\frac{\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}-2-2(\sqrt{x}-4))}{(\sqrt{x}-2)^4}$$

$$=\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2-2\sqrt{x}+8)}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-2)^4}=\frac{(\sqrt{x}-2)(6-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-2)(6-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^4}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2$, $x = 4$ פסול בתחום ההגדרה

$\sqrt{x} = 6$, $x = 36$ $\quad f(36) = \frac{1}{8}$

x	0		4		36	
f'	קצה	−	////	+	0	−
f	max	↘		↗	max	↘

$$\boxed{\begin{array}{l} max(0,-1) \\ max\left(36, \frac{1}{8}\right) \end{array}}$$

$f'(2) = -$ $\quad f'(10) = +$ $\quad f'(40) = -$

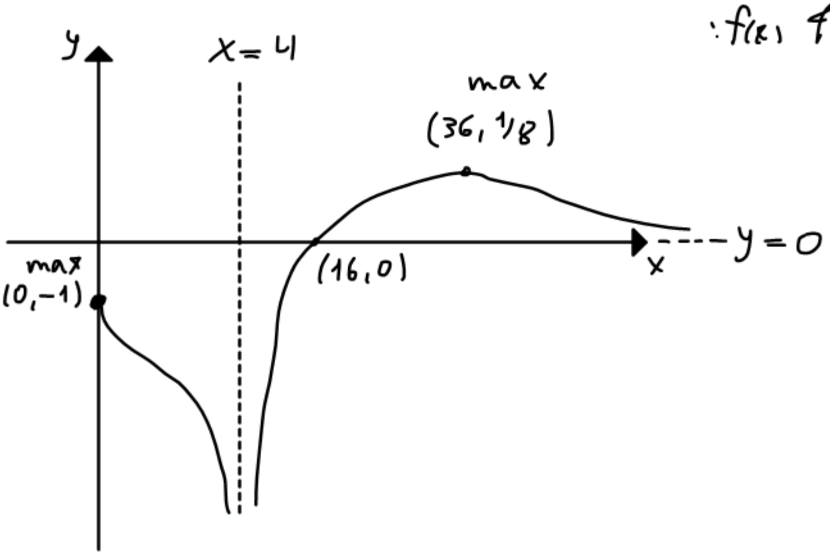
ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

גרף $f(x)$:

הבהרה:

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$

השיפוע בקירבת $(0,-1)$ מימין הוא שלילי.
(שואף ל- $-\infty$)



נתונה הפונקצייה: $g(x)=\frac{2x}{\sqrt{x}-2}$ המוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ג. הראו כי לכל $x>0$ בתחום ההגדרה של הפונקציות מתקיים $f(x)=g'(x)$.

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

$u=2x \qquad v=\sqrt{x}-2$

$u'=2 \qquad v'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

נוכיח כי עבור $x\neq 0$ בתחום ההגדרה $x>4$, $0\leq x<4$ מתקיים $g'(x)=f(x)$

הבהרה: עבור $x\neq 0$ מתקיים

$\frac{x}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

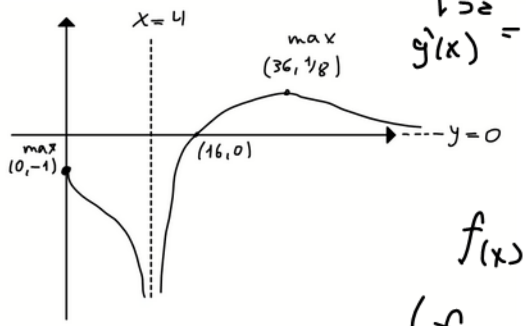
$$g'(x)=\frac{2\cdot(\sqrt{x}-2)-\cancel{2}x/(\cancel{2}\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)^2}=\frac{2(\sqrt{x}-2)-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)^2}=\frac{2\sqrt{x}-4-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)^2}=\frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)^2}=f(x)$$

מש"ל

ד. לפניכם טענות I–II. קבעו בנוגע לכל טענה אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעותיכם.

I. יש משיק לגרף הפונקצייה $g(x)$ ששיפועו הוא 3.

ערכי $g'(x)$ = ערכי $f(x)$



$\boxed{\text{טענה I לא נכונה}}$

לפי מה שהוכחנו בסעיף ג', $g'(x)=f(x)$,
ולפי הגרף אין נקודה על גרף $f(x)$ שבה $f(x)=3$
(כי הערך המקסימלי של $f(x)$ הוא $\frac{1}{8}$ ($f_{max}=\frac{1}{8}$)),
מתקבל כי אין ערך של x שעבורו $g'(x)=3$
ולכן אין משיק לגרף הפונקצייה $g(x)$ ששיפועו 3.

II. לפונקצייה $g(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

$g'(x)=f(x)$ ולכן $g''(x)=f'(x)$

$\boxed{\text{טענה II נכונה}}$

x	0		4		36	
$f'(x)=g''(x)$		−		+	0	−
$g(x)$ קעירות		$\cap$		$\cup$	נקודת פיתול יחידה!	$\cap$

$g''(x)=f'(x)$ = שיפוע המשיק בגרף $f(x)$

ה. חשבו את ערך הביטוי $\int_{1}^{1.44} g(x) \cdot f(x)\,dx$.

הוכחנו $f(x) = g'(x)$

נשתמש ב-

$$\int f'(x) \cdot (f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int_{1}^{1.44} f(x) \cdot g(x)\,dx = \int_{1}^{1.44} (g'(x))(g(x))^1 dx = \frac{(g(x))^2}{2} \Bigg|_{1}^{1.44}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{\sqrt{x}-2}\right)^2 \Bigg|_{1}^{1.44} = 6.48 - 2 = 4.48$$

$$\boxed{\text{ערך הביטוי הוא } 4.48}$$

יואל גבע
לא מתפשרים.

.7 נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin(x)-a}{\sin(x)+a}$. a הוא פרמטר חיובי.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x המקיים $\sin(x)\neq -a$.

נתון כי הגרף של הפונקציה $f(x)$ משיק לציר x בכל נקודות הקיצון שלה.

א. מצאו את הערך של a .

הציבו $a=1$, וענו על הסעיפים ב–ה עבור התחום $-2\pi\le x\le 2\pi$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=-1$ בתחום הנתון? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי הפונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה בכל אחד מחלקי תחום הגדרתה.

ה. קבעו אם הטענה שלפניכם נכונה או לא נכונה. נמקו את קביעתכם.

$$\int_0^{\pi}(f(x)+1)dx>\frac{\pi}{2}\ .$$

7א

$$f'(x)=\frac{\cos x(\sin x+a)-(\sin x-a)\cos x}{(\sin x+a)^2}\longrightarrow\frac{\cos x(\quad 2a\quad)}{(\sin x+a)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2a\cos x}{(\sin x+a)^2}$$

$$f'(x)=0\longrightarrow\frac{2a\cos x}{(\sin x+a)^2}=0\ \Big\backslash\cdot(\sin x+a)^2\longrightarrow 2a\cos x=0\ \Big\backslash :\ 2a\neq 0$$

$$\cos x=0\longrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

עבור $k=0$ נקבל $x=\frac{\pi}{2}$ נבצע נגזרת שנייה רק למונה לבדיקה מכיוון שהמכנה תמיד
חיובי (כי זה בחזקה זוגית) $f''(x)_{\text{מונה}}=-2a\sin x$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2a<0$$

בעבור $x=\frac{\pi}{2}$ תתקבל נק' קיצון מקסימום, מכיוון שהפונ' משיקה לציר ה-x <u>בכל</u>
נק' הקיצון שלה חייבת להיות נק' $(\frac{\pi}{2},0)$ בפונ' ולכן: $F(\frac{\pi}{2})=0$

$$\frac{\sin(\frac{\pi}{2})-a}{\sin(\frac{\pi}{2})+a}=0 \quad \backslash\cdot\left(\sin(\tfrac{\pi}{2})+a\right) \longrightarrow 1-a=0 \longrightarrow \boxed{a=1}$$

ד(1) $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}$

$\sin x+1\neq 0 \longrightarrow \sin x\neq -1 \longrightarrow x\neq \frac{3\pi}{2}+2\pi k$

ערכי ה-x שונים מהתחום הנתון $-2\pi\le x\le 2\pi$ ונקבל עבור $k=0, k=-1$

$x\neq \frac{3\pi}{2}, \quad x\neq -\frac{\pi}{2}$

$\boxed{-2\pi\le x<-\frac{\pi}{2} \text{ או } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \text{ או } \frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi}$

ד(2) $f(0)=\dfrac{\sin(0)-1}{\sin(0)+1}=-1$

חיתוך עם ציר y: $(0,-1)$

$\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}=0 \longrightarrow \sin x=1 \longrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$

ערכי ה-x בתחום ההגדרה ונקבל עבור $k=0, k=-1$

$x=\frac{\pi}{2}, \quad x=-\frac{3}{2}\pi$

חיתוך עם ציר x: $(-\frac{3\pi}{2},0)$ וגם $(\frac{\pi}{2},0)$

ד(3) לפי סעיף א' הנקודות החשודות לקיצון מתקבלות עבור $\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$

ערכי ה-x בתחום ההגדרה ונקבל עבור $k=0, k=-2$

והן: $x=\frac{\pi}{2}, \quad x=-\frac{3\pi}{2}$

יואל גבע
לא מתפשרים.

x	-2π	$< x < -\frac{3\pi}{2}$	$< x < -\frac{\pi}{2}$	$< x < \frac{\pi}{2}$	$< x < \frac{3\pi}{2}$	$< x <$	2π
$f'(x)$		$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

$\boxed{\min(-2\pi,-1) \quad \max\left(-\frac{3\pi}{2},0\right) \quad \max\left(\frac{\pi}{2},0\right) \quad \max(2\pi,-1)}$

$f'(1.75\pi) = +$

$f'(\pi) = -$

$f'(0) = +$

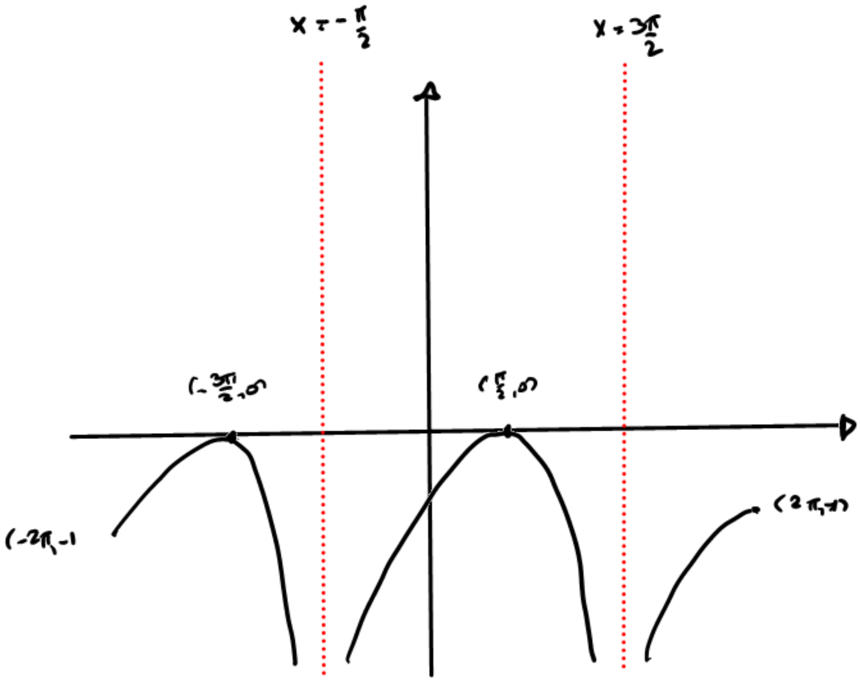
$f'(-\pi) = -$

$f'(-1.75\pi) = +$

$f(-2\pi) = \frac{\sin(-2\pi)-1}{\sin(-2\pi)+1} = -1$

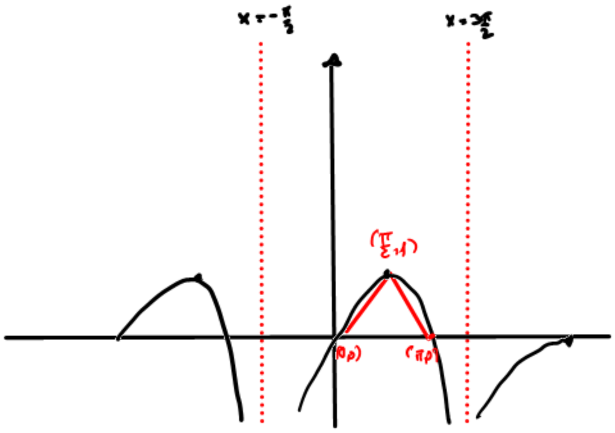
$f(2\pi) = \frac{\sin(2\pi)-1}{\sin(2\pi)+1} = -1$

ב.



3. לפי הסרטוט ניתן לראות שבתחום הנתון ערכי הפונ' שווים -1 בחמש נקודות, ולכן למשוואה $f(x)=-1$
$\boxed{\text{יש חמישה פתרונות בתחום הנתון}}$

ה. נגדיר $g(x)=f(x)+1$, $g(x)$ היא הזזה אנכית של $f(x)$
יחידה אחת לפי מעלה ולכן תראה כך:



נמצא את נקודת החיתוך החיובית הראשונה של $g(x)$ עם ציר x

$$f(x)+1=0 \longrightarrow \frac{\sin x-1}{\sin x+1}=-1$$

$$\sin x-1=-\sin x-1 \longrightarrow \sin x=0$$

$$x=\pi k$$

עבור $k=1$ נקבל $x=\pi$

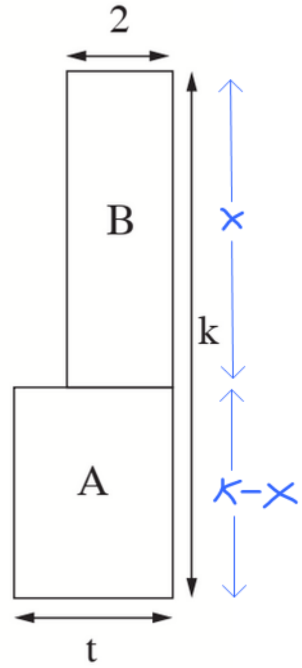
אם נמקם משולש שקודקודיו בנקודות $(0,0)$! $(\pi,0)$ וקודקודו השלישי ב $(\frac{\pi}{2},1)$ ששטחו הוא: $\frac{\pi}{2}=\frac{\pi\cdot 1}{2}$
ערך האינטגרל $\int_0^\pi (f(x)+1)dx$ יהיה השטח הכלוא בין $g(x)$ לציר ה-x בגבולות π ו- 0, מכיוון
שהפונ' קעורה לפני מטה בכל תחום המשולש כי ומצאנו כולו בתוך השטח ולכן ערך האינטגרל יהיה
שטח גדול יותר משטח המשולש. $\boxed{\text{ולכן הטענה נכונה.}}$

8. נתונות שתי גינות מלבניות הצמודות זו לזו, גינה A וגינה B.

הרוחב של גינה A הוא t מטרים.

הרוחב של גינה B הוא 2 מטרים ושטחה הוא $2t+2$ מ"ר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.

האורך הכולל של שתי הגינות הוא k מטרים. k הוא קבוע.



א. הביעו באמצעות k ו־t את שטח הגינה A.

ב. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה B ובין שטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. הביעו באמצעות k את הערך של t שבעבורו היחס בין שטח הגינה A ובין שטח הגינה B הוא מקסימלי. נמקו את תשובתכם.

<u>פתרון:</u>

א. נגדיר: אורך גינה B : x (ראה שרטוט).

נביע את שטח גינה B באמצעות x.

שטח מלבן: נסמן: S_B : $S_B=2x$

נשווה לשטח הנתון: $2x=2t+2$

$\Downarrow$

$x=t+1$

אורך גינה A (חיסור אורכי קטעים): $k-x=k-(t+1)=-t+k-1$

נשים לב כי מחיוביות אורך הגינה A נקבל $t<k-1$.

וכן t הינו רוחב הגינה, לכן $0<t$.

ובסה"כ $0<t<k-1$ (וכן $1<k$).

שטח גינה A: שטח מלבן, נסמן S_A:

$$\boxed{S_A = t\cdot(-t+k-1) = -t^2+(k-1)\cdot t}$$ מ"ר

ג. נגדיר את פונקציית המנה $f(t)$:

$$f(t)=\frac{S_B}{S_A}=\frac{2t+2}{-t^2+(k-1)\cdot t}=2\cdot\frac{t+1}{-t^2+(k-1)\cdot t},\quad 0<t<k-1$$

נחקור את הפונקציה הרציונלית למציאת t עבורו יתקבל ערך מינימלי לפונקציה:

$$f'(t)=2\cdot\frac{-t^2+(k-1)t-(t+1)(-2t+k-1)}{(-t^2+(k-1)\cdot t)^2}$$

נפשט את המונה (ללא הגורם 2):

$$-t^2+(k-1)t-(t+1)(-2t+k-1)$$
$$-t^2+(k-1)t-(-2t^2+(k-1)t-2t+k-1)$$
$$-t^2+(k-1)t-(-2t^2+(k-3)t+k-1)$$
$$-t^2+(k-1)t+2t^2-(k-3)t-k+1$$
$$t^2+2t-k+1$$

נפרק את הביטוי הריבועי שהתקבל לגורמים:

הדסקרימיננטה:

$$\Delta=4+4k-4=4k$$

מאפסי הביטוי הריבועי:

$$t_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4k}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{k}}{2}=-1\pm\sqrt{k}$$

הביטוי מפורק לגורמים:

$$(t-(-1-\sqrt{k}))\cdot(t-(-1+\sqrt{k}))$$

נציב בביטוי לנגזרת $f'(t)$:

$$f'(t)=2\cdot\frac{(t-(-1-\sqrt{k}))\cdot(t-(-1+\sqrt{k}))}{(-t^2+(k-1)\cdot t)^2}$$

המשך בעמוד הבא...

הנגזרת $f'(t)$:

$$f'(t) = 2\cdot\frac{(t-(-1-\sqrt{k}))\cdot(t-(-1+\sqrt{k}))}{(-t^2+(k-1)\cdot t)^2}$$

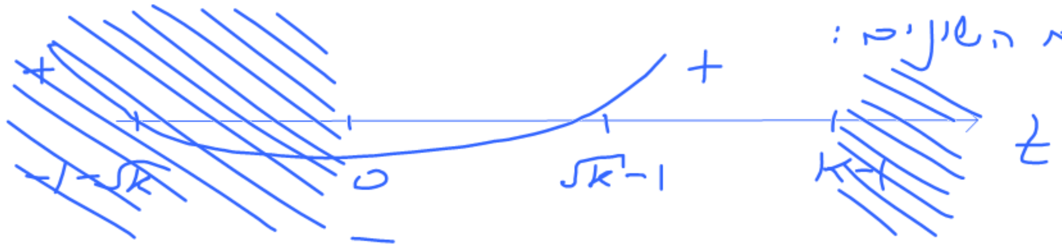
המכנה חיובי בכל תחום הגדרת הפונקציה והנגזרת f'
(אינו אפס כמובן וכן המעריך זוגי).

לכן הביטוי $\frac{2}{(-t^2+(k-1)\cdot t)^2}$ חיובי בכל תחום ההגדרה הנ"ל.

משמע, סימן הנגזרת $f'(t)$ שווה לסימן הביטוי:

$$(t-(-1-\sqrt{k}))\cdot(t-(-1+\sqrt{k}))$$

זהו ביטוי ריבועי בו המקדם של t^2 הינו חיובי.
נשלה את מאפסי הביטוי על ציר ה-t ונכתוב את סימנו בתחומים השונים:



כיוון ש- $0<t<k-1$ המאפס הרלוונטי היחיד הינו $t=\sqrt{k}-1$
סביב מאפס זה הנגזרת משנה את סימנה משלילי לחיובי ו-
לכן $f(t)$ עוברת ממגמת ירידה לעלייה סביב $t=\sqrt{k}-1$.
מסקנה: עבור $\boxed{t_{\text{חוז}}=\underbrace{\sqrt{k}-1}_{\text{מגריסם}}}$ היחס בין שטח הגינה B לשטח הגינה A הוא מינימלי.

ג. נגדיר פונקציית מטרה חדשה: $g(t) = \frac{S_A}{S_B}$

ונשים לב לקשר: $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.

שתי הפונקציות מוגדרות באותו התחום ומתקיים:

$$g'(t) = \frac{-f'(t)}{(f(t))^2}$$

המכנה של $g'(t)$ חיובי כי $f(t)$ מייצגת יחס בין שטחים (שניהם מתאפסים - התחום פתוח).

לכן $g'(t)=0$ עבור $t=\sqrt{k}-1$.

וסימן $g'(t)$ נגדי לסימן $f'(t)$.

מסקנה: סוג הקיצון בעבור אותו ערך קריטי יחיד של t הפוך עבור $g(t)$ לעומת $f(t)$.

$g(t)$ מקבלת ערך מקסימלי עבור $t=\sqrt{k}-1$.

נסכם: עבור $\boxed{t_{max}=\sqrt{k}-1}$ מגדירים היחס בין שטח הגינה A לשטח הגינה B הוא מקסימלי.