אריק דז׳ילדטי יואל גבע

מתמטיקה

חוברת קדם אנליזה והשלמות לחשבון דיפרנציאלי

כיתה י׳

5 יחידות לימוד, שאלון 571

יואל גבע הוצאת הספרים

הקדמה

חוברת זו נכתבה על פי **תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה** לתלמידי 5 יחידות לימוד, והיא מהווה השלמה לספרי הלימוד בכיתה י', בנושאים קדם אנליזה וחשבון דיפרנציאלי.

החוברת כוללת את הנושאים הבאים:

קדם אנליזה:

הערה: רוב התוכן בחלק זה אינו נמצא בספר הלימוד.

חזרה על פונקציות ממעלה ראשונה ושנייה.

ניתוח פונקציות על פי הגרף שלהן, כאשר התבנית האלגברית שלהן לא נתונה.

הכרה של פונקציות חזקה עם מעריך טבעי (זוגי או אי זוגי), ופונקציות פולינום,
כולל ניתוח ההתנהגות שלהן כאשר $x \to +\infty$ וכאשר $x \to -\infty$,
וניתוח ההתנהגות שלהן בסביבת נקודות האפס שלהן.

זוגיות ואי זוגיות של פונקציות (משמעות גרפית ואלגברית).

טרנספורמציות של פונקציות: הזזה אנכית והזזה אופקית של גרף של פונקציה,
מתיחה וכיווץ אנכיים של גרף של פונקציה, שיקוף גרף של פונקציה לעומת אחד הצירים,
מתיחה וכיווץ אופקיים של גרף של פונקציה.

פונקציות עם ערך מוחלט.

הקשר בין גרף של פונקציה $f(x)$ לגרף של $\left[f(x)\right]^n$ עבור n זוגי או אי זוגי.

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות פולינום:

חלק זה מהווה השלמה לספר הלימוד.
הוא כולל חקירת פונקציית פולינום בשילוב כל מה שנלמד בקדם אנליזה,
בדגש על טרנספורמציות, ושאלות קצרות מסוגים שאינם נמצאים בספר הלימוד.

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות רציונליות:

חלק זה מהווה השלמה לספר הלימוד. הוא כולל בעיקר שאלות קצרות מסוגים
שאינם נמצאים בספר הלימוד, ושאלות על הקשר בין גרף של פונקציה $f(x)$ לגרף של $\frac{1}{f(x)}$.

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות עם שורשים ריבועיים:

חלק זה מהווה השלמה לספר הלימוד. הוא כולל בעיקר שאלות קצרות מסוגים
שאינם נמצאים בספר הלימוד, ושאלות על הקשר בין גרף של פונקציה $f(x)$ לגרף של $\sqrt{f(x)}$.

תודות

תודה ענקית לעפר ילין ולניבה ברימבוים על הייעוץ הפדגוגי והמקצועי בכתיבת החוברת.

תוכן עניינים

קדם אנליזה – יסודות

טרנספורמציות של פונקציות

חשבון דיפרנציאלי – פולינומים

חשבון דיפרנציאלי – פונקציות רציונליות

חשבון דיפרנציאלי – פונקציות עם שורשים ריבועיים

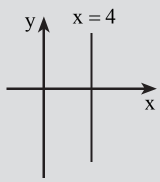
פונקציה ממעלה ראשונה – קו ישר

פונקציה ממעלה ראשונה היא פונקציה שמשוואתה $f(x)=mx+b$, והגרף המייצג אותה הוא **קו ישר**. פונקציה זו נקראת גם **פונקציה קווית** או **פונקציה לינארית**.

למדנו בהנדסה אנליטית שהמשוואה $f(x)=mx+b$ נקראת **המשוואה המפורשת של הישר.**
במשוואה כזו m ו- b הם פרמטרים קבועים.
הפרמטר m (המקדם של x) נקרא **השיפוע של הישר.**
הפרמטר b (שאינו כולל x) נקרא **המספר החופשי.**

במשוואה $f(x)=mx+b$ ערך הפרמטר m קובע את מגמת הישר:
כאשר m חיובי $(m>0)$ זוהי **פונקציה עולה**, וכאשר m שלילי $(m<0)$ זוהי **פונקציה יורדת**.
כאשר $m=0$, הישר מקביל לציר ה- x (או מתלכד איתו), כלומר הישר מאונך לציר ה- y .
זוהי **פונקציה קבועה**. דוגמה: ישר שמשוואתו $y=5$.

הערה: כאשר ישר מאונך לציר ה- x , שיפועו לא מוגדר, ולא ניתן להציגו בצורה $y=mx+b$. לדוגמה: הישר $x=4$. **ישר המאונך לציר ה- x אינו פונקציה!** הסבר: בפונקציה לא ייתכן שקיים ערך של x , שעבורו מתקבל יותר מערך אחד של y , ובישר כזה עבור ערך מסוים של x קיימים אינסוף ערכי y .
(הערה: להרחבה לגבי הגדרת הפונקציה, ראו בפרק הבא).

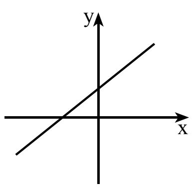


נזכיר את משמעות הפרמטר b .
בפונקציה $f(x)=mx+b$ ערך הפרמטר b מייצג את שיעור ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y , שהיא $(0;b)$.
לדוגמה: במשוואת הישר $y=2x+5$ מתקיים $b=5$, לכן הוא חותך את ציר ה- y ב- $(0;5)$.

הערות:
(1) המשוואה $y=0$ היא הייצוג האלגברי של ציר ה- x . זו פונקציה קבועה.
המשוואה $x=0$ היא הייצוג האלגברי של ציר ה- y . זו אינה פונקציה!
(2) כפי שלמדנו, שרטוט קו ישר במערכת צירים נהוג לעשות על ידי הצבה בטבלת ערכים, או על פי הערכים של הפרמטרים m ו- b .

תרגילים

1. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x+1$.
א. חשבו את $f(3)$.
ב. מצאו את נקודת האפס של הפונקציה.
ג. כתבו את התחום שבו הפונקציה חיובית, ואת התחום שבו היא שלילית.
ד. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם ישנם).
ה. (1) האם הנקודה $(-5;-4)$ נמצאת על הישר?
(2) מהו מרחקה של הנקודה $(-5;-4)$ מציר ה- x , ומהו מרחקה מציר ה- y ?



.2 נתונה הפונקציה $f(x)=-x-2$.

א. מצאו את ערך הפונקציה עבור $x=-8$.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם ישנם).

ג. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. שרטטו את גרף הפונקציה.

ה. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה (אם ישנם).

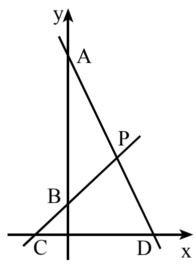
ו. דרך נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y , מעבירים ישר המקביל לציר ה- x .

(1) מהי משוואת הישר?

(2) מהו מרחקו של הישר מציר ה- x ?

(3) מצאו משוואת ישר נוסף המקביל לציר ה- x , ומרחקו מציר ה- x שווה למרחק שמצאתם בתת סעיף ו(2).

.3 הישרים AD ו- BC הם בהתאמה הגרפים של הפונקציות $f(x)=-2x+22$ ו- $g(x)=x+4$.



א. מצאו את שיעורי הנקודות הבאות: A , B , C , D , P .

ב. חשבו את שטח המשולש PCD .

ג. חשבו את שטח המשולש PAB .

ד. חשבו את שטח המרובע $OBPD$ (O - ראשית הצירים).

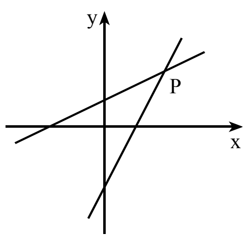
ה. מצאו ערך כלשהו של x שעבורו $f(x)>g(x)$.

ו. מצאו על פי הציור, עבור אילו ערכי x מתקיים: (1) $f(x)>g(x)$. (2) $f(x)<g(x)$.

ז. פתרו בדרך אלגברית את אי השוויון $-2x+22>x+4$.
בדקו שהפתרון זהה לפתרון שקיבלתם בתת סעיף ו(1).

ח. פתרו בדרך אלגברית את אי השוויון $-2x+22<x+4$.
בדקו שהפתרון זהה לפתרון שקיבלתם בתת סעיף ו(2).

.4 בציור מתוארים הגרפים של הפונקציות $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ו- $g(x)=2x-2$.



א. לאיזה ערך של x מתקיים $f(x)=g(x)$?

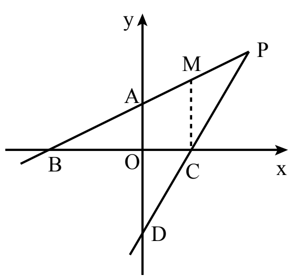
ב. מצאו עבור אילו ערכי x מתקיים:
(1) $f(x)>g(x)$. (2) $f(x)<g(x)$.

ג. מצאו על פי הציור עבור אילו ערכי x מתקיים $g(x)\le f(x)$.

ד. פתרו בדרך אלגברית את אי השוויון $2x-2\le\frac{1}{2}x+1$.
הסבירו מדוע הפתרון זהה לפתרון שקיבלתם בסעיף ג'.

ה. פתרו בדרך אלגברית, ובדרך גרפית את אי השוויון $g(x)>0$.

.5 הישרים CD ו- AB הם, בהתאמה, הגרפים של הפונקציות $y=2x-4$ ו- $y=\frac{1}{2}x+2$. O ראשית הצירים.



א. מצאו את שיעורי הנקודה P .

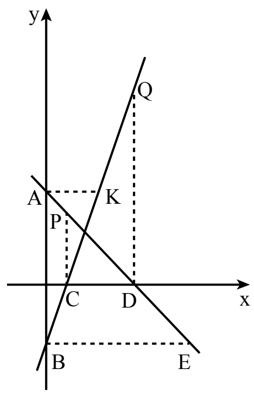
ב. חשבו את שטח המשולש BCP .

ג. נקודה C העלו אנך לציר ה- x , החותך את הישר AB בנקודה M . מצאו את שיעורי הנקודה M .

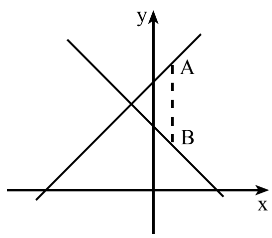
ד. חשבו את שטח המשולש PMC .

ה. חשבו את אורך הקטע OM . היעזרו במשפט פיתגורס.

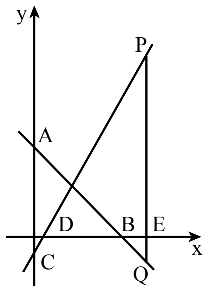
6. הישרים BC ו- AD מתארים את המשוואות $y=3x-6$ ו- $y=-x+10$.
היעזרו בשרטוט ואנו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B, C, D.
ב. מהנקודות C ו- D העלו אנכים לציר ה- x, החותכים את הישרים בנקודות P ו- Q.
מצאו את שיעורי הנקודות P ו- Q.
ג. מהנקודות A ו- B העלו אנכים לציר ה- y, החותכים את הישרים בנקודות K ו- E.
מצאו את שיעורי הנקודות K ו- E.
ד. חשבו את שטח הטרפז APCB.
ה. חשבו את שטח המשולש DQE.



7. לפניכם הישרים $y=x+6$ ו- $y=-x+4$. הנקודות A ו- B נמצאות על הישרים, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.
א. נסמן: $x_A=x_1$. הביעו באמצעות x_1:
את הנקודה B ואת אורך הקטע AB.
ב. נתון: $AB=4$. מהם שיעורי הנקודות A ו- B?
ו. חשבו את מרחק הנקודה B מראשית הצירים.



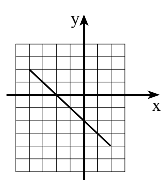
8. הישרים AB ו-CD הם הגרפים של הפונקציות $y=2x-2$ ו- $y=-x+7$, בהתאמה.
הנקודות P ו- Q נמצאות על הישרים,
כך שהקטע PQ מאונך לציר ה- x,
ואורכו שווה ל- 18 יחידות.
א. מצאו את שיעורי הנקודות P ו- Q.
ב. חשבו את שטח המשולש ACP.



תשובות:

1. א. $f(3)=4$. ב. $(-1;0)$. ג. חיובית: $x>-1$, שלילית: $x<-1$. ד. עלייה: כל x, ירידה: אף x.
ה. **(1)** כן. **(2)**. מרחקה מציר ה- x הוא 4, ומציר ה- y הוא 5.

2. א. 6. ב. עלייה: אין, ירידה: כל x. ד.



ג. $(-2;0)$, $(0;-2)$.
ה. חיוביות: $x<-2$, שליליות: $x>-2$.
ו. **(1)** $y=-2$. **(2)** 2. **(1)** $y=2$.

3. א. $A(0;22)$, $B(0;4)$, $C(-4;0)$, $D(11;0)$, $P(6;10)$. ב. 75. ג. 54. ד. 67. ה. $x=4$.
ו. **(1)** $x<6$. **(2)** $x>6$. ז. $x<6$. ח. $x>6$. **4.** א. $x=2$. ב. **(1)** $x<2$. **(2)** $x>2$. ג. $x\le 2$.
ד. $x\le 2$. ה. $x>1$. **5.** א. $P(4;4)$. ב. 12. ג. $M(2;3)$. ד. 3. ה. $\sqrt{13}$.

6. א. $A(0;10)$, $B(0;-6)$, $C(2;0)$, $D(10;0)$. ב. $P(2;8)$, $Q(10;24)$. ג. $K(5\frac{1}{3};10)$, $E(16;-6)$. ד. 24. ד. 72.

7. א. $B(x_1;-x_1+4)$, $AB=2x_1+2$. ב. $A(1;7)$, $B(1;3)$. ג. $\sqrt{10}$. **8.** א. $P(9;16)$, $Q(9;-2)$. ב. 40.5.

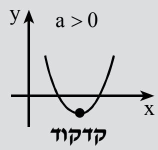
פונקציה ממעלה שנייה – פרבולה

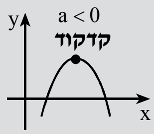
פונקציה ממעלה שנייה היא פונקציה מהצורה $f(x)=ax^2+bx+c$
(כאשר a , b ו- c הם פרמטרים ו- $a\neq 0$).
פונקציה זו נקראת גם **פונקציה ריבועית**. דוגמאות: $f(x)=5x^2+2x-1$, $g(x)=x^2-5x$.

לגרף המתאר פונקציה ריבועית קוראים **פרבולה**.
צורת הפרבולה נקבעת על פי ערכו של a , שהוא המקדם של x^2 .
קיימות שתי אפשרויות:
א. כאשר $a>0$, הצורה הכללית של הפרבולה היא 

ב. כאשר $a<0$, הצורה הכללית של הפרבולה היא 

הנקודה שבה הפונקציה מקבלת את הערך הגדול ביותר או את הערך הקטן ביותר נקראת **קדקוד הפרבולה**.



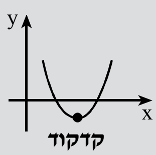


כאשר $a>0$ נהוג לקרוא לפרבולה "ישרה", או "מחייכת",
או "בעלת מינימום". בנקודת הקדקוד מתקבל הערך הקטן ביותר
של הפונקציה (הערך המינימלי), והקדקוד נקרא **נקודת מינימום**.

כאשר $a<0$ נהוג לקרוא לפרבולה "הפוכה", או "בוכה",
או "בעלת מקסימום". בנקודת הקדקוד מתקבל הערך הגדול ביותר
של הפונקציה (הערך המקסימלי), והקדקוד נקרא **נקודת מקסימום**.

את שיעור ה- x של קדקוד הפרבולה $f(x)=ax^2+bx+c$
נמצא בעזרת הנוסחה הבאה:

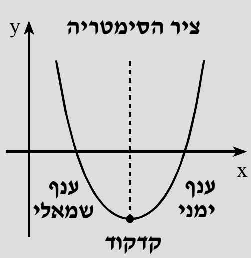
הנוסחה: $\mathbf{x_{\text{קדקוד}}=\dfrac{-b}{2a}}$



כדי למצוא את שיעור ה- y של הקדקוד, נציב את שיעור ה- x של הקדקוד במשוואת הפרבולה.

ציר הסימטריה, שרטוט פרבולה

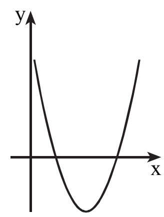
גרף הפרבולה מורכב משני ענפים – ענף ימני וענף שמאלי.
הישר המאונך לציר ה- x ועובר דרך קדקוד הפרבולה
(הקו המקווקו שבציור), נקרא **ציר הסימטריה** של הפרבולה.
משוואת ציר הסימטריה היא $x=-\dfrac{b}{2a}$
שני הענפים של הפרבולה סימטריים ביחס לישר זה.
לכן נקודות הנמצאות **משני צדי ציר הסימטריה,**
ובמרחקים שווים ממנו הן נקודות ששיעור ה- y שלהן **שווה, ולהיפך**.



<u>כדי לשרטט</u> פונקציה שמשוואתה $f(x)=ax^2+bx+c$ נפעל באופן הבא:
א. נמצא את שיעורי נקודת קדקוד הפרבולה, ועל פי סימן המקדם a נחליט האם הקדקוד הוא מסוג מינימום או מקסימום.
ב. נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ג. נסמן את הנקודות במערכת צירים ונחברן באמצעות קו עקום.

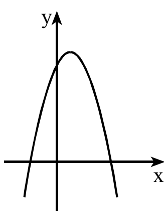
תרגילים

1. בציור משורטט גרף הפונקציה $y=x^2-8x+12$.



א. מצאו את שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה.
ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
ג. מהו הערך המינימלי של הפונקציה?
ד. מהי משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה?
ה. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.
ו. רשמו את התחום שבו הפונקציה חיובית, ואת התחום שבו היא שלילית.
ז. היעזרו בגרף ופתרו את אי-השוויון $x^2-8x+12<0$.
ח. היעזרו בגרף ובתשובתכם, ופתרו את אי-השוויון $x^2+12>8x$.
ט. בכמה נקודות חותך הישר $y=-2$ את גרף הפונקציה? ענו ללא חישובים.

2. בשרטוט מתואר גרף הפונקציה $f(x)=-x^2+2x+8$.



א. מצאו את שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה.
ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
ג. מהו מרחקה של נקודת המקסימום מכל אחד מהצירים?
ד. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ה. מצאו את ערכי x שעבורם מתקיים $f(x)>0$.
ו. פתרו בעזרת הגרף את אי-השוויון $-x^2+2x+8>0$.
ז. פתרו בעזרת הגרף את אי-השוויון $-x^2+2x+8\le 0$.
ח. עפר טוען שאפשר לדעת ללא חישובים, ששיעור ה- x של קדקוד הפרבולה הוא ממוצע שיעורי ה- x של נקודות האפס. האם הוא צודק?
ט. מצאו את <u>משוואת הישר</u> המחבר את נקודת המקסימום של הפונקציה עם נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y.

חקרו את הפונקציות הבאות על פי הסעיפים הבאים:
א. כתבו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצאו את שיעורי נקודת המינימום או המקסימום של הפונקציה.
ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם ישנן).
ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
ה. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ו. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

3. $y=-(x-3)^2$ **4.** $y=x^2+3$

.5 נתונות משוואות של ארבע פונקציות:

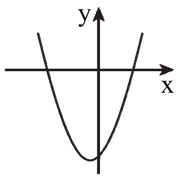
$f(x) = -x^2 + x + 6$

$g(x) = x^2 + x - 6$

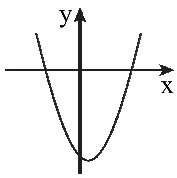
$h(x) = x^2 - x - 6$

$k(x) = -x^2 - x + 6$

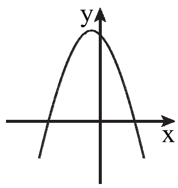
(1)



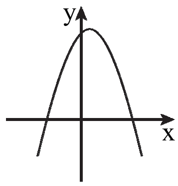
(2)



(3)

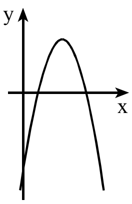


(4)



לפניכם גרפים של ארבע הפונקציות.
התאימו לכל פונקציה את הגרף
המתאים לה.

.6 לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = -(x-8)(x-2)$.



א. עבור אילו ערכי x הפונקציה הנתונה חיובית?

ב. האם הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 9 או 5 ?

ג. מהו תחום הערכים שהפונקציה $f(x)$ יכולה לקבל?

ד. עבור אילו ערכי x הפונקציה עולה?

ה. מהו מרחקה של נקודת המקסימום מראשית הצירים?

ו. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = 0$? אין חובה למצוא את הפתרונות.

ז. פתרו את אי-השוויון $-(x-8)(x-2) < 0$.

ח. (1) חשבו את $f(100)$ ואת $f(1000)$. (2) חשבו את $f(-100)$ ואת $f(-1000)$.

ט. (1) קבעו על פי הגרף האם כאשר $x \to +\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(1)?
(2) קבעו על פי הגרף האם כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(2)?

י. עבור אילו ערכים של k, הישר $y = k$: (1) נפגש עם גרף הפונקציה בנקודה אחת?
(2) נפגש עם גרף הפונקציה בשתי נקודות? (3) אינו נפגש עם גרף הפונקציה?

.7 נתונה הפונקציה $y = (x-5)^2 - 16$.

א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ב. מהי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y ?

ג. מצאו את שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה במערכת צירים.

ה. מצאו לאילו ערכי x הפונקציה עולה ושלילית.

ו. מצאו לאילו ערכי x הפונקציה יורדת וחיובית.

ז. קבעו נכון או לא נכון: (1) לכל ערך של x ערך הפונקציה גדול מ- -16 .
(2) לכל ערך של x ערך הפונקציה גדול או שווה ל- -16 .

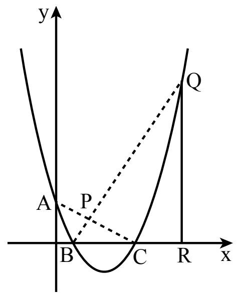
ח. נמקו, ללא חישובים, מדוע הפרבולה אינה עוברת בנקודה $(4;-17)$.

ט. פתרו את אי-השוויון $(x-5)^2 > 16$.

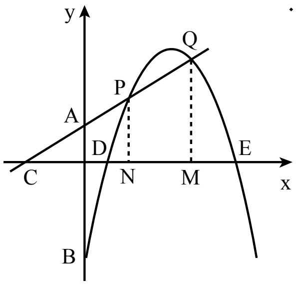
י. (1) חשבו את $f(100)$. (2) חשבו את $f(-100)$.

יא.(1) קבעו על פי הגרף האם כאשר $x \to +\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(1)?
(2) קבעו על פי הגרף האם כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(2)?

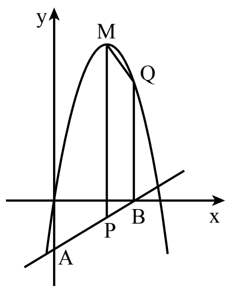
.8 הפרבולה ABC היא גרף הפונקציה $y=x^2-6x+5$.
QR מאונך לציר ה- x , ואורכו שווה ל- 21 יחידות.
P היא נקודת המפגש של הישרים AC ו- BQ .
א. מצאו את שיעורי הנקודה Q , הנמצאת ברביע הראשון.
ב. מצאו את משוואת הישר BQ .
ג. מצאו את שיעורי הנקודה P .
ד. מצאו את משוואת הישר, העובר דרך הנקודה C ,
ומקביל לישר BQ .



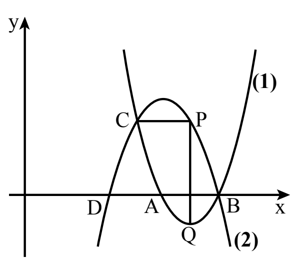
.9 לפניכם הגרפים של הפונקציות (1) $y=-x^2+8x-7$ ו-(2) $y=x+3$.
א. מצאו את שיעורי הנקודות:
A , B , C , D , E , P , Q (ראה שרטוט).
ב. מהנקודות P ו- Q הורידו אנכים
לציר ה- x , החותכים את ציר ה- x
בנקודות N ו- M .
מצאו את שטח הטרפז PQMN ואת שטח המשולש PMQ .
ג. האם ערך הפונקציה (1) יכול להיות 11?



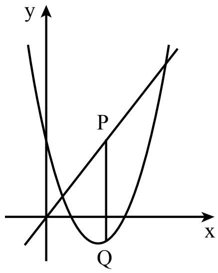
.10 הגרפים שבשרטוט הם של הפונקציות $y=-x^2+8x$
ו- $y=x-6$. M הוא קדקוד הפרבולה.
P היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה
עם הישר $y=x-6$. מנקודה B העלו אנך לציר ה- x ,
החותך את הפרבולה בנקודה Q .
א. מצאו את שיעורי הנקודות P ו- Q .
ב. האם ערך הפונקציה $y=-x^2+8x$ יכול להיות 11?
בכמה נקודות?
נמקו בעזרת סעיף א', ללא חישובים נוספים.
ג. מצאו את שטח הטרפז MQBP .
ד. הנקודה C היא נקודה כלשהי על הישר MP . חשבו את שטח המשולש CBQ .



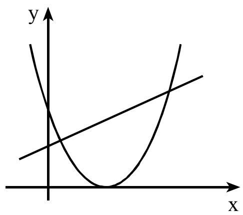
.11 הפרבולות (1) ו-(2) הן הגרפים של הפונקציות (I) $y=-x^2+10x-21$ ו-(II) $y=x^2-12x+35$.
א. מצאו איזה גרף מתאים לפונקציה (1),
ואיזה - מתאים לפונקציה (2)
ב. חשבו את שיעורי הנקודות A , B , C , D .
ג. דרך הנקודה C העבירו מקביל לציר ה- x
החותך את פרבולה (2) בנקודה P .
מנקודה P הורידו אנך לציר ה- x ,
החותך את פרבולה (1) בנקודה Q .
מצאו את אורך הקטע PQ ,
והוכיחו שהנקודה Q היא קדקוד הפרבולה (1).



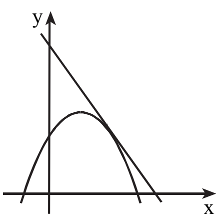
.12 הישר והפרבולה שבשרטוט הם הגרפים
של הפונקציות : (1) $y = 3x + 1$ ו-(2) $y = x^2 - 8x + 11$.
הקטע PQ מאונך לציר ה- x ,
ואורכו שווה ל- 20 יחידות (P מעל Q).
א. מצאו את שיעורי הנקודות P ו- Q .
ב. מצאו את משוואת הישר, העובר דרך הנקודה Q ,
ומקביל לציר ה- x .



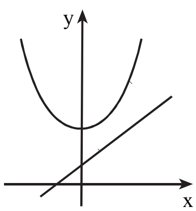
.13 לפניכם הגרפים של הפונקציות : $f(x) = x^2 - 6x + 9$ ו- $g(x) = x + 3$.
א. לאילו ערכי x מתקיים $f(x) = g(x)$?
ב. לאילו ערכי x מתקיים $f(x) > g(x)$?
ג. לאילו ערכי x מתקיים $f(x) < g(x)$?
ד. פתרו את אי השוויון $x^2 - 6x + 9 < x + 3$.
ה. לאילו ערכי x הישר אינו מעל הפרבולה?
ו. מגדירים פונקציה חדשה $h(x)$, המקיימת $h(x) = f(x) - g(x)$.
מצאו עבור אילו ערכי x מתקיים $h(x) > 0$.



.14 לפניכם גרפים של שתי פונקציות : $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ ו- $g(x) = -2x + 6$.
א. מצאו מהי הנקודה שבה מתקיים $f(x) = g(x)$.
ב. מהנקודה שמצאתם בסעיף א' מעבירים אנכים לשני הצירים,
כך שנוצר מרובע בין שני הצירים ושני האנכים.
הסבירו מדוע המרובע הוא ריבוע וחשבו את שטחו.
ג. מצאו עבור אילו ערכי x מתקיים :
(1) $f(x) > g(x)$. (2) $f(x) - g(x) < 0$.
ד. נסמן : $h(x) = f(x) + g(x)$. חשבו את $h(4)$.



.15 לפניכם גרפים של שתי פונקציות : $f(x) = x^2 + 3$ ו- $g(x) = x + 1$.
א. הראו בדרך אלגברית שהגרפים של הפונקציות
אינם נפגשים זה עם זה.
ב. מצאו עבור אילו ערכי x מתקיים :
(1) $f(x) > g(x)$. (2) $f(x) < g(x)$.
ג. מגדירים פונקציה חדשה $h(x)$, המקיימת $h(x) = f(x) - g(x)$.
מצאו עבור אילו ערכי x מתקיים : (1) $h(x) > 0$. (2) $h(x) < 0$.
ד. (1) מצאו את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות הנתונות עם ציר ה- y .
(2) חשבו את $h(0)$ על פי תת סעיף ד(1).
ה. (1) קבעו האם כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
(2) קבעו האם כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $g(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.



.16 א. מצאו את נקודות המפגש בין הגרפים של הפונקציות $f(x) = x^2 + 2x - 8$ ו- $g(x) = -x^2 - x + 12$.
ב. מצאו עבור אילו ערכי x מתקיים $f(x) > g(x)$.

.17 נתונה פונקציה ריבועית, המוצגת בעזרת מכפלה : $f(x)=(x-5)(x+1)$.
א. מהן נקודות האפס של הפונקציה?
ב. נתונות שלוש פונקציות נוספות :
$i(x)=-7(x-5)(x+1)$, $h(x)=4(x-5)(x+1)$, $g(x)=-(x-5)(x+1)$.
הראו שנקודות האפס של שלוש הפונקציות זהות לנקודות האפס של הפונקציה הנתונה.
ג. דורון טוען שהפונקציות שבסעיף ב' הן מהצורה $a\cdot f(x)$, $a\neq 0$, ולכן יש להן אותן נקודות אפס כמו לפונקציה $f(x)$. האם הוא צודק?

.18 נתונה פונקציה ריבועית, המוצגת בעזרת מכפלה : $f(x)=(x+6)(x-2)$.
א. מהן נקודות האפס של הפונקציה?
ב. כתבו משוואות של שתי פונקציות ריבועיות נוספות, שנקודות האפס שלהן זהות לנקודת האפס של הפונקציה הנתונה $f(x)$.
הדרכה : לפונקציות מהצורה $a\cdot f(x)$ יש נקודות אפס זהות לנקודות האפס של הפונקציה $f(x)$, עבור $a>0$ ועבור $a<0$.

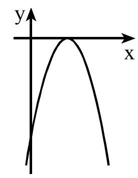
.19 כתבו משוואה אפשרית לפונקציה ריבועית $f(x)$:
א. שנקודות האפס שלה הן $(4;0)$ ו- $(7;0)$, והמקדם של x^2 הוא 1 .
הציגו את הפונקציה כמכפלה.
ב. שנקודות האפס שלה הן $(4;0)$ ו- $(7;0)$, והמקדם של x^2 הוא -1 .
הציגו את הפונקציה כמכפלה.

.20 כתבו משוואה אפשרית לפונקציה ריבועית $f(x)$:
א. שנקודת האפס היחידה שלה היא $(6;0)$, והמקדם של x^2 הוא 1 .
ב. שנקודת האפס היחידה שלה היא $(-8;0)$, והמקדם של x^2 הוא -1 .

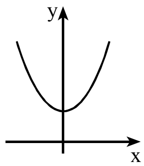
תשובות:

.1 א. $(4;-4)$. ב. עלייה : $x>4$, ירידה : $x<4$. ג. -4 . ד. $x=4$. ה. $(2;0)$, $(6;0)$.
ו. חיובית : $x>6$ או $x<2$, שלילית : $2<x<6$. ז. $2<x<6$. ח. $x>6$ או $x<2$.
ט. בשתי נקודות.

.2 א. $(1;9)$. ב. עלייה : $x<1$, ירידה : $x>1$.
ג. המרחק מציר ה- x הוא 9 , המרחק מציר ה- y הוא 1 . ד. $(4;0)$, $(-2;0)$, $(0;8)$.
ה. $-2<x<4$. ו. $-2<x<4$. ז. $x\geq 4$ או $x\leq -2$. ח. כן, עפר צודק. ט. $y=x+8$.

3. א. כל x.
ב. $(3;0)$ מקסימום.
ג. $(0;-9)$, $(3;0)$.
ד.


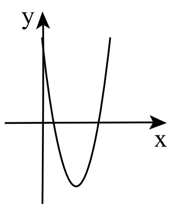
ה. עלייה: $x<3$, ירידה: $x>3$.
ו. חיוביות: אין, שליליות: $x \neq 3$.

4. א. כל x.
ב. $(0;3)$ מינימום.
ג. $(0;3)$.
ד.


ה. עלייה: $x>0$, ירידה: $x<0$.
ו. חיוביות: כל x , שליליות: אף x.

5. א. $f(x)$ - **(4)**, $g(x)$ - **(1)**, $h(x)$ - **(2)**, $k(x)$ - **(3)**.

6. א. $2<x<8$. ב. 9. ג. $f(x) \le 9$. ד. $x<5$. ה. $\sqrt{106}$. ו. שני פתרונות. ז. $x>8$ או $x<2$.
ח. **(1)** חשבו את $f(100)=-9{,}016$, $f(1000)=-990{,}016$. **(2)** $f(-100)=-11{,}016$, $f(-1000)=-1{,}010{,}016$.
ט. **(1)** שואף ל- $-\infty$, כן. **(2)** שואף ל- $-\infty$, כן. י. **(1)** $k=9$. **(2)** $k<9$. **(3)** $k>9$.

7. א. $(9;0)$, $(1;0)$. ב. $(0;9)$. ג. $(5;-16)$. ד.


ה. $5<x<9$. ו. $x<1$. ז. **(1)** לא נכון. **(2)** נכון.
ח. הערך המינימלי שלה הוא -16.
ט. $x>9$ או $x<1$.
י. **(1)** $f(100)=9009$. **(2)** $f(-100)=11009$.
יא. **(1)** שואף ל- $+\infty$, תואם. **(2)** שואף ל- $+\infty$, תואם. י. **(1)** שואף ל- ∞. **(2)** שואף ל- ∞.

8. א. $Q(8;21)$. ב. $y=3x-3$. ג. $P(2;3)$. ד. $y=3x-15$.

9. א. $A(0;3)$, $B(0;-7)$, $C(-3;0)$, $D(1;0)$, $E(7;0)$, $P(2;5)$, $Q(5;8)$. ב. 19.5 , 12. ג. לא.

10. א. $P(4;-2)$, $Q(6;12)$. ב. כן, בשתי נקודות. ג. 30. ד. 12.

11. א. **(1)** מתאים ל-(II), **(2)** מתאים ל-(I). ב. $A(5;0)$, $B(7;0)$, $C(4;3)$, $D(3;0)$.
ג. 4 , $Q(6;-1)$.

12. א. $P(5;16)$, $Q(5;-4)$ או $P(6;19)$, $Q(6;-1)$. ב. $y=-4$ או $y=-1$.

13. א. $x=1$, $x=6$. ב. $x>6$ או $x<1$. ג. $1<x<6$. ד. $1<x<6$. ה. $x \ge 6$ או $x \le 1$.
ו. $x>6$ או $x<1$.

14. א. $(2;2)$. ב. 4. ג. **(1)** אף x. **(2)** $x \neq 2$. ד. $h(4)=8$.

15. ב. **(1)** כל x. **(2)** אף x. ג. **(1)** כל x. **(2)** אף x. ד. **(1)** $(0;3)$, $(0;1)$. **(2)** $h(0)=2$.
ה. **(1)** $+\infty$. **(2)** $-\infty$.

16. א. $(2.5;3.25)$, $(-4;0)$. ב. $x>2.5$ או $x<-4$. **17.** א. $(-1;0)$, $(5;0)$. ג. דורון צודק.

18. א. $(-6;0)$, $(2;0)$. ב. לדוגמה: $y=3(x+6)(x-2)$, $y=-(x+6)(x-2)$.

19. א. $f(x)=(x-4)(x-7)$. ב. $f(x)=-(x-4)(x-7)$.

20. א. $f(x)=(x-6)^2$. ב. $f(x)=-(x+8)^2$.

גרף של פונקציה ללא תבנית אלגברית נתונה

קריאת נתונים מתוך גרף

1. בשרטוט מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.

א. מצאו את $f(1)$, $f(0)$, $f(4)$, $f(3)$.

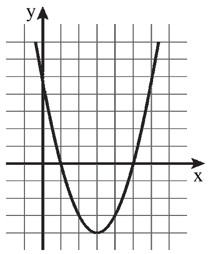
ב. **(1)** מצאו את ערכי x המקיימים $f(x)=-4$.

(2) מצאו את ערכי x , שעבורם ערך הפונקציה $f(x)$ הוא -3 .

ג. האם קיים ערך של x שעבורו $f(x)=-5$?

ד. קבעו עבור הנקודות הבאות, האם הן נמצאות על גרף הפונקציה: **(1)** $(2;-3)$. **(2)** $(3;-2)$.

ה. כתבו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.



2. בשרטוט מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.

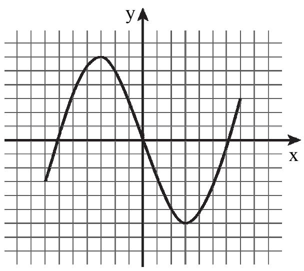
א. מצאו את $f(3)$ ואת $f(-2)$.

ב. מצאו את ערכי x המקיימים: **(1)** $f(x)=5$. **(2)** $f(x)=-3$.

ג. מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה?

ד. היעזרו בגרף והשלימו את טבלת הערכים:

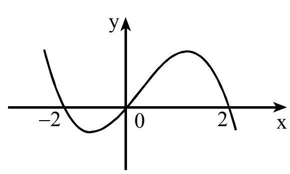
x	−7	−3	−1	0	1	3	7
f(x)							



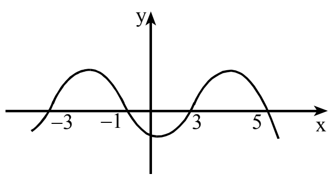
חיוביות ושליליות של פונקציה

לפניכם סקיצות של גרפים ובהם מסומנות נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x (נקודות האפס של הפונקציה).
היעזרו בשרטוט ורשמו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של כל אחת מן הפונקציות.

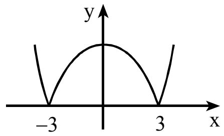
3.



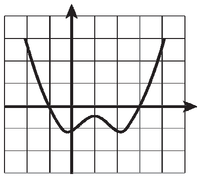
4.



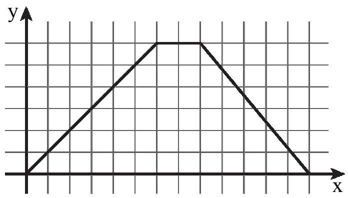
5. לפניכם סקיצה של פונקציה ובה מסומנות נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x (נקודות האפס של הפונקציה).
רשמו את התחומים שבהם $f(x)>0$,
ואת התחומים שבהם $f(x)<0$.



6. לפניכם גרף של פונקציה, המוגדרות לכל ערך של x.
כל משבצת מייצגת יחידה אחת.
א. כתבו את התחומים שבהם הפונקציה חיובית
ואת התחומים שבהם הפונקציה שלילית.
ב. כתבו את התחומים שבהם הפונקציה אי שלילית.

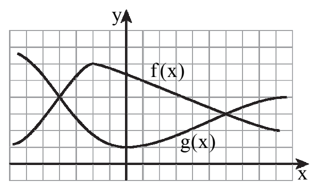


7. בשרטוט מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.
א. מצאו את $f(3)$, $f(7)$.
ב. מצאו את ערכי x שעבורם $f(x)=0$.
ג. האם קיים ערך של x שעבורו $f(x)=7$?
ד. ינאי טוען שקיימים אינסוף ערכי x
המקיימים $f(x)=6$. האם הוא צודק?
ה. האם נכונה הטענה שבתחום $0\le x\le 13$ הפונקציה היא אי שלילית? נמקו.

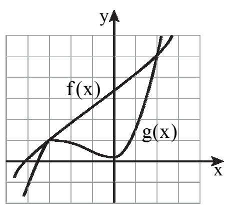


8. בכל אחד מהסעיפים הבאים מתוארים גרפים של שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$,
המוגדרות לכל ערך של x. היעזרו בציור ומצאו לאילו ערכי x:
(1) מתקיים $f(x)=g(x)$? **(2)** מתקיים $f(x)>g(x)$? **(3)** מתקיים $f(x)<g(x)$?

א.



ב.



תשובות:

1. א. 0, 4, -3, -4. ב. **(1)** 3. **(2)** 2 או 4. ג. לא. ד. **(1)** כן. **(2)** לא. ה. $(0;4)$, $(1;0)$, $(5;0)$.

2. א. $f(-2)=5$, $f(3)=-6$. ב. **(1)** -2 או -4. **(2)** 1 או 5. ג. $(6;0)$, $(0;0)$, $(-6;0)$.

x	−7	−3	−1	0	1	3	7
f(x)	−3	6	3	0	−3	−6	3

3. חיוביות: $0<x<2$ או $x<-2$, שליליות: $x>2$ או $-2<x<0$.

4. חיוביות: $3<x<5$ או $-3<x<-1$, שליליות: $x>5$ או $-1<x<3$ או $x<-3$.

5. $f(x)>0$: $x>3$ או $-3<x<3$ או $x<-3$ (אפשר לכתוב גם $x\neq 3$, $x\neq -3$).
$f(x)<0$: אין. **6.** א. חיובית: $x>3$ או $x<-1$, שלילית: $-1<x<3$. ב. $x\ge 3$ או $x\le -1$.

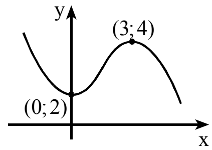
7. א. $f(3)=3$, $f(7)=6$. ב. 0 או 13. ג. לא. ד. כן. ה. כן, הטענה נכונה.

8. א. **(1)** $x=6$, $x=-4$. **(2)** $-4<x<6$. **(3)** $x>6$ או $x<-4$.
ב. **(1)** $x=2$, $x=-3$. **(2)** $-3<x<2$ או $x<-3$. **(3)** $x>2$.

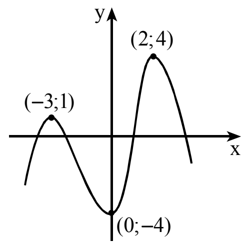
נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה

.9 בכל אחד מהגרפים שלפניכם מסומנות נקודות הקיצון של הפונקציה.
(1). קבעו עבור כל נקודת קיצון האם היא מסוג מינימום או מקסימום.
(2). רשמו את ערכי ה- x שעבורם הפונקציה עולה, ואת ערכי ה- x שעבורם הפונקציה יורדת.

א.

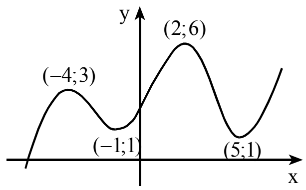


ב.

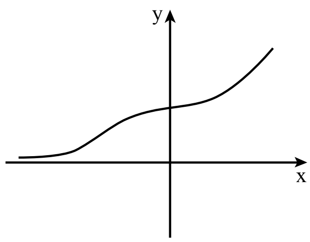


.10 בכל אחד מהגרפים שלפניכם מסומנות נקודות הקיצון של הפונקציה.
היעזרו בשרטוט וכתבו את ערכי ה- x שעבורם הפונקציה עולה,
ואת ערכי ה- x שעבורם הפונקציה יורדת.

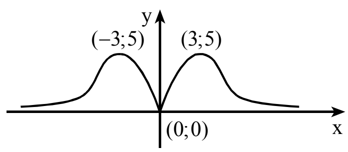
א.



ב.

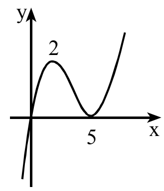


ג.

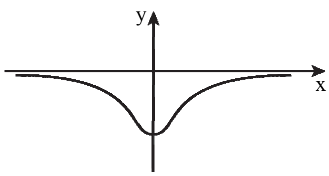


.11 בסעיפים הבאים מתואר גרף של פונקציה עליו מסומנות נקודות האפס,
ומסומנים שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה. מצאו :
(1). את תחומי **העלייה** ואת תחומי **הירידה** של הפונקציה.
(2). את תחומי **החיוביות** ואת תחומי **השליליות** של הפונקציה.

א.



ב.

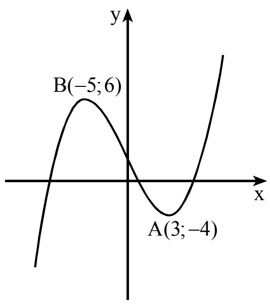


.12 קבעו נכון או לא נכון :
א. יש פונקציות שאין להן נקודות קיצון.
ב. לכל פונקציה יש לפחות נקודת קיצון אחת.
ג. נקודת מקסימום של פונקציה היא הנקודה הגבוהה ביותר בגרף שלה.
ד. ערך הפונקציה בנקודת מינימום שלה הוא הערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום.
ה. תחום שבו פונקציה עולה הוא תחום חיוביות של הפונקציה.
ו. תחום שבו פונקציה שלילית הוא תחום ירידה של הפונקציה.

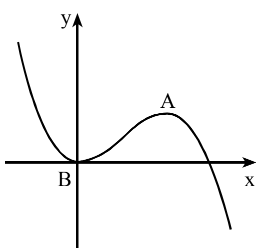
13. א. האם יש פונקציות שהן פונקציות עולות בלבד?
ב. האם יש פונקציות שהן פונקציות יורדות בלבד?
ג. השלימו: בסביבה הקרובה שמימין לנקודת מינימום הפונקציה ____
ובסביבה הקרובה שמשמאל לנקודת מינימום הפונקציה ____ .

קביעת מספר הפתרונות של משוואה על סמך הגרף

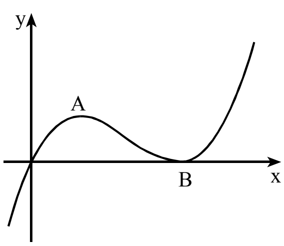
14. בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.
לפונקציה מינימום מקומי בנקודה $A(3;-4)$,
ומקסימום מקומי בנקודה $B(-5;6)$.
א. היעזרו בגרף, וקבעו בכמה נקודות
חותך כל אחד מהישרים הבאים
את גרף הפונקציה : (1). $y=-8$. (2). $y=6$.
ב. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=-1$.
ג. (1) מהם תחומי העלייה של הפונקציה?
(2) האם ניתן לדעת מהם תחומי החיוביות של הפונקציה?



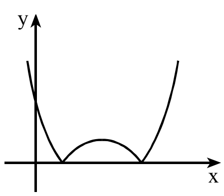
15. בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.
לפונקציה נקודת מקסימום ב- $A(4;2)$, ונקודת מינימום ב- $B(0;0)$.
א. היעזרו בגרף וקבעו בכמה נקודות חותך הישר $y=6$
את גרף הפונקציה?
ב. קבעו כמה פתרונות יש למשוואות הבאות:
(1) $f(x)=2$. (2) $f(x)=1$.
ג. (1) מהם תחומי הירידה של הפונקציה?
(2) האם ניתן לדעת מהם תחומי השליליות של הפונקציה?



16. לפונקציה $f(x)$, שהגרף שלה מתואר לפניכם,
יש מקסימום ב- $A(2;2)$ ומינימום ב- $B(5;0)$.
א. עבור אילו ערכים של k , הישר $y=k$:
(1) חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת?
(2) חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות?
ב. עבור אילו ערכים של k , יש למשוואה $f(x)=k$
שלושה פתרונות?



17. לפונקציה $f(x)$, שהגרף שלה לפניכם, יש מקסימום מקומי
בנקודה $(2.5;1)$, ומינימום בשתי נקודות שעל ציר ה- x .
מצאו לאילו ערכי k , למשוואה $f(x)=k$:
א. יש שני פתרונות. ב. יש שלושה פתרונות.
ג. יש ארבעה פתרונות. ד. אין אף פתרון.



תשובות:

9. א. **(1)** $(3;4)$ מקסימום, $(0;2)$ מינימום. **(2)** עולה: $0<x<3$, יורדת: $x>3$ או $x<0$.

ב. **(1)** $(2;4)$ מקסימום, $(0;-4)$ מינימום, $(-3;1)$ מקסימום.

(2) עולה: $0<x<2$ או $x<-3$. יורדת: $x>2$ או $-3<x<0$.

10. א. עולה: $x>5$ או $-1<x<2$ או $x<-4$. יורדת: $2<x<5$ או $-4<x<-1$.

ב. עולה: כל x, יורדת: אין.

ג. עולה: $0<x<3$ או $x<-3$. יורדת: $x>3$ או $-3<x<0$.

11. א. **(1)** עלייה: $x>5$ או $x<2$. ירידה: $2<x<5$. **(2)** חיוביות: $x>0$, $x\neq 5$. שליליות: $x<0$.

ב. **(1)** עלייה: $x>0$. ירידה: $x<0$. **(2)** חיוביות: אין. שליליות: כל x.

12. א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון. ו. לא נכון.

13. א. כן. ב. כן. ג. בסביבה שמימין לנקודת מינימום הפונקציה עולה,
ובסביבה שמשמאל לנקודת מינימום הפונקציה יורדת.

14. א. **(1)** נקודה אחת. **(2)**.שתי נקודות. ב. שלושה פתרונות. ג. **(1)** $x>3$ או $x<-5$. **(2)** לא.

15. א. נקודה אחת. ב. **(1)** שני פתרונות. **(2)** שלושה פתרונות. ג. **(1)** $x>4$ או $x<0$. **(2)** לא.

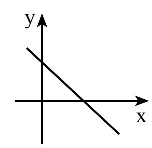
16. א. **(1)** $k>2$ או $k<0$. **(2)** $k=2$ או $k=0$. ב. $0<k<2$.

17. א. $k>1$ או $k=0$. ב. $k=1$. ג. $0<k<1$. ד. $k<0$.

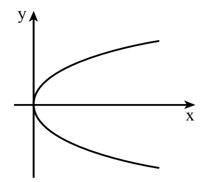
כיצד קובעים האם ציור יכול לייצג גרף של פונקציה

18. בכל אחד מהסעיפים הבאים קבעו האם הציור מייצג גרף של פונקציה.

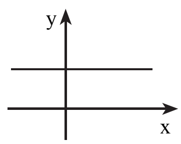
א.



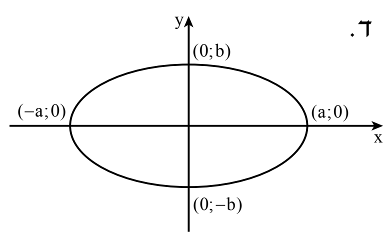
ב.



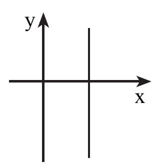
ג.



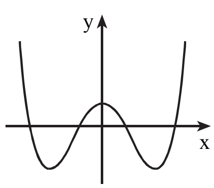
ד.



ה.



ו.



תשובות:

18. א. כן. ב. לא. ג. כן. ד. לא. ה. לא. ו. כן.

שרטוט גרף של פונקציה (ללא תבנית אלגברית) על פי נתונים

הערה: בשאלות הבאות כל הגרפים הם רציפים, וקיימות עוד תשובות נוסף על התשובה שתינתן.

1. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-2 \le x \le 3$. נתון: $f(-2)=-6$, $f(3)=-1$, $f(1)=3$.
א. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה.
ב. (1) האם ייתכן $f(-1)=0$? (2) האם ייתכן $f(0)=0$?
ג. (1) האם ייתכן שגרף הפונקציה חותך את ציר ה- x פעמיים?
(2) האם ייתכן שגרף הפונקציה חותך את ציר ה- x פעם אחת?

2. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 6$. גרף הפונקציה נפגש עם ציר ה- y בנקודה שבה $y=-9$. נתון: $f(6)=9$, $f(1)=-11$, $f(5)=11$.
א. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה.
ב. כמה נקודות אפס <u>לפחות</u> יש לפונקציה?
ג. עפרה טוענת שגרף הפונקציה חותך את הישר $y=10$ לפחות פעמיים. האם היא צודקת?

3. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-2 \le x \le 6$. נתון: $f(-2)=0$, $f(0)=3$, $f(x)=6$ עבור $2 \le x \le 6$.
שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה.

4. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בכל התחום $-5 \le x \le 5$.
א. יואב טוען שלגרף הפונקציה יש בדיוק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- y . האם הוא צודק?
ב. (1) שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$,
אם הפונקציה מקיימת: $f(-5)=-5$, $f(5)=10$, $f(-2)=8$, $f(2)=0$, $f(1)=3$.
(2) האם הפונקציה יכולה לעבור דרך הנקודה $(-2;6)$? נמקו.
ג. קבעו האם ייתכן שיש לגרף הפונקציה ולציר ה- x :
(1) נקודה אחת משותפת. (2) שתי נקודות משותפות. (3) שלוש נקודות משותפות.

5. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 8$.
א. איתמר טוען שחייבת להיות לגרף הפונקציה נקודת חיתוך עם ציר ה- x . האם הוא צודק?
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
אם היא מקיימת: $f(0)=4$, $f(3)=2$, $f(x)=3$ עבור $5 \le x \le 8$.
ג. (1) האם ייתכן שלגרף הפונקציה יש שתי נקודות ששיעור ה- y שלהן הוא 2.5 ?
(2) האם ייתכן שלגרף הפונקציה יש שתי נקודות ששיעור ה- x שלהן הוא 2.5 ?
ד. האם ייתכן שגרף הפונקציה ששרטטתם בסעיף ב' עובר דרך הנקודה $(3;3)$? נמקו.

6. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x , ומקיימת $f(2)=6$.
שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$ <u>במקרים הבאים</u>:
א. לפונקציה אין נקודות אפס.
ב. לפונקציה יש נקודת אפס אחת ויש לה גם ערכים שליליים.
ג. לפונקציה יש נקודת אפס אחת ואין לה ערכים שליליים.

7. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 6$.
הפונקציה חיובית בתחום $2 < x \le 6$ ושלילית בתחום $0 \le x < 2$.
א. כתבו את שיעורי נקודת האפס של הפונקציה.
ב. (1) האם ייתכן $f(6) > f(5)$? אם כן, שרטטו גרף מתאים.
(2) האם ייתכן $f(6) < f(5)$? אם כן, שרטטו גרף מתאים.
ג. האם ניתן לקבוע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

8. נתונה פונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $-3 \le x \le 4$.
הפונקציה חיובית בתחום $0 < x < 3$ ושלילית בתחום $x > 3$ או $x < 0$.
א. מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה?
ב. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה $f(x)$ במקרים הבאים:
(1) $f(-3) < f(-2)$. (2) $f(-3) > f(-2)$.
ג. האם ניתן לקבוע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

9. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0 \le x \le 8$. נתון: $f(2) = -4$, $f(6) = 4$, $f(0) = 0$, $f(8) = 0$.
א. כתבו שיעורי ארבע נקודות הנמצאות על גרף הפונקציה $f(x)$.
ב. שרטטו שלוש סקיצות אפשריות של גרף הפונקציה $f(x)$.
הערה: יש אינסוף אפשרויות לשרטט את גרף הפונקציה.
ג. כמה נקודות משותפות <u>לפחות</u> יש לגרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x ?

10. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x, ומקיימת $f(-2) = f(4) = 0$.
לפונקציה יש שתי נקודות אפס. שרטטו ארבע סקיצות אפשריות לגרף הפונקציה $f(x)$.
הערה: יש עוד המון אפשרויות אחרות.

11. נתונה פונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.
הפונקציה חיובית עבור $x > 0$, $x \ne 5$, ושלילית עבור $x < 0$.
א. מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה?
ב. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה.
ג. (1) האם מתקיים בוודאות $f(5) = f(0)$? (2) האם ייתכן $f(5) > f(0)$?

12. לפניכם טבלת ערכים הכוללת נתונים חלקיים עבור פונקציה $f(x)$,
המוגדרת עבור $0 \le x \le 10$. נתון כי לפונקציה יש שלוש נקודות אפס.

x	0	1	3	4	5	6	7	9	10
$f(x)$	0	-2	-5	-4	0	4	5	2	0

א. מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה?
ב. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה.
ג. כתבו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה.

13. א. שרטטו גרף אפשרי של הפונקציה $f(x)$, המקיימת את התנאים הבאים **(1)**-**(3)**:

(1). שתי נקודות הקיצון של הפונקציה הן: $(1;-2)$, $(-1;2)$.

(2). הפונקציה עולה עבור $x>1$ או $x<-1$ ויורדת עבור $-1<x<1$.

(3). הפונקציה נפגשת עם הצירים בנקודות $(2;0)$, $(0;0)$, $(-2;0)$.

ב. השלימו: בתחום $-1<x<1$ ככל ש- x גדל, אז y ____.

14. א. שרטטו סקיצה אפשרית של הפונקציה $f(x)$ שנקודת המקסימום היחידה שלה היא $(1;1)$, ושתי נקודות המינימום היחידות שלה הן $(0;0)$ ו- $(2;0)$.

ב. קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה בוודאות, לא נכונה בוודאות, או שהיא יכולה להיות נכונה ויכולה להיות לא נכונה:

(1) גרף הפונקציה חותך את הישר $y=0.5$ בנקודה אחת בלבד.

(2) גרף הפונקציה חותך את הישר $y=0.5$ לפחות בשתי נקודות.

(3) גרף הפונקציה חותך את הישר $y=0.5$ בארבע נקודות בדיוק.

ג. האם קיים ערך של x, שעבורו מתקיים $f(x)<0$? נמקו.

ד. מה תחום הערכים ש- $f(x)$ יכולה לקבל?

15. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x, ומקיימת את התנאים האלה:

$f(0)=0$, $f(1)=3$, $f(-1)=-3$. לפונקציה יש קיצון עבור $x=1$ ו- $x=-1$.

הפונקציה עולה בתחום $-1<x<1$ ויורדת בתחום $x>1$ או $x<-1$.

נתון: $f(x)>0$ עבור $x>0$, $f(x)<0$ עבור $x<0$.

א. קבעו מהו סוג הקיצון כאשר $x=1$, ומהו סוג הקיצון כאשר $x=-1$.

ב. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה. ג. קבעו האם $f(5)>f(6)$.

16. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0\le x\le 7$, ויש לה קיצון בנקודות $(2,4)$ ו- $(5,0)$.

הפונקציה יורדת בתחום $2<x<5$ ועולה בתחום $x>5$ או $0<x<2$.

א. קבעו את סוג הקיצון בנקודה $(2,4)$ ואת סוג הקיצון בנקודה $(5,0)$.

ב. האם ניתן לקבוע מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה?

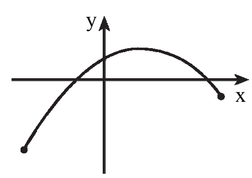
ג. נתון: $f(0)=0$. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה?

ה. **(1)** האם יתכן $f(7)=4$? **(2)** האם יתכן $f(7)>4$?

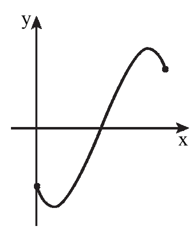
תשובות אפשריות:

1. א.



ב. **(1)** כן. **(2)** כן. ג. **(1)** כן. **(2)** לא ייתכן.

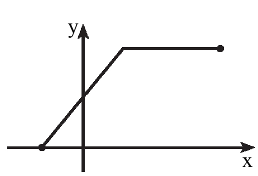
2. א.



ב. לפחות נקודה אחת.

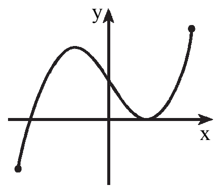
ג. כן, היא צודקת.

3.



4. א. כן, יואב צודק.

ב. **(1)**

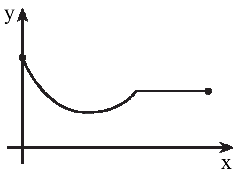


(2) לא.

ג. **(1)** לא. **(2)** כן. **(3)** כן.

5. א. לא, איתמר לא צודק.

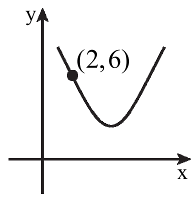
ב.



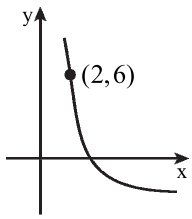
ג. **(1)** כן. **(2)** לא.

ד. לא.

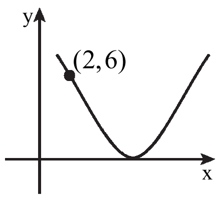
6. א.



ב.

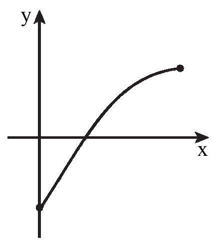


ג.

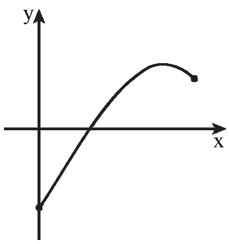


7. א. $(2,0)$.

ב. **(1)** כן.



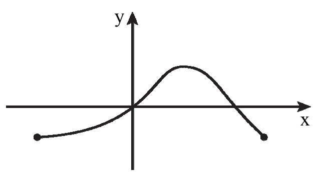
(2) כן.



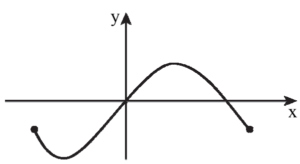
ג. לא.

8. א. $(0,0)$, $(3,0)$.

ב. **(1)**.



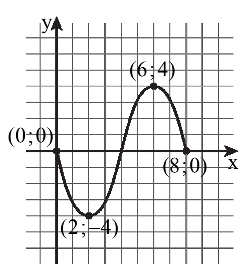
(2).

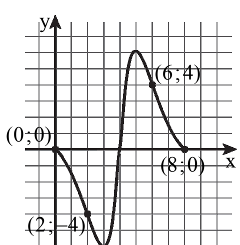


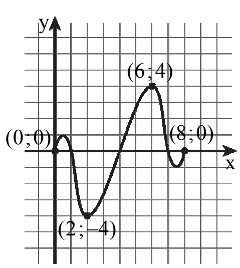
ג. לא.

9. א. $(2;-4)$, $(6;4)$, $(0;0)$ ו- $(8;0)$.

ב.

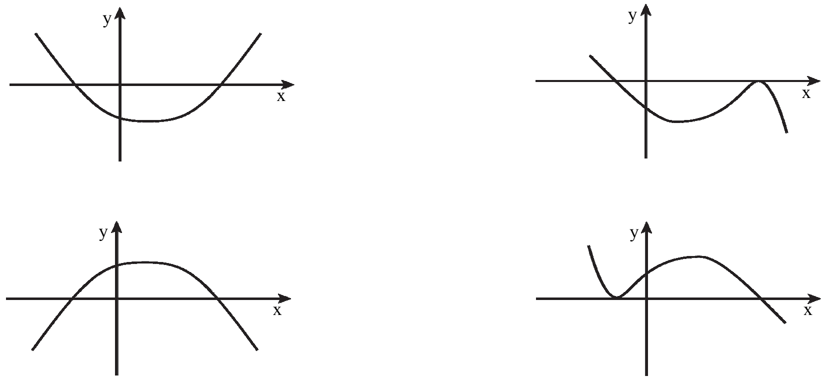






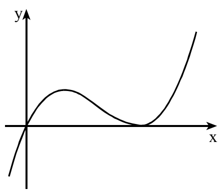
ג. לגרף יש **לפחות** שלוש נקודות משותפות עם ציר ה- x .

10.



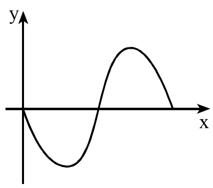
11. א. $(5,0)$, $(0,0)$.
ג. (1) כן.
(2) לא.

ב.

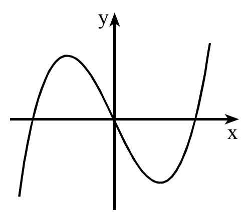


12. א. $(0,0)$, $(5,0)$, $(10,0)$.
ג. חיוביות : $5 < x < 10$,
שליליות : $0 < x < 5$.

ב.

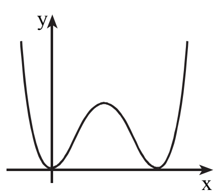


13. א.



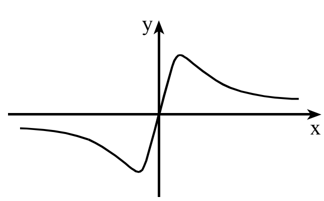
ב. קטן.

14. א.



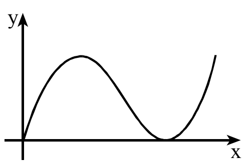
ב. (1). לא נכונה בוודאות.
(2). נכונה בוודאות.
(3). יכולה להיות נכונה או לא נכונה.
ג. לא. ד. $f(x) \geq 0$.

15. א. $x = 1$ מקסימום, $x = -1$ מינימום.



ג. כן.

16. א. $(2,4)$ מקסימום, $(5,0)$ מינימום.



ב. לא.
ד. חיוביות : $5 < x \leq 8$ או $0 < x < 5$,
שליליות : אין. ה. (1) כן. (2) כן.

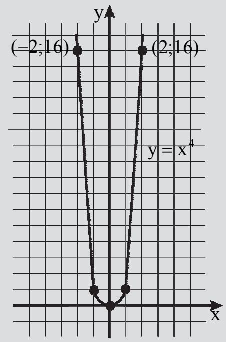
פונקציות חזקה עם מעריך טבעי

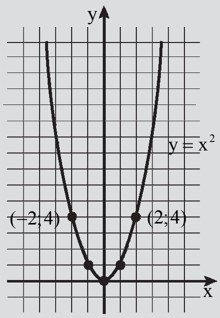
נדון עכשיו בפונקציות מהצורה $\mathbf{y = x^n}$, כאשר n הוא מספר טבעי (מספר חיובי ושלם).
פונקציה כזו נקראת **פונקציית חזקה עם מעריך טבעי**.
בפונקציה כזו x נקרא בסיס החזקה, ו- n הוא מעריך החזקה. דוגמאות לפונקציות חזקה:

עבור $n = 1$ נקבל $y = x^1$. עבור $n = 2$ נקבל $y = x^2$.
עבור $n = 3$ נקבל $y = x^3$. עבור $n = 4$ נקבל $y = x^4$.
עבור $n = 5$ נקבל $y = x^5$. עבור $n = 6$ נקבל $y = x^6$.

נדון תחילה בפונקציה $y = x^n$ עבור n **זוגי**. אחר כך נדון בפונקציה $y = x^n$ עבור n **אי זוגי**.
נבנה טבלת ערכים ונשרטט את הגרפים של הפונקציות $y = x^2$ ו- $y = x^4$.

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y = x^2$	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$y = x^4$	16	5.0625	1	0.0625	0	0.0625	1	5.0625	16





מהגרפים שקיבלנו נוכל ללמוד על מספר תכונות המאפיינות פונקציית חזקה
מהצורה $f(x) = x^n$ עבור **n טבעי זוגי**:

א. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל x .

ב. לפונקציה יש נקודת מינימום ב- $(0;0)$. נקודת האפס של הפונקציה היא נקודת קיצון.
משני צדי נקודת האפס הפונקציה אינה עוברת מחיוביות לשליליות, או להיפך.

ג. הפונקציה עולה בתחום $x > 0$ ויורדת בתחום $x < 0$.

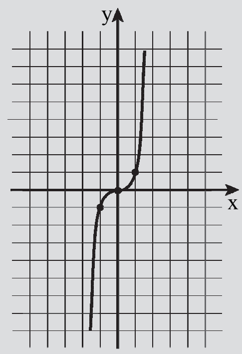
ד. הפונקציה מקבלת רק ערכים אי שליליים (חיוביים או אפס),
כלומר גרף הפונקציה אינו נמצא מתחת לציר ה- y .
הפונקציה חיובית עבור כל $x \neq 0$. עבור $x = 0$ ערך הפונקציה הוא 0 .

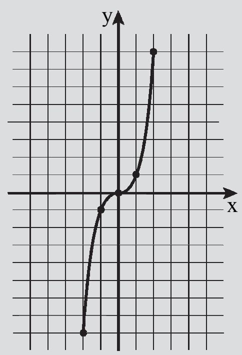
ה. גרף הפונקציה עובר <u>תמיד</u> דרך הנקודות $(0;0)$, $(1;1)$ ו- $(-1;1)$, ראו שרטוטים.
אלה "נקודות עוגן" קבועות של כל פונקציה מצורה זו.

ו. גרף הפונקציה סימטרי משני צדי ציר ה- y . נדון בכך בהמשך בהרחבה.

נעבור לדון בפונקציה $y = x^n$ עבור **n טבעי אי-זוגי**:
נבנה טבלת ערכים ונשרטט את הגרפים של הפונקציות $y = x^3$ ו- $y = x^5$.

x	–2	–1.5	–1	–0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y = x^3$	–8	–3.375	–1	–0.125	0	0.125	1	3.375	8
$y = x^5$	–32	–7.59375	–1	–0.03125	0	0.03125	1	7.59375	32





מהגרפים שקיבלנו נוכל ללמוד על מספר תכונות המאפיינות פונקציית חזקה מהצורה $f(x)=x^n$ עבור n אי זוגי:

א. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל x .

ב. הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה שלה, ואין לה נקודות קיצון.

ג. הפונקציה חיובית עבור $x>0$, ושלילית עבור $x<0$.

ד. הנקודה $(0;0)$ היא נקודת אפס של הפונקציה. משני צדי נקודת האפס הפונקציה עוברת משליליות לחיוביות, או להיפך. אפשר לראות שהסביבה של הנקודה אינה נראית רגילה, אלא בצורת **"מגלשה"**. נרחיב על נקודות כאלה בהמשך.

ה. גרף הפונקציה עובר תמיד דרך הנקודות $(0;0)$, $(1;1)$ ו- $(-1;-1)$.
אלה "נקודות עוגן" קבועות של כל פונקציה מצורה זו.

ו. גרף הפונקציה סימטרי לעומת הנקודה $(0;0)$. נדון בכך בהמשך בהרחבה.

<u>בדקו בעזרת תוכנת מחשב</u>, כיצד נראה גרף הפונקציה $y=x^n$,
עבור n טבעי (זוגי או אי זוגי). **<u>סרקו את הקוד המצורף</u>. מומלץ!**

תרגילים

1. נתונה הפונקציה $f(x)=x^4$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה. תוכלו להיעזר בטבלת ערכים.

ב. רשמו את שיעורי הנקודה הנמוכה ביותר שעל גרף הפונקציה.

ג. האם קיימת על גרף הפונקציה נקודה שהיא הגבוהה ביותר?

ד. כתבו את התחום שבו הפונקציה עולה.

ה. כתבו את התחום שבו הפונקציה יורדת.

ו. חשבו את $f(3)$ ואת $f(-3)$.

ז. מצאו לאילו ערכים של x מתקיים $f(x)=16$.

ח. עבור הנקודות הבאות, קבעו האם הן נמצאות על גרף הפונקציה: **(1)**. $(-1;1)$. **(2)**. $(-1;-1)$.

ט. **(1)** הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע $f(100)>100$.
(2) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע $f(0.1)<0.1$.

י. **(1)** חשבו את $f(100)$. **(2)** חשבו את $f(-100)$.

יא. **(1)** קבעו בעזרת הגרף האם כאשר $x\to+\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף י"**(1)**?
(2) קבעו בעזרת הגרף האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף י"**(2)**?

2. נתונה הפונקציה $f(x)=x^6$.

א. בחרו את התשובה הנכונה: משוואת ציר הסימטריה של גרף הפונקציה היא $y=0\,/\,x=0$.

ב. חשבו את ערך הפונקציה בנקודות $x=1$, $x=-1$, $x=0$.

ג. מצאו את ערכי ה- x שעבורם הפונקציה חיובית (אם ישנם).

ד. מצאו את ערכי ה- x שעבורם הפונקציה שלילית (אם ישנם)..

ה. מצאו את שיעורי הנקודות על גרף הפונקציה ששיעור ה- y שלהן הוא 64 .

ו. האם גרף הפונקציה נפגש עם הישר $y=-1$? נמקו.

ז. (1) בכמה נקודות חותך גרף הפונקציה את הישר $y=12$? נמקו.

(2) כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=12$?

האם ניתן לדעת האם הפתרונות הם חיוביים או שליליים? נמקו.

ח. (1) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע $f(100)>f(10)$.

(2) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע $f(-0.5)=f(0.5)$.

ט. נתון $0<k<1$. קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה:

(1) $0<f(k)<1$. (2) $f(k)>k$.

י. (1) קבעו בעזרת הגרף האם כאשר $x\to+\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.

(2) קבעו בעזרת הגרף האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.

3. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה. תוכלו להיעזר בטבלת ערכים.

ב. מצאו לאיזה ערך של x מתקיים $f(x)=27$.

ג. מצאו את נקודת המפגש של גרף הפונקציה עם הישר $y=-64$.

ד. אסתי טוענת שכאשר נעים על הגרף משמאל לימין, ערכי ה- y הולכים וגדלים,

ולכן הפונקציה עולה לכל ערך של x . האם היא צודקת?

ה. מצאו את שיעורי נקודות המפגש של גרף הפונקציה עם הישר $y=x$.

ו. (1) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע מתקיים $f(10)>f(5)$?

(2) נתון $k>1$. האם מתקיים בהכרח $f(k)>k$? נמקו.

ז. (1) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע $f(0.5)<0.5$.

(2) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע $f(-12)<-12$.

ח. (1) חשבו את $f(1000)$. (2) חשבו את $f(-1000)$.

ט.(1) קבעו בעזרת הגרף האם כאשר $x\to\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(1)?

(2) קבעו בעזרת הגרף האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(2)?

4. נתונה הפונקציה $f(x)=x^5$.

א. מצאו את ערכי ה- x שעבורם הפונקציה חיובית, ואת ערכי ה- x שעבורם היא שלילית.

היעזרו בגרף הפונקציה.

ב. מצאו את נקודת המפגש של גרף הפונקציה עם הישר $y=32$.

ג. היעזרו בגרף ופתרו את אי השוויון $x^5>32$.

ה. נתון $t<-1$. האם מתקיים $f(t)>t$? נמקו.

ו. נתון $-1<m<0$. האם מתקיים $f(m)>m$? נמקו.

ז. (1) קבעו על פי הגרף האם כאשר $x\to\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

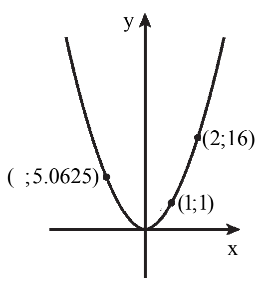
(2) קבעו על פי הגרף האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

5. נתונה הפונקציה $y=x^n$. n מספר אי זוגי.
א. השלימו את הטבלה.
ב. כתבו שיעורי שלוש נקודות דרכן עובר גרף הפונקציה, עבור כל ערך של n טבעי אי זוגי.

הייצוג האלגברי	$y=x^n$
תחום הגדרה	
שיעורי נקודת הקיצון (אם יש) וסוג הקיצון	
נקודת החיתוך עם ציר ה- x , נקודת אפס	
נקודת החיתוך עם ציר ה- y	
תחום עלייה	
תחום ירידה	
תחום חיוביות	
תחום שליליות	

6. נתונה הפונקציה $f(x)=x^n$. n מספר טבעי זוגי:
א. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה:
(1) הערך המינימלי של הפונקציה הוא אפס.
(2) הפונקציה חיובית לכל ערך של x .
(3) הערך של הפונקציה יכול להיות שלילי.
ב. כתבו שיעורי שלוש נקודות דרכן עובר גרף הפונקציה, עבור <u>כל</u> ערך של n טבעי זוגי.
ג. היעזרו בגרף הפונקציה, ומצאו את הערכים של המספר k , שעבורם:
(1) יש לגרף הפונקציה ולישר $y=k$ שתי נקודות מפגש.
(2) אין לגרף הפונקציה ולישר $y=k$ אף נקודת מפגש.
(3) יש לגרף הפונקציה ולישר $y=k$ נקודת מפגש אחת.
ד. עבור ערכי k , שמצאתם בתת סעיף ג(1), קבעו כמה נקודות מפגש יש לגרף הפונקציה עם הישר $y=-2k$ (אם ישנן).
נמקו.

7. לפניכם גרף של פונקציה מהצורה $f(x)=x^n$.
על הגרף מסומנות שתי נקודות הנמצאות עליו: $(1;1)$, $(2;16)$.
כמו כן, מסומנת נקודה נוספת על הגרף, שבהן נתון שיעור ה- y .
א. האם מעריך החזקה של הפונקציה הוא זוגי או אי זוגי?
ב. מצאו את מעריך החזקה n .
ג. השלימו את שיעורי הנקודה הנוספת שעל הגרף.
ד. מצאו את נקודות החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ לישר $y=81$.
ה. היעזרו בשרטוט וקבעו לאילו ערכי x מתקיים $x^4<81$.
ו. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\left(f(x)\right)^2-f(x)-2=0$.
הדרכה: סמנו $f(x)=t$.

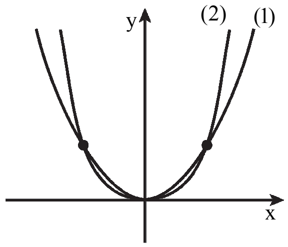


8. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציית חזקה.
לפניכם טבלת ערכים עבור פונקציה זו.

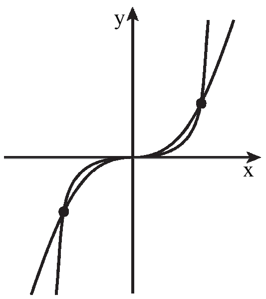
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)		−32	−1				

א. האם מעריך החזקה של הפונקציה הוא זוגי או אי זוגי?
ב. מצאו את מעריך החזקה n.
ג. השלימו את הערכים החסרים בטבלה.
ד. כתבו את תחומי העלייה של הפונקציה.

9. לפניכם גרפים של שתי פונקציות: $f(x)=x^6$, $g(x)=x^4$.
א. מצאו את הנקודות המשותפות לגרפים של שתי הפונקציות.
ב. (1) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע מתקיים $f(2)>g(2)$.
(2) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע מתקיים $f(0.5)<g(0.5)$.
ג. התאימו כל פונקציה לגרף המתאים לה, גרף (1) או גרף (2).
ד. לאילו ערכי x מתקיים $f(x)>g(x)$?
ה. חניתה טוענת שבתחום $0<x<1$ מתקיים $x^6<x^4$.
האם היא צודקת?
ו. מהם התחומים שבהם מתקיים $x^6<x^4$?
ז. נתונים k ו- m מספרים טבעיים זוגיים, כך ש- $k>m$.
עפר טוען שעבור $x>1$ או $x<-1$ מתקיים $x^k>x^m$,
ועבור $0<x<1$ או $-1<x<0$ מתקיים $x^k<x^m$.
האם הוא צודק? נמקו.



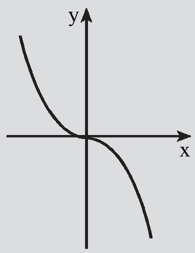
10. לפניכם הגרפים של שתי פונקציות: $f(x)=x^5$, $g(x)=x^3$.
א. מצאו את הנקודות המשותפות לגרפים של שתי הפונקציות.
ב. (1) הוסיפו את אחד הסימנים $<$, $>$ או $=$: $f(2)$____$g(2)$.
הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון.
(2) הוסיפו את אחד הסימנים $<$, $>$ או $=$: $f(0.5)$____$g(0.5)$.
הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון.
ג. התאימו כל פונקציה לגרף המתאים לה, גרף (1) או גרף (2).
ד. ינאי טוען שעבור $-1<x<1$ מתקיים $f(x)<g(x)$.
האם הוא צודק?
ה. כתבו את התחום שבו מתקיים $f(x)>g(x)$.
ו. מהם התחומים שבהם מתקיים $x^5<x^3$?
ז. נתונים k ו- m מספרים טבעיים אי זוגיים, כך ש- $k>m$.
רינה טוענת שעבור $x>1$ או $x<-1$ מתקיים $x^k>x^m$, ועבור $0<x<1$
או $-1<x<0$ מתקיים $x^k<x^m$. האם היא צודקת? נמקו.

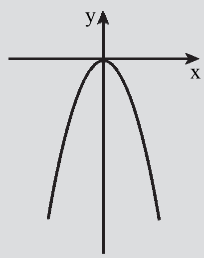


11. נתונות שתי פונקציות: $f(x)=x^7$, $g(x)=x^2$.
א. מצאו את הנקודות המשותפות לגרפים של שתי הפונקציות.
ב. פתרו את אי השוויון $x^7<x^2$. היעזרו בגרפים של הפונקציות.

פונקציית מהצורה $f(x) = -x^n$

נדון בקצרה בפונקציות מהצורה $\mathbf{y = -x^n}$, כאשר n הוא מספר טבעי (מספר חיובי ושלם).
דוגמאות : $y = -x^2$, $y = -x^3$, $y = -x^4$, $y = -x^5$.
אם נשרטט את הגרפים בעזרת טבלת ערכים, נקבל את הגרפים הבאים.
הגרף הימני מתאר את הצורה הכללית של הפונקציה עבור מעריך זוגי, ונקודת האפס שלו $(0;0)$ היא נקודת מקסימום. הגרף השמאלי מתאר את הצורה הכללית של הפונקציה עבור מעריך אי זוגי. בנקודת האפס $(0;0)$ הפונקציה עוברת מחיוביות לשליליות, ובסביבת הנקודה הגרף נראה בצורת **"מגלשה"**.
למעשה, גרף מהצורה $\mathbf{y = -x^n}$ מהווה שיקוף לעומת ציר ה- x של הגרף $\mathbf{y = x^n}$.
בהמשך נדון בהרחבה בשיקוף גרף של פונקציה לעומת ציר ה- x .





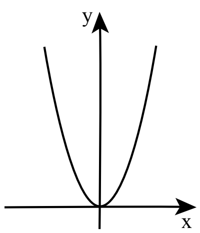
.12 נתונה הפונקציה $f(x) = -x^4$.
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה. תוכלו להיעזר בטבלת ערכים.
ב. חשבו את ערך הפונקציה בנקודות $x = 1$, $x = -1$.
ג. רשמו את שיעורי הנקודה הגבוהה ביותר שעל גרף הפונקציה.
ד. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ה. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
ו. מצאו לאילו ערכים של x מתקיים $f(x) = -25$.
ז. (1) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע $f(10) < -10$.
(2) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע $f(0.1) > -0.1$.
ח. התבוננו בגרף הפונקציה.
(1) קבעו האם כאשר $x \to +\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
(2) קבעו האם כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.

.13 נתונה הפונקציה $f(x) = -x^3$.
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה. תוכלו להיעזר בטבלת ערכים.
ב. מצאו לאיזה ערך של x מתקיים $f(x) = 125$.
ג. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
ד. האם קיים ערך של x , שעבורו הפונקציה עולה?
ה. מצאו את שיעורי נקודות המפגש של גרף הפונקציה עם הישר $y = x$.
ו. (1) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע $f(100) < -100$.
(2) הסבירו בעזרת <u>חוקי חזקות</u>, וללא מחשבון מדוע $f(0.1) > -0.1$.
ז. התבוננו בגרף הפונקציה.
(1) קבעו האם כאשר $x \to \infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
(2) קבעו האם כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

פונקציות מהצורה $f(x)=a\cdot x^n$

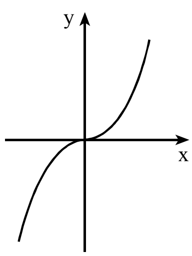
נדון בקצרה בפונקציות מהצורה $\mathbf{y=a\cdot x^n}$, כאשר n הוא מספר טבעי (מספר חיובי ושלם), ו- a הוא מספר חיובי או שלילי (כלומר אינו אפס).
דוגמאות: $y=4\cdot x^2$, $y=8\cdot x^3$, $y=-7\cdot x^4$, $y=-3\cdot x^5$.
עבור a חיובי, גרף הפונקציה $y=a\cdot x^n$ דומה בצורתו לגרף של $y=x^n$, והם נבדלים זה מזה בעיקר ברמת התלילות.
עבור a שלילי, גרף הפונקציה $y=a\cdot x^n$ דומה בצורתו לגרף של $y=-x^n$, והם נבדלים זה מזה בעיקר ברמת התלילות.
בהמשך נדון באופן רחב בהשפעה על גרף של פונקציה $f(x)$ כאשר כופלים את הפונקציה ב- a , ומקבלים את הפונקציה $a\cdot f(x)$, ונראה שהכפלה זו גורמת למתיחה אנכית, או כיווץ אנכי של הגרף.

14. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=2x^4$.



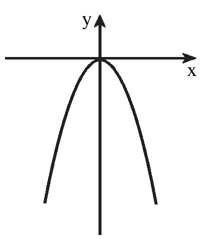
א. רשמו את שיעורי נקודת האפס של הפונקציה.
ב. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
ג. כתבו את התחום שבו הפונקציה עולה.
ד. כתבו את התחום שבו הפונקציה יורדת.
ה. מצאו לאילו ערכים של x מתקיים $f(x)=32$.
ו. התבוננו בגרף הפונקציה.
(1) קבעו האם כאשר $x\to+\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
(2) קבעו האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.

15. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}x^3$.



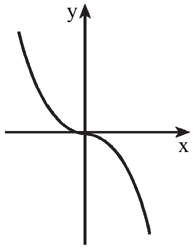
א. רשמו את שיעורי נקודת האפס של הפונקציה.
ב. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
ג. מצאו לאיזה ערך של x מתקיים $f(x)=-9$.
ד. התבוננו בגרף הפונקציה, וקבעו האם כאשר $x\to\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
ה. התבוננו בגרף הפונקציה, וקבעו האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

16. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=-\frac{1}{4}x^6$.



א. רשמו את שיעורי הנקודה הגבוהה ביותר שעל גרף הפונקציה.
ב. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
ג. מצאו לאילו ערכים של x מתקיים $f(x)=-16$.
ד. (1) הסבירו ללא מחשבון מדוע $f(100)<0$.
(2) הסבירו ללא מחשבון מדוע $f(1000)<f(100)$.
ה. התבוננו בגרף הפונקציה.
(1) קבעו האם כאשר $x\to\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
(2) קבעו האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

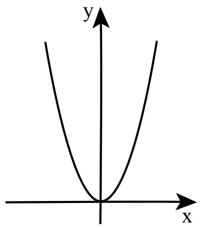
17. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = -3x^5$.



א. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
ב. מצאו לאיזה ערך של x מתקיים $f(x) = 6$.
ג. מצאו את נקודות המפגש של גרף הפונקציה עם הישר $y = -3x$.
ד. (1) הסבירו ללא מחשבון מדוע $f(100) < 0$.
(2) הסבירו ללא מחשבון מדוע $f(-100) > 0$.
ה. התבוננו בגרף הפונקציה.
(1) קבעו האם כאשר $x \to \infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
(2) קבעו האם כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

תשובות:

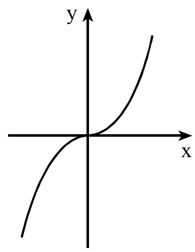
1. ב. $(0;0)$. ג. לא. א.



ד. $x > 0$. ה. $x < 0$. ו. $f(3) = 81$, $f(-3) = 81$.
ז. $x = 2$, $x = -2$.
ח. (1) כן. (2) לא.
י. (1) $f(100) = 10^8 = 100,000,000$. (2) $f(-100) = 10^8 = 100,000,000$.
יא. (1) שואף ל- $+\infty$. (2) שואף ל- $+\infty$.

2. א. $x = 0$. ב. $f(1) = 1$, $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$. ג. $x \neq 0$. ד. אין.
ה. $(2;64)$, $(-2;64)$. ו. לא. ז. (1) בשתי נקודות. (2) שני פתרונות, אחד חיובי, השני שלילי.
ט. (1) הטענה נכונה. (2) הטענה לא נכונה. י. (1) שואף ל- ∞ . (2) שואף ל- ∞ .

3. ב. $x = 3$. ג. $(-4;-64)$. ד. כן, אסתי צודקת.



ה. $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;1)$. ו. (2) כן.
ח. (1) $f(1,000) = 10^9 = 1,000,000,000$.
(2) $f(1,000) = -10^9 = -1,000,000,000$.
ט. (1) שואף ל- ∞ . (2) שואף ל- $-\infty$.

4. א. $x > 0$. ב. $x < 0$. ג. $(2;32)$. ד. $x > 2$. ה. לא. ו. כן.
ז. (1) שואף ל- ∞ . (2) שואף ל- $-\infty$.

5. א.

הייצוג האלגברי	$y = x^n$, n אי זוגי
תחום הגדרה	כל x
שיעורי נקודת הקיצון (אם יש)	אין
נקודת החיתוך עם ציר ה- x , נקודת אפס	$(0;0)$
נקודת החיתוך עם ציר ה- y	$(0;0)$
תחום עלייה	כל x
תחום ירידה	אין
תחום חיוביות	$x > 0$
תחום שליליות	$x < 0$

ב. $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;-1)$.

6. א. (1) נכונה. (2) לא נכונה. (3) לא נכונה. ב. $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;1)$.
ג. (1) $k>0$. (2) $k<0$. (3) $k=0$. ד. אין אף נקודת מפגש.

7. א. המעריך הוא זוגי. ב. $n=4$. ג. $(-1.5;5.0625)$.
ד. $(3;81)$, $(-3;81)$. ה. $-3<x<3$. ו. שני פתרונות.

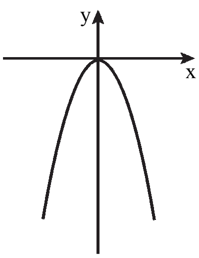
8. א. אי זוגי. ב. $n=5$. ד. עולה לכל x .
ג.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-243	-32	-1	0	1	32	243

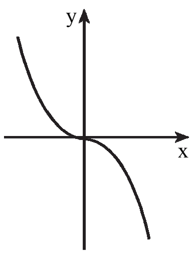
9. א. $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;1)$. ג. $f(x)$ - (2), $g(x)$ - (1). ד. $x>1$ או $x<-1$.
ה. כן, היא צודקת. ו. $0<x<1$ או $-1<x<0$. ז. כן, עפר צודק.

10. א. $(0;0)$, $(1;1)$, $(-1;-1)$. ב. (1) $f(2)>g(2)$. (2) $f(0.5)<g(0.5)$.
ג. $f(x)$ - (2), $g(x)$ - (1). ד. לא, הוא לא צודק. ה. $x>1$ או $-1<x<0$.
ו. $0<x<1$ או $x<-1$. ז. רינה אינה צודקת.

11. א. $(0;0)$, $(1;1)$. ב. $x<1$, $x\neq 0$.

12. א.


ב. $f(1)=-1$, $f(-1)=-1$. ג. $(0;0)$.
ד. עלייה: $x<0$, ירידה: $x>0$.
ה. חיוביות: אין, שליליות: $x\neq 0$.
ו. $x=\sqrt{5}$, $x=-\sqrt{5}$.
ח. (1) שואף ל- $-\infty$. (2) שואף ל- $-\infty$.

13. א.


ב. $x=-5$.
ג. חיוביות: $x<0$, שליליות: $x>0$.
ד. לא.
ה. $(0;0)$.
ז. (1) שואף ל- $-\infty$. (2) שואף ל- ∞ .

14. א. $(0;0)$. ב. חיוביות: $x\neq 0$, שליליות: אין. ג. $x>0$. ד. $x<0$. ה. $x=2$, $x=-2$.
ו. (1) שואף ל- $+\infty$. (2) שואף ל- $+\infty$.

15. א. $(0;0)$. ב. חיוביות: $x>0$, שליליות: $x<0$. ג. $x=-3$. ה. $(0;0)$.
ד. שואף ל- $+\infty$. ה. שואף ל- $-\infty$.

16. א. $(0;0)$. ב. חיוביות: אין, שליליות: $x\neq 0$. ג. $x=2$, $x=-2$.
ה. (1) שואף ל- $-\infty$. (2) שואף ל- $-\infty$.

17. א. חיוביות: $x<0$, שליליות: $x>0$. ב. $x=\sqrt[5]{-2}=-\sqrt[5]{2}$. ג. $(0;0)$, $(1;-3)$, $(-1;3)$.
ה. (1) שואף ל- $-\infty$. (2) שואף ל- $+\infty$.

פונקציות פולינום

כאשר כופלים פונקציית חזקה במספר קבוע או כאשר מבצעים חיבור או חיסור בין שתי פונקציות חזקה (או יותר), מקבלים פונקציית חזקה חדשה.
דוגמאות: $f(x)=2x^3$, $g(x)=3x^5+6x^2$, $h(x)=-x^5+4x^2-1$.
פונקציות אלה המתקבלות על ידי הכפלת פונקציות חזקה במספר קבוע, וחיבורן או חיסורן זו מזו, נקראות **פונקציות פולינום**. משמעות המילה פולינום היא "רב איבר".

הערות:

א. מעריך החזקה הגבוה ביותר בפולינום נקרא **מעלת הפולינום.**
דוגמה: הפולינום שמשוואתו $f(x)=4x^3-x$ הוא ממעלה שלישית.
באופן דומה, הפונקציה $g(x)=3x^2-x$ היא פולינום ממעלה שנייה (פונקציה ריבועית),
הפונקציה $h(x)=-2x+6$ היא פולינום ממעלה ראשונה (פונקציה לינארית),
והפונקציה הקבועה $j(x)=4$ היא פולינום ממעלה אפס.

ב. פולינום נבנה בעזרת כפל, חיבור וחיסור של פונקציות חזקה, ולכן תחום ההגדרה שלו הוא תמיד **"כל x".**

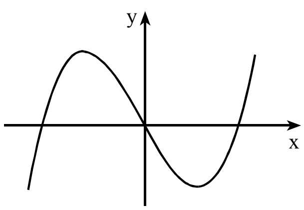
ג. על פי הערה ב' נובע שגרף של פולינום הוא גרף "רציף".

מסקנות נוספת לגבי פולינומים:

(1) למשוואה ממעלה שלישית יש לכל היותר שלושה פתרונות, ולכן לפולינום ממעלה שלישית יש לכל היותר שלוש נקודות משותפות עם ציר ה- x . באופן דומה, לפולינום ממעלה רביעית יש לכל היותר ארבע נקודות משותפות עם ציר ה- x וכו'.

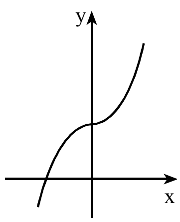
(2) בין כל שתי נקודות אפס של פולינום יש לפחות נקודת קיצון אחת (מינימום או מקסימום).

1. לפניכם גרף הפונקציה $y=x^3-16x$.



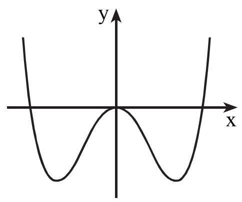
א. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.
ב. רשמו את התחומים שבהם הפונקציה חיובית.
ג. רשמו את התחומים שבהם הפונקציה שלילית.
ד. היעזרו בסעיפים קודמים, ופתרו את אי השוויונות הבאים: (1) $x^3-16x>0$. (2) $x^3-16x<0$.

2. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^3+64$.



א. מצאו את שיעורי נקודת האפס של הפונקציה.
ב. רשמו לאילו ערכי x מתקיים $f(x)>0$.
ג. רשמו לאילו ערכי x מתקיים $f(x)<0$.
ד. (1) התבוננו בגרף הפונקציה, וקבעו האם כאשר $x\to+\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
(2) התבוננו בגרף הפונקציה, וקבעו האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.

3. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^4-4x^2$.

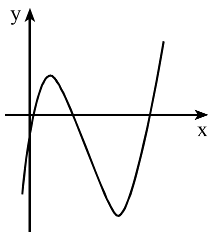


א. מצאו את הנקודות המשותפות לגרף הפונקציה ולציר ה- x .

ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

ג. k הוא מספר שלילי. למשוואה $f(x)=k$ יש שני פתרונות.
מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=-k$.
נמקו.

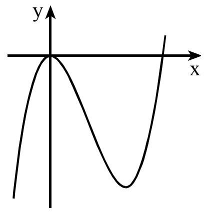
4. לפניכם גרף הפונקציה $y=(x^2-7x+1)\cdot(x-2)$.



א. מצאו את נקודות החיתוך של גרף
הפונקציה עם ציר ה- x . דייקו עד
שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ב. רשמו את תחומי החיוביות,
ואת תחומי השליליות של הפונקציה.

5. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^2(x-3)$.



א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ב. נתון כי לפונקציה יש מקסימום בנקודה $(0;0)$,
ומינימום בנקודה שבה $x=2$.
(1) מצאו את שיעורי נקודת המינימום.
(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^3+12x$.

א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ב. נתון כי לפונקציה יש מקסימום בנקודה שבה $x=2$, ומינימום בנקודה שבה $x=-2$.
מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום הנ"ל.

ג. שרטטו גרף אפשרי של הפונקציה $f(x)$.

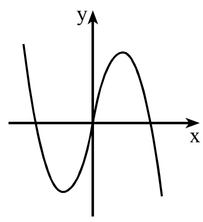
ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

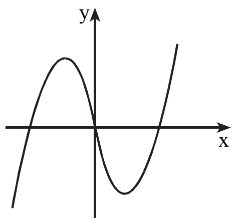
ה. יואב טוען שעל סמך מעלת הפולינום, אפשר לדעת מראש שלפונקציה יש לכל היותר
שלוש נקודות אפס. האם הוא צודק? נמקו.

ו. (1) חשבו את $f(100)$.
(2) חשבו את $f(-100)$.

ז. התבוננו בגרף הפונקציה.
(1) קבעו האם כאשר $x\to+\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ו(1)?
(2) קבעו האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ו(2)?

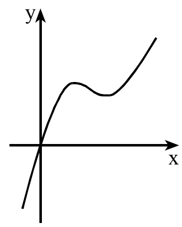
.7 נתונות משוואות של שתי פונקציות: $f(x)=x^3-9x$, $g(x)=-x^3+9x$.
א. מצאו את נקודות האפס של כל אחת מהפונקציות.
ב. לפניכם שני גרפים. התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאים לה – הימני או השמאלי.
הדרכה: הציבו בשתי הפונקציות אותם ערכי x בסביבת נקודות האפס שמצאתם, ועל סמך <u>סימן</u> התוצאה קבעו האם הפונקציה חיובית או שלילית באותו תחום.



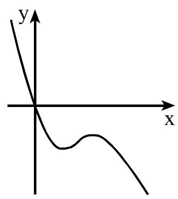


.8 נתונות משוואות של שתי פונקציות: $f(x)=\frac{1}{3}x(2x^2-9x+12)$, $g(x)=-\frac{1}{4}x(2x^2-9x+12)$,
א. מצאו את שיעורי נקודות האפס של כל פונקציה (אם ישנן).
ב. עפר טוען שעל סמך מעלת הפולינום, אפשר לדעת מראש שלפונקציות הנתונות יש לכל היותר שלוש נקודות אפס, ולכל היותר שתי נקודות קיצון. האם הוא צודק? נמקו.
ג. לפניכם שני גרפים (1) ו-(2), המתאימים לשתי הפונקציות.

(1)

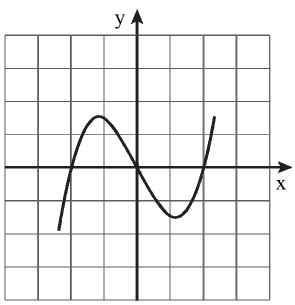


(2)



קבעו איזו משוואה מתאימה לכל גרף, על ידי כך שתציבו בשתי הפונקציות אותם ערכי x בסביבת נקודת האפס, ותיעזרו **בסימן** התוצאה המתקבלת.

.9 בשרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה.
נתונים שני ייצוגים אלגבריים:
$f(x)=\frac{1}{2}x(x^2-4)$, $g(x)=\frac{1}{2}x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.
אחד הייצוגים מתאים לגרף הנתון.
א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
ב. קבעו על פי תוצאות סעיף א׳ ,
איזה ייצוג אלגברי מתאים לגרף הנתון.
ג. על סמך סעיפים קודמים, פתרו את אי השוויון $\frac{1}{2}x(x^2-4)>0$.



.10 נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-7x^2+10x$.
א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.
ב. רשמו את התחומים שבהם הפונקציה חיובית.
הדרכה: הציבו בפונקציה ערכי x בסביבת נקודות האפס שמצאתם.
ג. רשמו את התחומים שבהם הפונקציה שלילית.
ד. על סמך סעיפים קודמים, פתרו את אי השוויון $x^3-7x^2+10x<0$.

11. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2(5x-2)$.

א. על סמך מעלת הפולינום, ינאי טוען שיש לפונקציה לכל היותר שלוש נקודות אפס.
האם הוא צודק? נמקו.

ב. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ג. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

ד. על סמך סעיפים קודמים, פתרו את אי השוויונות הבאים:
(1) $x^2(5x-2)<0$. **(2)** $-x^2(5x-2)<0$.

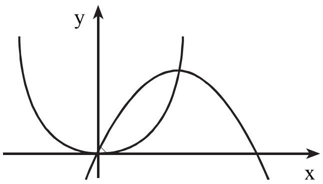
12. נתונה הפונקציה $f(x)=(2-x)(x^2+2x+4)$.

א. על סמך מעלת הפולינום, גור טוען שיש לפונקציה לכל היותר שלוש נקודות אפס.
האם הוא צודק? נמקו.

ב. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה (אם ישנן).

ג. **(1)** מצאו לאילו ערכי x מתקיים $f(x)>0$. **(2)** מצאו לאילו ערכי x מתקיים $f(x)<0$.

13. הגרפים של הפונקציות $y=x^4$ ו- $y=2x-x^2$
נפגשים בשתי נקודות בלבד (ראו ציור).



א. הראו ששיעורי נקודות המפגש של הגרפים הם $(0;0)$ ו- $(1;1)$.

ב. פתרו את אי השוויון $x^4>2x-x^2$. היעזרו בציור.

ג. עפר טוען, שעל פי הציור ניתן לדעת, שבתחום $0<x<1$
מתקיים $x^4(2x-x^2)>0$. האם הוא צודק? הסבירו.

14. נתונות משוואות של שתי פונקציות: $f(x)=x^3$ ו- $g(x)=-2x$.

א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. היעזרו בשרטוט וקבעו לאילו ערכי x מתקיים $f(x)<g(x)$.
הדרכה: הציבו בשתי הפונקציות ערכי x בסביבת נקודת החיתוך שמצאתם
(מימין לה, ומשמאל לה).

תשובות:

1. א. $(0;0)$, $(4;0)$, $(-4;0)$. ב. $x > 4$ או $-4 < x < 0$. ג. $0 < x < 4$ או $x < -4$.

ד. **(1)** $x > 4$ או $-4 < x < 0$. **(2)** $0 < x < 4$ או $x < -4$.

2. א. $(-4;0)$. ב. $x > -4$. ג. $x < -4$. ד. **(1)** שואף ל- $+\infty$. **(2)** שואף ל- $-\infty$.

3. א. $(2;0)$, $(0;0)$, $(-2;0)$. ב. חיוביות: $x > 2$ או $x < -2$, שליליות: $-2 < x < 2$, $x \neq 0$.

ג. שתי נקודות משותפות.

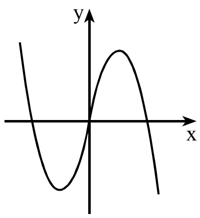
4. א. $(2;0)$, $(6.854;0)$, $(0.146;0)$.

ב. תחומי חיוביות: $x > 6.854$ או $0.146 < x < 2$, תחומי שליליות: $2 < x < 6.854$ או $x < 0.146$.

5. א. $(0;0)$, $(3;0)$.

ב. **(1)** $(2;-4)$ מינימום. **(2)** עלייה: $x > 2$ או $x < 0$, ירידה: $0 < x < 2$.

6. א. $(0;0)$, $(\sqrt{12};0)$, $(-\sqrt{12};0)$. ג.



ב. $(2;16)$ מקסימום, $(-2;-16)$ מינימום.

ד. עלייה: $-2 < x < 2$,

ירידה: $x > 2$ או $x < -2$.

ה. כן, יואב צודק.

ו. $f(100) = -998,800$, $f(-100) = 998,800$. ז. **(1)** $-\infty$, תואמת. **(2)** $+\infty$, תואמת.

7. א. $(3;0)$, $(0;0)$, $(-3;0)$. ב. $f(x)$ מתאים לגרף השמאלי, $g(x)$ מתאים לגרף הימני.

8. א. $f(x)$: $(0;0)$. $g(x)$: $(0;0)$. ב. עפר צודק. ג. **(1)** מתאים ל- $f(x)$, **(2)** מתאים ל- $g(x)$.

9. א. $f(x)$: $(0;0)$, $(2;0)$, $(-2;0)$. $g(x)$: $(0;0)$, $(\sqrt{2};0)$, $(-\sqrt{2};0)$. ב. $f(x)$. ג. $x > 2$ או $-2 < x < 0$.

10. א. $(0;0)$, $(2;0)$, $(5;0)$. ב. $x > 5$ או $0 < x < 2$. ג. $2 < x < 5$ או $x < 0$. ד. $2 < x < 5$ או $x < 0$.

11. א. ינאי צודק. ב. $(0;0)$, $(\frac{2}{5};0)$. ג. חיוביות: $x > \frac{2}{5}$, שליליות: $0 < x < \frac{2}{5}$ או $x < 0$.

ד. **(1)** $0 < x < \frac{2}{5}$ או $x < 0$. **(2)** $x > \frac{2}{5}$.

12. א. גור צודק. ב. $(2;0)$. ג. **(1)** $x < 2$. **(2)** $x > 2$.

13. ב. $x > 1$ או $x < 0$. ג. עפר צודק.

14. א. $(0;0)$. ב. $x < 0$.

התנהגות של פולינומים עבור $x \to \infty$, ו- $x \to -\infty$

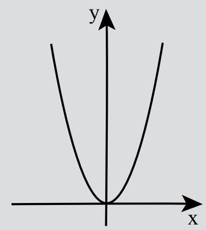
בפרק זה נדון בהתנהגות של פונקציות פולינום כאשר $x \to \infty$ וכאשר $x \to -\infty$.
כפי שנראה, כאשר $x \to \infty$, פונקציית הפולינום $f(x)$ תשאף ל- ∞ או ל- $-\infty$,
וגם כאשר $x \to -\infty$, פונקציית הפולינום $f(x)$ תשאף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

התנהגות של פונקציות חזקה עבור $x \to \infty$, ו- $x \to -\infty$

נתבונן תחילה בפונקציית חזקה מהצורה $\mathbf{f(x) = a \cdot x^n}$, כאשר n הוא מספר טבעי (מספר חיובי ושלם), ו- a הוא מספר שונה מאפס (כלומר חיובי או שלילי).
התנהגות גרף הפונקציה $f(x) = a \cdot x^n$, כאשר $x \to \infty$ וכאשר $x \to -\infty$, נקבעת על פי מעריך החזקה n (שהוא זוגי או אי זוגי) ועל פי המקדם a (שיכול להיות חיובי או שלילי).

נסכם את ארבע הצורות "האופייניות" של הגרפים של פונקציות מהצורה $\mathbf{f(x) = a \cdot x^n}$.
נרשום על פי הגרפים, למה שואפת הפונקציה $f(x)$ כאשר $x \to \infty$ וכאשר $x \to -\infty$.

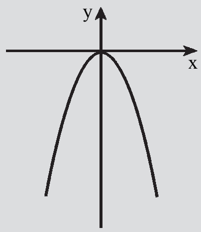
עבור n זוגי ו- a חיובי



כאשר $x \to \infty$, $f(x)$ שואפת ל- ∞

כאשר $x \to -\infty$, $f(x)$ שואפת ל- ∞

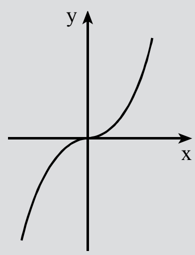
עבור n זוגי ו- a שלילי



כאשר $x \to \infty$, $f(x)$ שואפת ל- $-\infty$

כאשר $x \to -\infty$, $f(x)$ שואפת ל- $-\infty$

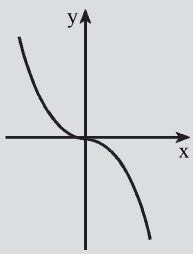
עבור n אי זוגי ו- a חיובי



כאשר $x \to \infty$, $f(x)$ שואפת ל- ∞

כאשר $x \to -\infty$, $f(x)$ שואפת ל- $-\infty$

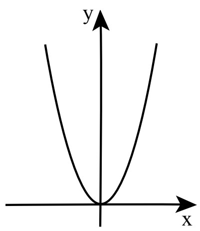
עבור n אי זוגי ו- a שלילי



כאשר $x \to \infty$, $f(x)$ שואפת ל- $-\infty$

כאשר $x \to -\infty$, $f(x)$ שואפת ל- ∞

.1 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=2\cdot x^6$.



א. (1) חשבו את $f(10)$ ואת $f(100)$.

(2) קבעו על פי הגרף האם כאשר $x\to+\infty$,
ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות
שקיבלתם בתת סעיף א'(1)?

ב. (1) חשבו את $f(-10)$ ואת $f(-100)$.

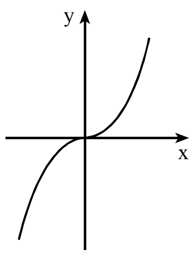
(2) היעזרו בגרף וקבעו האם כאשר $x\to-\infty$, ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ב'(1)?

ג. השלימו : בפונקציה מהצורה $f(x)=a\cdot x^n$, כאשר n הוא זוגי ו- a הוא מספר חיובי :

(1) כאשר $x\to+\infty$, ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ____ .

(2) כאשר $x\to-\infty$, ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ____ .

.2 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=4\cdot x^3$.



א. (1) חשבו את $f(10)$ ואת $f(100)$.

(2) קבעו על פי הגרף האם כאשר $x\to+\infty$,
ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות
שקיבלתם בתת סעיף א'(1)?

ב. (1) חשבו את $f(-10)$ ואת $f(-100)$.

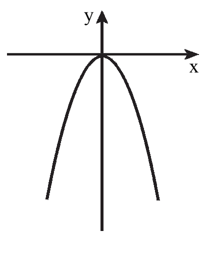
(2) היעזרו בגרף וקבעו האם כאשר $x\to-\infty$, ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ב'(1)?

ג. השלימו : בפונקציה מהצורה $f(x)=a\cdot x^n$, כאשר n הוא אי זוגי ו- a הוא מספר חיובי :

(1) כאשר $x\to+\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ____ .

(2) כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ____ .

.3 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=-7\cdot x^4$.



א. חשבו בעזרת מחשבון את $f(10)$ ואת $f(100)$.

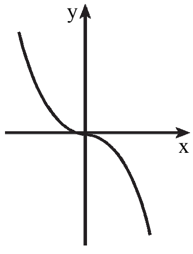
ב. חשבו בעזרת מחשבון את $f(-10)$ ואת $f(-100)$.

ג. היעזרו בגרף והשלימו : בפונקציה מהצורה $f(x)=a\cdot x^n$,
כאשר n הוא זוגי ו- a הוא מספר שלילי :

(1) כאשר $x\to+\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ____ .

(2) כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ____ .

.4 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=-0.5\cdot x^5$.



א. חשבו בעזרת מחשבון את $f(10)$ ואת $f(100)$.

ב. חשבו בעזרת מחשבון את $f(-10)$ ואת $f(-100)$.

ג. השלימו : בפונקציה מהצורה $f(x)=a\cdot x^n$,
כאשר n הוא אי זוגי ו- a הוא מספר שלילי :

(1) כאשר $x\to\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ____ .

(2) כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ____ .

התנהגות של פולינומים כאשר $x \to \infty$, וכאשר $x \to -\infty$

ראינו כי כאשר כופלים פונקציית חזקה במספר קבוע או כאשר מבצעים חיבור או חיסור בין שתי פונקציות חזקה (או יותר), מקבלים פונקציית פולינום.
דוגמאות : $f(x) = 2x^5 - 4x^2$, $g(x) = -x^5 + 8x - 1$.
מעריך החזקה הגבוה ביותר בפולינום נקרא **מעלת הפולינום.**
דוגמה : הפולינום שמשוואתו $f(x) = 4x^3 - x$ הוא ממעלה שלישית.
מעלת הפולינום נקבעת על פי המחובר בעל מעריך החזקה הגבוה ביותר בפולינום.
במקרה של $f(x) = 4x^3 - x$, המחובר הזה הוא $4x^3$.
נהוג לקרוא למחובר זה "האיבר המוביל" או המחובר הדומיננטי של הפולינום.

נרצה לבחון את התנהגות הפולינום כאשר $x \to +\infty$, וכאשר $x \to -\infty$.
כפי שנראה, התנהגות הפולינום דומה להתנהגות "האיבר המוביל" של הפולינום.

לדוגמה : בעמוד 38 ראינו שרטוט של הפונקציה $y = 4x^3$.
על פי השרטוט, כאשר $x \to +\infty$, אז ערך הפונקציה שואף ל- ∞ .
כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה שואף ל- $-\infty$.

לכן, כאשר נתבונן בפונקציה $f(x) = 4x^3 - x$, שהאיבר המוביל שלה הוא $4x^3$,
ההתנהגות שלה כאשר $x \to +\infty$, וכאשר $x \to -\infty$, תהיה דומה להתנהגות של $4x^3$,
שהוא האיבר המוביל שלה, ומכאן שהפונקציה $f(x) = 4x^3 - x$ תתנהג כך :
כאשר $x \to +\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x) = 4x^3 - x$ שואף ל- ∞ .
כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x) = 4x^3 - x$ שואף ל- $-\infty$.

נסביר זאת בקצרה. אם נציב $x = 100$ בביטוי $4x^3$, נקבל $4 \cdot 100^3 = 4{,}000{,}000$.
אם נציב $x = 100$ בפונקציה $f(x) = 4x^3 - x$,
נקבל $f(100) = 4 \cdot 100^3 - 100 = 4{,}000{,}000 - 100$, כלומר $f(100) = 3{,}999{,}900$.
מההצבה ברור שכאשר נציב מספרים גדולים, האיבר המוביל יהיה בעל ערך "קיצוני" (חיובי או שלילי) הרבה יותר מהמחוברים האחרים, והוא יקבע את התנהגות הפולינום.
במקרה זה הצבנו $x = 100$. אם נציב לדוגמה $x = 1{,}000$ או $x = 10{,}000$, נראה באופן מובהק עוד יותר את הערך הקיצוני שמקבל האיבר המוביל, ולכן כאשר מדברים על $x \to +\infty$, או $x \to -\infty$, ניתן להסיק שהתנהגות הפונקציה נקבעת על פי האיבר המוביל.

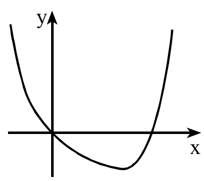
באופן דומה, הפונקציה $g(x) = -7x^4 - 9x + 4$ היא פולינום ממעלה רביעית.
האיבר המוביל בפולינום (בעל החזקה הגדולה ביותר) הוא $-7x^4$.
לכן, ההתנהגות של הפונקציה $g(x) = -7x^4 - 9x + 4$, כאשר $x \to +\infty$, וכאשר $x \to -\infty$,
תהיה דומה להתנהגות של $-7x^4$, שהוא האיבר המוביל של $g(x)$ (והגרף שלו מתואר בשאלה 3 בעמוד 38). נקבל שהפונקציה $g(x) = -7x^4 - 9x + 4$ תתנהג כך :
כאשר $x \to +\infty$, אז ערך הפונקציה $g(x) = -7x^4 - 9x + 4$ שואף ל- $-\infty$.
כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $g(x) = -7x^4 - 9x + 4$ שואף ל- $-\infty$.

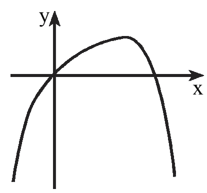
נדגיש שהתנהגות הפונקציה כאשר $x \to +\infty$, וכאשר $x \to -\infty$, תעזור לנו להבין האם הגרף חיובי או שלילי כאשר $x \to +\infty$, וכאשר $x \to -\infty$, תעזור לנו לבצע התאמה בין משוואות של פונקציות לגרפים, וגם לשרטט גרפים של פולינומים, אך התנהגות זו לבדה לא תעזור לנו להבין מה מספר נקודות האפס או נקודות הקיצון של פונקציית הפולינום.

5. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה פונקציית פולינום. ענו על הסעיפים הבאים.
(1) מהו המחובר שבו מעריך החזקה הוא הגדול ביותר?
(כלומר האיבר המוביל של הפולינום)?
(2) האם מעריך החזקה של האיבר המוביל הוא זוגי או אי זוגי?
(3) האם המקדם של האיבר המוביל הוא חיובי או שלילי?
(4) כאשר $x \to +\infty$, האם ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$?
(5) כאשר $x \to -\infty$, האם ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$?

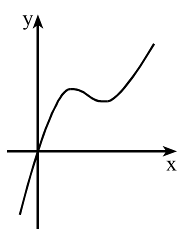
א. $f(x) = 2x^4 - 3x$. ב. $f(x) = 6x^3 - x$. ג. $f(x) = -x^6 + 6x^2 + 1$. ד. $f(x) = -0.5x^5 + x^3 - 1$.

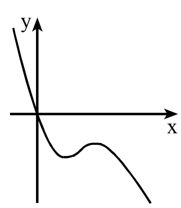
6. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x$.
א. מהו המחובר בעל החזקה הגדולה ביותר בפולינום?
ב. היעזרו בתשובותיכם לסעיף א׳, וענו על תתי הסעיפים הבאים:
(1) האם כאשר $x \to \infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
(2) האם כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
ג. לפניכם שני שרטוטים. אחד מהם מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$.
קבעו האם הגרף המתאים הוא הימני או השמאלי.
היעזרו בסעיפים קודמים.





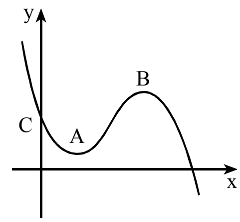
7. נתונה הפונקציה $y = -x^3 + 12x^2 - 45x$.
א. מהו האיבר הדומיננטי בפונקציית הפולינום הנתונה?
ב. היעזרו בתשובותיכם לסעיף א׳, וענו על תתי הסעיפים הבאים:
(1) האם כאשר $x \to \infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
(2) האם כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
ג. לפניכם שני שרטוטים. אחד מהם מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$.
קבעו האם הגרף המתאים הוא הימני או השמאלי.
היעזרו בסעיפים קודמים.



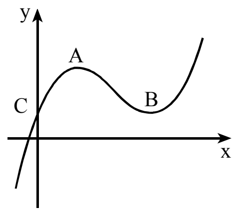


8. נתונות משוואות של שתי פונקציות: $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10$, $g(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 14$.
הגרפים הבאים מתארים, לאו דווקא לפי הסדר, את הפונקציות הנתונות.

א.



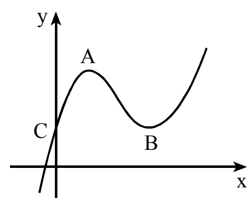
ב.



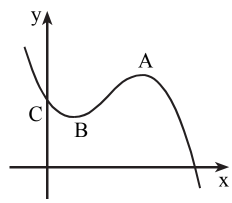
(1) קבעו איזה גרף מתאר כל אחת מהפונקציות הנתונות.
הדרכה: התבוננו בכל פונקציה באיבר בעלת מעריך החזקה הגדולה,
וקבעו האם המקדם שלו חיובי או שלילי, והאם מעריך החזקה שלו זוגי או אי זוגי.
(2) נורית טוענת שלפונקציה ממעלה שלישית יש לפחות נקודת אפס אחת.
הסבירו מדוע היא צודקת. האם טענה זו נכונה גם עבור פונקציה ממעלה שנייה?

9. נתונה הפונקציה $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 10$ וכן סקיצות של שלושה גרפים – א׳, ב׳ ו-ג׳.
אחד מהם מתאר את הפונקציה הנתונה.

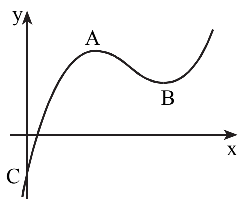
א.



ב.



ג.



(1) זהו את הגרף המתאר את הפונקציה הנתונה.
(2) דליה טוענת שלפונקציה ממעלה שלישית יש לפחות נקודת אפס אחת.
הסבירו מדוע היא צודקת.
(3) הסבירו מדוע הטענה של דליה נכונה עבור כל פונקציית פולינום ממעלה אי זוגית.

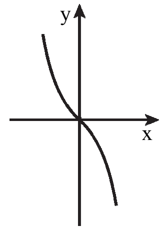
10. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה פונקציית פולינום. ענו על הסעיפים הבאים.
(1) מהו האיבר שבו מעריך החזקה הוא הגדול ביותר (האיבר המוביל של הפולינום)?
(2) האם מעריך החזקה של האיבר המוביל הוא זוגי או אי זוגי?
(3) האם המקדם של האיבר המוביל הוא חיובי או שלילי?
(4) כאשר $x \to +\infty$, האם ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$?
(5) כאשר $x \to -\infty$, האם ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$?

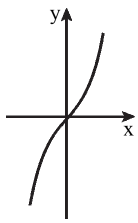
הערה: כאשר הפונקציה מוצגת באמצעות סוגריים, אין חובה לפתוח את הסוגריים
במלואם כדי לזהות את מעלת הפולינום והאיבר המוביל.

א. $f(x) = x(x-3)(x+3)$.
ב. $f(x) = -(x^2-9)(x^2-4)$.
ג. $f(x) = x^2(6-x)^2(8-x)$.

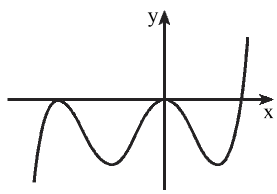
ד. $f(x) = x(3x-4)^3$.
ה. $f(x) = (x^3-8)^2$.
ו. $f(x) = -(2x^2-1)^4$.

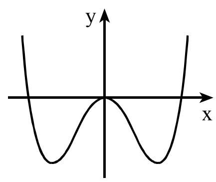
.11 נתונה הפונקציה $f(x)=x(2x^2+1)$.
א. מהו המחובר בעל החזקה הגדולה ביותר בפולינום?
ב. (1) האם כאשר $x\to\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
(2) האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
ג. לפניכם שני שרטוטים. אחד מהם מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$.
קבעו האם הגרף המתאים הוא הימני או השמאלי. היעזרו בסעיפים קודמים.





.12 נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2(4-x)(4+x)^2$.
א. מהו האיבר המוביל של הפולינום?
ב. היעזרו בתשובותיכם לסעיף א', וענו על תתי הסעיפים הבאים:
(1) האם כאשר $x\to\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
(2) האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
ג. לפניכם שני שרטוטים. אחד מהם מתאים לגרף הפונקציה $f(x)$.
קבעו בעזרת סעיפים קודמים האם הגרף המתאים הוא הימני או השמאלי.

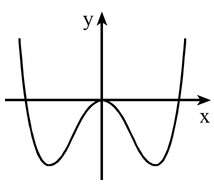




.13 נתונות משוואות של ארבע פונקציות: $f(x)=x(x-3)(x+3)$, $g(x)=x^2(x-3)(x+3)$,
$h(x)=-x^3(x-3)(x+3)$, $i(x)=x^2(3-x)(3+x)$

א. לכל ארבע הפונקציות אותן נקודות אפס. מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.
ב. עבור כל אחת מארבע הפונקציות הנתונות, קבעו מהו האיבר המוביל של הפולינום.

ג. לפניכם גרף של פונקציית פולינום.
קבעו עבור הפונקציה שהגרף שלה מתואר:
(1) האם כאשר $x\to\infty$,
אז ערך הפונקציה שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
(2) האם כאשר $x\to-\infty$,
אז ערך הפונקציה שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.



ד. קבעו האם במחובר עם מעריך החזקה הגדול ביותר בפונקציה שהגרף שלה מתואר:
(1) מעריך החזקה הוא זוגי או אי זוגי. (2) המקדם של חזקה זו הוא חיובי או שלילי.
ה. קבעו איזו פונקציה מהפונקציות הנתונות מתוארת על ידי הגרף הנתון. נמקו.
ו. נטע טוענת שלפונקציה ממעלה רביעית יש תמיד לפחות נקודת אפס אחת.
לעומתה, דליה טוענת שטענתה של נטע נכונה עבור פונקציית פולינום ממעלה אי זוגית,
אך לא בהכרח נכונה כאשר מעלת הפולינום היא זוגית. מי מהן צודקת? נמקו.

14. נתונה שתי פונקציות: $f(x)=x^{2n}-x^n$, $g(x)=-x^{2n+1}+x^n$.
n הוא מספר טבעי. קבעו עבור כל פונקציה:
א. האם כאשר $x\to\infty$, אז ערך הפונקציה שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
ב. האם כאשר $x\to-\infty$, אז ערך הפונקציה שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

תשובות:

1. א. **(1)** $f(10)=2\cdot10^6=2{,}000{,}000$, $f(100)=2\cdot10^{12}=2{,}000{,}000{,}000{,}000$. **(2)** שואף ל- $+\infty$, תואמת.
ב. **(1)** $f(-10)=2\cdot(-10)^6=2\cdot10^6=2{,}000{,}000$, $f(100)=2\cdot(-10)^{12}=2\cdot10^{12}=2{,}000{,}000{,}000{,}000$.
(2) שואף ל- $+\infty$, תואמת. ג. **(1)** $+\infty$. **(2)** $+\infty$.

2. א. **(1)** $f(10)=4\cdot10^3=4{,}000$, $f(100)=4\cdot100^3=4{,}000{,}000$. **(2)** שואף ל- $+\infty$, תואמת.
ב. **(1)** $f(-10)=4\cdot(-10)^3=-4\cdot10^3=-4{,}000$, $f(-100)=4\cdot(-100)^3=-4{,}000{,}000$.
(2) שואף ל- $-\infty$, התשובה תואמת. ג. **(1)** $+\infty$. **(2)** $-\infty$.

3. א. $f(10)=-7\cdot10^4=-70{,}000$, $f(100)=-7\cdot100^4=-7\cdot10^8=-700{,}000{,}000$.
ב. $f(-10)=-7\cdot(-10)^4=-7\cdot10^4=-70{,}000$, $f(-100)=-7\cdot(-100)^4=-7\cdot10^8=-700{,}000{,}000$.

4. א. $f(10)=-0.5\cdot10^5=-50{,}000$, $f(100)=-0.5\cdot100^5=-5{,}000{,}000{,}000$.
ב. $f(-10)=-0.5\cdot(-10)^5=-0.5\cdot(-10^5)=50{,}000$, $f(-100)=-0.5\cdot(-100)^5=5{,}000{,}000{,}000$.
ג. **(1)** $-\infty$. **(2)** ∞ .

5. א. **(1)**. $2x^4$. **(2)** זוגי. **(3)** חיובי. **(4)** שואף ל- ∞ . **(5)** שואף ל- ∞ .
ב. **(1)**. $6x^3$. **(2)** אי זוגי. **(3)** חיובי. **(4)** שואף ל- ∞ . **(5)** שואף ל- $-\infty$.
ג. **(1)**. $-x^6$. **(2)** זוגי. **(3)** שלילי. **(4)** שואף ל- $-\infty$. **(5)** שואף ל- $-\infty$.
ד. **(1)**. $-0.5x^5$. **(2)** אי זוגי. **(3)** שלילי. **(4)** שואף ל- $-\infty$. **(5)** שואף ל- ∞ .

6. א. x^4 . ב. **(1)** שואף ל- ∞ . **(2)** שואף ל- ∞ . ג. הגרף המתאים הוא השמאלי.

7. א. $-x^3$. ב. **(1)** שואף ל- $-\infty$. **(2)** שואף ל- ∞ . ג. הגרף המתאים הוא הימני.

8. **(1)**. גרף א׳ מתאר את הפונקציה $g(x)$, גרף ב׳ מתאר את הפונקציה $f(x)$.
(2). נורית צודקת. הטענה נכונה עבור כל פונקציית פולינום ממעלה אי זוגית,
אך אינה נכונה לפונקציה ריבועית שהיא פונקציה ממעלה זוגית ויכולות להיות לה שתי נקודות אפס, או נקודת אפס אחת, או שאין לה כלל נקודות אפס.

9. **(1)**. גרף א׳ מתאר את הפונקציה הנתונה. **(2)**. דליה צודקת.

10. א. **(1)**. x^3 . **(2)** אי זוגי. **(3)** חיובי. **(4)** שואף ל- ∞ . **(5)** שואף ל- $-\infty$.
ב. **(1)**. $-x^4$. **(2)** זוגי. **(3)** שלילי. **(4)** שואף ל- $-\infty$. **(5)** שואף ל- $-\infty$.
ג. **(1)**. $-x^5$. **(2)** אי זוגי. **(3)** שלילי. **(4)** שואף ל- $-\infty$. **(5)** שואף ל- ∞ .
ד. **(1)**. $27x^4$. **(2)** זוגי. **(3)** חיובי. **(4)** שואף ל- ∞ . **(5)** שואף ל- ∞ .
ה. **(1)**. x^6 . **(2)** זוגי. **(3)** חיובי. **(4)** שואף ל- ∞ . **(5)** שואף ל- ∞ .
ו. **(1)**. $-16x^8$. **(2)** זוגי. **(3)** שלילי. **(4)** שואף ל- $-\infty$. **(5)** שואף ל- $-\infty$.

11. א. $2x^3$. ב. **(1)** שואף ל- ∞ . **(2)** שואף ל- $-\infty$. ג. הגרף המתאים הוא השמאלי.

12. א. x^5 . ב. **(1)** שואף ל- ∞ . **(2)** שואף ל- $-\infty$. ג. הגרף המתאים הוא הימני.

13. א. $(3;0)$, $(0;0)$, $(-3;0)$. ב. $f(x):x^3$, $g(x):x^4$, $h(x):-x^5$, $i(x):-x^4$.
ג. **(1)** שואף ל- ∞ . **(2)** שואף ל- ∞ . ד. **(1)** זוגי. **(2)** חיובי. ה. $g(x)$. ו. דליה צודקת.

14. $f(x)$: א. שואף ל- ∞ . ב. שואף ל- ∞ . $g(x)$: א. שואף ל- $-\infty$. ב. שואף ל- ∞ .

התנהגות של פונקציית פולינום

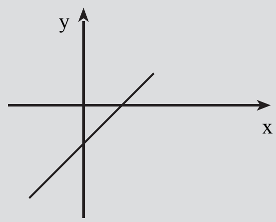
בסביבת נקודות האפס שלה

נדון עכשיו בעיקר בפונקציות פולינום המוצגות על ידי מכפלה בין גורמים ליניאריים.
כלומר מכפלה בין גורמים ממעלה ראשונה. לדוגמה : $f(x)=x(x+4)(x-6)$ **.**
במקרים מסוימים, חלק מהגורמים הליניאריים עולים בחזקה שגדולה מ- 1.
לדוגמה : $g(x)=(x+3)(x-5)^2$, $h(x)=(x-7)^2(x-9)^3$.

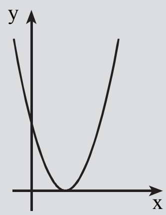
נראה כיצד מוצאים את נקודות האפס של פונקציית "מכפלה" כזו, ונבדוק בין היתר האם היא **מחליפה סימן** משני צדי נקודת האפס (מחיובי לשלילי, או להיפך), או **לא מחליפה סימן.**
ראינו בעבר שניתן לעשות זאת על ידי הצבת ערכי x משני צדי נקודת האפס.
כך למעשה מצאנו תחומי חיוביות ושליליות.
כעת נראה שבחלק מהמקרים ניתן לעשות זאת בדרך קצרה יותר,
באמצעות זיהוי החזקה שבה מעלים כל אחד מהגורמים הליניאריים של המכפלה.

כהקדמה להסבר זה נתבונן בשלוש הפונקציות הבאות : $y=x-1$, $y=(x-1)^2$, $y=(x-1)^3$.
נשרטט את הפונקציות בעזרת טבלת ערכים (לא נפרט על כך).

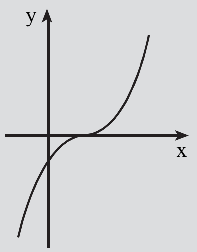
$y=x-1$



$y=(x-1)^2$



$y=(x-1)^3$



לשלוש הפונקציות הללו יש אותה נקודת אפס ששיעוריה $(1;0)$.
הבסיס של שלושתן הוא $(x-1)$, וכאשר הוא מתאפס מתקבלת נקודת האפס $(1;0)$.

בפונקציה $y=x-1$, שבה הביטוי $(x-1)$ עולה בחזקת 1, הפונקציה **מחליפה** סימן משני צדי נקודת האפס $(1;0)$. ניתן לראות זאת בציור. ואפשר גם להציב ערכי x משני צדי נקודת האפס, ולהבין שהביטוי $(x-1)$ מחליף סימן בנקודה שבה $x=1$.
מבחינה גרפית, בנקודת האפס הפונקציה **"חותכת"** את ציר ה- x .

בפונקציה $y=(x-1)^2$, שבה הביטוי $(x-1)$ עולה בחזקת 2 , הפונקציה **אינה מחליפה** סימן משני צדי נקודת האפס $(1;0)$. ניתן לראות זאת בציור. אפשר גם להציב לבדיקה ערכי x משני צדי נקודת האפס, ולהבין שהביטוי $(x-1)^2$ אינו מחליף סימן בנקודה שבה $x=1$.
מבחינה גרפית, בנקודת האפס לפונקציה יש **נקודת קיצון** (במקרה זה מינימום),
והגרף **משיק** לציר ה- x בנקודה זו.

בפונקציה $y=(x-1)^3$, שבה הביטוי $(x-1)$ עולה בחזקת 3 , הפונקציה **מחליפה** סימן משני צדי נקודת האפס $(1;0)$. ניתן לראות זאת בציור. ואפשר גם להציב לבדיקה ערכי x משני צדי נקודת האפס, ולהבין שהביטוי $(x-1)^3$ מחליף סימן בנקודה שבה $x=1$.
בנקודת האפס הפונקציה נראית בצורה של **"מגלשה"** לגבי מצב זה נרחיב בהמשך.

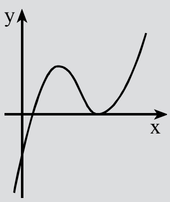
התוצאות שקיבלנו אינן מקריות. **נסכם אותן באופן הבא:**

(1) ביטוי ממעלה ראשונה מחליף סימן בנקודת האפס. מבחינה גרפית, נקודת המפגש שלו עם ציר ה- x היא נקודת **"חיתוך"**, בדומה למה שראינו בדוגמה עבור $y=x-1$.

(2) ביטוי ממעלה ראשונה שמועלה **בחזקה זוגית**, אינו מחליף סימן בנקודת האפס, בדומה למה שראינו בדוגמה עבור $y=(x-1)^2$, ונקודת המפגש שלו עם ציר ה- x היא נקודת מינימום או מקסימום של הפונקציה. הגרף "משיק" לציר ה- x בנקודת האפס.
הערה: גם גרף הפונקציה $y=(x-1)^4$ נראה דומה.

(3) ביטוי ממעלה ראשונה שמועלה בחזקה **אי זוגית שאינה 1,** מחליף סימן בנקודת האפס, בדומה למה שראינו בדוגמה עבור $y=(x-1)^3$, ונקודת המפגש שלו עם ציר ה- x היא בצורה של **"מגלשה".** הערה: גם גרף הפונקציה $y=(x-1)^5$ נראה דומה.

נחזור לדון בפונקציית פולינום המוצגת כמכפלה בין גורמים לינאריים.
נבדוק האם היא **מחליפה סימן** משני צדי נקודת האפס (מחיובי לשלילי, או להיפך),
או **לא מחליפה סימן.**
מבחינה גרפית, נראה האם הגרף חותך את ציר ה- x , או שבנקודת האפס מתקבל מינימום או מקסימום, או שהגרף נראה בצורת "מגלשה", על פי המעלה שבה מועלה הגורם הלינארי.



נתבונן בגרף הפונקציה $f(x)=(x-1)(x-6)^2$,
המתואר משמאל.
הגורמים הלינאריים של המכפלה הם $(x-1)$ ו- $(x-6)$.
כאשר הגורם הלינארי $(x-1)$ מתאפס, מתקבלת נקודת האפס $(1;0)$.
כאשר הגורם הלינארי $(x-6)$ מתאפס, מתקבלת נקודת האפס $(6;0)$.
אם ננוע על הגרף משמאל לימין, נראה שבנקודת האפס השמאלית,
שהיא $(1;0)$, הפונקציה הופכת משלילית לחיובית, כלומר <u>משנה סימן</u> משני צדי נקודת האפס.
הסיבה לכך היא שהגורם המאפס $(x-1)$ מועלה בחזקת 1, ולכן משנה את סימנו משני צדי הנקודה. לעומת זאת, בנקודת האפס הימנית, שהיא $(6;0)$, הפונקציה <u>אינה משנה סימן</u> משני צדי הנקודה, והיא חיובית מימין וגם משמאל לנקודה. אפשר לבדוק זאת גם על ידי הצבת ערכי x משני צדי נקודת האפס.
הסיבה לכך היא שבפונקציה $f(x)=(x-1)(x-6)^2$, הגורם המאפס $(x-6)$ מועלה בפונקציה בחזקת 2 , שהיא חזקה זוגית, וביטוי כזה אינו משנה את סימנו משני צדי נקודת האפס.
מבחינה גרפית, ראינו שבמקרה כזה מתקבלת בנקודת האפס נקודת קיצון. כאן קיבלנו מינימום, אבל במקרים אחרים של מכפלה שאחד הגורמים שלה הוא $(x-6)^2$, יכול להתקבל גם מקסימום.

נזכיר שכאשר ננתח התנהגות של פולינומים, ניעזר גם בכלים הקודמים שהכרנו. לדוגמה:
(1) הצבת ערכי x משני צדי נקודת האפס, כדי למצוא תחומי חיוביות ושליליות.
(2) הכרת התנהגות של פונקציית פולינום כאשר $x\to\infty$ וכאשר $x\to-\infty$.

<u>**נסכם:**</u> במבט מהיר על משוואת הפונקציה $f(x)=(x-1)(x-6)^2$, אפשר להבין שעבור $x=1$ מתקבלת נקודת אפס שהיא "חיתוך", ועבור $x=6$ מתקבלת נקודת אפס שהיא נקודת מינימום או מקסימום. כמו כן, האיבר המוביל בפונקציה הוא x^3 , ואפשר להסיק מכך את התנהגות הפונקציה כאשר $x\to\infty$ וכאשר $x\to-\infty$. על פי ניתוח כזה אפשר כבר לשרטט גרף אפשרי של הפונקציה. ואפשר גם לבצע הצבות כדי להגדיל את הביטחון שלנו בניתוח הפונקציה.

תרגילים

1. נתונה הפונקציה $f(x)=x(x-8)^2$.

א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ב. קבעו עבור כל נקודת אפס שמצאתם בסעיף א', האם הפונקציה משנה את סימנה משני צדי הנקודה, או שהפונקציה אינה משנה את סימנה משני צדי הנקודה (ואז הנקודה היא נקודת קיצון של הפונקציה, וגרף הפונקציה משיק בנקודה זו לציר ה- x).

הדרכה: הציבו ערכי x משני צדי כל נקודת אפס, ובדקו את סימן הפונקציה.

ג. יוגב טוען שאפשר לפתור את סעיף ב' ללא הצבות, אלא על ידי התבוננות במשוואת הפונקציה, ובדיקה האם הגורם הלינארי מועלה בחזקה זוגית או בחזקה אי זוגית. האם יוגב צודק?

ד. בחרו את התשובה הנכונה על פי גישתו של יוגב:

(1) נקודת האפס $(0;0)$ היא נקודת חיתוך/השקה.

(2) נקודת האפס $(8;0)$ היא נקודת חיתוך/השקה.

2. נתונה הפונקציה $f(x)=-(x+2)(x+5)^2$.

א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ב. קבעו עבור כל נקודת אפס שמצאתם בסעיף א', האם הפונקציה משנה את סימנה משני צדי הנקודה, או שהפונקציה אינה משנה את סימנה משני צדי הנקודה (ואז הנקודה היא נקודת קיצון של הפונקציה, וגרף הפונקציה משיק בנקודה זו לציר ה- x).

פתרו בשתי דרכים, ובדקו שקיבלתם אותה התשובה בשתיהן.

דרך א': הציבו ערכי x משני צדי כל נקודת אפס, ובדקו את סימן הפונקציה.

דרך ב': התבוננו במשוואת הפונקציה, ובדקו עבור כל גורם לינארי, האם הוא מועלה בחזקה זוגית או בחזקה אי זוגית.

3. נתונה הפונקציה $f(x)=x(x+3)^2$.

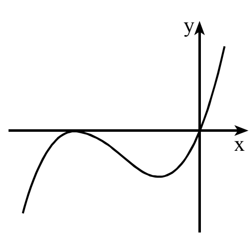
א. (1) מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

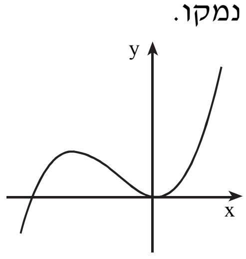
(2) קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x , או שהיא נקודת קיצון של הפונקציה (שהגרף משיק בה לציר ה- x).

פתרו **רק** על סמך התבוננות במשוואת הפונקציה. אין צורך בחישובים.

ב. לפניכם גרפים של שתי פונקציות.

היעזרו בתשובותיכם לסעיפים קודמים, וקבעו איזו פונקציה מהפונקציות הנתונות מתוארת על ידי הגרף הנתון, הימנית או השמאלית. נמקו.





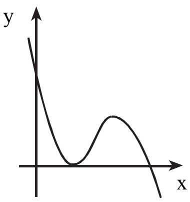
4. נתונה הפונקציה $f(x)=-(x-1)(x-7)^2$.

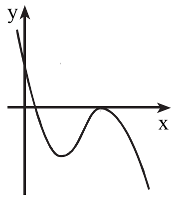
א. **(1)** מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

(2) קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x , או שהיא נקודת קיצון של הפונקציה (שבה גרף הפונקציה משיק לציר ה- x).

פתרו **רק** על סמך התבוננות במשוואת הפונקציה. אין צורך בחישובים.

ב. לפניכם גרפים של שתי פונקציות. היעזרו בתשובותיכם לסעיפים קודמים, וקבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה הנתונה. נמקו.





ג. פתרו את אי השוויונות הבאים : **(1)** $-(x-1)(x-7)^2 \le 0$. **(2)** $-(x-1)(x-7)^2 \ge 0$.

5. נתונה הפונקציה $f(x)=(x-1)(x+8)^4$.

א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ב. קבעו עבור כל נקודת אפס שמצאתם בסעיף א', האם הפונקציה משנה את סימנה משני צדי הנקודה, או שהפונקציה אינה משנה את סימנה משני צדי הנקודה (ואז הנקודה היא נקודת קיצון של הפונקציה, וגרף הפונקציה משיק בנקודה זו לציר ה- x).

פתרו **רק** על סמך התבוננות במשוואת הפונקציה. אין צורך בחישובים.

ג. הציבו ערכי x משני צדי נקודת ההשקה שמצאתם בסעיף ב', והראו שלפונקציה יש אותו סימן משני צדי הנקודה.

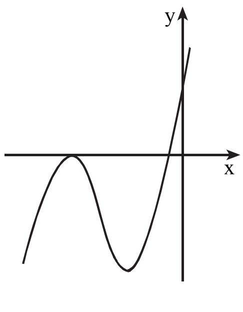
קבעו על סמך ההצבה האם נקודת האפס היא מינימום או מקסימום.

6. נתונות משוואות של שתי פונקציות : $f(x)=(x+1)(x+5)^4$, $g(x)=(x+1)^4(x+5)$.

א. **(1)** מצאו את נקודות האפס של כל פונקציה.

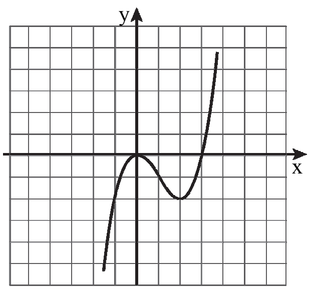
(2) קבעו עבור כל נקודת אפס שמצאתם בסעיף א',
האם היא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ,
או שהיא נקודת קיצון של הפונקציה
(שבה גרף הפונקציה משיק לציר ה- x).

ב. בשרטוט שמשמאל מתואר גרף של פונקציה.
היעזרו בתשובותיכם לסעיפים קודמים, וקבעו אילו מהפונקציות הנתונות מתוארת על ידי הגרף הנתון. נמקו.



ג. מצאו לאילו ערכי x מתקיים $f(x)<0$.

.7 בשרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה. כל משבצת היא יחידה אחת.



א. (1) מהם שיעורי נקודות האפס של הגרף הנתון?

(2) קבעו עבור כל נקודת אפס שבגרף הנתון,

האם היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- x ,

או שהיא נקודת קיצון של הפונקציה

(שבה גרף הפונקציה משיק לציר ה- x).

ב. נתונים שני ייצוגים אלגבריים :

$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-3)$, $g(x)=\frac{1}{2}x(x-3)$.

אחד הייצוגים מתאים לגרף הנתון.

קבעו איזה ייצוג אלגברי מתאים לגרף הנתון.

ג. ורד טוענת שעל פי התנהגות הגרף הנתון כאשר $x\to\infty$, וכאשר $x\to-\infty$,

אפשר לקבוע שהאיבר המוביל בייצוג האלגברי חייב להיות בעל מעריך חזקה אי זוגי,

והמקדם שלו בוודאות חיובי, ולכן אפשר להסיק שהייצוג האלגברי המתאים הוא של $f(x)$.

האם היא צודקת? נמקו.

ד. היעזרו בציור, וקבעו כמה פתרונות יש למשוואות הבאות :

(1) $\frac{1}{2}x^2(x-3)=1$. (2) $x^2(x-3)=-1$.

.8 בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של פונקציית פולינום.

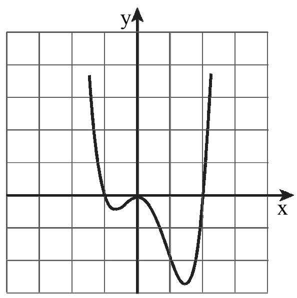
(1) מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

(2) קבעו עבור כל נקודת אפס שמצאתם בסעיף א', האם הפונקציה משנה את סימנה משני צדי הנקודה, או שהפונקציה אינה משנה את סימנה משני צדי הנקודה (ואז הנקודה היא נקודת קיצון של הפונקציה, וגרף הפונקציה משיק בנקודה זו לציר ה- x).

פתרו **רק** על סמך התבוננות במשוואת הפונקציה. אין צורך בחישובים.

א. $f(x)=x^2(x+4)(x-3)$. ב. $f(x)=(x-6)^2(x-4)^2(x-2)$ ג. $f(x)=x^2(x-2)^2$.

.9 בשרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה.



כל משבצת היא יחידה אחת.

נתונים שני ייצוגים אלגבריים :

$f(x)=x(x+1)(x-2)$, $g(x)=x^2(x+1)(x-2)$.

אחד הייצוגים מתאים לגרף הנתון.

א. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

ב. קבעו איזה ייצוג אלגברי מתאים לגרף הנתון. פתרו בשתי דרכים :

דרך א' : התייחסו להתנהגות הגרף הנתון כאשר $x\to\infty$, וכאשר $x\to-\infty$, ולמעלת כל אחד מהייצוגים האלגבריים הנתונים.

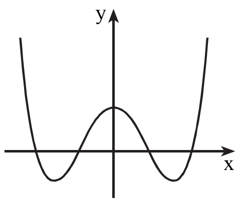
דרך ב' : שימו לב שהנקודה $(0;0)$ היא <u>נקודת השקה</u> ולא נקודת חיתוך.

ג. כמה פתרונות יש למשוואה $2\cdot g(x)+2=0$.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $g^2(x)+g(x)-2=0$.

10. נתונות שתי פונקציות: $f(x)=(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$, $g(x)=(x-2)^2(x-1)(x+1)(x+2)^2$.

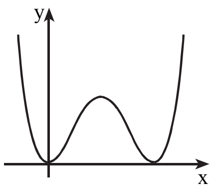
א. מצאו את נקודות האפס של כל פונקציה.
קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x , או שהיא נקודת קיצון (שבה גרף הפונקציה משיק לציר ה- x).



ב. לפניכם גרף של פונקציה.
היעזרו בתשובותיכם לסעיפים קודמים, וקבעו איזו פונקציה מהפונקציות הנתונות מתוארת על ידי הגרף הנתון. נמקו.
ג. כתבו את תחומי החיוביות ותחומי השליליות של הגרף הנתון.

11. נתונות משוואות של ארבע פונקציות: $f(x)=x^2(x-2)$, $g(x)=x(2-x)^2$

$h(x)=x^2(x-2)^2$, $i(x)=-x^2(x-2)^2$



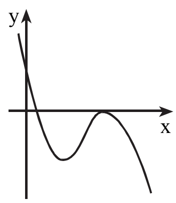
א. לכל ארבע הפונקציות יש אותן נקודות אפס.
מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.
ב. לפניכם גרף של פונקציה, המתאים לאחת המשוואות הנתונות.
התבוננו בגרף, וקבעו איזו משוואה הוא מתאר.

פתרו בשתי דרכים:
דרך א': התייחסו לכך שעל פי הגרף שתי נקודות האפס הן נקודות קיצון של הפונקציה (ושבהן הגרף משיק לציר ה- x).
דרך ב': התייחסו להתנהגות הגרף הנתון כאשר $x\to\infty$, וכאשר $x\to-\infty$, ולמעלה של כל אחד מהייצוגים האלגבריים הנתונים.

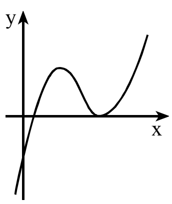
12. נתונות משוואות של ארבע פונקציות:
$f(x)=(x-1)(x-4)^2$, $g(x)=(x-1)^2(x-4)$,
$h(x)=-(x-1)^2(x-4)$, $i(x)=-(x-1)(x-4)^2$

א. לכל ארבע הפונקציות יש אותן נקודות אפס. מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.
לפניכם שני גרפים (1) ו-(2), המתאימים לשתיים מהפונקציות.

(1)



(2)



ב. התייחסו לכך שאחת מנקודות האפס היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- x ,
והאחרת היא נקודת קיצון של הפונקציה (נקודת השקה של הגרף עם ציר ה- x),
וקבעו אילו שתי משוואות יכולות להתאים לגרפים הנתונים.
ג. התייחסו להתנהגות הגרפים ומשוואות הפונקציות כאשר $x\to\infty$, וכאשר $x\to-\infty$,
והתאימו לכל אחד מהגרפים את משוואת הפונקציה אותה הוא מתאר.

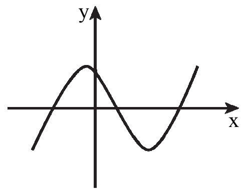
13. נתונות משוואות של שלוש פונקציות:

$f(x)=(x-4)^2(x-1)(x+2)^2$, $g(x)=(x-4)(x-1)(x+2)$, $h(x)=(x-4)(x-1)^2(x+2)$.

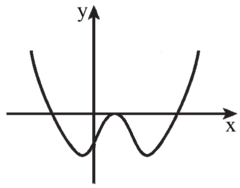
א. לכל שלוש הפונקציות יש אותן נקודות אפס. מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.

ב. לפניכם שלושה גרפים (1), (2) ו-(3). כל אחד מהם מתאים לאחת מהפונקציות.
קבעו עבור כל גרף לאיזו משוואת פונקציה הוא מתאים.

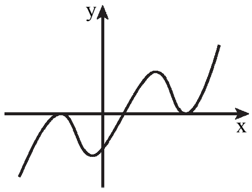
(1)



(2)



(3)



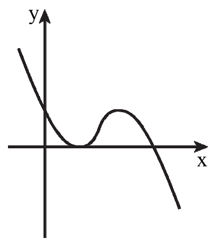
14. נתונות משוואות של ארבע פונקציות:

$f(x)=(x-6)^2(x-2)$, $g(x)=(x-6)^2(2-x)$, $h(x)=(x-6)(2-x)^2$, $i(x)=-(x-6)(x-2)^2$.

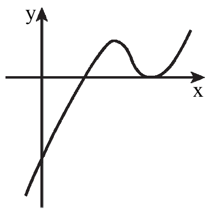
א. לכל ארבע הפונקציות יש אותן נקודות אפס. מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.

ב. לפניכם ארבעה גרפים (1), (2), (3) ו-(4). כל אחד מהם מתאים לאחת מהפונקציות.
קבעו עבור כל גרף לאיזו משוואת פונקציה הוא מתאים.

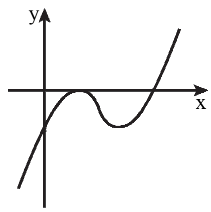
(1)



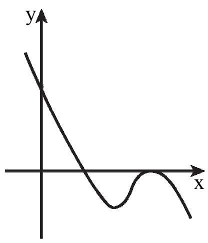
(2)



(3)



(4)

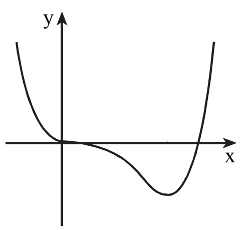


15. נתונות משוואות של שלוש פונקציות:

$f(x)=x(3x-2)^3$, $g(x)=x^3(3x-2)$, $h(x)=x^3(3x-2)^3$.

א. לכל שלוש הפונקציות יש אותן נקודות אפס.
מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.

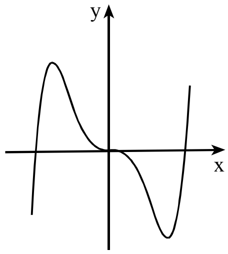
ב. לפניכם גרף של פונקציה.
הגרף מתאר את אחת הפונקציות הנתונות.
קבעו איזו פונקציה הוא מתאר.



16. נתונות משוואות של ארבע פונקציות:

$f(x) = x^2(x-2)(x+2)$, $g(x) = x(x-2)(x+2)$,

$h(x) = x^3(2-x)(2+x)$, $i(x) = x^3(x-2)(x+2)$



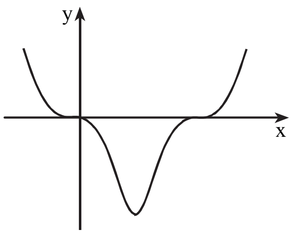
א. לכל ארבע הפונקציות יש אותן נקודות אפס.
מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.

ב. לפניכם גרף של פונקציה.
נקודות האפס של הגרף הן נקודות האפס שמצאתם בסעיף א'.
קבעו איזו משוואה מתאימה לגרף המתואר.
התייחסו לכך שבנקודת האפס שבראשית הצירים, הפונקציה מחליפה סימן, אבל נקודת החיתוך היא בצורת "מגלשה".

17. נתונות משוואות של ארבע פונקציות:

$f(x) = -x^3(x-6)^3$, $g(x) = x^3(x-6)^3$,

$h(x) = x^3(x-6)$, $i(x) = x(x-6)^3$



א. לכל ארבע הפונקציות יש אותן נקודות אפס.
מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.

ב. לפניכם גרף של פונקציה.
נקודות האפס של הגרף הן נקודות האפס שמצאתם בסעיף א'.
קבעו איזו משוואה מתאימה לגרף המתואר.
הדרכה: התייחסו לכך ששתיים מנקודות האפס של הגרף המתואר הן נקודות שבהן הפונקציה משנה את סימנה משני צדי הנקודה, וצורת הגרף בסביבת נקודת האפס היא צורה של "מגלשה".

18. נתונה הפונקציה $f(x) = (x-3)(x-7)(x+1)$.

א. אריאל טוען שהפונקציה היא ממעלה שלישית, ולכן אפשר לדעת ללא חישובים שיש לה לכל היותר שלוש נקודות אפס. האם הוא צודק? נמקו.

ב. (1) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
(2) קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- x , או נקודת השקה של הגרף עם ציר ה- x (נקודת קיצון של הפונקציה).

ג. (1) קבעו האם כאשר $x \to \infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.
(2) קבעו האם כאשר $x \to -\infty$, אז ערך הפונקציה $f(x)$ שואף ל- ∞ או ל- $-\infty$.

ד. שרטטו על סמך סעיפים קודמים גרף אפשרי של הפונקציה $f(x)$.

ה. על סמך מספר נקודות האפס של הפונקציה, נורית טוענת שיש לפונקציה לפחות שתי נקודות קיצון. האם היא צודקת? נמקו.

ו. נתון כי לפונקציה יש בדיוק שתי נקודות קיצון.
כתבו את התחום שבו נמצא שיעור ה- x של נקודת המינימום,
ואת התחום שבו נמצא שיעור ה- x של נקודת המקסימום.

19. נתונה הפונקציה $f(x)=-2x(x-6)^2$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. על סמך מעלת הפולינום, ינאי טוען שיש לפונקציה לכל היותר שלוש נקודות אפס. האם הוא צודק? נמקו.

ג. (1) מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

(2) קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- x , או נקודת קיצון של הפונקציה (שבה הגרף משיק לציר ה- x).

ד. על סמך מספר נקודות האפס של הפונקציה, רועי טוען שיש לפונקציה לפחות שתי נקודות קיצון. האם הוא צודק? נמקו.

ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה, אם נתון שיש לפונקציה שתי נקודות קיצון.

20. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{125}(x-1)(x-5)^4$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. (1) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(2) קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- x , או נקודת השקה של הגרף עם ציר ה- x (נקודת קיצון של הפונקציה).

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה, אם נתון שיש לפונקציה שתי נקודות קיצון.

תשובות:

1. א. $(0;0)$, $(8;0)$. ב. $(0;0)$ - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.

$(8;0)$ - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת השקה (קיצון).

ג. יוגב צודק. ד. $(0;0)$ היא נקודת חיתוך, $(8;0)$ היא נקודת השקה.

2. א. $(-2;0)$, $(-5;0)$. ב. $(-2;0)$ - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.

$(-5;0)$ - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת קיצון (השקה).

3. א. (1) $(0;0)$, $(-3;0)$. (2) $(0;0)$ נקודת חיתוך, $(-3;0)$ נקודת השקה (קיצון). ב. הימנית.

4. א. (1) $(1;0)$, $(7;0)$. (2) $(1;0)$ נקודת חיתוך, $(7;0)$ נקודת קיצון. ב. הגרף השמאלי.

ג. (1) $x \ge 1$. (2) $x \le 1$.

5. א. $(1;0)$, $(-8;0)$. ב. $(1;0)$ - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.

$(-8;0)$ - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת קיצון (השקה). ג. מקסימום.

6. א. (1) $(-1;0)$, $(-5;0)$. (2) $(-1;0)$ נקודת חיתוך, $(-5;0)$ נקודת קיצון. ב. $f(x)$.

ג. $-5<x<-1$ או $x<-5$.

7. א. (1) $(0;0)$, $(3;0)$. (2) $(0;0)$ נקודת קיצון, $(3;0)$ נקודת חיתוך. ב. $f(x)$.

ג. כן, ורד צודקת. ד. (1) פתרון אחד. (2) שלושה פתרונות.

8. א. (1) $(3;0)$, $(0;0)$, $(-4;0)$. (2) $(3;0)$ - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.

$(0;0)$ - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת השקה (קיצון).

$(-4;0)$ - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.

ב. (1) $(6;0)$, $(4;0)$, $(2;0)$. (2) $(6;0)$ - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת השקה (קיצון).

$(4;0)$ - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת השקה (קיצון).

$(2;0)$ - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.

ג. **(1)** $(0;0)$, $(2;0)$. **(2)** $(0;0)$ - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת השקה (קיצון).

$(2;0)$ - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת השקה (קיצון).

9. א. $f(x)$: $(2;0)$, $(0;0)$, $(-1;0)$. $g(x)$: $(2;0)$, $(0;0)$, $(-1;0)$. ב. $g(x)$.

ג. שני פתרונות. ד. ארבעה פתרונות.

10. א. $f(x)$: $(2;0)$ נקודת חיתוך, $(1;0)$ נקודת חיתוך, $(-1;0)$ נקודת חיתוך, $(-2;0)$ נקודת חיתוך.

$g(x)$: $(2;0)$ נקודת קיצון, $(1;0)$ נקודת חיתוך, $(-1;0)$ נקודת חיתוך, $(-2;0)$ נקודת קיצון.

ב. $f(x)$. ג. חיוביות: $x>2$ או $-1<x<1$ או $x<-2$, שליליות: $1<x<2$ או $-2<x<-1$.

11. א. $(0;0)$, $(2;0)$. ב. $h(x)$.

12. א. $(1;0)$, $(4;0)$. ב. $f(x)$, $i(x)$. ג. גרף **(1)** - $i(x)$, גרף **(2)** - $f(x)$.

13. א. $(4;0)$, $(1;0)$, $(-2;0)$. ב. גרף **(1)** - $g(x)$, גרף **(2)** - $h(x)$, גרף **(3)** - $f(x)$.

14. א. $(6;0)$, $(2;0)$. ב. גרף **(1)** - $i(x)$, גרף **(2)** - $f(x)$, גרף **(3)** - $h(x)$, גרף **(4)** - $g(x)$.

15. א. $(0;0)$, $\left(\frac{2}{3};0\right)$. ב. $g(x)$. **16.** א. $(2;0)$, $(0;0)$, $(-2;0)$. ב. $i(x)$. **17.** א. $(6;0)$, $(0;0)$. ב. $g(x)$.

18. א. אריאל צודק.

ב. **(1)** $(-1;0)$, $(3;0)$, $(7;0)$.

(2) $(-1;0)$ - נקודת חיתוך.

$(3;0)$ - נקודת חיתוך.

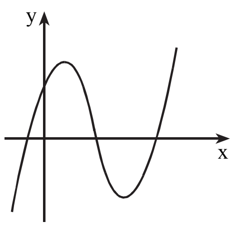
$(7;0)$ - נקודת חיתוך.

ג. **(1)** שואף ל- ∞ . **(2)** שואף ל- $-\infty$. ה. כן, נורית צודקת.

ו. שיעור ה- x של נקודת המינימום מקיים $3<x<7$.

שיעור ה- x של נקודת המקסימום מקיים $-1<x<3$.

ד.



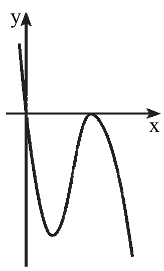
19. א. כל x . ב. כן, ינאי צודק.

ג. **(1)** $(0;0)$, $(6;0)$.

(2) $(0;0)$ - נקודת חיתוך, $(6;0)$ - נקודת קיצון (השקה).

ד. כן, רועי צודק.

ה.



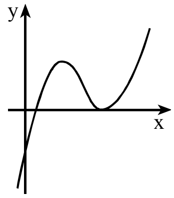
20. א. כל x .

ב. **(1)** $(1;0)$, $(5;0)$.

(2) $(1;0)$ - נקודת חיתוך,

$(5;0)$ - נקודת קיצון (השקה).

ג.



בניית משוואת פונקציית פולינום על פי נקודות האפס שלה

1. לפניכם פונקציית פולינום ממעלה שלישית: $f(x)=(x-1)(x-3)(x+9)$.

א. מהן נקודות האפס של הפונקציה?

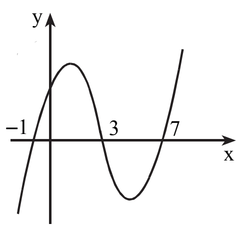
ב. כתבו משוואות של שתי פונקציות פולינום נוספות, שנקודות האפס שלהן זהות לנקודות האפס של הפונקציה הנתונה $f(x)$. כמה פונקציות כאלה קיימות? נמקו.

2. כתבו משוואה אפשרית לפונקציית פולינום:

א. שנקודות האפס שלה הן $(2;0)$, $(3;0)$ ו- $(8;0)$, והמקדם של האיבר עם מעריך החזקה הגדולה במשוואת הפונקציה הוא 1 . הציגו את הפונקציה כמכפלה.

ב. שנקודות האפס שלה הן $(2;0)$, $(3;0)$ ו- $(8;0)$, והמקדם של האיבר עם מעריך החזקה הגדולה במשוואת הפונקציה הוא -1 . הציגו את הפונקציה כמכפלה.

3. בציור שלפניכם מתואר גרף של פונקציית פולינום.



על הגרף מסומנים שיעורי ה- x של נקודות האפס של הפונקציה.

א. קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה:

(1) כאשר $x\to\infty$, אז $f(x)\to\infty$.

(2) כאשר $x\to\infty$, אז $f(x)\to-\infty$.

(3) כאשר $x\to-\infty$, אז $f(x)\to\infty$.

(4) כאשר $x\to-\infty$, אז $f(x)\to-\infty$.

ב. האם הפונקציה היא ממעלה זוגית או אי זוגית?
האם האיבר עם מעריך החזקה הגדולה במשוואת הפונקציה הוא חיובי או שלילי? נמקו.

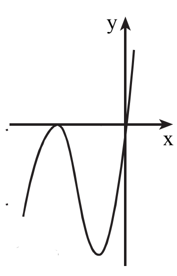
ג. כתבו משוואה אפשרית לגרף הפונקציה. כמה משוואות אפשריות כאלה קיימות?

4. נתונה פונקציית פולינום $f(x)$, שנקודות האפס שלה הן $(-1;0)$, $(-5;0)$ ו- $(-7;0)$.
נתון שהנקודה הימנית מבין שלוש הנקודות האפס הנ"ל היא נקודת השקה של הגרף עם ציר ה- x , ושתי הנקודות האחרות הן נקודות חיתוך של הגרף עם ציר ה- x .

א. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה $f(x)$, אם המקדם של האיבר המוביל שלה (המחובר עם מעריך החזקה הגדולה) הוא 2 .

ב. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה $f(x)$, אם המקדם של האיבר המוביל שלה (המחובר עם מעריך החזקה הגדולה) הוא -3 .

5. בציור שלפניכם מתואר גרף של פונקציה ממעלה שלישית.



הגרף חותך את ציר ה- x בראשית הצירים $(0;0)$,
ומשיק לציר ה- x בנקודה $(-3;0)$.

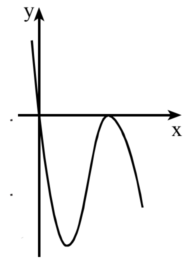
א. האם המקדם של x^3 במשוואת הפונקציה הוא חיובי או שלילי? נמקו.

ב. כתבו משוואה אפשרית לגרף הפונקציה.

ג. כמה משוואות אפשריות כאלה קיימות?

ד. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

6. בציור שלפניכם מתואר גרף של פונקציה ממעלה חמישית.
הגרף חותך את ציר ה- x בראשית הצירים $(0;0)$,
ומשיק לציר ה- x בנקודה $(5;0)$.
א. האם המקדם של x^5 במשוואת הפונקציה הוא חיובי או שלילי? נמקו.
ב. כתבו משוואה אפשרית לגרף הפונקציה.
ג. כמה משוואות אפשריות כאלה קיימות?



7. נתונה פונקציית פולינום $f(x)$, שנקודות האפס שלה הן $(2;0)$, $(-3;0)$ ו- $(6;0)$.
נתון שהנקודה הימנית מבין שלוש הנקודות האפס הנ״ל היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- x, ושתי הנקודות האחרות הן נקודות השקה של הגרף עם ציר ה- x.
א. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה $f(x)$, אם המקדם של האיבר המוביל שלה (המחובר עם מעריך החזקה הגדולה) הוא 4.
ב. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה $f(x)$, אם המקדם של האיבר המוביל שלה (המחובר עם מעריך החזקה הגדולה) הוא -2.

8. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה $f(x)$ ממעלה **שלישית** (קיימות אינסוף תשובות):
א. שנקודות האפס שלה הן $(3;0)$ ו- $(-4;0)$, אם נתון שכאשר $x \to \infty$, אז $f(x) \to \infty$.
ב. שנקודות האפס שלה הן $(3;0)$ ו- $(-4;0)$, אם נתון שכאשר $x \to \infty$, אז $f(x) \to -\infty$.

9. א. כתבו משוואה לפונקציית פולינום $f(x)$ ממעלה **רביעית**, שנקודות האפס שלה הן $(8;0)$, $(5;0)$, $(-1;0)$ ו- $(-4;0)$, אם נתון שהמקדם של x^4 במשוואת הפונקציה הוא חיובי, ושכל נקודות האפס של הפונקציה הן נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x. הציגו את משוואת הפונקציה כמכפלה.
ב. כתבו משוואה לפונקציית פולינום $f(x)$ ממעלה **שישית**, שנקודות האפס שלה הן $(8;0)$, $(5;0)$, $(-1;0)$ ו- $(-4;0)$, אם נתון שהמקדם של x^6 במשוואת הפונקציה הוא שלילי, שתי נקודות האפס השמאליות של הפונקציה הן נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x, ושתי נקודות האפס האחרות הן נקודות השקה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x. הציגו את משוואת הפונקציה כמכפלה.

10. כתבו משוואה לפונקציה $f(x)$ ממעלה **רביעית**:
א. שנקודות האפס היחידות שלה הן $(4;0)$ ו- $(2;0)$.
כתבו שלוש אפשרויות (קיימות אינסוף אפשרויות).
ב. שנקודת האפס היחידה שלה היא $(3;0)$.
כתבו שלוש אפשרויות (קיימות אינסוף אפשרויות).

תשובות:

1. א. $(1;0)$, $(3;0)$, $(-9;0)$.

ב. $y=(x-1)^2(x-3)(x+9)$, $y=2(x-1)(x-3)(x+9)$. קיימות אינסוף פונקציות כאלה.

2. א. $y=(x-2)(x-3)(x-8)$. ב. $y=-(x-2)(x-3)(x-8)$.

3. א. (1) נכונה. (2) לא נכונה. (3) לא נכונה. (4) נכונה. ב. ממעלה אי זוגית. המקדם הוא חיובי.

ג. $y=(x-7)(x-3)(x+1)$. קיימות אינסוף משוואות אפשריות.

4. א. $y=2(x+1)^2(x+5)(x+7)$. ב. $y=-3(x+1)^2(x+5)(x+7)$.

5. א. חיובי. ב. $y=x(x+3)^2$. ג. אינסוף אפשרויות.

ד. חיוביות: $x>0$, שליליות: $-3<x<0$ או $x<-3$.

6. א. שלילי. ב. $y=-x(x-5)^4$. ג. אינסוף אפשרויות.

7. א. $y=4(x-2)^2(x+3)^2(x-6)$. ב. $y=-2(x-2)^2(x+3)^2(x-6)$.

8. א. $y=(x-3)^2(x+4)$. ב. $y=-(x-3)^2(x+4)$.

9. א. $y=(x-8)(x-5)(x+1)(x+4)$. ב. $y=-(x-8)^2(x-5)^2(x+1)(x+4)$.

10. א. $y=(x-4)^2(x-2)^2$, $y=(x-4)^3(x-2)$, $y=(x-4)(x-2)^3$.

ב. $y=(x-3)^4$, $y=5(x-3)^4$, $y=-(x-3)^4$.

פונקציה זוגית, פונקציה אי-זוגית

פונקציה זוגית

הגדרה: פונקציה $f(x)$ נקראת פונקציה זוגית אם עבור כל x השייך לתחום ההגדרה שלה מתקיים: $f(-x) = f(x)$.

כאשר פונקציה היא זוגית, גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר ה- y.

כאשר פונקציה זוגית מוגדרת עבור $x = 0$, אז מתקבלת בנקודה זו נקודת קיצון.

פונקציה אי זוגית

הגדרה: פונקציה $f(x)$ נקראת פונקציה אי-זוגית אם עבור כל x השייך לתחום ההגדרה שלה מתקיים: $f(-x) = -f(x)$.

כאשר פונקציה היא אי-זוגית, גרף הפונקציה סימטרי ביחס לנקודת ראשית הצירים.

גרף של פונקציה אי-זוגית, המוגדרת עבור $x = 0$ <u>תמיד עובר דרך ראשית הצירים</u>,

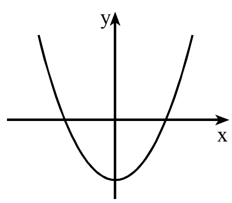
הערה: ייתכן שפונקציה לא תהיה זוגית ואף לא תהיה אי-זוגית.

<u>בדקו בעזרת תוכנת מחשב</u>, האם הפונקציה
היא פונקציה זוגית, או פונקציה אי זוגית.
<u>סרקו את הקוד המצורף</u>. מומלץ!

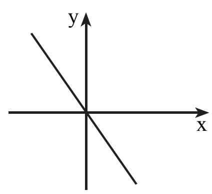
תרגילים

כתבו על פי התבוננות, אילו מהגרפים הבאים מתארים לדעתכם פונקציה זוגית, אילו מתארים פונקציה אי-זוגית ואילו מתארים פונקציה לא זוגית ולא אי-זוגית:

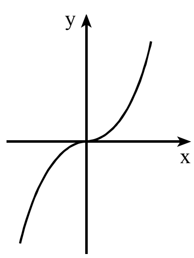
.1



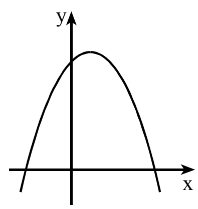
.2



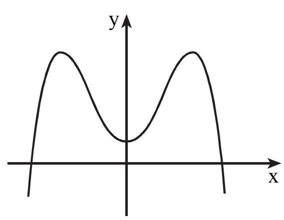
.3



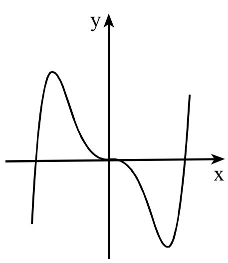
.4



.5

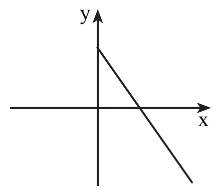


.6

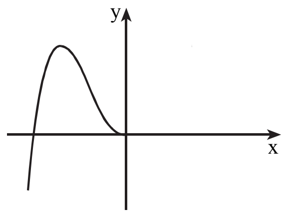


בתרגילים הבאים מתוארים חלקים מגרפים של פונקציות זוגיות. השלימו את הגרפים.

.7

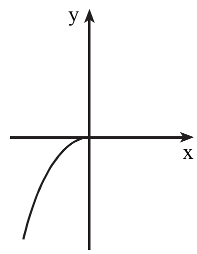


.8

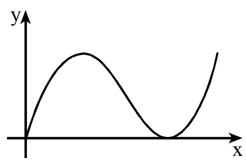


בתרגילים הבאים מתוארים חלקים מגרפים של פונקציות אי-זוגיות. השלימו את הגרפים.

.9



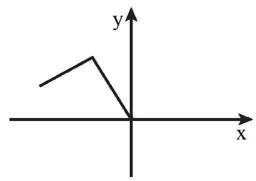
.10



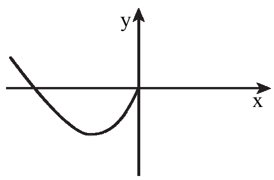
בכל אחד מהתרגילים הבאים מתואר חלק מגרף של פונקציה המוגדר לכל ערך של x .
השלימו את הגרף:
א. כך שיתאים לגרף של פונקציה זוגית.
ב. כך שיתאים לגרף של פונקציה אי זוגית.

אם המשימה אינה אפשרית – הסבירו מדוע.

.11

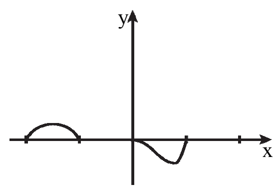


.12

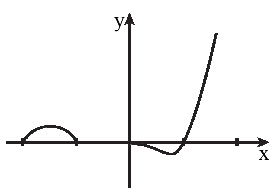


השלימו כל אחד מהגרפים שלפניכם כך שיתאים לפונקציה זוגית.
אם המשימה אינה אפשרית – הסבירו מדוע.

.13



.14



הוכיחו שהפונקציות הבאות הן פונקציות זוגיות. הדרכה: הראו ש- $f(-x)=f(x)$.

.15 $f(x)=x^2$ **.16** $f(x)=2x^2+7$ **.17** $f(x)=5$

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן פונקציות אי-זוגיות. הדרכה: הראו ש- $f(-x)=-f(x)$.

.18 $f(x)=x^3$ **.19** $f(x)=-3x$ **.20** $f(x)=2x^3-5x$

.21 א. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x^6-5x^2+8$ היא זוגית.
ב. איזה סוג של סימטריה יש לגרף הפונקציה?
ג. הסבירו ללא חישובים מדוע מתקיים $f(-3)=f(3)$.
ד. הנקודה $(-1;4)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$. כתבו על סמך תכונת הזוגיות של הפונקציה $f(x)$, שיעורי נקודה אחרת הנמצאת על גרף הפונקציה.
ה. ענו ללא חישובים: האם ייתכן שמתקיים $f(4)>f(-4)$?

.22 א. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x(x-2)(x+2)$ היא אי זוגית.
ב. איזה סוג של סימטריה יש לגרף הפונקציה?
ג. הסבירו ללא חישובים מדוע מתקיים $f(4)=-f(-4)$.
ד. בחרו את התשובה הנכונה: אם נקודה $(3;15)$ נמצאת על גרף הפונקציה, אז ערך הפונקציה עבור $x=-3$ הוא חיובי/שלילי/אפס/לא ניתן לדעת.
ה. מהו הערך של $f(a)+f(-a)$? אין צורך בחישובים.

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן לא זוגיות ולא אי-זוגיות (אפשר גם על ידי דוגמה נגדית/סותרת):

.23 $f(x)=5x+7$ **.24** $f(x)=x^2-8x+5$

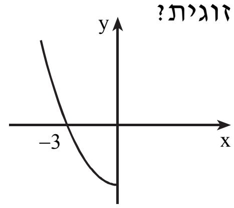
קבעו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא זוגית או אי-זוגית
או שהיא לא זוגית ולא אי-זוגית. נמקו את תשובתכם.

.25 $f(x)=9x+5$ **.26** $f(x)=x^4+3x^2$

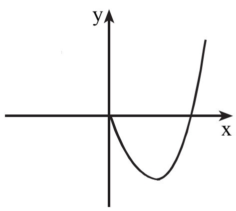
.27 הסבירו מדוע הפונקציה $f(x)=0$ היא זוגית וגם אי זוגית.

.28 א. יואב טוען שפונקציה אי זוגית המוגדרת עבור $x=0$ עוברת תמיד דרך ראשית הצירים.
האם הוא צודק? נמקו.
ב. $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית המוגדרת לכל x. מה הערך של $f(0)$?
ג. נתון ש- $g(x)$ היא פונקציה זוגית המוגדרת עבור $x=0$.
האם אפשר לחשב את הערך של $g(0)$? נמקו.

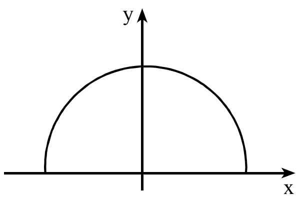
.29 לפניכם חלק מגרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x.
א. האם אפשר להשלים את הגרף, כך שיתאים לגרף של פונקציה אי זוגית?
ב. נתון שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
(1) כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
(2) כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
ג. נתון כי אחד הפתרונות של המשוואה $f(x)=-3$ הוא $x=-1$.
מצאו פתרון נוסף של המשוואה $f(x)=-3$. נמקו.



30. לפניכם חלק מגרף של פונקציה $f(x)$ אי זוגית, המוגדרת לכל ערך של x.
א. השלימו את הגרף.
ב. לפונקציה $f(x)$ נקודת מינימום פנימית שבה $x=3$.
מהו שיעור ה- x של נקודת המקסימום הפנימית?
ג. דרך כל אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה מעבירים ישר המקביל לציר ה- x. המרחק בין שני הישרים הוא 8. מהם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה?
ד. עפר טוען שהישר העובר דרך נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ עובר דרך ראשית הצירים. האם הוא צודק?
ה. האם נכון לטעון שכאשר יש לפונקציה אי זוגית נקודת קיצון, אז הישר העובר דרך נקודת הקיצון וראשית הצירים, עובר דרך נקודת קיצון אחרת של הפונקציה? נמקו.



31. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום $-10 \le x \le 10$.
א. נתון כי גרף הפונקציה עובר דרך הנקודות $(6;8)$ ו- $(-6;8)$.
האם ניתן להסיק שהפונקציה היא פונקציה זוגית?
ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
הישר $y=6$ חותך את גרף הפונקציה בנקודות A ו- B.
חשבו את הערך של $x_A + x_B$.



32. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית המוגדרת לכל ערך של x.
א. הפונקציה חיובית בתחום $x>0$. קבעו איזו טענה היא הנכונה:
(1) $f(x)$ חיובית בתחום $x<0$. (2) $f(x)$ שלילית בתחום $x<0$.
ב. הפונקציה עולה בתחום $2<x<4$. האם בתחום $-4<x<-2$ הפונקציה $f(x)$ עולה או יורדת?

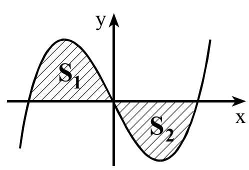
33. הפונקציה $f(x)=x^2+ax$ היא פונקציה זוגית. מצאו את הערך של a.

34. הפונקציה $f(x)=x^3+b$ היא פונקציה אי-זוגית.
א. מצאו את הערך של b.
ב. לפניכם טבלת ערכים חלקית עבור $f(x)$. השלימו את הערכים החסרים ללא חישובים.

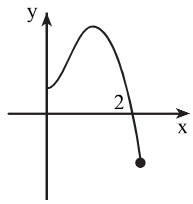
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27		-1			8	

35. א. הוכיחו שפונקציית החזקה $f(x)=x^n$ היא זוגית, עבור n זוגי.
ב. הוכיחו שפונקציית החזקה $f(x)=x^n$ היא אי זוגית, עבור n אי זוגי.

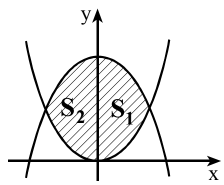
36. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^3-4x$.
א. הוכיחו שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית.
ב. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.
ג. התבוננו בשרטוט, והסבירו מדוע השטח (S_1) שווה לשטח (S_2).



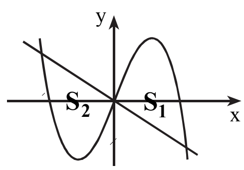
.37 נתונה פונקציה $f(x)$ שתחום ההגדרה שלה הוא $-3 \le x \le 3$.
לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x \le 3$.
א. יואב טוען כי על פי הגרף הנתון, לא ייתכן שהפונקציה $f(x)$
היא פונקציה אי- זוגית. האם יואב צודק? נמקו.
ב. הניחו כי נתון ש- $f(x)$ היא פונקציה זוגית בתחום $-3 \le x \le 3$.
(1) העתיקו את השרטוט למחברתכם,
והשלימו את הגרף של $f(x)$ לכל התחום $-3 \le x \le 3$.
(2) הסבירו מדוע השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה וציר ה- x ברביע הראשון,
שווה לשטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה וציר ה- x ברביע השני.



.38 לפניכם גרפים של הפונקציות $f(x) = x^2$, $g(x) = 18 - x^2$.
א. הוכיחו ששתי הפונקציות הן פונקציות זוגיות.
ב. האם השטח (S_1) , המוגבל על ידי הגרפים
של שתי הפונקציות ברביע הראשון,
שווה לשטח (S_2) , המוגבל על ידי הגרפים
של שתי הפונקציות ברביע השני? נמקו.



.39 לפניכם הגרפים של שתי פונקציות : $f(x) = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{2}{5}x$ ו- $g(x) = -\frac{1}{5}x$.
א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך בין הגרפים
של שתי הפונקציות.
ב. היעזרו בשרטוט וקבעו לאילו ערכי x :
(1) מתקיים $f(x) > g(x)$. (2) מתקיים $-\frac{1}{15}x^3 + \frac{2}{5}x < -\frac{1}{5}x$.
ג. הוכיחו שכל אחת משתי הפונקציות היא פונקציה אי זוגית.
ד. הסבירו מדוע כל השטח המוגבל על ידי שני הגרפים בתחום שמימין לראשית הצירים,
שווה לכל השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות בתחום שמשמאל לראשית.



.40 נתונות שתי פונקציות זוגיות $f(x)$ ו- $g(x)$. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x) = f(x) + g(x)$.
הוכיחו : $h(x)$ היא פונקציה זוגית.

.41 הוכיחו : מכפלה של שתי פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית.
הדרכה : סמנו ב- $f(x)$ ו- $g(x)$ את שתי הפונקציות הנתונות,
והוכיחו שהמכפלה שלהן $h(x)$ היא פונקציה זוגית.

.42 הוכיחו : מכפלה של שתי פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית. הדרכה : סמנו ב- $f(x)$ ו- $g(x)$
את שתי הפונקציות הנתונות, והוכיחו שהמכפלה שלהן $h(x)$ היא פונקציה זוגית.

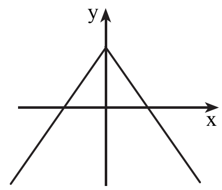
.43 הוכיחו : מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

תשובות:

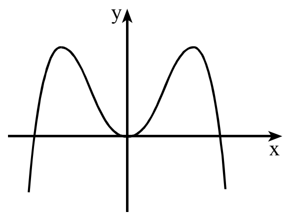
1. זוגית. **2.** אי-זוגית. **3.** אי-זוגית. **4.** לא זוגית ולא אי-זוגית.

5. זוגית. **6.** אי-זוגית.

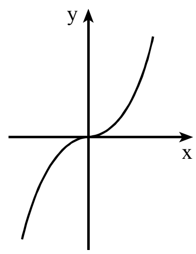
7.



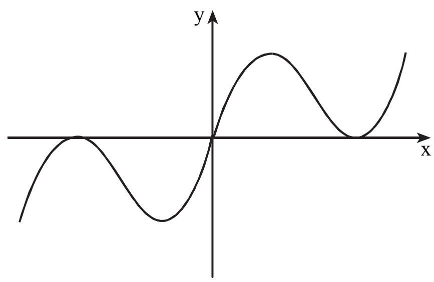
8.



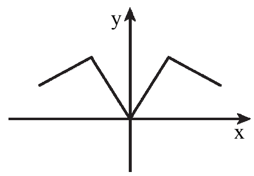
9.



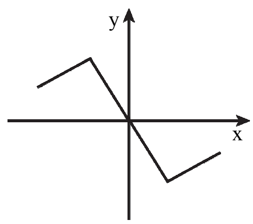
10.



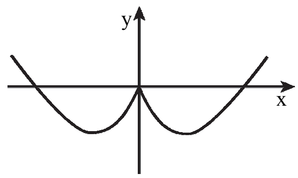
11. א.



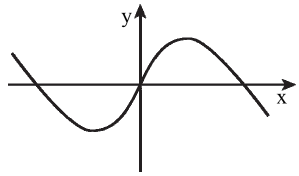
ב.



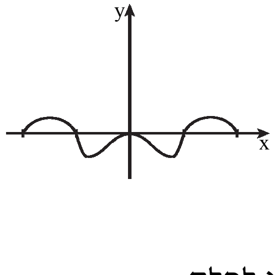
12. א.



ב.



13. המשימה אפשרית. ניתן לקחת כל חלק בגרף הנמצא מימין לציר ה- y ,
או משמאל לציר ה- y ,
ולבצע שיקוף שלו לעומת ציר ה- y .



14. המשימה אינה אפשרית. חלק הגרף בתחום $1 < x < 2$ אינו סימטרי לחלק הגרף שבתחום $-2 < x < -1$. אם ניקח את חלק הגרף שבתחום $1 < x < 2$ ונבצע שיקוף שלו לעומת ציר ה- y , הגרף שיתקבל לא יתלכד עם חלק הגרף הנתון בתחום $-2 < x < -1$.

21. ב. סימטריה סביב ציר ה- y . ד. $(1;4)$. ה. לא.

22. ב. סימטריה סביב ראשית הצירים. ד. שלילי. ה. 0 .

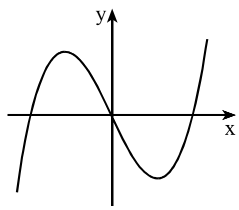
25. לא זוגית ולא אי-זוגית. **26.** זוגית.

28. א. כן. ב. $f(0)=0$. ג. לא.

29. א. אי אפשר. ב. **(1)** עלייה: $x>0$, ירידה: $x<0$.
(2) חיוביות: $x>3$ או $x<-3$, שליליות: $-3<x<3$. ג. $x=1$.

30. ב. $x=-3$.
ג. $(-3;4)$ מקסימום, $(3;-4)$ מינימום.
ד. עפר צודק.
ה. כן, נכון לטעון זאת.

א.



31. א. לא. ב. $x_A+x_B=0$.

32. א. **(1)**. ב. יורדת. **33.** $a=0$.

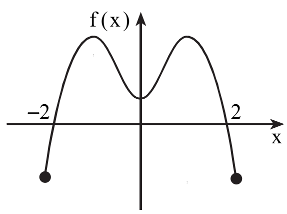
34. א. $b=0$.
ב. לפניכם טבלת ערכים חלקית עבור $f(x)$. השלימו את הערכים החסרים ללא חישובים.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27

36. ב. $(2;0)$, $(0;0)$, $(-2;0)$.

37. א. כן, יואב צודק. פונקציה אי זוגית, המוגדרת עבור $x=0$, עוברת תמיד דרך ראשית הצירים, והגרף הנתון של $f(x)$ מוגדר עבור $x=0$, אך לא עובר בראשית.

ב. **(1)**



38. ב. כן.

39. א. $(0;0)$, $(3;-\frac{3}{5})$, $(-3;\frac{3}{5})$. ב. **(1)** $0<x<3$ או $x<-3$. **(2)** $x>3$ או $-3<x<0$.

קדם אנליזה - טרנספורמציות של פונקציות

בפרק זה נעסוק בטרנספורמציות (שינויי צורה) של פונקציות.
נדון בין היתר בהזזה אופקית ואנכית של גרף של פונקציה, במתיחה וכיווץ אנכיים של גרף של פונקציה, בשיקוף גרף של פונקציה ביחס לציר ה- x או ציר ה- y, ובערך מוחלט של פונקציה.

הפונקציות העיקריות עליהן נבצע טרנספורמציות הן פונקציה ממעלה ראשונה (קו ישר), פונקציה ממעלה שנייה (פרבולה), פונקציות ממעלה שלישית ומעלה (עליהן כבר למדנו) ופונקציות שהתבנית האלגברית שלהן לא נתונה, אך נתון הגרף שלהן.
חלק מהנושאים נלמדו בחטיבת הביניים. נתחיל מהזזה אנכית של גרף של פונקציה.

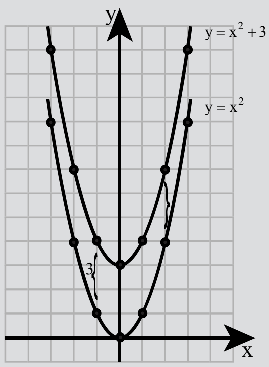
הזזה אנכית של גרף של פונקציה

נתונה פונקציה $y=f(x)$. נבדוק את הקשר בין גרף הפונקציה $y=f(x)$ לבין גרף הפונקציה $y=f(x)+k$, כאשר k הוא מספר קבוע.

נניח כי נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$. נגדיר פונקציה חדשה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x)+3$.
כלומר משוואת הפונקציה החדשה היא $g(x)=x^2+3$.

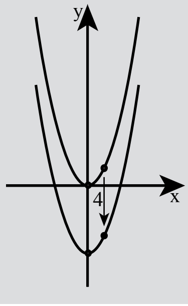
נחקור את הקשר בין הפונקציה $g(x)=x^2+3$ לפונקציה $f(x)=x^2$.
נבנה טבלת ערכים. נציב במשוואות שתי הפונקציות את ערכי ה- x שבטבלה, ונמצא עבור כל x את ערך ה- y המתאים לו.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)=x^2+3$	12	7	4	3	4	7	12



ניתן לראות שעבור **כל** x שנציב בשתי המשוואות, ערך ה- y המתקבל בפונקציה $g(x)=x^2+3$ גדול ב- 3 מערך ה- y המתקבל בפונקציה $f(x)=x^2$. **לכל** נקודה על הגרף של $y=x^2$, "מתאימה" נקודה על הגרף $y=x^2+3$, הנמצאת 3 יחידות מעליה, כלומר יש לה אותו שיעור x, אך שיעור ה- y שלה גדול ב- 3.
המסקנה היא שגרף הפונקציה $g(x)=x^2+3$ מתקבל על ידי **הזזה** ב- 3 יחידות כלפי מעלה של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$.

מסקנה: אם נתון גרף של פונקציה $f(x)$, אז כדי לשרטט את גרף הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x)+3$, אין צורך בטבלת ערכים.
אפשר לקחת את הגרף של $f(x)$ ולהזיז אותו 3 יחידות **כלפי מעלה**.



נתבונן בדוגמה נוספת. נגדיר פונקציה $h(x)$,
המקיימת $h(x)=f(x)-4$. כלומר משוואתה $h(x)=x^2-4$.
כדי לשרטט את הגרף של $h(x)$, אין צורך בטבלת ערכים.
אפשר לקחת את גרף הפונקציה $f(x)$,
ולהזיז אותו 4 יחידות **כלפי מטה**.
הגרף המתקבל מתואר בציור משמאל.

בדוגמאות הנ"ל הגרף הנתון "הוזז" כלפי מעלה או כלפי מטה (הזזה במקביל לציר ה- y או במאונך לציר ה- x). **הזזה של גרף כלפי מעלה או מטה נקראת "הזזה אנכית".**

נסכם:

הגרף של הפונקציה $g(x)=f(x)+k$ מתקבל מהגרף של הפונקציה $f(x)$ על ידי הזזה אנכית (במקביל לציר ה- y) של כל נקודה בשיעור קבוע k.

אם $k>0$, אז ההזזה היא כלפי מעלה.

לדוגמה: גרף הפונקציה $g(x)=f(x)+5$ מתקבל על ידי **הזזה** ב- 5 יחידות כלפי **מעלה** של גרף הפונקציה $f(x)$.

לעומת זאת, אם $k<0$, אז ההזזה היא כלפי מטה.

לדוגמה: גרף הפונקציה $h(x)=f(x)-2$ מתקבל על ידי **הזזה** ב- 2 יחידות כלפי **מטה** של גרף הפונקציה $f(x)$.

בהזזה אנכית, כל נקודה $(x_1;y_1)$, הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, **"מועתקת"** לגרף הפונקציה $g(x)=f(x)+k$, כך ששיעור ה- x שלה אינו משתנה, אך שיעור ה- y גדל או קטן על פי הערך של k. הנקודה המתקבלת על הגרף של $g(x)$ היא $(x_1;y_1+k)$.

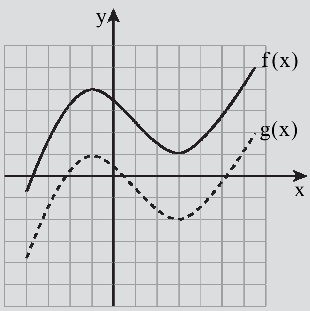
נדגיש כי הזזה אנכית **__אינה משנה את צורת הגרף__**, אלא רק את מיקומו במערכת הצירים. **שני הגרפים זהים בצורתם**, אך אחד מהם "הוזז" במערכת הצירים כלפי מעלה, או מטה, לעומת השני.

נרשום שתי דוגמאות אלגבריות נוספות:

(1) אם מזיזים את גרף הפונקציה $y=-x^2+4x$ ב- 6 יחידות כלפי **מעלה**,
משוואת הגרף המתקבל היא $y=-x^2+4x+6$.

(2) אם מזיזים את גרף הפונקציה $y=x^3+1$ ב- 8 יחידות כלפי **מטה**,
משוואת הגרף המתקבל היא $y=x^3+1-8$, כלומר $y=x^3-7$.

דוגמה:



לפניכם גרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
הגרפים מתוארים במערכת צירים,
שבה כל משבצת היא יחידה אחת.
נתון: גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל על ידי
הזזה אנכית של גרף הפונקציה $f(x)$.

א. היעזרו בציור וקבעו בכמה יחידות, ולאיזה כיוון יש להזיז את הגרף של $f(x)$ כדי לקבל את הגרף של $g(x)$.

ב. הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.

ג. נתון: $f(12)=16$. חשבו את $g(12)$.

ד. קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה:

(1) הזזה אנכית אינה משנה את נקודות הקיצון של פונקציה.

(2) הזזה אנכית אינה משנה את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של פונקציה.

פתרון:

א. גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל על ידי הזזה אנכית של הגרף של $f(x)$. כדי לדעת מהי ההזזה נחפש שתי נקודות שיש להן אותו x: אחת על הגרף של $f(x)$, ושנייה על הגרף של $g(x)$. על פי ההפרש בין שיעורי ה- y של שתי הנקודות, נדע מהי ההזזה.

אפשר לראות בציור שהנקודה $(3;1)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.
לאחר ההזזה, נקודה זו "מועתקת" לנקודה $(3;-2)$, הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$, ונמצאת 3 יחידות מתחת לנקודה $(3;1)$. לכן גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל על ידי **הזזה** ב- 3 יחידות כלפי **מטה** של גרף הפונקציה $f(x)$.
באופן דומה, הנקודה $(-1;4)$, שעל הגרף של $f(x)$, "מועתקת" לנקודה $(-1;1)$, שעל $g(x)$, וגם כאן רואים שההזזה היא ב- 3 יחידות כלפי **מטה.**

ב. בהתאם לסעיף א׳ נקבל: $g(x)=f(x)-3$.

ג. ראינו שעבור כל x מתקיים $g(x)=f(x)-3$. נציב $x=12$. נקבל $g(12)=f(12)-3$.
נציב את הנתון $f(12)=16$. נקבל $g(12)=16-3$, כלומר $g(12)=13$.

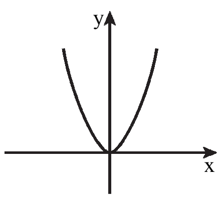
ד. בהזזה אנכית, כל נקודה $(x_1;y_1)$, הנמצאת על גרף הפונקציה, "מועתקת" כך ששיעור ה- x שלה אינו משתנה, אך שיעור ה- y גדל או קטן על פי ההזזה. לכן, הזזה כזו **אינה** משנה את שיעור ה- x של נקודות הקיצון, אך **כן** משנה את שיעור ה- y שלהן.
(1) הטענה אינה נכונה, מכיוון שהזזה אנכית משנה את שיעור ה- y של נקודות הקיצון של פונקציה.
(2) הטענה נכונה, מכיוון שתחומי העלייה והירידה של פונקציה תלויים בשיעורי ה- x של נקודות הקיצון (והם אינם משתנים).

תרגילים

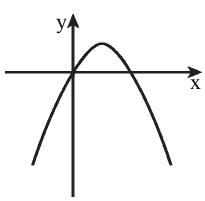
1. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$.
מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x)+2$.
א. רשמו את $g(x)$ כפונקציה ריבועית באמצעות x.
ב. השלימו את המספרים החסרים בשורה השלישית על פי המספרים שבשורה השנייה.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)=f(x)+2$							

2. לפניכם גרף הפונקציה הריבועית $f(x)=x^4$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+4$.
א. רשמו את $g(x)$ כפונקציה ריבועית באמצעות x.
ב. השלימו: כדי לשרטט את גרף הפונקציה $g(x)$, ניקח את גרף הפונקציה $f(x)$, ונזיז אותו 4 יחידות כלפי ‎---‎.
ג. הוסיפו לשרטוט את הגרף של $g(x)$.

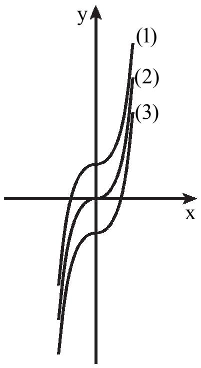


3. לפניכם גרף הפונקציה הריבועית $f(x)=-x^2+2x$.
מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)$ ב- 5 יחידות כלפי מטה, ומקבלים את גרף הפונקציה $g(x)$.
א. רשמו את $g(x)$ כפונקציה באמצעות x.
ב. הוסיפו לשרטוט את הגרף של $g(x)$.
ג. הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.

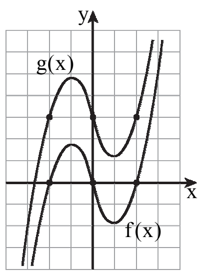


4. נתונה פונקציה שמשוואתה $f(x)=x^3-4x+1$. מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)$ (הזזה אנכית),
ומקבלים את גרף הפונקציה $h(x)$, שמשוואתה $h(x)=x^3-4x-9$.
א. מהי ההזזה, ולאיזה כיוון?
ב. הביעו את $h(x)$ באמצעות $f(x)$.

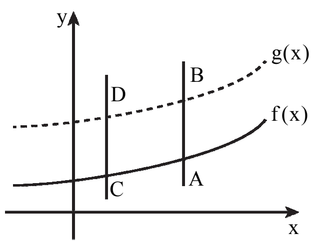
5. נתונות משוואות של שלוש פונקציות : $f(x)=x^5$, $g(x)=x^5-1$, $h(x)=x^5+1$.
לפניכם שלושה גרפים : (1), (2) ו-(3).
א. התאימו כל גרף לאחת המשוואות הנתונות.
ב. נועם מעוניין להזיז את הגרף של $g(x)$,
כדי לקבל את הגרף של $h(x)$.
האם נכון לו להזיז את הגרף של $f(x)$
במקביל לציר ה- y או במאונך לציר ה- y ?
בכמה יחידות עליו להזיז את הגרף?
ג. נסמן : $k(x)=x^5+m$. חשבו את ערך הפרמטר m ,
אם הנקודה $(2;13)$ נמצאת על הגרף של $k(x)$.



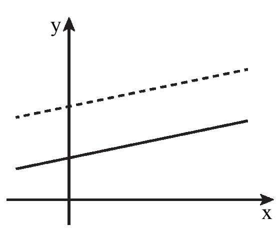
6. לפניכם גרפים של שתי פונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
כל משבצת היא יחידה אחת. נתון : הגרף של $g(x)$
מתקבל על ידי הזזה אנכית של הגרף של $f(x)$.
א. נסמן : $g(x)=f(x)+k$. מהו הערך של k ?
ב. נתון : $f(18)=30$. חשבו את $g(18)$.
ג. גיא טוען שהזזה אנכית אינה משנה את צורת הגרף,
אלא רק את מיקומו במערכת הצירים. האם הוא צודק?



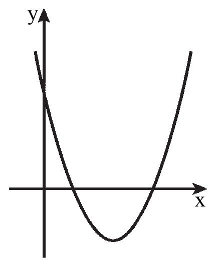
7. נתונה פונקציה $f(x)$. מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)$
ב- 8 יחידות כלפי מעלה (הזזה אנכית),
ומקבלים את גרף הפונקציה $g(x)$.
א. הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.
ב. הביעו את $f(x)$ באמצעות $g(x)$.
ג. ישר המקביל לציר ה- y חותך את הפונקציות
$f(x)$ ו- $g(x)$, בהתאמה, בנקודות A ו- B .
ישר אחר המקביל לציר ה- y , חותך את הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$,
בהתאמה, בנקודות C ו- D . הסבירו מדוע המרובע $ABDC$ הוא מקבילית.



8. לפניכם קו ישר המתאר פונקציה קווית $f(x)$.
א. מזיזים את הישר $f(x)$ ב- 4 יחידות כלפי מעלה,
ומקבלים את גרף הישר המקווקו $g(x)$.
הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.
ב. נתון : $g(x)=\frac{1}{2}x+7$. מהי משוואת הפונקציה $f(x)$?
ג. נסמן : $h(x)=f(x)+m$. נתון : $h(6)=9$.
מצאו את ערך הפרמטר m .



.9 לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$.
נקודת המינימום של הפונקציה היא $(4;-3)$.
נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y היא $(0;5)$.

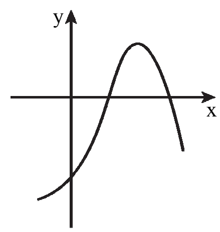


א. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+1$.

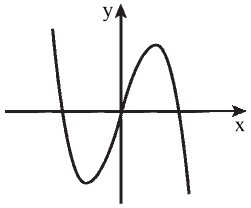
ב. מהי נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$?
ג. מהי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- y ?
ד. שרטטו **באותה מערכת צירים** סקיצה של הפונקציה $f(x)$
וסקיצה של הפונקציה $g(x)$.
ה. כמה נקודות אפס יש לפונקציה $g(x)$? אין צורך למצוא את שיעורי הנקודות (אם ישנן).
ו. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
ז. יואב טוען שהזזה אנכית אינה משנה את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
האם הוא צודק?
ח. האם גרף הפונקציה $h(x)=1+f(x)$, זהה לגרף הפונקציה $g(x)=f(x)+1$?
ענו ללא חישובים.
ט. לגרף הפונקציה $i(x)=f(x)+k$ יש נקודת מינימום הנמצאת על ציר ה- x . מהו הערך של k ?

.10 לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$. נקודת המקסימום של הפונקציה היא $(5;4)$.
נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y היא $(0;-6)$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)-4$.



א. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?
ב. מהי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- y ?
ג. שרטטו **באותה מערכת צירים** סקיצה של הפונקציה $f(x)$
וסקיצה של הפונקציה $g(x)$.
ד. קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה:
(1) הזזה אנכית משנה את שיעור ה- x של נקודת המקסימום.
(2) הזזה אנכית משנה את שיעור ה- y של נקודת המקסימום.
ה. מגדירים פונקציה $h(x)$, המקיימת $h(x)=f(x)+c$.
(1) רשמו ערך של c , כך שהפונקציה $h(x)$ תהיה שלילית עבור כל ערך של x .
כמה אפשרויות תוכלו לרשום?
(2) מהו תחום הערכים של c , כך שהפונקציה $h(x)$ תהיה שלילית עבור כל ערך של x ?

.11 לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$ ממעלה שלישית, שנקודות הקיצון
שלה הן: $(2;4)$ מקסימום, $(-2;-4)$ מינימום. גרף הפונקציה $f(x)$
הוזז למעלה ב- 2 יחידות, והתקבלה הפונקציה $h(x)$.



א. בטאו את הפונקציה $h(x)$ באמצעות $f(x)$.
ב. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום של $h(x)$.
ג. הוסיפו למערכת הצירים את הגרף של הפונקציה $h(x)$.
ד. כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $h(x)$ עם כל אחד מהישרים
הבאים: (1) הישר $y=3$. (2) הישר $y=6$. (3) הישר $y=-20$.
ה. עידו טוען שהמרחק בין נקודת המינימום לנקודת החיתוך עם ציר ה- y
אינו משתנה בעקבות ההזזה האנכית. האם הוא צודק?

12. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, שנקודות הקיצון שלה הן: $(2;4)$ מקסימום, $(4;0)$ מינימום.

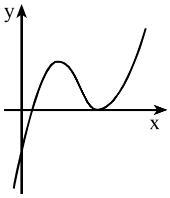
א. כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=2$?

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+k$.

מצאו לאילו ערכים של k, יש לגרף הפונקציה $g(x)$:

(1) נקודת מקסימום ששיעור ה- y שלה הוא 7 .

(2) נקודת מקסימום ששיעור ה- y שלה נמצא מעל הישר $y=7$.



ג. עבור הערך של k שמצאתם בתת סעיף ב**(1)**,

כתבו את שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$.

ד. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=f(x)+m$.

מצאו לאילו ערכים של m, נקודת קיצון של הפונקציה $h(x)$ נמצאת על הישר $y=3$.

ה. כמה פתרונות יש למשוואה $[f(x)]^2=9$?

13. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$.

נקודות הקיצון של הפונקציה הן: $(3;-49)$ מינימום, $(0;32)$ מקסימום, $(-3;-49)$ מינימום.

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים הן: $(0;32)$, $(4;0)$, $(-4;0)$, $(\sqrt{2};0)$, $(-\sqrt{2};0)$.

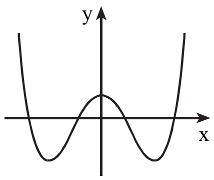
א. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+k$.

מצאו לאיזה ערך של k :

(1) לפונקציה $g(x)$ יש מקסימום על ציר ה- x .

(2) לפונקציה $g(x)$ יש מינימום על ציר ה- x .



ג. מבין שני הערכים של k שמצאתם בסעיף א',

בחרו בערך הקטן של k, ומצאו כמה פתרונות יש למשוואה $g(x)+60=0$.

ד. דניאל טוען שהזזה אנכית אינה משנה את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של פונקציה. האם הוא צודק?

14. בציור שלפניכם מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.

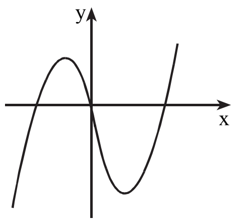
נקודות הקיצון של הפונקציה (ראו ציור)

הן: $(4;-12)$ מינימום, $(-1;5)$ מקסימום.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(x)+k$.

המרחק בין נקודת המקסימום של $f(x)$

לנקודת המקסימום של $g(x)$ הוא 3 .



א. מצאו את נקודת המקסימום של הפונקציה $g(x)$. רשמו את שתי האפשרויות.

ב. מצאו את נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$. כתבו את שתי האפשרויות.

תשובות:

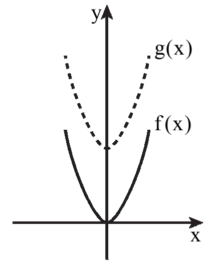
1. א. $g(x)=x^2+2$.

ב.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)=f(x)+2=x^2+2$	11	6	3	2	3	6	11

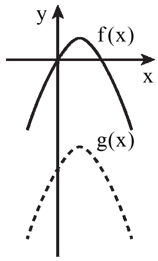
2. א. $g(x)=x^4+4$. ב. כלפי מעלה.

ג.



3. א. $g(x)=-x^2+2x-5$. ג. $g(x)=f(x)-5$.

ב.



4. א. 10 יחידות כלפי מטה. ב. $h(x)=f(x)-10$.

5. א. (1) - $h(x)$, (2) - $f(x)$, (3) - $g(x)$. ב. 2 יחידות במקביל לציר ה- y , כלפי מעלה. ג. $m=-19$.

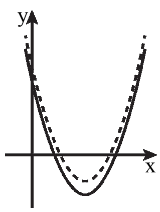
6. א. $k=3$. ב. $g(18)=33$. ג. גיא צודק.

7. א. $g(x)=f(x)+8$. ב. $f(x)=g(x)-8$. ג. הקטעים AB ו- CD שווים זה לזה ומקבילים זה לזה.

8. א. $g(x)=f(x)+4$. ב. $f(x)=\frac{1}{2}x+3$. ג. $m=3$.

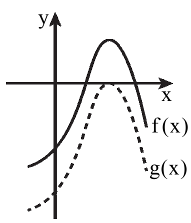
9. א. עלייה: $x>4$, ירידה: $x<4$.
ב. $(4;-2)$ מינימום.
ג. $(0;6)$. ה. שתי נקודות אפס.
ו. עלייה: $x>4$, ירידה: $x<4$.
ז. יואב צודק. ח. כן. ט. $k=3$.

ד.



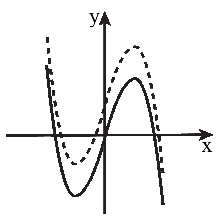
10. א. $(5;0)$ מקסימום.
ב. $(0;-10)$.
ד. (1) הטענה אינה נכונה.
(2) הטענה נכונה.
ה. (1) $c=-7$. ישנן אינסוף אפשרויות.
(2) $c<-4$.

ג.



11. א. $h(x)=f(x)+2$.
ב. $(2;6)$ מקסימום, $(-2;-2)$ מינימום.
ד. (1) שלוש נקודות. (2) שתי נקודות.
(3) נקודה אחת.
ה. כן, עידו צודק.

ג.



12. א. שלושה פתרונות. ב. (1) $k=3$. (2) $k>3$. ג. $(4;3)$ מינימום.
ד. $m=3$. או $m=-1$. ה. ארבעה פתרונות.

13. א. חיוביות: $x>4$ או $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ או $x<-4$. שליליות: $\sqrt{2}<x<4$ או $-4<x<-\sqrt{2}$.
ב. (1) $k=-32$. (2) $k=49$. ג. ארבעה פתרונות. ד. דניאל אינו צודק.

14. א. $(-1;8)$ מקסימום, $(-1;2)$ מקסימום. ב. $(4;-9)$ מינימום, $(4;-15)$ מינימום.

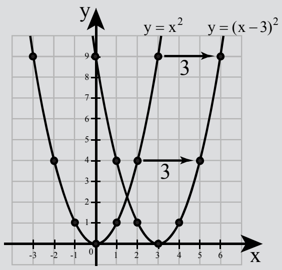
הזזה אופקית של גרף של פונקציה

נעסוק עכשיו ב**הזזה אופקית** של גרף של פונקציה.

נתונה פונקציה $y=f(x)$. נגדיר p מספר קבוע, ונבדוק את הקשר בין גרף הפונקציה $y=f(x)$ לבין הגרפים של הפונקציות $y=f(x-p)$.

נניח כי נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$. נגדיר פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x-3)$.
כלומר משוואת הפונקציה החדשה היא $g(x)=(x-3)^2$.
נחקור את הקשר בין שתי הפונקציות בעזרת טבלת ערכים.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)=x^2$	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$g(x)=(x-3)^2$	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9

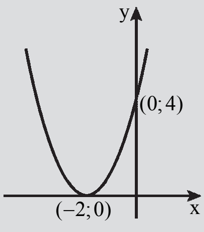


אפשר לראות בטבלה, וכך גם בגרפים שהתקבלו,
ש**לכל** נקודה על הגרף של הפונקציה $f(x)=x^2$,
"מתאימה" נקודה על הגרף של $g(x)=(x-3)^2$,
הנמצאת 3 יחידות **מימין** לה, כלומר יש לה אותו שיעור y , אך שיעור ה- x שלה גדול ב- 3 .
לדוגמה: הנקודה $(2;4)$ נמצאת על הגרף של $f(x)=x^2$,
ואם "נזיז" אותה 3 יחידות ימינה, נקבל את הנקודה $(5;4)$,
הנמצאת על הגרף של $g(x)=(x-3)^2$.
הסבר: אם נציב $x=2$ בפונקציה $f(x)=x^2$, נקבל $y=2^2=4$.
אם נציב $x=5$ בפונקציה $g(x)=(x-3)^2$, נקבל $y=(5-3)^2=2^2=4$.
נקבל ששני הגרפים זהים לחלוטין בצורתם, אך גרף הפונקציה $g(x)=(x-3)^2$ נמצא 3 יחידות **ימינה** לעומת הגרף של $f(x)=x^2$.

באופן כללי: אם נציב $x=t$ בפונקציה $f(x)=x^2$, נקבל $y=t^2$.
כדי לקבל אותו ערך של y בהצבה בפונקציה $g(x)=(x-3)^2$, נצטרך להציב בה $x=t+3$, הגדול ב- 3 מ- t , וזאת כדי "להתגבר" על ה-"-3" שבמשוואה.
אם נציב אכן נקבל: $g(t+3)=(t+3-3)^2=t^2$.

מסקנה: גרף הפונקציה $g(x)=(x-3)^2$ מתקבל על ידי "הזזה" של 3 יחידות לכיוון ימין של גרף הפונקציה $f(x)=x^2$.

נסכם: אם נתון גרף של פונקציה $f(x)$, אז כדי לשרטט את גרף הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x-3)$, אין צורך בטבלת ערכים.
אפשר להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$ ב- 3 יחידות **לכיוון ימין**.



בצורה דומה, נוכל להגדיר פונקציה $h(x)$, המקיימת $h(x)=f(x+2)$.
כלומר משוואת הפונקציה היא $h(x)=(x+2)^2$.
כדי לשרטט את גרף הפונקציה $h(x)$, אין צורך בטבלת ערכים.
אפשר לקחת את גרף הפונקציה $f(x)=x^2$,
ו"להזיז" אותו 2 יחידות לכיוון שמאל.
הגרף המתקבל של $h(x)$ מתואר בציור משמאל.

בשתי הדוגמאות הנ"ל הגרף הנתון "הוזז" ימינה או שמאלה. זו הזזה במקביל לציר ה- x (או במאונך לציר ה- y). **הזזה של גרף ימינה או שמאלה נקראת "הזזה אופקית".**

נסכם: אם נתונה פונקציה $y=f(x)$, ו- p הוא מספר קבוע:

(1) כדי לשרטט את גרף הפונקציה $y=f(x-p)$, כאשר p חיובי, מזיזים את גרף הפונקציה $y=f(x)$ הזזה אופקית של p יחידות <u>ימינה</u>.

(2) כדי לשרטט את גרף הפונקציה $y=f(x-p)$, כאשר p שלילי, מזיזים את גרף הפונקציה $y=f(x)$ הזזה אופקית של $|p|$ יחידות <u>שמאלה</u>.

דוגמאות:

כאשר מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)$ ב- 5 יחידות **ימינה**, אז כדי לקבל את משוואת הגרף המתקבל $g(x)$, נציב $p=5$ במשוואה $\mathbf{g(x)=f(x-p)}$, ונקבל $g(x)=f(x-5)$.
אם המשוואה הנתונה היא $f(x)=x^3$, אז $g(x)=(x-5)^3$.

לעומת זאת, כאשר מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)$ ב- 8 יחידות **שמאלה**,
אז כדי לקבל את משוואת הגרף המתקבל $g(x)$, נציב $p=-8$ במשוואה $\mathbf{g(x)=f(x-p)}$,
ונקבל $g(x)=f(x-(-8))=f(x+8)$. ואם נתון $f(x)=x^4-4x$, אז $g(x)=(x+8)^4-4(x+8)$.

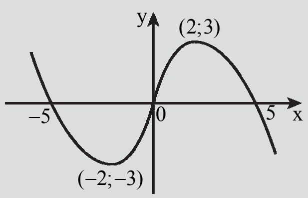
בהזזה אופקית <u>ימינה</u>, כל נקודה $(x_1;y_1)$, הנמצאת על הגרף של $f(x)$,
"מועתקת" לגרף של $g(x)=f(x-p)$ (כאשר p הוא חיובי), כך ששיעור ה- y שלה
אינו משתנה, אך שיעור ה- x גדל בהתאם להזזה.

בהזזה אופקית <u>שמאלה</u>, כל נקודה $(x_1;y_1)$, הנמצאת על הגרף של $f(x)$,
"מועתקת" לגרף של $g(x)=f(x-p)$ (כאשר p הוא שלילי), כך ששיעור ה- y שלה
אינו משתנה, אך שיעור ה- x קטן בהתאם להזזה.

נדגיש כי הזזה אופקית **אינה משנה** את צורת הגרף, אלא רק את מיקומו במערכת הצירים.
שני הגרפים זהים בצורתם, אך אחד מהם "הוזז" במערכת הצירים ימינה או שמאלה לעומת השני.

דוגמה:

לגרף הפונקציה $f(x)$, המתואר בציור, יש קיצון בנקודות $(2;3)$ ו- $(-2;-3)$,
ונקודות אפס עבור $x=5$, $x=0$ ו- $x=-5$.



א. כתבו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$.

מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x+3)$.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה $g(x)$?

ד. רשמו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

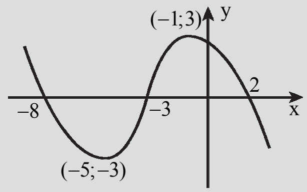
ה. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ו. דניאל טוען שהזזה אופקית אינה משנה את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של פונקציה, ואינה משנה את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה. האם הוא צודק?

פתרון:

א. על פי הנתונים שעל הציור אפשר לראות:
תחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$ הם $0<x<5$ או $x<-5$.
תחומי השליליות של הפונקציה $f(x)$ הם $x>5$ או $-5<x<0$.

ב. כדי לשרטט את גרף הפונקציה $g(x)$,
המקיימת $g(x)=f(x+3)$,
מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)$
ב- 3 יחידות **לכיוון שמאל**.



ג. כפי שניתן לראות בשרטוט, נקודות האפס של הפונקציה $g(x)$
נמצאות 3 יחידות **משמאל** לנקודות האפס של הפונקציה $f(x)$,
ושיעוריהן הם: $(2;0)$, $(-3;0)$ ו- $(-8;0)$.

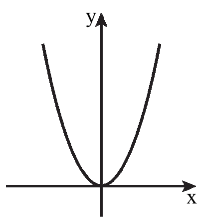
ד. נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ נמצאות 3 יחידות **משמאל** לנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$. נקבל: $(-1;3)$ מקסימום, $(-5;-3)$ מינימום.

ה. על פי גרף הפונקציה $g(x)$ נוכל לרשום:
תחומי החיוביות של הפונקציה $g(x)$ הם $-3<x<2$ או $x<-8$.
תחומי השליליות של הפונקציה $g(x)$ הם $x>2$ או $-8<x<-3$.

ו. דניאל טועה. הזזה אופקית משנה את נקודות האפס של הפונקציה, ולכן משנה את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה. כמו כן, הזזה אופקית משנה את שיעור ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה ולכן משנה את תחומי העלייה והירידה שלה.

תרגילים

1. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^2$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x-4)$.

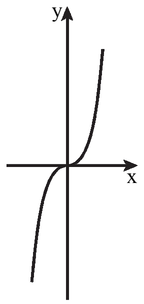


א. כתבו את משוואת הפונקציה $g(x)$ באמצעות x.
הדרכה: הציבו $(x-4)$ במקום x במשוואת הפונקציה $f(x)$.
ב. הראו כי ערך ה- y המתקבל בפונקציה $g(x)$ עבור $x=5$
שווה לערך ה- y המתקבל בפונקציה $f(x)$ עבור $x=1$.
ג. השלימו את הערכים החסרים בטבלה:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)=x^2$	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$g(x)=(x-4)^2$									

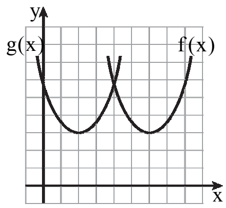
ד. (1) כתבו בעזרת הטבלה שיעורי שתי נקודות, אחת על הגרף של $f(x)$
והשנייה על הגרף של $g(x)$, שיש להן אותו שיעור y.
(2) מהו ההפרש בין שיעורי ה- x של הנקודות שמצאתם בתת סעיף ד(1)?
ה. השלימו: כדי לשרטט את גרף הפונקציה $g(x)$, ניקח את גרף הפונקציה $f(x)$,
ונזיז אותו 4 יחידות לכיוון ____.
ו. הוסיפו לאותה מערכת צירים שרטוט של הגרף של $g(x)$.
היעזרו בנקודות שקיבלתם בטבלת הערכים.

.2 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^3$. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x+5)$.



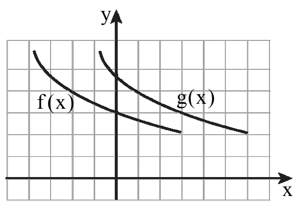
א. כתבו את משוואת הפונקציה $g(x)$ באמצעות x.
הדרכה: הציבו $(x+5)$ במקום x במשוואת הפונקציה $f(x)$.
ב. הראו על ידי הצבה כי ערך הפונקציה $f(x)$ עבור $x=2$
שווה לערך הפונקציה $g(x)$ עבור $x=-3$.
ג. השלימו: כדי לשרטט את גרף הפונקציה $g(x)$,
ניקח את גרף הפונקציה $f(x)$, ונזיז אותו 5 יחידות לכיוון ____.
ד. הוסיפו לשרטוט את הגרף של $g(x)$.
ה. יעל טוענת שהזזה אופקית אינה משנה את הצורה של גרף הפונקציה,
אלא רק את מיקומו במערכת הצירים. האם היא צודקת?

.3 לפניכם גרפים של שתי פונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$.



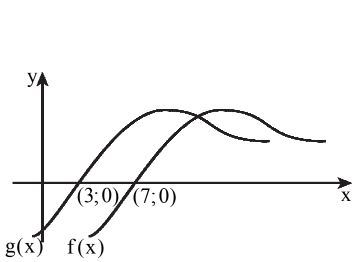
הגרפים מתוארים במערכת צירים שבה כל <u>משבצת</u>
היא יחידה אחת. נתון כי גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל
על ידי הזזה <u>אופקית</u> של גרף הפונקציה $f(x)$.
א. בכמה יחידות ולאיזה כיוון יש להזיז את הגרף של $f(x)$
כדי לקבל את הגרף של $g(x)$?
ב. הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.
ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=f(x)-b$.
מצאו לאיזה ערך של b יש למשוואה $f(x)-b=0$ פתרון אחד בלבד.

.4 לפניכם גרפים של שתי פונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$.



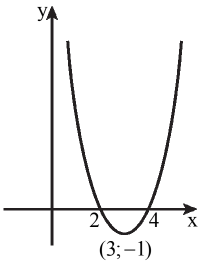
הגרף של $g(x)$ מתקבל על ידי הזזה אופקית של הגרף של $f(x)$.
א. קבעו בכמה יחידות ולאיזה כיוון יש להזיז את גרף
הפונקציה $f(x)$ כדי לקבל את גרף הפונקציה $g(x)$?
ב. הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.
ג. הסבירו מדוע $g(12)=f(9)$.
ד. ליעד טוען ש- $f(14)=g(17)$.
לעומתו שחר טוען ש- $f(17)=g(14)$. מי מהשניים צודק? נמקו.
ה. ישר המקביל לציר ה- x חותך את הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, בהתאמה, בנקודות A
ו- $B(-2;14)$. מהם שיעורי הנקודה A?
הערה: הנקודות A ו- B אינן נמצאות בציור הנתון.

.5 לפניכם גרפים של שתי פונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$.



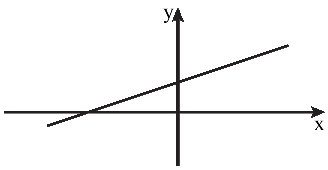
נתון כי הגרף של $g(x)$ מתקבל על ידי הזזה אופקית
של הגרף של $f(x)$.
על הציור מסומנות נקודות האפס של הגרפים.
א. בכמה יחידות ולאיזה כיוון יש להזיז את גרף
הפונקציה $f(x)$, כדי לקבל את גרף הפונקציה $g(x)$?
ב. הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.
ג. נתון: $f(9)=4$. חשבו את $g(5)$.

6. בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.
נקודות האפס של הגרף הן $(2;0)$ ו- $(4;0)$.
לפונקציה נקודת קיצון אחת $(3;-1)$ מינימום.
מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)$ הזזה אופקית, כך שמתקבל
גרף הפונקציה $g(x)$, שנקודת הקיצון שלו היא $(2;-1)$ מינימום.



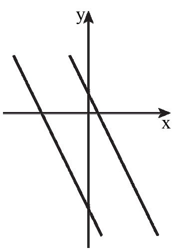
א. בכמה יחידות ולאיזה כיוון הוזז הגרף של $f(x)$,
כדי לקבל את הגרף של $g(x)$?
ב. רשמו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה $g(x)$.
ג. רשמו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, המקיימת $h(x)=f(x-3)$.
ד. (1) כתבו את התחום שבו שתי הפונקציות, $f(x)$ ו- $g(x)$, יורדות.
(2) כתבו את התחום שבו שתי הפונקציות, $f(x)$ ו- $h(x)$, חיוביות.

7. לפניכם ישר המתאר את הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}x+1$.



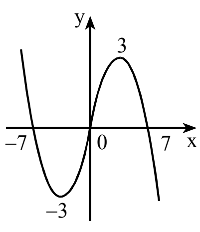
א. נסמן : $g(x)=f(x+3)$. מצאו את משוואת הישר $g(x)$.
הדרכה : הציבו $(x+3)$ במקום x במשוואת הפונקציה $f(x)$.
ב. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של $g(x)$.
ג. עפר מתבונן במשוואת הישר $g(x)$, שהתקבלה בסעיף א',
וטוען שאפשר לקבל את הישר $g(x)$, גם על ידי כך שמזיזים
את הישר $f(x)$ ביחידה אחת כלפי מעלה. האם הוא צודק?
ד. קבעו האם ערך הביטוי $f(-4)\cdot g(-4)$ הוא חיובי או שלילי. אין צורך לחשב את הביטוי.

8. נתונות משוואות של שני ישרים מקבילים : $f(x)=-2x+1$, $g(x)=-2x-5$.



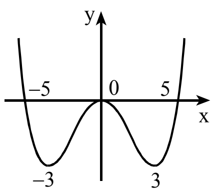
א. דורון טוען שמתקיים $g(x)=f(x)-6$. כלומר גרף הפונקציה $g(x)$
מתקבל על ידי הזזה אנכית של 6 יחידות כלפי מטה
של גרף הפונקציה $f(x)$. אם הוא צודק?
ב. חן טוענת שניתן לתאר את הקשר בין שתי הפונקציות באמצעות
$g(x)=f(x+3)$, כלומר גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל על ידי הזזה
אופקית של 3 יחידות שמאלה של גרף הפונקציה $f(x)$. האם היא צודקת?
ג. האם כל הזזה "אופקית" של <u>ישר</u> אפשר לתאר גם כהזזה "אנכית"? נמקו.

9. לגרף הפונקציה $f(x)$, המתואר בציור, יש נקודות קיצון כאשר $x=3$ וכאשר $x=-3$,
ונקודות חיתוך עם ציר ה- x כאשר $x=7$, $x=0$ ו- $x=-7$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x+4)$.



א. מהם שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x ?
ב. רשמו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון
של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ד. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.
ה. האם גרף הפונקציה $g(x)=f(4+x)$ זהה לגרף הפונקציה $g(x)=f(x+4)$?
ו. דותן טוען שהזזה אופקית אינה משנה את נקודות האפס,
ואינה משנה את תחומי החיוביות והשליליות של פונקציה. האם הוא צודק?
ז. לפונקציה $h(x)=f(x-a)$ יש נקודת קיצון שעל ציר ה- y . מצאו שתי אפשרויות לערך של a .

10. לגרף הפונקציה $f(x)$, המתואר בציור, יש נקודות קיצון כאשר $x=3$, $x=0$ ו- $x=-3$, ונקודות אפס עבור $x=5$, $x=0$ ו- $x=-5$.



א. היעזרו בנתונים שעל הציור ומצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

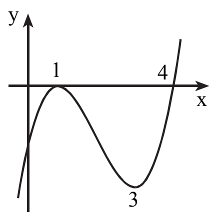
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=f(x-1)$.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ד. מצאו את התחומים שבהם $f(x)$ עולה וגם $g(x)$ יורדת.

ה. קרן טוענת שהזזה אופקית משנה את <u>מספר</u> נקודות הקיצון ואת <u>שיעורי</u> נקודות הקיצון. האם היא צודקת?

11. לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון כאשר $x=1$ ו- $x=3$, ונקודות אפס עבור $x=1$ ו- $x=4$.



א. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=f(x-a)$.

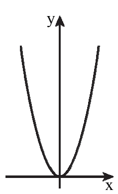
(1) מצאו את הערך של a , אם לפונקציה $h(x)$ יש נקודת מינימום כאשר $x=5$.

(2) עבור הערך של a , שמצאתם בתת סעיף א(1), מצאו את שיעור ה- x של נקודת המקסימום של $h(x)$.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=f(x+2)$. סמנו על הגרף את נקודות האפס של הפונקציה.

ג. נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x , ונסמן ב- S_1 את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי ציר ה- x . האם S_1 גדול מ- S , קטן ממנו או שווה לו?

12. בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x)=x^4$.



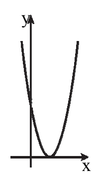
בנוסף, נתונות המשוואות של ארבע הפונקציות הבאות:

$g(x)=x^4+1$, $h(x)=(x-1)^4$,

$i(x)=x^4-1$, $k(x)=(x+1)^4$.

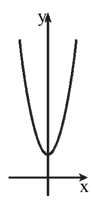
כמו כן, נתונים גרפים של ארבע הפונקציות הנוספות - גרפים **(1)-(4)**.

(1)

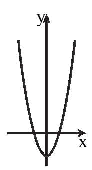


(2)

(3)



(4)



א. התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאים לה.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=x^4$ היא פונקציה זוגית.

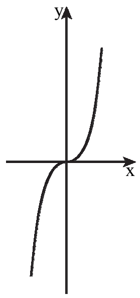
חוו דעתכם עבור כל טענה האם היא נכונה (אין צורך להוכיח את הטענה):

ג. כאשר לוקחים גרף של פונקציה זוגית, ומזיזים אותו "הזזה אנכית", מקבלים גרף של פונקציה זוגית.

ד. כאשר לוקחים גרף של פונקציה זוגית, ומזיזים אותו "הזזה אופקית", מקבלים גרף של פונקציה זוגית.

ה. כאשר לוקחים גרף של פונקציה זוגית, ומזיזים אותו k יחידות ימינה, מתקבל גרף שציר הסימטריה שלו הוא הישר $x=k$.

13. בציור משמאל מתואר גרף של פונקציה מהצורה $y=x^n$.



א. קבעו האם n הוא מספר זוגי או מספר אי זוגי.

ב. נתונות משוואות אלגבריות של ארבע פונקציות, המתקבלות על ידי הזזה (אנכית או אופקית) של הגרף הנתון $y=x^n$ (n הוא מספר אי זוגי):

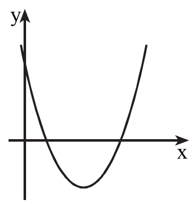
(1) $f(x)=x^n-1$. **(2)** $g(x)=(x+1)^n$.

(3) $h(x)=(x-1)^n$. **(4)** $i(x)=x^n+1$.

שרטטו את הגרף של כל אחת מארבע הפונקציות.

ג. קבעו עבור הטענה הבאה האם היא נכונה (תוכלו להיעזר בסעיף ב'):
כאשר לוקחים גרף של פונקציה אי זוגית, ומזיזים אותו "הזזה אנכית", מקבלים גרף של פונקציה אי זוגית.

14. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^2-6x+5$.



א. מצאו את נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(x-2)$.

(1) מצאו את שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$.

(2) שרטטו באותה מערכת צירים את הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$.

(3) רשמו את הפונקציה $g(x)$ כפונקציה ריבועית באמצעות x .

ד. נסמן: $h(x)=f(x-m)$. חשבו את m , אם $(-1;-4)$ היא נקודת מינימום של $h(x)$.

15. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+4x-1$.

א. גרף הפונקציה $f(x)$ הוזז ימינה ב- 3 יחידות, כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$.

(1) בטאו את הפונקציה $g(x)$ באמצעות $f(x)$.

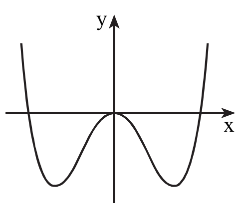
(2) רשמו באמצעות x את התבנית האלגברית של הפונקציה $g(x)$.

ב. נסמן: $h(x)=f(x-m)$.

(1) רשמו באמצעות m ו- x את התבנית האלגברית של $h(x)$.
אין צורך לפתוח סוגריים.

(2) נתון: $h(9)=-1$. מצאו את ערך הפרמטר m .

16. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^2(x-2)(x+2)$.



א. הראו שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

ב. מזיזים את גרף הפונקציה ב- 2 יחידות שמאלה.

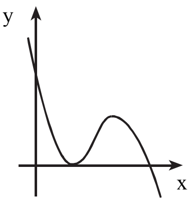
(1) הביעו את הפונקציה $g(x)$ באמצעות הפונקציה $f(x)$.

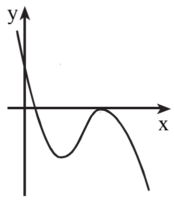
(2) הביעו את הפונקציה $g(x)$ באמצעות x .

(3) קבעו האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית.

(4) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

17. נתונה הפונקציה $f(x)=-(x-2)(x-9)^2$.
א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.
ב. לפניכם גרפים של שתי פונקציות. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה הנתונה. נמקו.



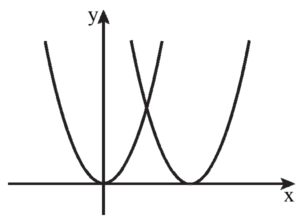


ג. נתונה הפונקציה $g(x)=-x(x-7)^2$.
(1) הוכיחו : $g(x)=f(x+2)$. **(2)** שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

תשובות:

1. א. $g(x)=(x-4)^2$.
ד. **(1)** $f(x)$: $(2;4)$, $g(x)$: $(6;4)$.
(2) ההפרש הוא 4 .
ה. לכיוון ימין.

ו.

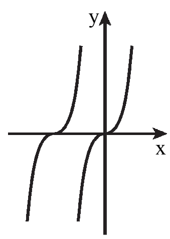


ג.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)=x^2$	4	1	0	1	4	9	16	25	36
$g(x)=f(x-4)$	36	25	16	9	4	1	0	1	4

2. א. $g(x)=(x+5)^3$.
ג. שמאל.
ה. כן, יעל צודקת.

ד.



3. א. 4 יחידות לכיוון שמאל. ב. $g(x)=f(x+4)$. ג. $b=3$.

4. א. 3 יחידות לכיוון ימין. ב. $g(x)=f(x-3)$. ד. ליעד צודק. ה. $A(-5;14)$.

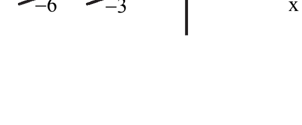
5. א. 4 יחידות לכיוון שמאל. ב. $g(x)=f(x+4)$. ג. $g(5)=4$.

6. א. יחידה אחת שמאלה. ב. $(1;0)$, $(3;0)$.

ג. $(6;-1)$ מינימום. ד. **(1)** $x<2$. **(2)** $x>7$ או $4<x<5$ או $x<2$.

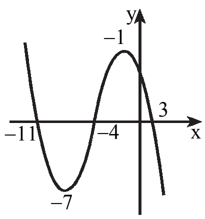
7. א. $g(x)=\frac{1}{3}x+2$.
ג. כן, עפר צודק.
ד. שלילי.

ב.

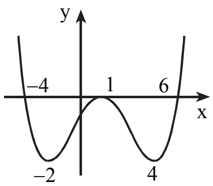


8. א. כן, דורון צודק. ב. כן, חן צודקת. ג. כן.

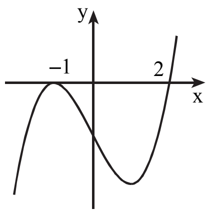
9. א. $(3;0)$, $(-4;0)$, $(-11;0)$.
ב. $x=-1$ מקסימום, $x=-7$ מינימום.
ד. חיוביות: $-4<x<3$ או $x<-11$,
שליליות: $x>3$ או $-11<x<-4$.
ה. כן. ו. דותן לא צודק.
ז. $a=3$ או $a=-3$.
ג.



10. א. עלייה: $x>3$ או $-3<x<0$,
ירידה: $0<x<3$ או $x<-3$.
ג. עלייה: $x>4$ או $-2<x<1$,
ירידה: $1<x<4$ או $x<-2$.
ד. $3<x<4$ או $-3<x<-2$.
ה. קרן לא צודקת.
ב.

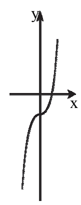


11. א. (1) $a=2$.
(2) $x=3$.
ג. שווה לו.
ב.

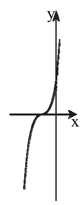


12. א. $g(x)$ - (3), $h(x)$ - (1), $i(x)$ - (4), $k(x)$ - (2) . ג. הטענה נכונה. ד. הטענה אינה נכונה.
ה. הטענה נכונה.

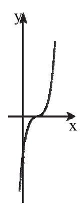
13. א. n הוא מספר אי זוגי.
ב. (1)



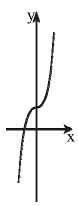
(2)



(3)

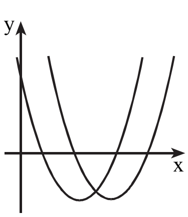


(4)



ג. הטענה אינה נכונה.

14. א. $(3;-4)$ מינימום.
ב. $(1;0)$, $(5;0)$.
ג. (1) $(5;-4)$ מינימום. (3) $f(x-2)=x^2-10x+21$.
ד. $m=-4$.
ג. (2)



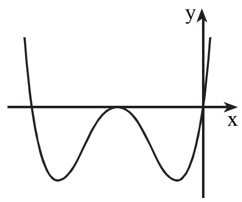
15. א. (1) $g(x)=f(x-3)$. (2) $g(x)=f(x-3)=-x^2+10x-22$.
ב. (1) $h(x)=f(x-m)=-(x-m)^2+4(x-m)-1$. (2) $m=5$ או $m=9$.

16. ב. **(1)** $g(x)=f(x+2)$.

(2) $g(x)=x(x+2)^2(x+4)$.

(3) הפונקציה $g(x)$ אינה פונקציה זוגית.

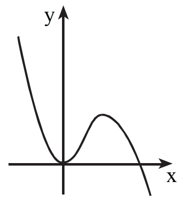
(4).



17. א. $(2;0)$, $(9;0)$.

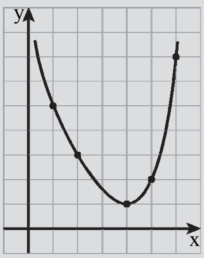
ב. הגרף השמאלי.

ג. **(2)**



שאלות הכוללות הזזה אנכית והזזה אופקית

נראה עכשיו מקרים שבהם מבצעים על גרף של פונקציה **הזזה אופקית**, ואחר כך **הזזה אנכית** (אפשר גם להפוך את סדר ההזזות).



דוגמה:

בשרטוט מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.

הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x-2)+4$.

א. תארו במילים כיצד אפשר לקבל את הגרף של $g(x)$ מהגרף של $f(x)$.

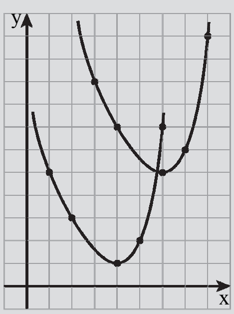
ב. הוסיפו למערכת הצירים את גרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון:

א. בשלב הראשון מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)$ הזזה אופקית של 2 יחידות ימינה, ומקבלים את גרף הפונקציה $f(x-2)$.

בשלב השני מזיזים את גרף הפונקציה $f(x-2)$ הזזה אנכית של 4 יחידות כלפי מעלה ומקבלים את גרף הפונקציה $g(x)=f(x-2)+4$.

הערה: גם אם נבצע קודם הזזה אנכית ואחר כך הזזה אופקית, נקבל את אותו הגרף של הפונקציה $g(x)=f(x-2)+4$. כפי שנלמד בהמשך, ברוב המקרים נעדיף לבצע קודם כל שינוי אופקי, ורק אחר כך שינוי אנכי.



ב. כדי לקבל את גרף הפונקציה $f(x-2)+4$, נזיז את גרף הפונקציה $f(x)$ ב- 2 יחידות ימינה. אחר כך נזיז את הגרף שקיבלנו ב- 4 יחידות כלפי מעלה.

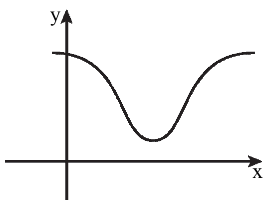
כל נקודה על הגרף של $f(x)$ "מועתקת" לנקודה על הגרף $f(x-2)+4$, הנמצאת 2 יחידות מימין לה, ו- 4 יחידות מעליה. לדוגמה: נקודת המינימום $(4;1)$ של $f(x)$, "מועתקת" לנקודת המינימום $(6;5)$ של $g(x)$.

18. נתונה פונקציה $f(x)$. בסעיפים הבאים נתונה פונקציה חדשה. תארו במילים כיצד מתקבל הגרף שלה מהגרף של $f(x)$. השתמשו במושגים "הזזה אנכית" ו-"הזזה אופקית".

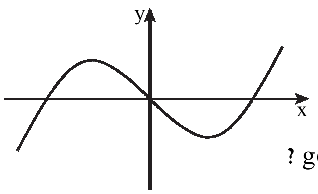
א. $g(x)=f(x-2)+1$. **ב.** $h(x)=f(x+3)-8$.

19. כתבו את המשוואה האלגברית של הפונקציה המתקבלת כאשר:
א. מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)=x^4$ ב- 5 יחידות ימינה ו- 8 יחידות כלפי מטה.
ב. מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)=(x-2)^6$ ב- 4 יחידות שמאלה ו- 7.5 יחידות למעלה.

20. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$. לפונקציה יש מינימום בנקודה $(5;1)$
מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x+3)+2$.
א. כמה יחידות ולאילו כיוונים, יש להזיז את הגרף של $f(x)$, כדי לקבל את הגרף של $g(x)$?
ב. מהם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?
ג. הוסיפו לשרטוט את הגרף של $g(x)$.
ד. האם גרף הפונקציה $h(x)=2+f(x+3)$ מתלכד עם גרף הפונקציה $g(x)=f(x+3)+2$? נמקו.



21. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$. לפונקציה יש מינימום בנקודה $(3;-2)$ ומקסימום בנקודה $(-3;2)$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x-5)-2$.
א. כמה יחידות ולאילו כיוונים, יש להזיז את הגרף של $f(x)$ כדי לקבל את הגרף של $g(x)$?
ב. מהם שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה $g(x)$?
ג. הוסיפו לשרטוט את הגרף של $g(x)$.
ד. הנקודה $C(6;2)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.
מהם שיעורי הנקודה על הגרף של $g(x)$, אליה "מועתקת" נקודה C ?
ה. הנקודה $D(5;-2)$ נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$.
מהם שיעורי הנקודה על הגרף של $f(x)$, ממנה "הועתקה" נקודה D ?

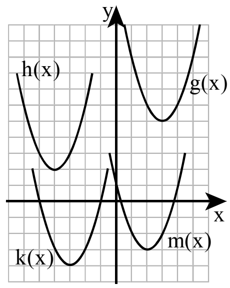


22. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$. רשמו בכמה יחידות (ולאילו כיוונים) יש להזיז את גרף הפונקציה הנתונה, כדי לקבל את הגרף של כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $y=(x-2)^3+7$ **ב.** $y=-6+(x+5)^3$

23. נתונה פונקציה $f(x)=(x+3)^4-1$.
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה. היעזרו ב**טרנספורמציות** על גרף הפונקציה $y=x^4$.
ב. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. מצאו את ערכי k שעבורם חותך הישר $y=k$ את גרף הפונקציה:
(1) ב- 2 נקודות. **(2)** בנקודה אחת. **(3)** באף נקודה.
ו. באילו נקודות חותך גרף הפונקציה את הישר $y=15$?

24. במערכת הצירים שלפניכם משורטטים ארבעה גרפים שהתקבלו על ידי הזזה אופקית ואנכית של הפרבולה $f(x)=x^2$.
נסמן את הגרפים על ידי $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ ו- $m(x)$.
היעזרו במשבצות (כל משבצת היא יחידה אחת) ורשמו את המשוואה של כל אחת מארבע הפרבולות האחרות.



25. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-6x$.
נסמן : $g(x)=f(x+2)-7$. כתבו את המשוואה האלגברית של הפונקציה $g(x)$.

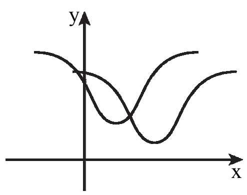
26. נתונה הפונקציה $f(x)=(x-6)^5$.
א. הביעו את המשוואה האלגברית של הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x+3)-4$.
ב. אריאל טוען שאפשר לקבל את הפונקציה $g(x)$ על ידי כך שמזיזים את הפונקציה $f(x)$ ב- 4 יחידות כלפי מטה, ואחר כך ב- 3 יחידות שמאלה. האם הוא צודק?
ג. האם המשוואה האלגברית של הפונקציה הייתה אחרת, אם היו מזיזים את גרף הפונקציה הנתונה בשלב הראשון 3 יחידות שמאלה, ובשלב השני 4 יחידות כלפי מטה? נמקו.

תשובות:

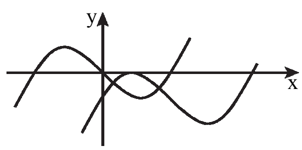
18. א. הזזה אופקית של 2 יחידות ימינה, ושל יחידה אחת כלפי מעלה.
ב. הזזה אופקית של 3 יחידות שמאלה, ושל 8 יחידות כלפי מטה.

19. א. $y=(x-5)^4-8$. ב. $y=(x+2)^4+7.5$.

20. א. נזיז אותו 3 יחידות לכיוון שמאל, ו- 2 יחידות כלפי מעלה.
ב. $(2;3)$ מינימום. ד. כן.
ג.

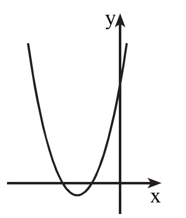


21. א. נזיז אותו 5 יחידות לכיוון ימין, ו- 2 יחידות כלפי מטה.
ב. $(8;-4)$ מינימום, $(2;0)$ מקסימום.
ד. $(11;0)$. ה. $(0;0)$.
ג.



22. א. 2 יחידות ימינה ו- 7 יחידות למעלה. ב. 5 יחידות שמאלה ו- 6 יחידות כלפי מטה.

23. א.



ב. $(-3;-1)$ מינימום.
ג. עלייה : $x>-3$, ירידה : $x<-3$.
ד. $(0;80)$, $(-2;0)$, $(-4;0)$.
ה. **(1)** $k>-1$. **(2)** $k=-1$. **(3)** $k<-1$.
ו. $(-1;15)$, $(-5;15)$.

24. $g(x)=(x-3)^2+5$. $h(x)=(x+4)^2+2$. $m(x)=(x-2)^2-3$. $k(x)=(x+3)^2-4$.

25. $g(x)=x^2-2x-15$.

26. א. $y=(x-3)^5-4$. ב. אריאל צודק. ג. התשובה לא הייתה אחרת, אלא זהה.

מתיחה אנכית וכיווץ אנכי של גרף של פונקציה

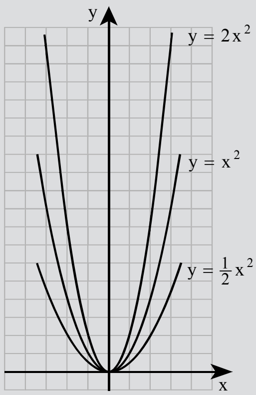
נדון עכשיו בקשר שבין גרף הפונקציה $y=f(x)$ לבין גרף הפונקציה $y=a\cdot f(x)$,
המתקבל מהכפלת הפונקציה $f(x)$ בקבוע a .
המטרה העיקרית תהיה להבין את משמעות הפרמטר a .

נתחיל מ- a חיובי ($a>0$). כפי שנראה, במקרה כזה יש שתי אפשרויות :
(1) כאשר $a>1$, גרף הפונקציה $y=a\cdot f(x)$ הוא **"מתיחה אנכית"** של גרף הפונקציה $y=f(x)$.
(2) כאשר $0<a<1$, גרף הפונקציה $y=a\cdot f(x)$ הוא **"כיווץ אנכי"** של גרף הפונקציה $y=f(x)$.

בדוגמה הראשונה נתבונן בפונקציה הריבועית הבסיסית $f(x)=x^2$.
נגדיר פונקציה חדשה $g(x)$, המקיימת $g(x)=2\cdot f(x)$, כלומר $g(x)=2x^2$.
נחקור את הקשר בין גרף הפונקציה $f(x)$ לגרף הפונקציה $g(x)$. ניעזר בטבלת ערכים.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)=2\cdot f(x)=2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

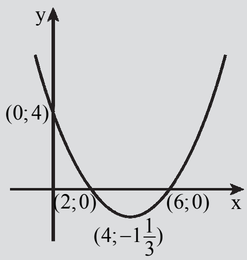
נשרטט באותה מערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות.



ניתן לראות שעבור **כל** x שנציב, ערך ה- y המתקבל בפונקציה $g(x)$ הוא פי 2 מערך ה- y המתקבל בפונקציה $f(x)$.
לדוגמה : עבור $x=2$ נקבל $f(2)=2^2=4$ ו- $g(2)=2\cdot 2^2=2\cdot 4=8$.
קצב שינוי ה- y של $g(x)$ "מהיר יותר".
ההכפלה פי 2 גורמת לגרף של $f(x)$ "להימתח" לאורך ציר ה- y . נהוג לומר שהגרף של $g(x)$ מהווה **"מתיחה אנכית"** של הגרף של $f(x)$.

באופן דומה, אם נשרטט את גרף הפונקציה $h(x)$,
המקיימת $h(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)$, הרי שעבור **כל** x שנציב בשתי המשוואות, ערך ה- y המתקבל בפונקציה $h(x)$ הוא $\frac{1}{2}$ מערך ה- y המתקבל בפונקציה $f(x)$.
במקרה כזה נהוג לומר שהתבצע **"כיווץ אנכי"** על הגרף של $f(x)$.
ההכפלה פי $\frac{1}{2}$ גורמת לגרף של $f(x)$ "להתכווץ" פי 2 לאורך ציר ה- y .

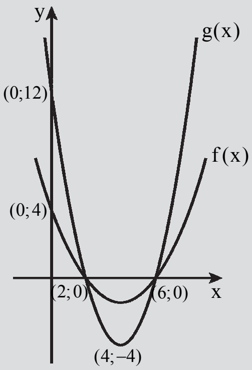
דוגמה :



לפניכם גרף של הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}x^2-2\frac{2}{3}x+4$.
על הגרף מסומנות נקודות האפס של הפונקציה,
$(2;0)$ ו- $(6;0)$, מסומנת נקודת החיתוך עם ציר ה- y ,
ששיעוריה $(0;4)$, ומסומנת נקודת הקיצון
היחידה של הפונקציה, $(4;-1\frac{1}{3})$ מינימום.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=3\cdot f(x)$.
שרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

פתרון:

כפי שהסברנו, עבור **כל** ערך של x שנציב במשוואת הפונקציה $g(x)$, ערך ה- y המתקבל הוא פי 3 מערך ה- y המתקבל בפונקציה $f(x)$. עבור ערך של x שבו הפונקציה $f(x)$ **חיובית**, הפונקציה $g(x)$ גם היא **חיובית**, וערכה מהווה פי 3 מערך ה- y המתקבל בפונקציה $f(x)$.



לדוגמה: הגרף של $f(x)$ נפגש עם ציר ה- y בנקודה $(0;4)$,
כלומר עבור $x=0$ קיבלנו $f(0)=4$.
אם נציב $x=0$ גם בפונקציה $g(x)$,
נקבל $g(0)=3\cdot f(0)=3\cdot 4=12$. כלומר $y=12$,
והגרף של $g(x)$ נפגש עם ציר ה- y בנקודה $(0;12)$.

עבור ערך של x שבו הפונקציה $f(x)$ שווה לאפס,
גם ערך הפונקציה $g(x)$ שווה לאפס.
לדוגמה: הגרף של $f(x)$ נפגש עם ציר ה- x בנקודה $(2;0)$,
כלומר $f(2)=0$. אם נציב $x=2$ גם בפונקציה $g(x)$, נקבל $g(2)=3\cdot f(2)=3\cdot 0=0$.
כלומר $y=0$, וגם הגרף של $g(x)$ נפגש עם ציר ה- x בנקודה $(2;0)$.
נסכם: לשתי הפונקציות יש **אותן נקודות אפס**.

עבור ערך x שבו הפונקציה $f(x)$ **שלילית**, הפונקציה $g(x)$ **שלילית** גם היא,
וערכה "שלילי פי 3" מערך ה- y המתקבל בפונקציה $f(x)$.
לדוגמה: הגרף של $f(x)$ עובר דרך הנקודה $(4;-1\frac{1}{3})$. כלומר עבור $x=4$ קיבלנו $f(4)=-1\frac{1}{3}$.
אם נציב $x=4$ גם בפונקציה $g(x)$, נקבל $g(4)=3\cdot f(4)=3\cdot(-1\frac{1}{3})=-4$.
כלומר $y=-4$, והגרף של $g(x)$ עובר דרך הנקודה $(4;-4)$.
כדי לשרטט את הגרף של $g(x)$, נסמן את הנקודות שמצאנו, הנמצאות עליו.
נחבר את הנקודות בקו עקום. הגרף המתקבל מתואר לעיל.

נסכם: אם נתון גרף הפונקציה $y=f(x)$, ניתן לשרטט על פיו את גרף הפונקציה $y=a\cdot f(x)$.

אם המקדם a הוא מספר גדול מ-1, אז הגרף של $y=a\cdot f(x)$ מהווה "מתיחה אנכית" של הגרף $y=f(x)$. לדוגמה: הגרף $y=3\cdot f(x)$ מהווה מתיחה אנכית (לאורך ציר ה- y) של פי 3 של הגרף $y=f(x)$.

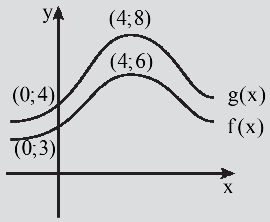
לעומת זאת, אם המקדם a הוא מספר בין 0 ל-1, אז הגרף של $y=a\cdot f(x)$ מהווה "כיווץ אנכי" של הגרף $y=f(x)$. לדוגמה: הגרף של $y=\frac{1}{4}\cdot f(x)$ מהווה **כיווץ אנכי** של פי 4 לעומת הגרף של $y=f(x)$. **נשים לב** שאם נבצע על הגרף של הפונקציה $y=f(x)$ **כיווץ אנכי** של פי 5, אז $a=\frac{1}{5}$, והפונקציה המתקבלת היא $y=\frac{1}{5}\cdot f(x)$, ולא $y=5\cdot f(x)$.

נסכם: במתיחה אנכית (או כיווץ אנכי), כל נקודה $(x_1;y_1)$, הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ "מועתקת" לגרף הפונקציה $g(x)=a\cdot f(x)$, כך ששיעור ה- x שלה אינו משתנה, אך שיעור ה- y מוכפל פי a. הנקודה המתקבלת על הגרף של $g(x)$ היא $(x_1;a\cdot y_1)$.

שיעורי **נקודות האפס** של הפונקציה $g(x)$ זהים לשיעורי נקודות האפס של הפונקציה $f(x)$.
נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ ו- $g(x)$ זהות בשיעור ה- x שלהן,
אך שונות בשיעור ה- y שלהן. כל עוד המקדם a חיובי, אז לפונקציות $f(x)$ ו- $a\cdot f(x)$ יש אותם תחומי **חיוביות**, אותם תחומי **שליליות**, ואותם תחומי **עלייה וירידה**.

מתיחה או כיווץ אנכיים **משנים** את צורת הגרף, ולא רק את מיקומו במערכת הצירים.
ככל שערכי $|a|$ גדולים יותר, הגרף נראה "גבוה וצר" יותר.

דוגמה:



נתונה פונקציה $f(x)$. מגדירים פונקציה נוספת $g(x)$,
המקיימת $g(x) = a \cdot f(x)$.
במערכת הצירים שלפניכם מתוארים
הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
חשבו את ערך מקדם המתיחה a.

פתרון:

דרך א' – נבחר ערך כלשהו של x ונמצא את ערך ה- y שלו בשתי הפונקציות.
נבחר אותו x בשתי הפונקציות. נבחר לדוגמה $x = 0$.
הגרף של $f(x)$ עובר דרך נקודה $(0;3)$, ואילו הגרף של $g(x)$ עובר דרך הנקודה $(0;4)$,
כלומר הנקודה $(0;3)$ "הועתקה" לנקודה $(0;4)$.
יחס המתיחה a הוא היחס בין שיעור ה- y בנקודה שעל הגרף של $g(x)$ לעומת שיעור ה- y בנקודה שעל הגרף של $f(x)$, לכן הוא שווה ל- $\frac{4}{3}$.
דרך ב' – נפתור באמצעות הצבה בקשר $g(x) = a \cdot f(x)$.
קשר זה מתקיים עבור כל ערך של x. נציב לדוגמה $x = 0$.
נקבל $g(0) = a \cdot f(0)$. ניתן לראות שמתקיים $f(0) = 3$ ו- $g(0) = 4$.
נציב ונקבל $4 = a \cdot 3$, ומכאן $a = \frac{4}{3}$ וזהו יחס המתיחה.
הערה: אפשר לראות שהמרחק ביו הנקודה $(0;3)$ לנקודה $(0;4)$ הוא 1, אבל המרחק בין הנקודה $(4;6)$ לנקודה $(4;8)$ הוא 2.
במתיחה אנכית, בשונה מהזזה אנכית, "המרחק האנכי" בין שני הגרפים **אינו קבוע**.

שרטטו בעזרת תוכנת מחשב את גרף הפונקציה $a \cdot f(x)$, $a > 0$,
על פי הגרף של $f(x)$.
סרקו את הקוד המצורף. מומלץ!

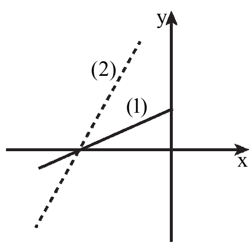
תרגילים

1. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 1$. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = 2 \cdot f(x)$.
לפניכם טבלת ערכים עבור שתי הפונקציות.

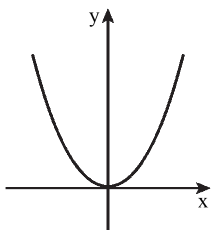
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^2 + 1$	10	5	2	1	2	5	10
$g(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot (x^2 + 1)$							

א. השלימו את הערכים החסרים בטבלה.
ב. השלימו: עבור כל x שנבחר, ערך הפונקציה $g(x)$ שווה פי ____ מערך הפונקציה $f(x)$.

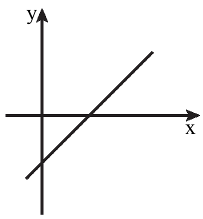
2. גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל על ידי "מתיחה אנכית" של פי 4 של גרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.
א. זהו איזה גרף מתאים ל- $f(x)$ ואיזה ל- $g(x)$.
ב. הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.
ג. הביעו את $g(x)$ באמצעות x.



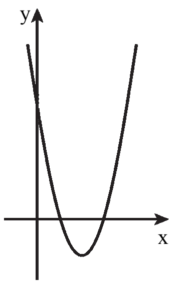
3. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^2$.
מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$, המקיימת $g(x)=3\cdot f(x)$.
א. מהי המשוואה של הפונקציה $g(x)$?
ב. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ג. שרטטו במערכת צירים אחרת סקיצה של $f(x)$,
ושל הפונקציה $h(x)$, המקיימת $h(x)=\frac{1}{3}\cdot f(x)$.



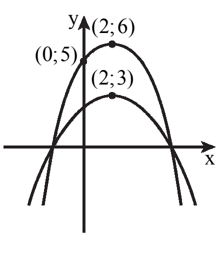
4. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x-3$.
מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=2\cdot f(x)$.
א. מהי המשוואה של הפונקציה $g(x)$?
ב. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)$.
שרטטו במערכת צירים אחרת את הגרפים של $f(x)$ ו- $h(x)$.
ד. ורד טוענת שלפונקציות $f(x)$ ו- $2\cdot f(x)$ יש תמיד אותן נקודות אפס.
האם היא צודקת? נמקו.



5. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^2-6x+8$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=3\cdot f(x)$.
א. מהי המשוואה של הפונקציה $g(x)$?
ב. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=\frac{1}{3}\cdot f(x)$.
(1) שרטטו את הגרפים של $f(x)$ ו- $h(x)$ באותה מערכת צירים.
(2) הראו שלפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)=\frac{1}{3}\cdot f(x)$ יש אותם
תחומי חיוביות ואותם תחומי שליליות.
ד. ללא קשר לסעיפים קודמים: האם לפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{3}\cdot f(x)$ יש תמיד אותם
תחומי חיוביות ואותם תחומי שליליות? נמקו.
ה. (1) מצאו את נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.
(2) נתון כי נקודת המינימום של הפונקציה $j(x)=x^2-6x+k$ נמצאת על ציר ה- x .
מצאו את הערך של k .



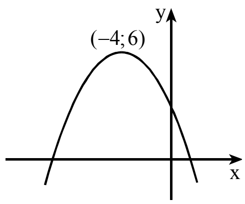
6. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$, שנקודת המקסימום שלה היא $(2;3)$.
גרף הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=a\cdot f(x)$,
מתואר גם הוא בציור. נקודת המקסימום של $g(x)$ היא $(2;6)$,
ונקודת המפגש שלה עם ציר ה- y היא $(0;5)$.
א. קבעו האם מתקיים $a>1$ או $0<a<1$.
ב. מצאו את ערך הפרמטר a .
ג. מהם שיעורי נקודת המפגש של גרף הפונקציה $f(x)$
עם ציר ה- y ?
ד. נתון: $g(-3)=-4.5$. חשבו את $f(-3)$.
ה. חשבו את היחס בין $f(40)$ ל- $g(40)$.



.7 בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.

לפונקציה נקודת קיצון אחת: $(-4;6)$ מקסימום.

הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)$.



א. רשמו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

ב. קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה:

(1) מתיחה אנכית משנה את שיעור ה- x של נקודת הקיצון.

(2) מתיחה אנכית משנה את שיעור ה- y של נקודת הקיצון.

ג. כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $g(x)$ עם הישר $y=3$?

ד. מגדירים פונקציה $h(x)$, המקיימת $h(x)=k\cdot f(x)$, $k>0$.

רשמו לאילו ערכים של k, נקודת המקסימום של הפונקציה $h(x)$ נמצאת מעל הישר $y=8$.

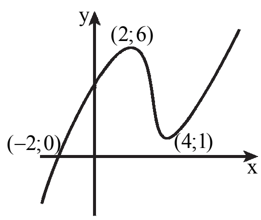
.8 בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$. לפונקציה יש נקודת אפס אחת $(-2;0)$,

ושתי נקודות קיצון בלבד – $(2;6)$ מקסימום, $(4;1)$ מינימום.

לוקחים את גרף הפונקציה $f(x)$, ומחלקים ב- 2 את שיעור ה- y

של כל אחת מהנקודות שעליו (מבלי לשנות את שיעור ה- x שלה),

כך שמתקבלת הפונקציה $g(x)$.



א. הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.

ב. הביעו את $f(x)$ באמצעות $g(x)$.

ג. רשמו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

ד. מהי הנקודה המשותפת לגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$?

ה. הוסיפו למערכת הצירים את הגרף של הפונקציה $g(x)$.

ו. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ז. יואב טוען שתחומי העלייה של פונקציה $f(x)$ זהים תמיד לתחומי העלייה

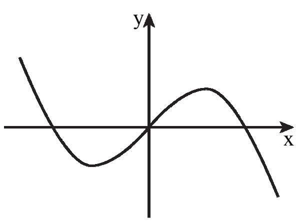
של הפונקציה $g(x)=a\cdot f(x)$, $a>0$. האם הוא צודק?

ח. נסמן: $h(x)=m\cdot f(x)$. נתון: $h(4)=3$. מצאו את ערך הפרמטר m.

.9 לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$. נקודות הקיצון

של הפונקציה הן: $(3;2)$ מקסימום, $(-3;-2)$ מינימום.

הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=3\cdot f(x)$.



א. מצאו את נקודות הקיצון של $g(x)$,

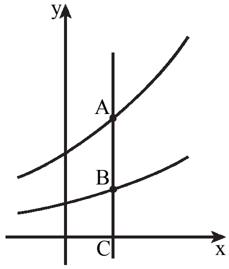
וקבעו האם הן מינימום או מקסימום.

ב. הוסיפו למערכת הצירים את הגרף של הפונקציה $g(x)$.

ג. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ד. כמה נקודות מפגש יש בין הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$? מהו ערך ה- y בנקודות אלה?

ה. לאילו ערכים של k, הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בדיוק בנקודה אחת?



.10 בציור שלפניכם מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$,

וגרף הפונקציה $g(x)=2\frac{1}{2}\cdot f(x)$. ישר המקביל לציר ה- y

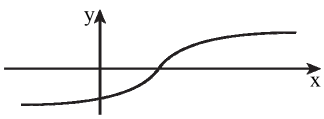
חותך את הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות A ו- B.

א. נתון: $AB=3$, שיעור ה- x של נקודה A הוא 2.

מצאו את שיעורי הנקודות B ו- A.

ב. נסמן: $f(x)=2\cdot h(x)$. הביעו את $g(x)$ באמצעות $h(x)$.

11. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$.



א. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$,
המקיימת $g(x)=a\cdot f(x)$, $a>1$.
הוסיפו למערכת הצירים את הגרף של הפונקציה $g(x)$.

ב. מגדירים פונקציה חדשה $h(x)$, המקיימת $h(x)=b\cdot f(x)$, $0<b<1$.
שרטטו סקיצה של $f(x)$ ו- $h(x)$ באותה מערכת צירים.

ג. הפונקציה $f(x)$ חיובית בתחום $x>3$, ושלילית בתחום $x<3$.
(1) מהי נקודת האפס של הפונקציה $f(x)$?
(2) כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.
(3) גאיה טוענת שתחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$ זהים לתחומי החיוביות של הפונקציה $g(x)=a\cdot f(x)$, $a>1$, והפונקציה $h(x)=b\cdot f(x)$, $0<b<1$. האם היא צודקת?

12. בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x)=(x-3)^2$.
היעזרו בגרף הנתון ושרטטו סקיצה
של כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $g(x)=f(x+2)$. ב. $h(x)=-2+f(x)$.

ג. $i(x)=2f(x)$. ד. $j(x)=\frac{f(x)}{2}$.

תשובות:

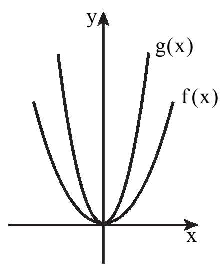
1. א.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=x^2+1$	10	5	2	1	2	5	10
$g(x)=2\cdot f(x)=2\cdot(x^2+1)$	20	10	4	2	4	10	20

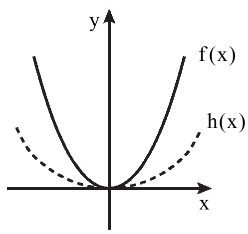
ב. פי 2 .

2. א. גרף (1) מתאים ל- $f(x)$, גרף (2) מתאים ל- $g(x)$.
ב. $g(x)=4\cdot f(x)$. ג. $g(x)=2x+8$.

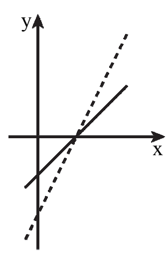
3. א. $g(x)=3\cdot x^2$. ב.



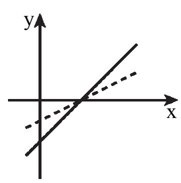
ג.



4. א. $g(x)=2x-6$. ב.



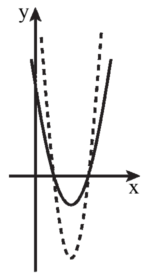
ג.



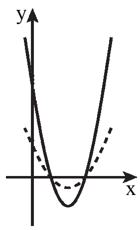
ד. כן.

5. א. $g(x)=3x^2-18x+24$.
ד. כן.
ה. **(1)** $(3;-1)$ מינימום.
(2) $k=9$.

ב.



ג. **(1)**

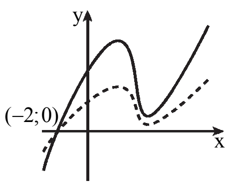


6. א. $a>1$. ב. $a=2$. ג. $(0;2\frac{1}{2})$. ד. -2.25 . ה. $\frac{1}{2}$.

7. א. $(-4;3)$ מקסימום. ב. **(1)** הטענה אינה נכונה. **(2)** הטענה נכונה.
ג. נקודת מפגש אחת. ד. $k>\frac{4}{3}$.

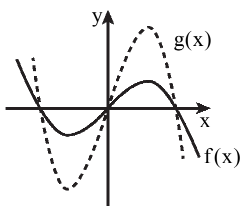
8. א. $g(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)$. אפשר גם $g(x)=\frac{f(x)}{2}$.
ב. $f(x)=2\cdot g(x)$.
ג. $(2;3)$ מקסימום, $(4;\frac{1}{2})$ מינימום.
ד. $(-2;0)$. ו. עלייה: $x>4$ או $x<2$, ירידה: $2<x<4$.
ז. כן, יואב צודק. ח. $m=3$.

ה.



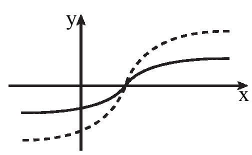
9. א. $(3;6)$ מקסימום, $(-3;-6)$ מינימום.
ג. עלייה: $-3<x<3$, ירידה: $x>3$ או $x<-3$.
ד. שלוש נקודות מפגש. ערך ה- y בנקודות אלה הוא אפס.
ה. $k>6$ או $k<-6$.

ב.

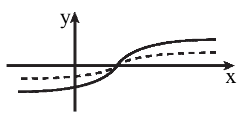


10. א. $A(2;5)$, $B(2;2)$. ב. $g(x)=5\cdot h(x)$.

11. א.



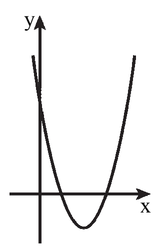
ב.



ג. **(1)** $(3;0)$. **(2)** חיוביות: $x>3$, שליליות: $x<3$. **(3)** כן, גאיה צודקת.

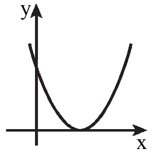
12. א.

ב.



ג.

ד.



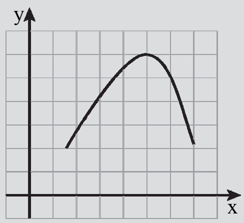
מתיחה או כיווץ אנכיים עם הזזה אנכית ו/או אופקית

ישנם מקרים שבהם נשלב מתיחה או כיווץ אנכיים של גרף של פונקציה עם הזזה אנכית או/וגם הזזה אופקית שלו.

במקרים כאלה, **עדיף לבצע את הפעולות על פי הסדר הבא:**

(1) הזזה אופקית. (2) מתיחה או כיווץ אנכיים. (3) הזזה אנכית.

דוגמה:



לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$. נסמן: $g(x)=\frac{1}{3}f(x)-2$.

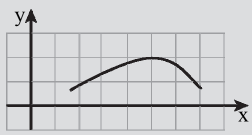
א. תארו כיצד מתקבל גרף הפונקציה $g(x)$ מגרף הפונקציה $f(x)$.
שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

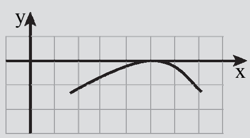
ב. הנקודה $(5;6)$ היא נקודת המקסימום של $f(x)$.
מהי הנקודה על הגרף של $g(x)$ אליה "מועתקת" נקודה זו?

ג. כיצד אפשר לקבל את הגרף של הפונקציה $h(x)=4\cdot f(x-3)$?
אין קשר לסעיפים קודמים.

פתרון:

א. גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל מגרף הפונקציה $f(x)$ בשני שלבים:
בשלב הראשון נבצע "כיווץ אנכי" של פי 3
של גרף הפונקציה $f(x)$,
ונקבל את גרף הפונקציה $\frac{1}{3}f(x)$, ראו ציור משמאל:





בשלב השני ניקח את הגרף $\frac{1}{3}f(x)$,
ונבצע הזזה אנכית שלו ב- 2 יחידות כלפי מטה,
ונקבל את גרף הפונקציה $g(x)=\frac{1}{3}f(x)-2$, כמתואר משמאל.

ב. בשלב הראשון נכפול פי $\frac{1}{3}$ את שיעור ה- y של הנקודה $(5;6)$.
שיעור ה- x לא משתנה. נקבל את הנקודה $(5;2)$. בשלב השני נבצע הזזה אנכית ב- 2 יחידות כלפי מטה, ונקבל את הנקודה $(5;0)$, שהיא נקודת המקסימום של $g(x)$.

ג. יש כאן מתיחה אנכית והזזה אופקית.
נבצע את הפעולות על פי הסדר הבא: בשלב הראשון נבצע הזזה אופקית של 3 יחידות ימינה, ונקבל את הגרף של $f(x-3)$. בשלב השני נבצע "מתיחה אנכית" של פי 4 של גרף הפונקציה $f(x-3)$, ונקבל את גרף הפונקציה $4\cdot f(x-3)$.

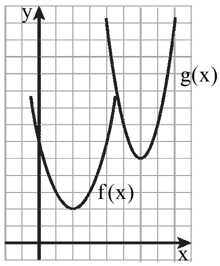
13. נתונה פונקציה $f(x)$. בסעיפים הבאים נתונה פונקציה חדשה.
תארו במילים כיצד מתקבל הגרף שלה מהגרף של $f(x)$.

א. $g(x)=4\cdot f(x)+1$. ב. $k(x)=\frac{1}{4}\cdot f(x+5)$ ג. $m(x)=4\cdot f(x-3)-1$.

14. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{2}(x+2)^3+6$.
תארו במילים כיצד מתקבל הגרף שלה מגרף הפונקציה $f(x)=x^3$.

15. גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל כאשר מזיזים את גרף הפונקציה $f(x)$ ב- 2 יחידות ימינה, אחר כך מותחים אותו מתיחה אנכית פי 3, ומזיזים אותו 3 יחידות כלפי מטה.
א. הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.
ב. נתון כי $f(x) = x^4$. הביעו את $g(x)$ באמצעות x.
ג. היעזרו בגרף הפונקציה $f(x) = x^4$, ושרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$.
ד. מצאו עבור הפונקציה $g(x)$: **(1)** נקודות אפס. **(2)** תחומי חיוביות ושליליות.
(3) נקודות קיצון. **(4)** תחומי עלייה וירידה.

16. לפניכם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
הגרף של $g(x)$ מתקבל מהגרף של $f(x)$
על ידי הזזה אופקית ואז מתיחה אנכית.
א. היעזרו בציור, ותארו במילים את ההזזות ואת המתיחה. היעזרו בנקודות המינימום.
ב. נסמן: $g(x) = a \cdot f(x-p)$. מצאו את הפרמטרים a ו- p.
ג. נתון: $g(12) = 50$. חשבו את $f(8)$.



17. נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $(6;8)$ מקסימום.
א. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, המקיימת $h(x) = 2 \cdot f(x) - 5$.
ב. נתון: $h(x) = 10$. חשבו את הערך של $f(x)$.

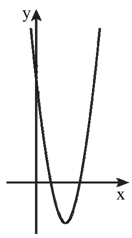
18. נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $(3;-4)$ מינימום.
א. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, המקיימת $h(x) = 4 \cdot f(x-1)$.
ב. נתון: $h(6) = 24$. חשבו את $f(5)$.
ג. נסמן: $j(x) = k \cdot f(x-1) - 3$.
שיעור ה- y של נקודת המינימום של הפונקציה $j(x)$ הוא -11. מצאו את הפרמטר k.

תשובות:

13. א. מתיחה אנכית של פי 4, והזזה של יחידה אחת כלפי מעלה.
ב. הזזה אופקית של 5 יחידות שמאלה, וכיווץ אנכי של פי 4.
ג. הזזה אופקית של 3 יחידות ימינה, מתיחה אנכית של פי 4, והזזה של 1 כלפי מטה.

14. הזזה אופקית של 2 יחידות שמאלה, כיווץ אנכי של פי 2, והזזה של 6 יחידות כלפי מעלה.

15. א. $g(x) = 3 \cdot f(x-2) - 3$. ב. $g(x) = 3(x-2)^4 - 3$. ג.



ד. **(1)** $(3;0)$, $(1;0)$.
(2) חיוביות: $x > 3$ או $x < 1$, שליליות: $1 < x < 3$.
(3) $(2;-3)$ מינימום.
(4) עלייה: $x > 2$, ירידה: $x < 2$.

16. א. הזזה אופקית של 4 יחידות ימינה, מתיחה אנכית של פי 2.5. ב. $a = 2.5$, $p = 4$. ג. $f(8) = 20$.

17. א. $(6;11)$ מקסימום. ב. 7.5. **18.** א. $(4;-16)$ מינימום. ב. 6. ג. $k = 2$.

שיקוף גרף של פונקציה לעומת ציר ה- x

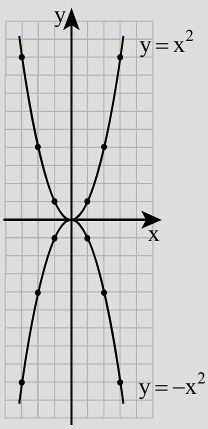
נדון עכשיו בקשר בין גרף של פונקציה $f(x)$ לבין גרף הפונקציה $g(x)$, המתקבלת כאשר כופלים ב- (-1) את הפונקציה $f(x)$. כלומר $g(x)=-1\cdot f(x)$, או בקיצור $g(x)=-f(x)$.

כפי שנראה, הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $-f(x)$ **סימטריים** זה לזה לעומת ציר ה- x.
כלומר, גרף הפונקציה $-f(x)$ הוא **שיקוף** של גרף הפונקציה $f(x)$ לעומת ציר ה- x.

נתבונן תחילה בפונקציה הריבועית הבסיסית $f(x)=x^2$.
בנוסף, נגדיר פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=-f(x)$. כלומר $g(x)=-x^2$.
נחקור את הקשר בין שתי הפונקציות באמצעות טבלת ערכים.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)=x^2$	9	4	1	0	1	4	9
$g(x)=-f(x)=-x^2$	–9	–4	–1	0	–1	–4	–9

נתבונן במשוואה $f(x)=1x^2$, ובמשוואה $g(x)=-1\cdot x^2$, ונראה שעבור **כל** x שנציב בשתי המשוואות, ערך ה- y המתקבל במשוואה $g(x)=-1\cdot x^2$ הוא **נגדי** לערך ה- y המתקבל במשוואה $f(x)=x^2$. לדוגמה: בפונקציה $f(x)=x^2$, עבור $x=2$ נקבל $y=4$, כלומר הנקודה $(2;4)$ נמצאת על גרף הפונקציה, ובפונקציה $g(x)=-1\cdot x^2$, עבור $x=2$ נקבל $y=-4$, כלומר הנקודה $(2;-4)$ נמצאת על גרף הפונקציה.
במילים אחרות, ל**כל** נקודה על הגרף של $f(x)=x^2$, "מתאימה" נקודה על הגרף של $g(x)=-x^2$, שיש לה אותו שיעור x, אך שיעור ה- y שלה נגדי.



שתי נקודות כאלה תמיד תהיינה **סימטריות** זו לזו לעומת ציר ה- x.
אפשר למצוא כמובן אינסוף זוגות של נקודות סימטריות כאלה.
המסקנה היא שהגרף של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=-f(x)=-x^2$ **סימטריים** זה לזה ביחס לציר ה- x.

דוגמאות נוספות:

(1) אם מבצעים שיקוף של גרף הפונקציה $y=-x^3+4x$ לעומת ציר ה- x, משוואת הגרף המתקבל היא $y=-(-x^3+4x)$, כלומר $y=x^3-4x$.

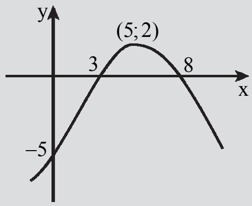
(2) אם נתונות משוואות של הפונקציות $f(x)=x^4-9$ ו- $g(x)=-x^4+9$, ניתן לראות שמתקיים $g(x)=-x^4+9=-(x^4-9)=-f(x)$.
כלומר הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ סימטריים זה לזה לעומת ציר ה- x.

נסכם: הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $-f(x)$ **סימטריים** זה לזה ביחס לציר ה- x.
אם נתון הגרף של $f(x)$, אז כדי לשרטט את הגרף של $-f(x)$, ניתן לקחת את הגרף של $f(x)$ ולבצע שיקוף שלו לעומת ציר ה- x.
כל נקודה $(x_1;y_1)$, הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, "מועתקת" לגרף הפונקציה $-f(x)$, כך שהשיקוף **אינו משנה** את שיעור ה- x שלה, ושיעור ה- y שלה **מתחלף לנגדי שלו.**
לכן שיעוריה הם $(x_1;-y_1)$.

הערה: צורת הגרף נשמרת, אך הגרף משתקף ביחס לציר ה- x.

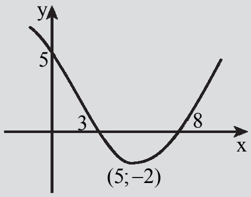
דוגמה:

לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$.
על הגרף מסומנות נקודות האפס של הפונקציה,
$(3;0)$ ו- $(8;0)$, מסומנת נקודת החיתוך עם ציר ה- y,
ששיעוריה $(0;-5)$, ומסומנת נקודת הקיצון
היחידה של הפונקציה, $(5;2)$ מקסימום.
מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=-f(x)$.
שרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



פתרון:

כאשר נתון גרף של פונקציה $f(x)$, אז כדי לשרטט
את הגרף של $g(x)=-f(x)$, לוקחים את הגרף של $f(x)$,
ומבצעים שיקוף שלו לעומת ציר ה- x.
הגרף המתקבל של הפונקציה $g(x)$ מתואר בציור שמשמאל.



נשים לב שכדי לשרטט במדויק את הגרף של $-f(x)$,
כדאי לבצע "העתקה" של כמה נקודות הנמצאות על הגרף של $f(x)$.
במידת האפשר, נבצע "העתקה" של נקודת החיתוך עם ציר ה- y, ושל נקודות הקיצון
של גרף הפונקציה $f(x)$.
בהעתקה כזו נשמור על שיעור ה- x של הנקודה, ואת שיעור ה- y נחליף לנגדי שלו.
במקרה שלפנינו: הנקודה $(0;-5)$ ""מועתקת" לנקודה $(0;5)$. הנקודה $(5;2)$ ""מועתקת"
לנקודה $(5;-2)$. נקודות האפס $(3;0)$ ו- $(8;0)$ לא משתנות, שהרי הנגדי של 0 הוא 0.

מסקנות חשובות:

(1) נקודות האפס של גרף הפונקציה $-f(x)$ זהות לנקודות האפס של גרף הפונקציה $f(x)$.
כלומר הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $-f(x)$ נפגשים בנקודות האפס שלהם.

(2) בתחום שבו הפונקציה $f(x)$ היא חיובית, כלומר הגרף שלה נמצא מעל ציר ה- x,
הפונקציה $-f(x)$ היא שלילית, כלומר הגרף שלה נמצא מתחת לציר ה- x.
באופן דומה, בתחום שבו הפונקציה $f(x)$ היא שלילית, הפונקציה $-f(x)$ היא חיובית.

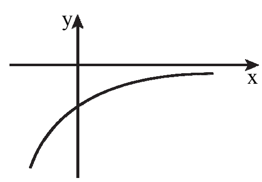
(3) בתחום שבו הפונקציה $f(x)$ עולה, הפונקציה $-f(x)$ יורדת,
ובתחום שבו הפונקציה $f(x)$ יורדת, הפונקציה $-f(x)$ עולה.

(4) נקודת מקסימום $(x_1;y_1)$ של הפונקציה $f(x)$ "מועתקת" לנקודת מינימום $(x_1;-y_1)$
של הפונקציה $-f(x)$, ונקודת מינימום $(x_1;y_1)$ של הפונקציה $f(x)$ "מועתקת"
לנקודת מקסימום $(x_1;-y_1)$ של הפונקציה $-f(x)$.

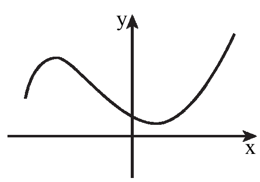
תרגילים

בכל אחד מהתרגילים הבאים מתואר גרף של פונקציה $f(x)$. שרטטו את גרף הפונקציה $-f(x)$.

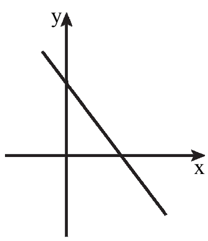
.1



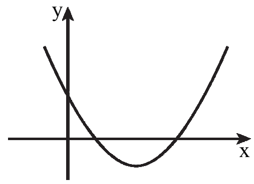
.2



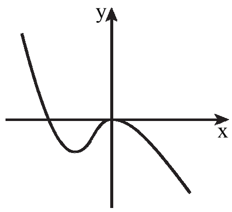
.3



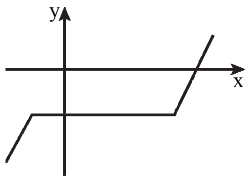
.4



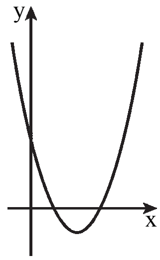
.5



.6

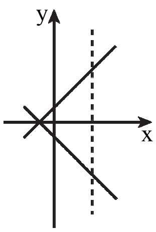


.7 לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$.



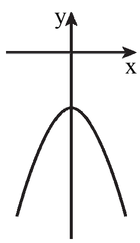
א. הוסיפו למערכת הצירים גרף של הפונקציה $g(x)$,
שסימטרי לגרף של $f(x)$ ביחס לציר ה- x .
ב. בטאו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.
ג. נתון: $f(x)=x^2-4x+3$. כתבו את משוואת הפונקציה $g(x)$.
ד. נקודת המינימום של $f(x)$ היא $(2;-1)$.
מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?
ה. כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $g(x)$ עם הישר $y=-3$?

.8 לפניכם גרפים של הפונקציות $f(x)=x+1$ ו- $g(x)=-x-1$.



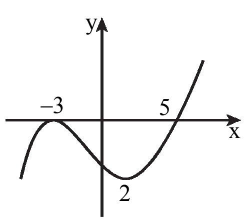
א. (1) האם מתקיים $g(x)=-f(x)$?
(2) האם שני הגרפים סימטריים זה לזה לעומת ציר ה- x ?
ב. ישר המקביל לציר ה- y חותך את הגרפים
של $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות A ו- B .
נתון: $AB=8$. מצאו את שיעורי הנקודות A ו- B .
ג. נתון הישר $y=k$. מצאו לאילו ערכים של k ,
מספר נקודות המפגש הכולל של הישר עם הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$
(1) שווה <u>יחד</u> ל- 1 . (2) שווה <u>יחד</u> ל- 2 .

.9 לפניכם גרף של פונקציה <u>זוגית</u> $f(x)$.



א. הוסיפו למערכת הצירים את גרף הפונקציה $-f(x)$.
ב. האם הפונקציה $-f(x)$ היא פונקציה זוגית? נמקו.
ג. נתון: הנקודה $(2;6)$ נמצאת על הגרף של $-f(x)$.
(1) כתבו שיעורי נקודה נוספת הנמצאת על הגרף של $-f(x)$.
(2) כתבו שיעורי שתי נקודות הנמצאות על הגרף של $f(x)$.
ד. בונים מלבן שקדקודיו הם הנקודה הנתונה ושלוש הנקודות
הנוספות שמצאתם. חשבו את אורך אלכסון המלבן.

.10 על גרף הפונקציה $f(x)$ שלפניכם מסומנות נקודות האפס
ונקודות הקיצון של הפונקציה. מגדירים פונקציה חדשה $-f(x)$.



א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $-f(x)$.
ב. מצאו עבור הפונקציה $-f(x)$:
(1) תחומי חיוביות ושליליות. (2) תחומי עלייה וירידה.
ג. עומר טוען שלפונקציות $f(x)$ ו- $-f(x)$
יש תמיד אותן נקודות אפס. האם הוא צודק?

11. נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x .

א. יואב טוען שתחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$ זהים לתחומי השליליות של הפונקציה $-f(x)$, ותחומי השליליות של $f(x)$ זהים לתחומי החיוביות של $-f(x)$.
האם הוא צודק?

ב. הפונקציה $f(x)$ חיובית בתחומים $x>4$ או $x<2$, ושלילית בתחום $2<x<4$.
מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $-f(x)$?

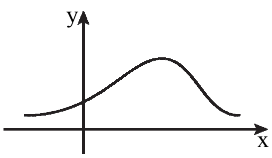
12. נתונה פונקציה $f(x)$. מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=-f(x)$.

א. לפניכם שתי טענות. בחרו את הטענה שנכונה בהכרח:
(1) שיעור ה- x של נקודת המקסימום של הפונקציה $-f(x)$,
זהה לשיעור ה- x של נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$.
(2) שיעור ה- x של נקודת המקסימום של הפונקציה $-f(x)$,
זהה לשיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.

ב. עידו טוען שתחומי העלייה של הפונקציה $f(x)$ זהים לתחומי הירידה של הפונקציה $g(x)$, ותחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$ זהים לתחומי העלייה של הפונקציה $g(x)$. האם הוא צודק?

ג. הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x>5$, ויורדת בתחום $x<5$.
כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

13. נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$,
שהגרף שלה לפניכם, היא $(3;2)$ מקסימום.



א. (1) שרטטו סקיצה של הפונקציה $-f(x)$.
(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $-f(x)$.

ב. (1) שרטטו סקיצה של הפונקציה $-f(x)+6$.
(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $-f(x)+6$.

ג. נתונה הפונקציה $h(x)=-f(x)+k$.
שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$ הוא 8 .
מצאו את הערך של k , ואת שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $10-f(x)$.

ה. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $-10-f(x)$.

14. נתונה פונקציה $f(x)$. נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה היא $(-4;6)$ מינימום.

א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x+3)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $-f(x+3)$.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $-f(x+3)+7$.
(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $7-f(x+3)$.

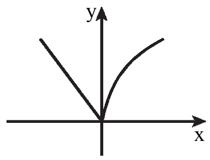
ד. נקודת הקיצון של הפונקציה $k-f(x+3)$ נמצאת על ציר ה- x . מצאו את הערך של k .

15. נתונה פונקציית החזקה $f(x)=x^3$.

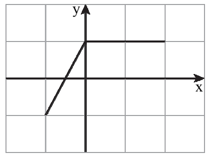
א. היעזרו בגרף של הפונקציה הנתונה, ושרטטו את גרף הפונקציה $g(x)=-x^3$.

ב. היעזרו בגרף שקיבלתם בסעיף א', ושרטטו את גרף הפונקציה $h(x)=-x^3+1$.
הסבירו באופן מילולי כיצד שרטטתם.

16. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, בתחום $-2<x<2$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=-f(x-2)$.
שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$,
בתחום $0<x<4$.



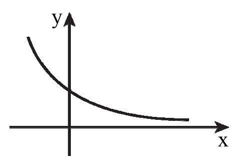
17. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$.
שרטטו את הגרפים של הפונקציות הבאות:
א. $f(x)-3$ ב. $f(x-2)$
ג. $-1+f(x+3)$ ד. $-f(x)$



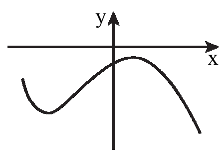
18. נתונה פונקציית המכפלה $f(x)=x^3(x-6)^3$.
א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ב. היעזרו בהתנהגות הפונקציה כאשר $x\to\infty$, וכאשר $x\to-\infty$,
ובמעריך החזקה של כל אחד מגורמי המכפלה, ושרטטו גרף אפשרי לפונקציה.
ג. נתון כי נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה הנתונה היא $(3;-729)$ מינימום.
מצאו ללא חישובים נוספים את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$,
המקיימת $g(x)=-x^3(x-6)^3$.
ד. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=f(x)+k-27$.
(1) בטאו באמצעות k, את נקודת המינימום של הפונקציה $h(x)$.
(2) לאילו ערכי k, גרף הפונקציה $h(x)$ נמצא כולו מעל הישר $y=2$?

תשובות:

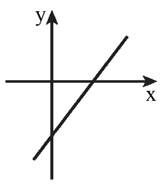
.1



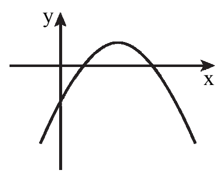
.2



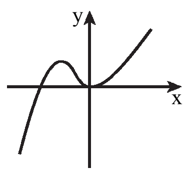
.3



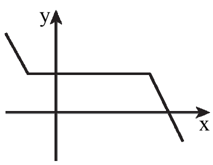
.4



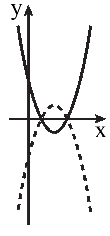
.5



.6



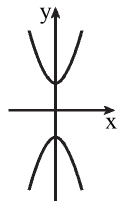
.7 א.



ב. $g(x)=-f(x)$.
ג. $g(x)=-x^2+4x-3$
ד. $(2;1)$ מקסימום.
ה. שתי נקודות חיתוך.

.8 א. **(1)** כן. **(2)** כן. ב. $(3;4)$, $(3;-4)$. ג. **(1)** $k=0$. **(2)** $k\neq0$.

9. א.

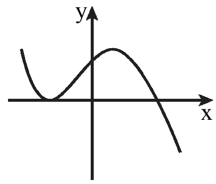


ב. כן. ג. **(1)** $(-2;6)$.

(2) $(2;-6)$, $(-2;-6)$.

ד. $\sqrt{160} = 4\sqrt{10}$.

10. א.



ב. **(1)** חיוביות: $x < 5$, $x \neq -3$, שליליות: $x > 5$.

(2) עלייה: $-3 < x < 2$,

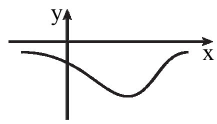
ירידה: $x > 2$ או $x < -3$.

ג. כן, עומר צודק.

11. א. כן, יואב צודק. ב. חיוביות: $2 < x < 4$, שליליות: $x > 4$ או $x < 2$.

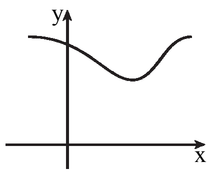
12. ב. כן, עידו צודק. ג. עלייה: $x < 5$, ירידה: $x > 5$.

13. א. **(1)**



(2) $(3;-2)$ מינימום.

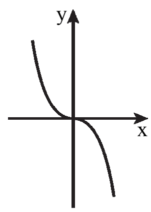
ב. **(1)**



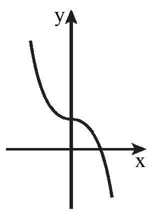
(2) $(3;4)$ מינימום.

14. א. $(-7;6)$ מינימום. ב. $(-7;-6)$ מקסימום.

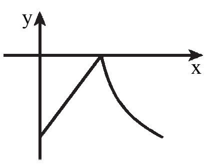
15. א.



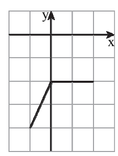
ב.



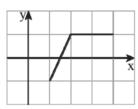
16.



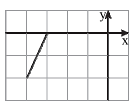
17. א.



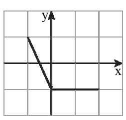
ב.



ג.

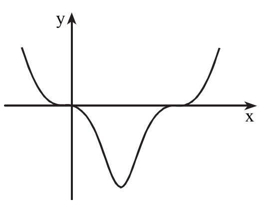


ד.



18. א. $(0;0)$, $(6;0)$.

ב.



ו. $(3;729)$ מקסימום.

ד. **(1)** $(3;k-756)$.

(2) $k > 758$.

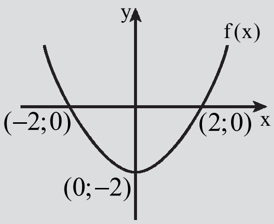
הקשר בין הגרף של $f(x)$ לגרף של $a\cdot f(x)$ עבור a שלילי

נדון עכשיו בקשר שבין גרף הפונקציה $y=f(x)$ לבין גרף הפונקציה $y=a\cdot f(x)$, כאשר הקבוע a הוא שלילי $(a<0)$.

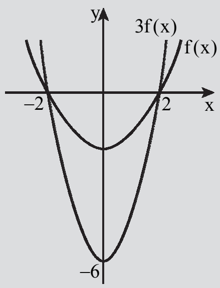
לדוגמה: על פי גרף הפונקציה $f(x)$, נשרטט את הגרף של $-3\cdot f(x)$.
הערה: למדנו מקרה אחד שבו a שלילי כאשר עסקנו בקשר שבין גרף הפונקציה $y=f(x)$ לגרף הפונקציה $y=-f(x)$, שבו $a=-1$.

פתרון שאלות אלה מסתמך בעיקר על הכלל שלמדנו לפיו הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $-f(x)$ סימטריים זה לזה ביחס לציר ה- x . באופן דומה, הגרפים של כל שתי פונקציות $a\cdot f(x)$ ו- $-a\cdot f(x)$ סימטריים זה לזה ביחס לציר ה- x .
לדוגמה: הגרפים של הפונקציות $2\cdot f(x)$ ו- $-2\cdot f(x)$ סימטריים זה לזה ביחס לציר ה- x .

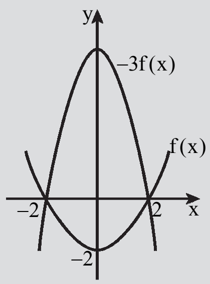
דוגמה:
על גרף הפונקציה $f(x)$ מסומנות נקודות האפס של הפונקציה, $(2;0)$ ו- $(-2;0)$, ומסומנת נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y , ששיעוריה $(0;-2)$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=-3\cdot f(x)$.
שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



פתרון:
נשרטט את גרף הפונקציה $g(x)=-3\cdot f(x)$ על פי שני השלבים הבאים:
בשלב הראשון נשרטט את הגרף של $3\cdot f(x)$ על פי הגרף של $f(x)$.
המקדם a שווה ל- 3 , כלומר הוא מספר חיובי גדול מ- 1 , ולכן הגרף של $3\cdot f(x)$ הוא "מתיחה אנכית" של הגרף של $f(x)$.



בשלב השני נשרטט את גרף הפונקציה $-3\cdot f(x)$ על פי הגרף של $3\cdot f(x)$.
נסתמך על כך שהגרפים של הפונקציות $-3\cdot f(x)$ ו- $3\cdot f(x)$ סימטריים זה לזה לעומת ציר ה- x .
הגרף המתקבל מתואר משמאל:



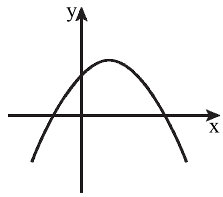
הערה:
אפשר גם לשרטט תחילה את הגרף של הפונקציה $y=-f(x)$, שהוא שיקוף של $y=f(x)$ לעומת ציר ה- x , ואחר כך לבצע "מתיחה אנכית" של פי 3 של הגרף המתקבל.
נקבל את אותו הגרף $-3\cdot f(x)$.

תרגילים

19. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$.

א. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $4\cdot f(x)$.

ב. שרטטו במערכת צירים אחת את הגרפים של $f(x)$ ו- $-4\cdot f(x)$.



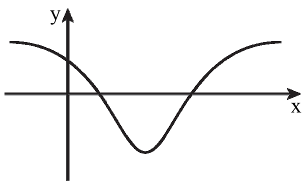
20. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$.
מכווצים את גרף הפונקציה כיווץ אנכי של פי 2.
אחר כך מבצעים לגרף שהתקבל שיקוף לעומת ציר ה- x,
ומקבלים את גרף הפונקציה $g(x)$.

א. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ב. האם $g(x)=-2\cdot f(x)$ או $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$.

ג. נקודת הקיצון היחידה של $f(x)$ היא $(6;-2)$ מינימום.
מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$?

ד. מבצעים את הפעולות על $f(x)$ בסדר הפוך: קודם מבצעים לגרף של $f(x)$ שיקוף לעומת ציר ה- x, ואז מכווצים פי 2 את גרף הפונקציה המתקבל.
האם הגרף שהתקבל הוא הגרף של $g(x)$?

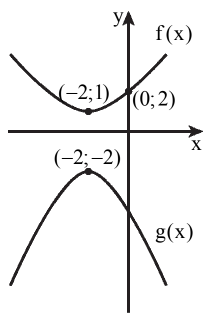


21. לפניכם גרפים של שתי פונקציות, $f(x)$ ו- $g(x)$,
המקיימות $g(x)=a\cdot f(x)$. על השרטוט מסומנות נקודות הקיצון של שתי הפונקציות, ונקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y.

א. מצאו את ערך הפרמטר a.

ב. מצאו את נקודת המפגש של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- y.

ג. נתונות שתי משוואות: $f(x)=k$ ו- $g(x)=k$.
מצאו את תחום הערכים של k, שעבורם אין פתרון למשוואה הראשונה, וגם אין פתרון למשוואה השנייה.



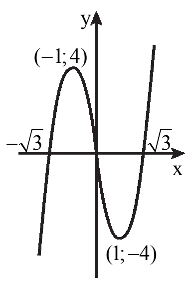
22. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=2x^3-6x$.
על הגרף מסומנות נקודות האפס ונקודות הקיצון של הפונקציה.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=-1.5\cdot f(x)$.

א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ב. מצאו עבור הפונקציה $g(x)$:
(1) תחומי חיוביות ושליליות.
(2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.

ג. מהן הנקודות המשותפות לגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$?

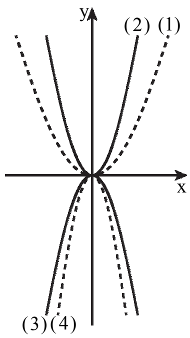
ד. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=f(x)-b$. לפונקציה $h(x)$ יש שלוש נקודות אפס.
מצאו את התחום של הפרמטר b.



23. נקודות הקיצון היחידות של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x,
הן $(-6;-4)$ מינימום, $(2;8)$ מקסימום. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=-\frac{1}{2}\cdot f(x)$.
א. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה $g(x)$.
ב. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

24. נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x.
הפונקציה $f(x)$ חיובית בתחום $-1<x<3$, ושלילית בתחומים $x>3$ או $x<-1$.
הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x<1$, ויורדת בתחום $x>1$.
מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=-\frac{2}{3}\cdot f(x)$.
א. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.
ב. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

25. לפניכם ארבעה גרפים: שניים רציפים שמשוואותיהם
$f(x)=x^2$ ו- $g(x)=-x^2$, ושניים מקווקווים.
משוואת גרף **(1)** המקווקו היא $y=kx^2$,
ומשוואת גרף **(4)** המקווקו היא $y=mx^2$.
א. בחרו מהו התחום של הפרמטר k:
(1) $k>1$. **(2)** $0<k<1$. **(3)** $k<0$.
ב. בחרו מהו התחום של הפרמטר m:
(1) $m>0$. **(2)** $-1<m<0$. **(3)** $m<-1$.



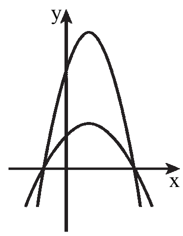
26. נקודת הקיצון היחידה של פונקציה $f(x)$ היא $(7;-6)$ מקסימום.
א. תארו במילים כיצד מתקבל גרף הפונקציה $-\frac{1}{3}\cdot f(x)+2$ מהגרף של $f(x)$.
ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $-\frac{1}{3}\cdot f(x)+2$.
ג. נתון כי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)=-\frac{1}{3}\cdot f(x)+m+3$ נמצאת על ציר ה- x.
מצאו את הערך של m.

27. א. מצאו את נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)=x^2+4x+6$.
ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=-2\cdot f(x)-5$.
(1) תארו במילים כיצד מתקבל הגרף של $g(x)$ מהגרף של $f(x)$.
(2) מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=-\frac{1}{2}\cdot f(x+3)+6$.
(1) מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגה. אין צורך בחישובים.
(2) מצאו את נקודת המפגש של הפונקציה $h(x)$ עם ציר ה- y.

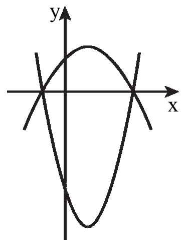
28. נקודת הקיצון היחידה של פונקציה $f(x)$ היא $(5;8)$ מקסימום.
א. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $-3\cdot f(x-2)$?
ב. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $-3\cdot f(x-2)+5$?
ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=-3\cdot f(x-2)+b$.
שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$ הוא 11.
מצאו את הערך של b, ואת שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

תשובות:

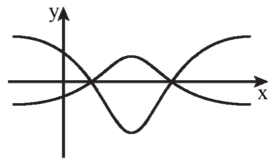
19. א.



ב.



20. א.



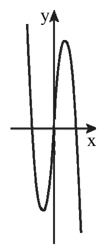
ב. $g(x)=-\frac{1}{2}f(x)$.

ג. $(6;1)$ מקסימום.

ד. כן, הגרפים זהים.

21. א. $a=-2$. ב. $(0;-4)$.

22. א.



ב. (1) חיוביות: $0<x<\sqrt{3}$ או $x<-\sqrt{3}$,

שליליות: $x>\sqrt{3}$ או $-\sqrt{3}<x<0$.

(2) $(1;6)$ מקסימום, $(-1;-6)$ מינימום.

(3) עלייה: $-1<x<1$,

ירידה: $x>1$ או $x<-1$.

ג. $(\sqrt{3};0)$, $(0;0)$, $(-\sqrt{3};0)$.

23. א. $(-6;2)$ מקסימום, $(2;-4)$ מינימום. ב. עלייה: $x>2$ או $x<-6$, ירידה: $-6<x<2$.

24. א. חיוביות: $x>3$ או $x<-1$, שליליות: $-1<x<3$. ב. עלייה: $x>1$, ירידה: $x<1$.

25. א. $0<k<1$. ב. $m<-1$.

26. א. תחילה נתאר כיצד מתקבל הגרף של $-\frac{1}{3}\cdot f(x)$: מבצעים כיווץ אנכי של פי 3 לגרף של $f(x)$, ואז מבצעים לגרף שהתקבל שיקוף לעומת ציר ה- x (אפשר גם קודם שיקוף ואז כיווץ). אחר כך מזיזים את הגרף שהתקבל 2 יחידות כלפי מעלה. ב. $(7;4)$ מינימום. ג. $m=-5$.

27. א. $(-2;2)$ מינימום.

ב. (1) תחילה נתאר כיצד מתקבל הגרף של $-2\cdot f(x)$: מבצעים מתיחה אנכית של פי 2 לגרף של $f(x)$, ואז מבצעים לגרף שהתקבל שיקוף לעומת ציר ה- x (אפשר גם קודם שיקוף ואז מתיחה). אחר כך נזיז את הגרף שהתקבל 5 יחידות כלפי מטה. (2) $(-2;-9)$ מקסימום.

ג. (1) $(-5;5)$ מקסימום. (2) $(0;-7.5)$.

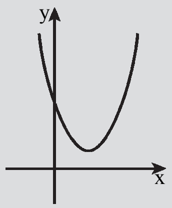
28. א. $(7;-24)$ מינימום. ב. $(7;-19)$ מינימום. ג. $b=35$, $(7;11)$ מינימום.

שיקוף גרף של פונקציה לעומת ציר ה- y

נדון עכשיו בקשר שבין גרף של פונקציה $f(x)$ לבין גרף הפונקציה $g(x)$,
המתקבל כאשר כופלים ב- (-1) את המשתנה x של הפונקציה $f(x)$.
כלומר $g(x)=f(-1\cdot x)$, או בקיצור $g(x)=f(-x)$.

כפי שנראה, הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f(-x)$ **סימטריים** זה לזה לעומת ציר ה- y .
כלומר, גרף הפונקציה $f(-x)$ הוא **שיקוף** של גרף הפונקציה $f(x)$ לעומת ציר ה- y .

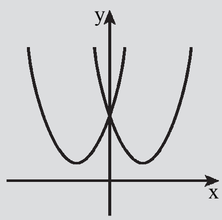
דוגמה:



בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x)=x^2-4x+5$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(-x)$.
א. הביעו את $g(x)$ באמצעות x .
ב. הוסיפו למערכת הצירים את גרף הפונקציה $g(x)$.
ג. מה תוכלו לומר על הקשר בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

פתרון:

א. הפונקציה היא $f(x)=x^2-4x+5$. כדי להביע את $f(-x)$, נציב $(-x)$
במקום x במשוואת הפונקציה $f(x)$. נקבל: $f(-x)=(-x)^2-4(-x)+5$
$f(-x)=x^2+4x+5$
משוואת הפונקציה $g(x)=f(-x)$ היא $g(x)=x^2+4x+5$.



ב. נשרטט באותה מערכת צירים את הגרפים
של $f(x)=x^2-4x+5$ ו- $g(x)=x^2+4x+5$.
נוכל לעשות זאת בעזרת טבלת ערכים.
הגרפים מתוארים בשרטוט שמשמאל.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)=x^2-4x+5$	37	26	17	10	5	2	1	2	5
$g(x)=x^2+4x+5$	5	2	1	2	5	10	17	26	37

ג. על פי טבלת הערכים, אם נציב בפונקציה $f(x)$ ערך x מסוים,
ובפונקציה $g(x)$ נציב ערך x ה**נגדי** לו, נקבל אותו ערך של y .
לדוגמה: בפונקציה $f(x)$, עבור $x=3$ נקבל $y=2$.
בפונקציה $g(x)$, עבור $x=-3$ (שהוא ערך x **נגדי** ל- $x=3$) נקבל גם כן $y=2$.

כלומר, הנקודה $(3;2)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, והנקודה $(-3;2)$ נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. באופן דומה, הנקודה $(1;2)$ נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$,
והנקודה $(-1;2)$ נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$.

למעשה, ל**כל** נקודה על הגרף של $f(x)$, "מתאימה" נקודה על הגרף של $g(x)$,
שיש לה אותו שיעור y , אך שיעור ה- x שלה נגדי.
שתי נקודות כאלה תמיד תהיינה **סימטריות** זו לזו לעומת ציר ה- y .

המסקנה היא שהגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f(-x)$ **סימטריים** זה לזה ביחס לציר ה- y .

נסכם: הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $f(-x)$ **סימטריים** זה לזה ביחס לציר ה- y.
אם נתון הגרף של $f(x)$, אז כדי לשרטט את הגרף של $f(-x)$, ניתן לקחת את הגרף של $f(x)$ ולבצע שיקוף שלו לעומת ציר ה- y.

כל נקודה $(x_1;y_1)$, הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, "מועתקת" לגרף הפונקציה $f(-x)$, כך שהשיקוף **אינו משנה** את שיעור ה- y שלה, ושיעור ה- x שלה **מתחלף לנגדי שלו.**
לכן שיעוריה הם $(-x_1;y_1)$.

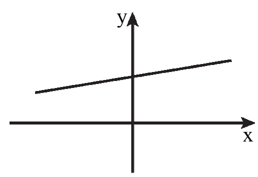
הערה: צורת הגרף נשמרת, אך הגרף משתקף ביחס לציר ה- y.
לגרפים $f(x)$ ו- $f(-x)$ יש **אותה נקודת מפגש** עם ציר ה- y.

הערות:
א. נשים לב שגרף הפונקציה $-f(x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ לעומת ציר ה- x, ואילו גרף הפונקציה $f(-x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ לעומת ציר ה- y.
ב. נזכיר ש**פונקציה זוגית** מקיימת בכל תחום הגדרתה $f(-x)=f(x)$.
אנו יודעים שגרף של פונקציה זוגית סימטרי ביחס לציר ה- y.
לכן אם נשרטט עבור פונקציה זוגית $f(x)$ את הגרף של $f(-x)$, כלומר נבצע שיקוף של הגרף שלה לעומת ציר ה- y, נקבל גרף זהה לחלוטין לגרף הנתון של $f(x)$.
במילים אחרות, עבור פונקציה זוגית $f(x)$, הגרף של $f(-x)$ זהה לחלוטין לגרף של $f(x)$.

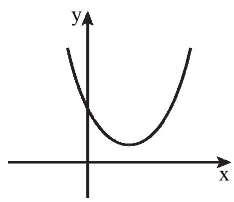
תרגילים

בכל אחד מהתרגילים הבאים מתואר גרף של פונקציה $f(x)$. שרטטו את גרף הפונקציה $f(-x)$.

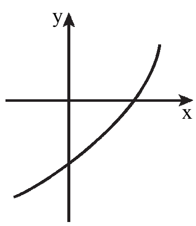
.1



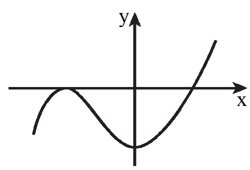
.2



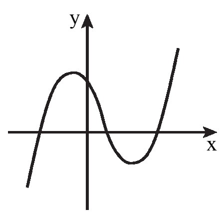
.3



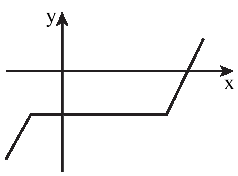
.4



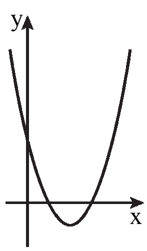
.5



.6



.7 נתון גרף הפונקציה $f(x)=x^2-4x+3$. נסמן: $g(x)=f(-x)$.
א. כתבו את משוואת הפונקציה $g(x)$ באמצעות x.
ב. הוסיפו למערכת הצירים את גרף הפונקציה $g(x)$.
ג. מצאו את נקודת המינימום של $f(x)$, ואת נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
ד. כמה נקודות חיתוך בסך הכול יש לישר $y=3$ עם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ <u>יחד</u>?
ה. האם לפונקציות $f(x)$ ו- $f(-x)$ יש תמיד אותה נקודת מפגש עם ציר ה- y?



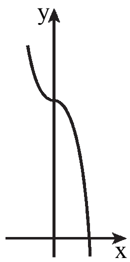
8. נתונה הפונקציה $f(x)=3x+2$.

א. הביעו את משוואת הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(-x)$.

ב. הנקודה $A(k;8)$ נמצאת על הגרף של $f(x)$. מצאו את הערך של k .

ג. מצאו ללא חישובים נקודה הנמצאת על הגרף של $g(x)$ ושיעור ה- y שלה גם הוא 8 .

9. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=-x^3+8$. מגדירים פונקציה $g(x)$, שהגרף שלה סימטרי לגרף של הפונקציה $f(x)$ לעומת ציר ה- y .



א. הוסיפו לשרטוט את גרף הפונקציה $g(x)$.

ב. הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.

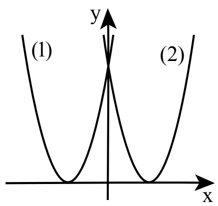
ג. הביעו את הפונקציה $g(x)$ באמצעות x .

ד. ישר המקביל לציר ה- x חותך את הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות A ו- B . נתון: $AB=8$. מצאו את שיעורי הנקודות A ו- B :

(1) אם הקטע AB נמצא מעל הנקודה $(0;8)$.

(2) אם הקטע AB נמצא מתחת לנקודה $(0;8)$.

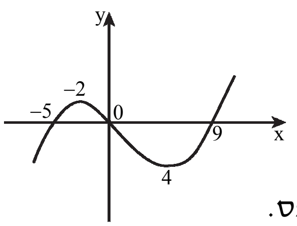
10. נתונה הפונקציה $f(x)=(3-x)^2$. גרף הפונקציה $g(x)$ סימטרי לגרף הפונקציה $f(x)$ לעומת ציר ה- y .



א. מצאו את משוואת הפונקציה $g(x)$.

ב. לפניכם שני גרפים המסומנים **(1)** ו-**(2)**. התאימו כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ לאחד הגרפים הנתונים.

11. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, עליו מסומנים שיעורי ה- x של נקודות האפס, ושל נקודות הקיצון של הפונקציה.



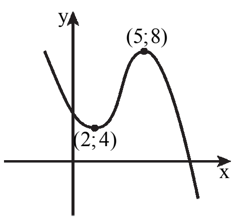
א. שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(-x)$.

ב. מצאו עבור $f(-x)$:

(1) תחומי חיוביות ושליליות. **(2)** תחומי עלייה וירידה.

ג. ינאי טוען שלפונקציות $f(x)$ ו- $f(-x)$ יש תמיד אותן נקודות אפס. האם הוא צודק? נמקו.

12. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$, שנקודות הקיצון שלו הן $(2;4)$ מינימום, $(5;8)$ מקסימום. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(-x)$.



א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו עבור כל אחת מהן האם היא מינימום או מקסימום.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

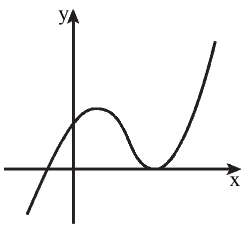
ג. קבעו האם הטענה הבאה היא נכונה או לא נכונה: תחומי העלייה של $f(x)$ זהים לתחומי הירידה של $f(-x)$.

ד. נתון הישר $y=k$.

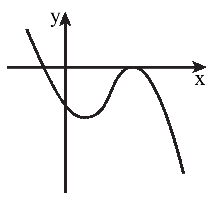
קבעו נכון או לא נכון: מספר נקודות המפגש של הישר עם גרף הפונקציה $f(x)$ שווה למספר נקודות המפגש שלו עם גרף הפונקציה $g(x)$ לכל ערך של k ? נמקו.

.13 נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x .
מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(-x)$.
א. הפונקציה $g(x)$ עולה בתחום $x>-2$, ויורדת בתחום $x<-2$.
כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
ב. קבעו האם הטענה הבאה נכונה או לא נכונה : תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ זהים לתחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(-x)$? נמקו.

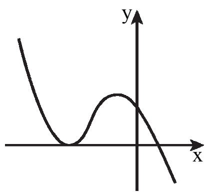
.14 בציור שמשמאל מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.
מגדירים שתי פונקציות נוספות :
הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=-f(x)$.
הפונקציה $h(x)$, המקיימת $h(x)=f(-x)$.
לפניכם שני גרפים, (1) ו-(2).
אחד מהם מתאר את הפונקציה $g(x)$,
והשני מתאר את הפונקציה $h(x)$.



(1)

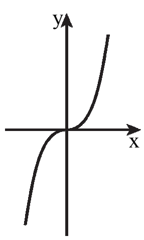


(2)



א. קבעו איזה מהגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$, ואיזה מתאר את הפונקציה $h(x)$. נמקו.
ב. נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה- x .
הביעו באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

.15 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^3$.



א. נגדיר פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=-f(x)$.
שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ב. נגדיר פונקציה $h(x)$, המקיימת $h(x)=f(-x)$.
(1) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
(2) הביעו את $h(x)$ באמצעות x .
ג. האם במקרה שלפנינו מתקיים $f(-x)=-f(x)$?
ד. עידו טוען שאם הפונקציה $h(x)$ היא אי זוגית, אז הגרפים של הפונקציות $-f(x)$ ו- $f(-x)$ מתלכדים זה עם זה. האם הוא צודק? היעזרו בתשובותיכם לסעיפים קודמים.

שימו לב!
כדי לשרטט את גרף הפונקציה $f(-x+m)$, על פי הגרף $f(x)$, נפעל על פי השלבים הבאים :
א. נשרטט את הגרף של $g(x)=f(x+m)$ כהזזה אופקית של הגרף של $f(x)$.
ב. נשרטט את הגרף של $g(-x)=f(-x+m)$ כשיקוף לעומת ציר ה- y של הגרף של $f(x+m)$.

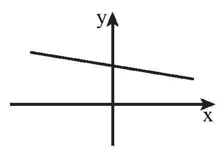
16. נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $(-4;7)$ מינימום.
א. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(-x)$?
ב. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(-x)+4$?
ג. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$ המקיימת $h(x)=f(x-3)$?
ד. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(-x)$ המקיימת $h(-x)=f(-x-3)$?

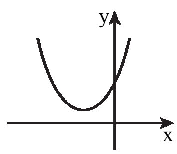
17. נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $(3;2)$ מקסימום.
א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(-x)$.
ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $-f(-x)$.
ג. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $-f(-x)+2$.
ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $8-f(-x)$.
ה. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$ המקיימת $h(x)=f(x+7)$?
ו. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(-x)$ המקיימת $h(-x)=f(-x+7)$?
ז. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(7-x)$?

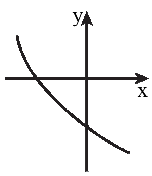
18. נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $(3;-7)$ מינימום.
א. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(-x+9)$?
ב. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(-x-6)$?
ג. מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $-f(-x-6)$?

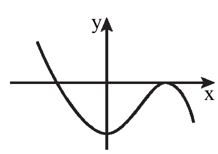
שרטטו בעזרת תוכנת מחשב גרף שסימטרי לגרף נתון $f(x)$.
הסימטריה היא לעומת ציר ה- x , או לעומת ציר ה- y , לבחירתכם.
סרקו את הקוד המצורף. מומלץ!

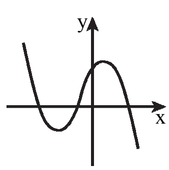
תשובות:

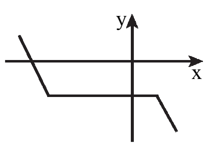
1.


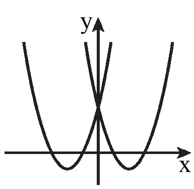
2.


3.


4.


5.


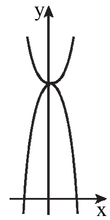
6.


7. א. $g(x)=x^2+4x+3$.
ב.


ג. $(2;-1)$ מינימום, $(-2;-1)$ מינימום.
ד. שלוש נקודות חיתוך.
ה. כן.

8. א. $g(x)=-3x+2$. **ב.** $k=2$. **ג.** $(-2;8)$.

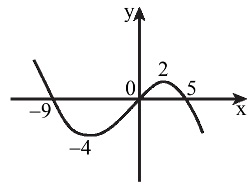
9. א.



ב. $g(x)=f(-x)$.
ג. $g(x)=x^3+8$.
ד. (1) $(4;72)$, $(-4;72)$.
(2) $(4;-56)$, $(-4;-56)$.

10. א. $g(x)=(3+x)^2$. **ב.** $f(x)$ - **(2)**, $g(x)$ - **(1)**.

11. א.



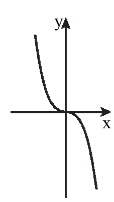
ב. **(1)** חיוביות: $0<x<5$ או $x<-9$.
שליליות: $x>5$ או $-9<x<0$.
(2) עלייה: $-4<x<2$, ירידה: $x>2$ או $x<-4$.
ג. לא, ינאי טועה.

12. א. $(-2;4)$ מינימום, $(-5;8)$ מקסימום. ב. עלייה: $x>-2$ או $x<-5$, ירידה: $-5<x<-2$.
ג. הטענה לא נכונה. ד. נכון.

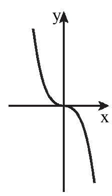
13. א. עלייה: $x>2$, ירידה: $x<2$. ב. הטענה אינה נכונה.

14. א. גרף **(1)** סימטרי לגרף של $f(x)$ לעומת ציר ה- x , לכן הוא מתאים ל- $g(x)=-f(x)$,
ואילו גרף **(2)** סימטרי לגרף של $f(x)$ לעומת ציר ה- y , לכן הוא מתאים ל- $h(x)=f(-x)$.
ב. $2\cdot S$.

15. א.



ב. (1)



(2) $h(x)=(-x)^3=-x^3$

ג. כן. ד. כן, עידו צודק.

16. א. $(4;7)$ מינימום. ב. $(4;11)$ מינימום. ג. $(-1;7)$ מינימום. ד. $(1;7)$ מינימום.

17. א. $(-3;2)$ מקסימום. ב. $(-3;-2)$ מינימום. ג. $(-3;0)$ מינימום. ד. $(-3;6)$ מינימום.
ה. $(-4;2)$ מקסימום. ו. $(4;2)$ מקסימום. ז. $(4;2)$ מקסימום.

18. א. $(6;-7)$ מינימום. ב. $(-9;-7)$ מינימום. ג. $(-9;7)$ מקסימום.

מתיחה אופקית או כיווץ אופקי של גרף של פונקציה

נדון עכשיו בקשר שבין גרף הפונקציה $y=f(x)$ לבין גרף הפונקציה $y=f(k\cdot x)$,
המתקבל כאשר כופלים ב- k את המשתנה x של הפונקציה $f(x)$.
המטרה היא להבין את משמעות הפרמטר k .

נתחיל מ- k חיובי ($k>0$). במקרה כזה יש שתי אפשרויות :

(1) כאשר $k>1$, גרף הפונקציה $y=f(k\cdot x)$ הוא **"כיווץ אופקי"** של גרף הפונקציה $y=f(x)$.

לדוגמה: כדי לשרטט את גרף הפונקציה $y=f(2\cdot x)$, כל נקודה $(x_1;y_1)$, הנמצאת על הגרף של $f(x)$, "מועתקת" לגרף של $f(2\cdot x)$, כך ששיעור ה- y שלה אינו משתנה, אך שיעור ה- x מחולק ב- 2 . הנקודה המתקבלת על הגרף של $f(2\cdot x)$ היא $(\frac{x_1}{2};y_1)$.

(2) כאשר $0<k<1$, גרף הפונקציה $y=f(k\cdot x)$ הוא **"מתיחה אופקית"** של גרף הפונקציה $y=f(x)$.

לדוגמה: כדי לשרטט את גרף הפונקציה $y=f(\frac{1}{2}\cdot x)$, כל נקודה $(x_1;y_1)$, הנמצאת על הגרף של $f(x)$, "מועתקת" לגרף של $f(\frac{1}{2}\cdot x)$, כך ששיעור ה- y שלה אינו משתנה, אך שיעור ה- x מחולק ב- $\frac{1}{2}$, כלומר מוכפל פי 2 .

הנקודה המתקבלת על הגרף של $y=f(\frac{1}{2}\cdot x)$ היא $(2\cdot x_1;y_1)$.

הערות:

א. **נקודות הקיצון** של הפונקציות $f(x)$ ו- $f(k\cdot x)$ זהות בשיעור ה- y שלהן, אך שונות בשיעור ה- x שלהן. נקודת קיצון $(x_1;y_1)$ של $f(x)$, "מועתקת" לגרף של $f(k\cdot x)$, כך שהיא שומרת על סוג הקיצון, ושיעוריה הם $(\frac{x_1}{k};y_1)$.

ב. מתיחה/כיווץ אופקיים **משנים** את צורת הגרף, ולא רק את מיקומו במערכת הצירים.

ג. מתיחה או כיווץ אופקיים **אינם משנים** את נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y .

ד. הגרפים של הפונקציות $f(k\cdot x)$ ו- $f(-k\cdot x)$ **סימטריים** זה לזה לעומת ציר ה- y .
כלומר, גרף הפונקציה $f(-k\cdot x)$ הוא **שיקוף** של גרף הפונקציה $f(k\cdot x)$ לעומת ציר ה- y .

תרגילים

1. נתונה הפונקציה $f(x)=2x+1$. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(3x)$.

א. הביעו את $g(x)$ באמצעות x .

ב. מצאו את שיעור ה- x של נקודה A , הנמצאת על הגרף של $f(x)$ ושיעור ה- y שלה הוא 25 .

ג. מצאו את שיעור ה- x של נקודה B , הנמצאת על הגרף של $g(x)$ ושיעור ה- y שלה הוא 25 .

ד. הקיפו את התשובה הנכונה :
שיעור ה- x של נקודה B גדול/קטן פי 3 משיעור ה- x של נקודה A .

ה. **(1)** מצאו את שיעור ה- x של נקודה הנמצאת על הגרף של $f(x)$, ואת שיעור ה- x של נקודה הנמצאת על הגרף של $g(x)$, ששיעור ה- y שלהן הוא k .
(2) הראו ששיעור ה- x של הנקודה שקיבלתם בתת סעיף **(1)**, הנמצאת על הגרף של $g(x)$ קטן פי 3 משיעור ה- x של הנקודה שקיבלתם בתת סעיף **(1)**, הנמצאת על הגרף של $f(x)$.

ו. בחרו : הגרף של $g(x)$ הוא מתיחה אופקית/כיווץ אופקי של פי 3 של הגרף של $f(x)$.

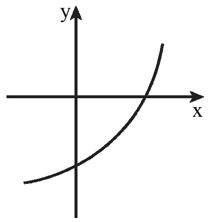
.2 בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x . הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(2x)$.

א. נקודת האפס של הפונקציה $f(x)$ היא $(4;0)$. מהי נקודת האפס של הפונקציה $g(x)$?

ב. נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y היא $(0;-4)$.
מהי נקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- y ?

ג. הוסיפו למערכת הצירים את הגרף של $g(x)$.

ד. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=f(\frac{1}{2}x)$.
(1) מהי נקודת האפס של הפונקציה $h(x)$?
(2) הוסיפו למערכת הצירים את הגרף של $h(x)$.



.3 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^2-4x+3$.

א. מצאו את שיעורי נקודות המפגש של $f(x)$ עם הצירים.

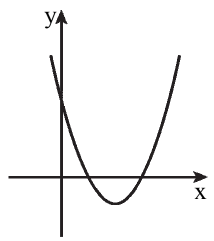
ב. מצאו את שיעורי נקודת המינימום של $f(x)$.

ד. מצאו את נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)=f(3x)$.

ה. עידו טוען שלפונקציות $f(x)$ ו- $f(3x)$ יש אותה
נקודת מפגש עם ציר ה- y . האם הוא צודק?

ו. הוסיפו למערכת הצירים את גרף הפונקציה $g(x)$.

ז. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=f(\frac{1}{3}x)$. הוסיפו למערכת הצירים את הגרף של $h(x)$.



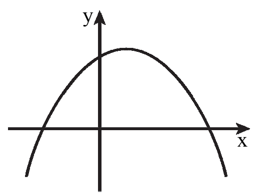
.4 בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x . נקודות האפס של הפונקציה הן $(-2;0)$ ו- $(6;0)$. לפונקציה נקודת קיצון אחת והיא $(2;3)$ מקסימום.

א. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(4x)$.
(1) מהן נקודות האפס של הפונקציה $g(x)$?
(2) רשמו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
(3) רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ב. הוסיפו למערכת הצירים את גרף הפונקציה $g(x)=f(4x)$.

ג. השלימו את הטענה כך שתהיה נכונה:
כדי לשרטט את הגרף של $f(4x)$, לוקחים את הגרף של $f(x)$:
(1) ומחלקים ב- 4 את שיעור ה- x של כל נקודה שעליו (מבלי לשנות את שיעור ה- y שלה).
(2) וכופלים ב- 4 את שיעור ה- x של כל נקודה שעליו (מבלי לשנות את שיעור ה- y שלה).

ד. רשמו את נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)=f(-4x)$.



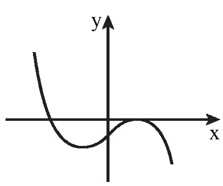
.5 לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, רציפה לכל x . נקודות האפס של הפונקציה $f(x)$ הן $(1;0)$ ו- $(-3;0)$, ונקודות הקיצון שלה הן $(1;0)$ מקסימום ו- $(-1;-1)$ מינימום.

א. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(\frac{1}{3}x)$.
(1) מהן נקודות האפס של הפונקציה $g(x)$?
(2) רשמו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.

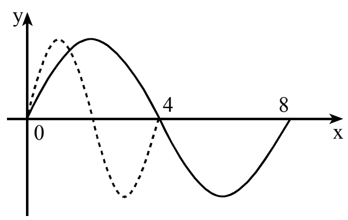
ב. הוסיפו למערכת הצירים את גרף הפונקציה $g(x)=f(\frac{1}{3}x)$.

ג. השלימו את הטענה כך שתהיה נכונה:
כדי לשרטט את הגרף של $f(\frac{1}{3}x)$, לוקחים את הגרף של $f(x)$:
(1) ומחלקים ב- 3 את שיעור ה- x של כל נקודה שעליו (מבלי לשנות את שיעור ה- y שלה).
(2) וכופלים ב- 3 את שיעור ה- x של כל נקודה שעליו (מבלי לשנות את שיעור ה- y שלה).

ד. רשמו את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)=-f(\frac{1}{3}x)$.

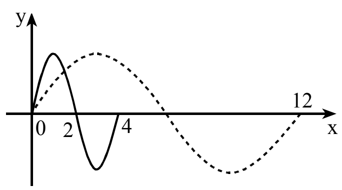


6. לפניכם גרפים של שתי פונקציות.



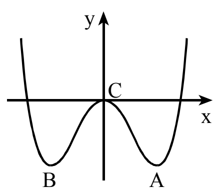
הגרף הרציף מתאר את הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x \le 8$.
הגרף המקווקו מתאר בתחום $0 \le x \le 4$
את הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = f(kx)$.
א. האם הגרף המקווקו הוא מתיחה אופקית,
או כיווץ אופקי של הגרף הרציף?
ב. האם הגרף המקווקו מתאר את הפונקציה $f(2x)$
או מתאר את הפונקציה $f(\frac{1}{2}x)$? נמקו.
ג. כתבו את תחומי החיוביות ותחומי השליליות של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \le x \le 4$.

7. לפניכם גרפים של שתי פונקציות.



הגרף הרציף מתאר את הפונקציה $f(x)$ בתחום $0 \le x \le 4$.
הגרף המקווקו מתאר בתחום $0 \le x \le 12$
את הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = f(kx)$.
א. האם הגרף המקווקו הוא מתיחה אופקית,
או כיווץ אופקי של הגרף הרציף?
ב. האם הגרף המקווקו מתאר את הפונקציה $f(3x)$
או מתאר את הפונקציה $f(\frac{1}{3}x)$? נמקו.
ג. כתבו את תחומי החיוביות ותחומי השליליות של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0 \le x \le 12$.

8. בציור שלפניכם מתואר גרף של פונקציה **זוגית** $f(x)$, המוגדרת לכל x .



נקודות הקיצון של הפונקציה הן $A(x_1;y_1)$, $B(-x_1;y_1)$ ו- $C(0;0)$.
נסמן ב- S את שטח המשולש ABC .
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = f(3x)$.
מחברים את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומקבלים משולש.
א. האם שטח המשולש שהתקבל גדול, קטן או שווה ל- S ?
ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש שהתקבל.

9. נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x .
א. לוקחים את הגרף של $f(x)$, וכופלים פי 5 את שיעור ה- x של כל נקודה שעליו
(מבלי לשנות את שיעור ה- y שלה), כדי לקבל את גרף הפונקציה $g(x)$.
הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.
ב. לוקחים את הגרף של $f(x)$, וכופלים פי 5 את שיעור ה- y של כל נקודה שעליו
(מבלי לשנות את שיעור ה- x שלה), כדי לקבל את גרף הפונקציה $h(x)$.
הביעו את $h(x)$ באמצעות $f(x)$.
ג. לוקחים את הגרף של $f(x)$ וכופלים פי k ($k > 0$) את שיעור ה- y של כל אחת מהנקודות
שעליו (מבלי לשנות את שיעור ה- x שלה). דני טוען שמתקבל גרף הפונקציה $f(kx)$.
שלומי טוען שמתקבל גרף הפונקציה $kf(x)$. מי מהם צודק?

.10 נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל x.

א. לוקחים את הגרף של $f(x)$, ומחלקים ב-3 את שיעור ה-x של כל נקודה שעליו (מבלי לשנות את שיעור ה-y שלה), כדי לקבל את גרף הפונקציה $g(x)$.
הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.

ב. לוקחים את הגרף של $f(x)$, ומחלקים ב-3 את שיעור ה-y של כל נקודה שעליו (מבלי לשנות את שיעור ה-x שלה), כדי לקבל את גרף הפונקציה $h(x)$.
הביעו את $h(x)$ באמצעות $f(x)$.

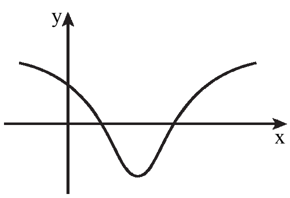
ג. לוקחים את הגרף של $f(x)$ וכופלים פי k ($k>0$) את שיעור ה-x של כל אחת מנקודות שעליו (מבלי לשנות את שיעור ה-y שלה). דני טוען שמתקבל גרף הפונקציה $f(kx)$.
שלומי טוען שמתקבל הגרף של הפונקציה $f(\frac{x}{k})$. מי מהם צודק?

.11 נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x. הנקודה $(x_1;y_1)$ היא נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה והיא מסוג מינימום. בכל אחד מהסעיפים הבאים רשומה פונקציה.
רשמו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוג הקיצון:

א. $k\cdot f(x)$, $k>0$.　　ב. $k\cdot f(x)$, $k<0$.

ג. $f(kx)$, $k>0$.　　ד. $f(-kx)$, $k>0$.

.12 לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$. <u>מכווצים</u> את גרף הפונקציה כיווץ אופקי של פי 2, ומתקבל הגרף של הפונקציה $g(x)$.



א. (1) הוסיפו למערכת הצירים את גרף הפונקציה $g(x)$.
(2) הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.

ב. מבצעים לגרף של $g(x)$ שיקוף לעומת ציר ה-x, ומקבלים את גרף הפונקציה $h(x)$.
(1) הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.
(2) שרטטו באותה מערכת צירים את הגרפים של $f(x)$ ו-$h(x)$.

ג. מבצעים את הפעולות על $f(x)$ בסדר הפוך: קודם מבצעים לגרף של $f(x)$ שיקוף לעומת ציר ה-x, ואז מבצעים כיווץ אופקי של פי 2 לגרף המתקבל.
האם הגרף שהתקבל הוא הגרף של $h(x)$? נמקו.

ישנם מקרים שבהם נשלב הזזה או מתיחה או כיווץ <u>אנכיים</u> של גרף של פונקציה עם הזזה או כיווץ או מתיחה אופקיים שלו.
במקרים כאלה, **עדיף לבצע את הפעולות על פי הסדר הבא:**
(1) הזזה אופקית.　(2) מתיחה או כיווץ אופקיים.
(3) מתיחה או כיווץ אנכיים.　(4) הזזה אנכית.

.13 נקודת הקיצון היחידה של פונקציה $f(x)$ היא $(12;-9)$ מקסימום.
מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציות הבאות, וקבעו את סוגן:

א. $\frac{1}{3}\cdot f(2x)$.　　ב. $-\frac{1}{3}\cdot f(2x)$.　　ג. $-\frac{1}{3}\cdot f(2x)+5$.

שימו לב!

כדי לשרטט את גרף הפונקציה $f(k\cdot x+m)$, על פי הגרף $f(x)$, נפעל על פי השלבים הבאים:

א. נשרטט את הגרף של $f(x+m)$ כהזזה אופקית של הגרף של $f(x)$.

ב. אם k הוא חיובי, נשרטט את הגרף של $f(kx+m)$ כמתיחה אופקית או כיווץ אופקי של פי k של גרף הפונקציה $f(x+m)$. אם k שלילי, נבצע גם שיקוף לעומת ציר ה- y .

נסכם: כדי לשרטט את גרף הפונקציה $a\cdot f(kx+m)+b$, על פי הגרף $f(x)$, נפעל על פי שלבים (1) עד (4) שבעמוד הקודם: נתחיל מהזזה אופקית ומתיחה או כיווץ אופקיים כדי לשרטט את הגרף של $f(kx+m)$, ואחר כך נבצע מתיחה או כיווץ אנכיים, בהתאם להכפלה ב- a , ולבסוף הזזה אנכית בהתאם לערך של b .

14. נקודת הקיצון היחידה של פונקציה $f(x)$ היא $(8;9)$ מינימום.

א. מהם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)=f(x-2)$?

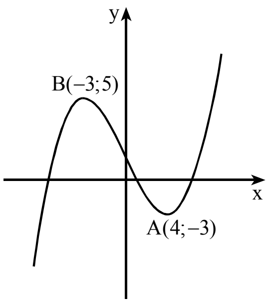
ב. תארו במילים כיצד אפשר לקבל מהגרף של $g(x)=f(x-2)$ את הגרף של $g(3x)=f(3x-2)$.

ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(3x-2)$.

ד. תארו במילים כיצד מתקבל גרף הפונקציה $f(-3x-2)$ מהגרף של $f(3x-2)$.

ה. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(-3x-2)$.

15. בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$. לפונקציה מינימום מקומי בנקודה $A(4;-3)$, ומקסימום מקומי בנקודה $B(-3;5)$.
מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות, ורשמו את סוג הקיצון:

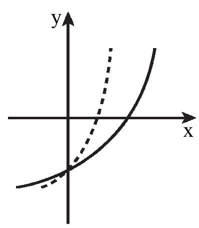


א. $f(x-1)$	ב. $f(2x-1)$	ג. $f(x+7)$
ד. $f(\frac{1}{3}x+7)$	ה. $f(-\frac{1}{3}x+7)$	ו. $-f(\frac{1}{3}x+7)$
ז. $4\cdot f(-\frac{1}{3}x+7)$	ח. $4\cdot f(-\frac{1}{3}x+7)-5$	ט. $3\cdot f(2x-1)+4$

תשובות:

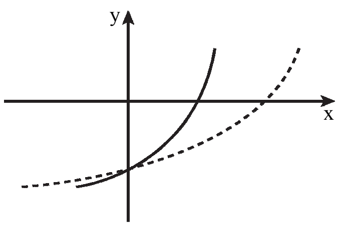
1. א. $g(x)=6x+1$. ב. 12 . ג. 4 . ד. קטן פי 3 . ה. **(1)** $f(x)$: $\frac{k-1}{2}$, $g(x)$: $\frac{k-1}{6}$. ו. כיווץ אופקי.

2. א. $(2;0)$. ג.



ב. $(0;-4)$.

ד. **(1)** $(8;0)$. **(2)**



3. א. $(1;0)$, $(3;0)$, $(0;3)$.

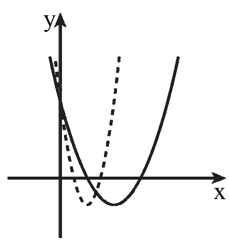
ב. $(2;-1)$.

ג. $g(x)=9x^2-12x+3$.

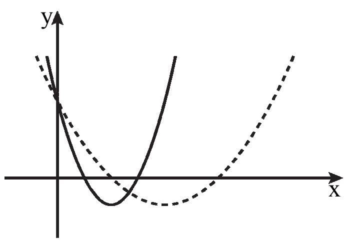
ד. $(\frac{2}{3};-1)$.

ה. כן, עידו צודק.

ו.

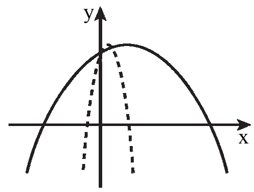


ז.



4. א. **(1)** $(-\frac{1}{2};0)$, $(1\frac{1}{2};0)$.
(2) $(\frac{1}{2};3)$ מקסימום.
(3) עלייה : $x<\frac{1}{2}$,
ירידה : $x>\frac{1}{2}$.

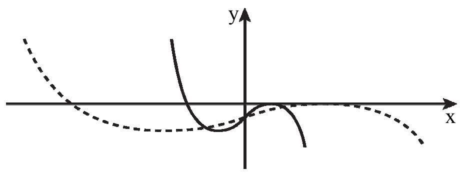
ב.



ג. **(1)**. ד. $(-\frac{1}{2};3)$ מקסימום.

5. א. **(1)** $(3;0)$, $(-9;0)$.
(2) $(3;0)$ מקסימום ו- $(-3;-1)$ מינימום.

ב.



ג. **(2)**.
ד. $(3;0)$ מינימום ו- $(-3;1)$ מקסימום.

6. א. כיווץ אנכי. ב. $f(2x)$. ג. חיוביות : $0<x<2$, שליליות : $2<x<4$.

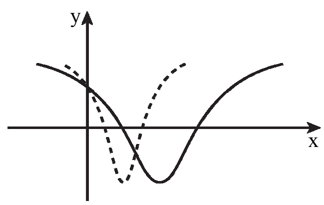
7. א. מתיחה אנכית. ב. $f(\frac{1}{3}x)$. ג. חיוביות : $0<x<6$, שליליות : $6<x<12$.

8. א. קטן מ- S . ב. $\frac{1}{3}S$. **9.** א. $g(x)=f(\frac{1}{5}x)$. ב. $h(x)=5f(x)$. ג. שלומי צודק.

10. א. $g(x)=f(3x)$. ב. $h(x)=\frac{1}{3}f(x)$. ג. שלומי צודק.

11. א. $(x_1;ky_1)$ מינימום. ב. $(x_1;ky_1)$ מקסימום. ג. $(\frac{x_1}{k};y_1)$ מינימום. ד. $(-\frac{x_1}{k};y_1)$ מינימום.

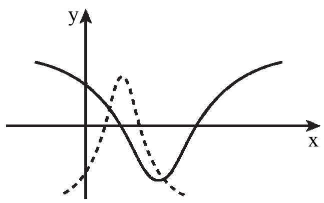
12. א. **(1)**



(2) $g(x)=f(2x)$.

ב. **(1)** $h(x)=-f(2x)$.

(2)



ג. כן, הגרף שהתקבל הוא הגרף של $h(x)$.

13. א. $(6;-3)$ מקסימום. ב. $(6;3)$ מינימום. ג. $(6;8)$ מינימום.

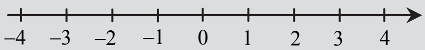
14. א. $(10;9)$ מינימום. ב. כיווץ אופקי של פי 3 של הגרף של $f(x-2)$. ג. $(3\frac{1}{3};9)$ מינימום.
ד. שיקוף לעומת ציר ה- y של הגרף של $f(3x-2)$. ה. $(-3\frac{1}{3};9)$ מינימום.

15. א. **(1)** $(5;-3)$ מינימום, $(-2;5)$ מקסימום. **(2)** $(2.5;-3)$ מינימום, $(-1;5)$ מקסימום.
(3) $(-3;-3)$ מינימום, $(-10;5)$ מקסימום. **(4)** $(-9;-3)$ מינימום, $(-30;5)$ מקסימום.
(5) $(9;-3)$ מינימום, $(30;5)$ מקסימום. **(6)** $(-9;3)$ מקסימום, $(-30;-5)$ מינימום.
(7) $(9;-12)$ מינימום, $(30;20)$ מקסימום. **(8)** $(9;-17)$ מינימום, $(30;15)$ מקסימום.
(9) $(2.5;-5)$ מינימום, $(-1;19)$ מקסימום.

פונקציות עם ערך מוחלט

בפרק זה נעסוק בפונקציות עם ערך מוחלט. נזכיר תחילה הגדרות.

הגדרה: הערך המוחלט של מספר הוא המרחק של המספר מהאפס על ציר המספרים.



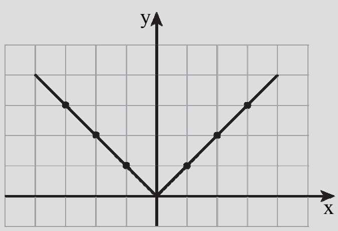
לדוגמה: הערך המוחלט של -2 הוא 2
(מאחר והמרחק של -2 מהאפס שווה ל- 2),
והערך המוחלט של 3 הוא 3 (מאחר והמרחק של 3 מהאפס שווה ל- 3).

הערך המוחלט מסומן על ידי שני קווים $|\ |$. לדוגמה: הערך המוחלט של -6 מסומן $|-6|$.
על פי ההגדרה נקבל: $|-5|=5$, $|7|=7$, $|0|=0$.
כתוצאה מכך, אם נרצה לדעת מהם המספרים שהערך המוחלט שלהם הוא 4, נשאל את עצמנו איזה מספרים נמצאים במרחק 4 מראשית הצירים והתשובה היא 4 או -4.

נכיר את הפונקציה $f(x)=|x|$ ואת התיאור הגרפי שלה.

לצורך כך ניעזר בטבלת ערכים.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=\|x\|$	3	2	1	0	1	2	3

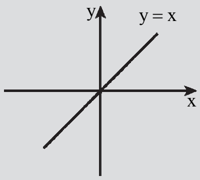


נסמן במערכת צירים את כל הנקודות שהתקבלו.
כדי לשרטט סקיצה של גרף הפונקציה,
נחבר את הנקודות בקו רציף משמאל לימין
(או להיפך) ונקבל את הגרף שמשמאל:

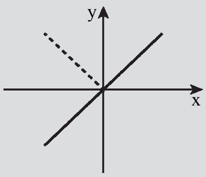
על פי השרטוט ניתן לסכם את תכונות הפונקציה $f(x)=|x|$:
לפונקציה יש נקודת אפס אחת ושיעוריה $(0;0)$.
הנקודה $(0;0)$ היא גם נקודת המינימום של הפונקציה.
הפונקציה עולה עבור $x>0$, ויורדת עבור $x<0$.
הפונקציה חיובית עבור כל x מלבד 0, כלומר עבור $x\neq 0$.
לפונקציה אין תחום שבו היא שלילית.
הפונקציה היא פונקציה זוגית, כלומר הגרף שלה סימטרי משני צדי ציר ה- y
(ציר ה- y הוא ציר הסימטריה של גרף הפונקציה).

הערה חשובה!
שרטטנו קודם את גרף הפונקציה $y=|x|$ בעזרת טבלת ערכים.
נשים לב שעל סמך טבלת הערכים לא היה ברור מאליו שצורת הגרף היא שילוב של שני ישרים או שנקודת המינימום היא בצורת **"שפיץ"**. כדי להסביר זאת, נסתכל על הקשר בין פונקציית הערך המוחלט, לבין אותה פונקציה ללא ערך מוחלט.
במקרה זה, נתייחס לקשר בין הגרף של $y=|x|$, לגרף של $y=x$.

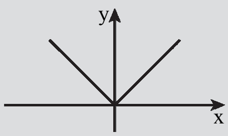
נשרטט תחילה את גרף הפונקציה $y = x$.
נשים לב שכאשר x מספר **חיובי או אפס**,
אז הערך המוחלט של x שווה ל- x . לכן עבור
$x \geq 0$, הגרף של $y = |x|$ זהה לגרף של $y = x$.



לעומת זאת, כאשר x מספר **שלילי**, אז הערך המוחלט של x
שווה ל- $-x$. לכן עבור $x < 0$, הגרף של $y = |x|$
זהה לגרף של $y = -x$. ידוע שהגרף של $y = -x$
סימטרי לגרף של $y = x$ לעומת ציר ה- x .
לכן נשרטט את הגרף של $y = |x|$ באופן הבא:
(1) בתחום $x \geq 0$ נשרטט את הגרף של $y = x$.
(2) בתחום $x < 0$ ניקח את הגרף של $y = x$
ונבצע שיקוף שלו לעומת ציר ה- x .

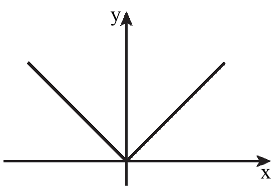


לאחר השיקוף נקבל את גרף הפונקציה $y = |x|$,
כמתואר משמאל:
כפי שנראה בהמשך, דרך זו תהיה הדרך העיקרית
לפיה נשרטט פונקציות ערך מוחלט.



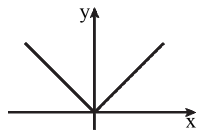
תרגילים

1. לפניכם גרף הפונקציה $f(x) = |x|$.
א. חשבו את $f(-2)$.
ב. מהי נקודת האפס של הפונקציה?
ג. כתבו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה (אם ישנם).
ד. מהי נקודת המינימום של הפונקציה?
ה. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
ו. היעזרו בשרטוט וקבעו באילו נקודות ערך הפונקציה הוא 3 .
ז. היעזרו בשרטוט וקבעו האם הפונקציה זוגית או אי זוגית.

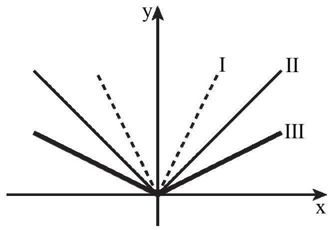


2. נתונה הפונקציה $f(x) = |x|$.
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ב. היעזרו בגרף וקבעו האם יש פתרון למשוואה $|x| = -5$.
ג. מזיזים את הגרף של הפונקציה הנתונה 4 יחידות כלפי מטה ומתקבלת הפונקציה $g(x)$.
(1) הוסיפו לשרטוט שבסעיף א׳ את הגרף של הפונקציה $g(x)$.
(2) כתבו את משוואת הפונקציה $g(x)$ באמצעות x .
(3) כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
ד. מגדירים פונקציה חדשה $h(x)$, המקיימת $h(x) = f(x-5)$.
(1) בטאו את $h(x)$ באמצעות x .
(2) קבעו בכמה יחידות ולאיזה כיוון יש להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$, כדי לשרטט את גרף הפונקציה $h(x)$.
(3) שרטטו באותה מערכת צירים את הגרפים של $f(x)$ ו- $h(x)$.

.3 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=|x|$.
שרטטו בעזרתו את הגרפים של הפונקציות הבאות:
א. $g(x)=|x|+2$. **ב.** $h(x)=|x|-2$.
ג. $k(x)=|x-2|$. **ד.** $m(x)=|x+2|$.



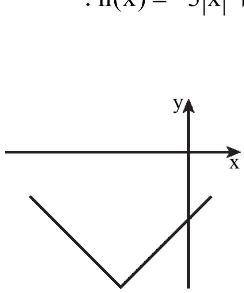
.4 נתונות משוואות של שלוש פונקציות:
(1) $f(x)=|x|$. **(2)** $g(x)=2|x|$. **(3)** $h(x)=\frac{1}{2}|x|$.
לפניכם גרפים של שלוש פונקציות,
המסומנות - I , II ו- III .
התאימו לכל פונקציה את הגרף
המתאים לה. נמקו.



.5 נתונה הפונקציה $f(x)=|x|$.
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
ב. מהי משוואת ציר הסימטריה של גרף הפונקציה?
ג. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$, המקיימת $g(x)=-f(x)$.
(1) בטאו את $g(x)$ באמצעות x .
(2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
(3) בחרו את התשובה הנכונה:
גרף הפונקציה $g(x)$, והגרף של $f(x)$ סימטריים זה לזה לעומת ציר ה- x / ציר ה- y .
ד. מגדירים פונקציה חדשה $h(x)$, המקיימת $h(x)=f(-x)$.
(1) בטאו את $h(x)$ באמצעות x .
(2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
(3) האם הגרף של $h(x)$ והגרף של $f(x)$ מתלכדים זה עם זה?

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=|x|$.
א. קבעו האם הטענה הבאה נכונה: עבור כל x מתקיים $|x|\geq 0$,
כלומר הפונקציה הנתונה אי – שלילית לכל ערך של x .
ב. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$, המקיימת $g(x)=3|x|$.
(1) חניתה טוענת שגרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל מהגרף של $f(x)$,
על ידי מתיחה אנכית של פי 3 . האם היא צודקת?
(2) שרטטו את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ באותה מערכת צירים.
ג. שרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של $g(x)$, וסקיצה של הפונקציה $h(x)=-3|x|$.

.7 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=|x+3|-6$.
א. בכמה יחידות ולאילו כיוונים יש להזיז את גרף
הפונקציה $y=|x|$, כדי לקבל את הגרף של $f(x)$?
ב. מהי נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$?
ג. מהם תחומי העלייה והירידה של $f(x)$?
ד. כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $f(x)$
עם כל אחד מהישרים הבאים: **(1)** $y=7$. **(2)** $y=-9$. **(3)** $y=-6$.



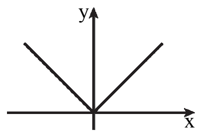
.8 נתונה הפונקציה $y=|x|$.
בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של פונקציה.
תארו במילים כיצד מתקבל גרף הפונקציה מגרף הפונקציה הנתונה.
השתמשו במושגים: "הזזה אופקית", "הזזה אנכית", "מתיחה אנכית" ו"כיווץ אנכי".

א. $y=4|x|-3$.   ב. $y=\frac{1}{4}|x-1|$.   ג. $y=3|x+2|+7$.   ד. $y=-\frac{1}{2}|x-8|-3$.

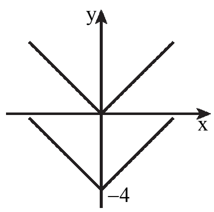
תשובות:

.1 א. 2 . ב. $(0;0)$. ג. חיוביות: $x\neq 0$, שליליות: אין. ד. $(0;0)$.
ה. עלייה: $x>0$, ירידה: $x<0$. ו. $(3;3)$, $(-3;3)$. ז. הפונקציה זוגית.
ח. (1) שתי נקודות. (2) אף נקודה. (3) נקודה אחת.

.2 א.

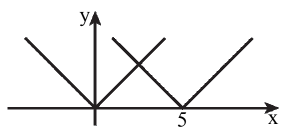


ג. (1)

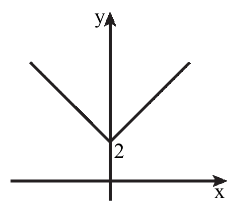


(2) $g(x)=|x|-4$.
(3) עלייה: $x>0$,
ירידה: $x<0$.

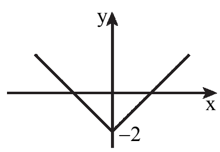
ב. אין פתרון למשוואה
ד. (1) $h(x)=|x-5|$.
(2) נזיז אותו 5 יחידות לכיוון ימין.
(3)



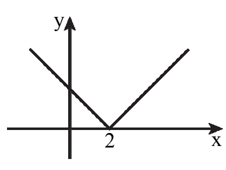
.3 א.



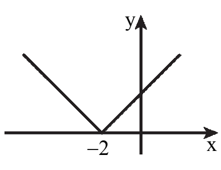
ב.



ג.

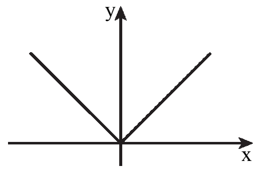


ד.



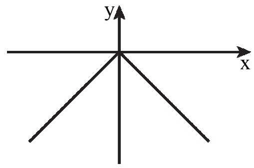
.4 $f(x)$ - II , $g(x)$ - I , $h(x)$ - III .

5. א.



ג. (1) $g(x)=-|x|$.

(2)

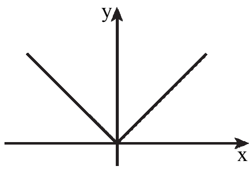


(3) לעומת ציר ה- x .

ב. $x=0$.

ד. (1) $h(x)=|-x|$.

(2)

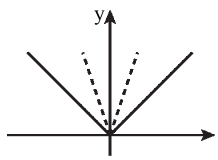


(3) כן.

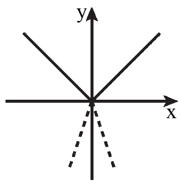
6. א. הטענה נכונה.

ב. (1) חניתה צודקת.

(2)



ג.



7. א. 3 יחידות שמאלה ו- 6 יחידות כלפי מטה.

ב. $(-3;-6)$. ג. עלייה : $x>-3$, ירידה : $x<-3$.

ד. (1) שתי נקודות. (2) אף נקודה. (3) נקודה אחת.

8. א. מתיחה אנכית של פי 4 ואז הזזה אנכית של 3 יחידות כלפי מטה.

ב. הזזה אופקית של יחידה אחת לכיוון ימין, ואז כיווץ אנכי של פי 4 .

ג. הזזה אופקית של 2 יחידות לכיוון שמאל, אחר כך מתיחה אנכית של פי 3 ואז הזזה אנכית של 7 יחידות כלפי מעלה.

ד. הזזה אופקית של 8 יחידות לכיוון ימין, אחר כך כיווץ אנכי של פי 2 , שיקוף לעומת ציר ה- x , ואז הזזה אנכית של 3 יחידות כלפי מטה.

שרטוט הגרף של $|f(x)|$ על סמך הגרף של $f(x)$

נלמד עכשיו כיצד לשרטט גרף של פונקציית ערך מוחלט $|f(x)|$, על פי הגרף של $f(x)$.

לדוגמה:

על פי הגרף של $y = x^3 - 4x$, נלמד לשרטט את הגרף של $y = |x^3 - 4x|$.

נרשום את ההגדרות והכללים שבהם נשתמש:

(1) כאשר a מספר חיובי או אפס, אז הערך המוחלט של a שווה ל- a .

במילים אחרות, אם $a \ge 0$, אז $|a| = a$. לדוגמה: $|8| = 8$.

כיצד זה מתבטא בגרף של $|f(x)|$? כאשר פונקציה $f(x)$ היא חיובית או אפס,
כלומר הגרף שלה נמצא מעל ציר ה- x (או על ציר ה- x), אז $|f(x)| = f(x)$.
המשמעות היא שהגרף של $|f(x)|$ מתלכד עם הגרף של $f(x)$.

הערה: כאשר $f(x) = 0$, אז גם $|f(x)| = 0$. **לכן נקודות האפס של הפונקציה $|f(x)|$ הן נקודות האפס של הפונקציה $f(x)$.**

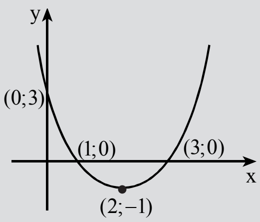
(2) כאשר a מספר שלילי, אז הערך המוחלט של a שווה ל- $-a$.

(הערה: כאשר a שלילי, אז $-a$ הוא חיובי).

במילים אחרות, אם $a < 0$, אז $|a| = -a$. לדוגמה: $|-9| = -(-9) = 9$.

כיצד זה מתבטא בגרף של $|f(x)|$? כאשר פונקציה $f(x)$ היא שלילית, כלומר הגרף שלה נמצא מתחת לציר ה- x , אז $|f(x)| = -f(x)$.
המשמעות היא שהגרף של $|f(x)|$ מתלכד עם הגרף של $-f(x)$,
כלומר הוא שיקוף של הגרף של $f(x)$ לעומת ציר ה- x .
במצב כזה, $f(x)$ מתחת לציר ה- x , ו- $-f(x)$ מעל ציר ה- x .

דוגמה:



בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.

הגרף של $f(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודות $(1;0)$ ו- $(3;0)$,

וחותך את ציר ה- y בנקודה $(0;3)$.

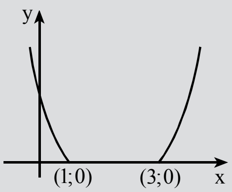
לפונקציה נקודת קיצון אחת $(2;-1)$ מינימום.

א. שרטטו סקיצה של פונקציית הערך המוחלט $|f(x)|$.

ב. כתבו את נקודות המינימום והמקסימום,
ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $|f(x)|$.

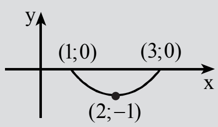
פתרון:

א. הפונקציה $f(x)$ חיובית בתחומים $x > 3$ או $x < 1$,
לכן בתחומים אלה מתקיים $|f(x)| = f(x)$,
כלומר גרף הפונקציה $|f(x)|$
זהה לגרף הפונקציה $f(x)$,
ונראה כמתואר משמאל:

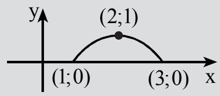


הערה: נקודות האפס של הפונקציה $|f(x)|$
הן נקודות האפס של $f(x)$, כלומר הן $(1;0)$ ו- $(3;0)$.

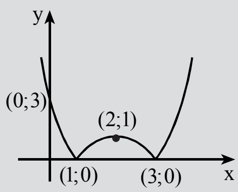
הפונקציה $f(x)$ שלילית בתחום $1<x<3$, לכן בתחום זה מתקיים $|f(x)|=-f(x)$, כלומר בתחום זה גרף הפונקציה $|f(x)|$ זהה לגרף הפונקציה $-f(x)$.



גרף הפונקציה $f(x)$ נראה בתחום $1<x<3$ כמתואר משמאל:



כדי לקבל את גרף הפונקציה $-f(x)$ בתחום $1<x<3$ נבצע "שיקוף" ביחס לציר ה- x ונקבל את הגרף המתואר משמאל.
כך נראה גם גרף הפונקציה $|f(x)|$ בתחום $1<x<3$.
לגרף שהתקבל יש מקסימום ב- $(2;1)$.



כדי לשרטט את גרף הפונקציה $|f(x)|$, נשרטט **באותה** מערכת צירים את הגרף של $f(x)$ בתחומים שבהם $f(x)\geq 0$ (כלומר $x\geq 3$ או $x\leq 1$), ואת הגרף של $-f(x)$ בתחומים שבהם $f(x)<0$ (כלומר $1<x<3$).
נקבל את הגרף המתואר משמאל וזהו הגרף של פונקציית הערך המוחלט $|f(x)|$.

ב. את נקודות הקיצון של הפונקציה $|f(x)|$ נזהה מתוך הגרף.
ניתן לראות שלפונקציה יש נקודת קיצון $(2;1)$ מקסימום.
כמו כן, נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $|f(x)|$ עם ציר ה- x $(1;0)$ ו- $(3;0)$ נמוכות יותר מהנקודות שבסביבתן, לכן הן נקודות קיצון מסוג מינימום, כלומר $(3;0)$ מינימום, $(1;0)$ מינימום.

על פי השרטוט ניתן לראות שתחומי העלייה של הפונקציה $|f(x)|$ הם $x>3$ או $1<x<2$, ותחומי הירידה הם $2<x<3$ או $x<1$.

הערות:

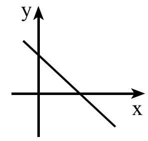
(1) פונקציה מהצורה $|f(x)|$ היא אי-שלילית לכל x, לכן הגרף שלה לא נמצא אף פעם מתחת לציר ה- x.

(2) בנקודות שבהן גרף של פונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x (ולא משיק לציר ה- x), נוצר בגרף של $|f(x)|$ "שפיץ".
כך לדוגמה, בגרף של $|f(x)|$ שציירנו בדוגמה הנ"ל נוצר "שפיץ" בנקודות $(1;0)$ ו- $(3;0)$.
נקודות "שפיץ" אלה הן נקודות קיצון של הפונקציה (בפונקציה מהצורה $|f(x)|$ נקודות קיצון אלה הן מסוג מינימום משום שהן נמוכות יותר מהנקודות שבסביבתן).

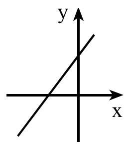
<u>שרטטו בעזרת תוכנת מחשב</u> גרף של פונקציית ערך מוחלט $|f(x)|$, על פי הגרף של $f(x)$.
<u>סרקו את הקוד המצורף</u>. מומלץ!

בכל אחד מהתרגילים הבאים מצויר גרף של פונקציה $f(x)$.
שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $|f(x)|$.

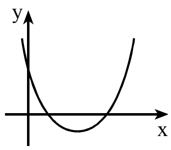
.9



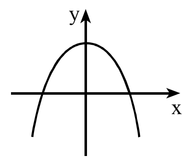
.10



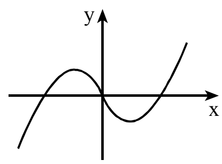
.11



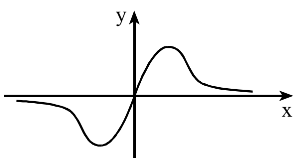
.12



.13



.14



.15 נתונה הפונקציה $f(x)=x-3$.
א. שרטטו את גרף הפונקציה הנתונה.
ב. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=|f(x)|$.
ג. מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.
ד. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבעו את סוג הקיצון.
ה. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $|f(x)|$.

.16 נתונה הפונקציה $f(x)=|2-x|$.
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ב. מצאו לאילו ערכים של הפרמטר k יש למשוואה $|2-x|=k$:
(1) שני פתרונות. (2) פתרון אחד. (3) אף פתרון.

.17 נתונה הפונקציה $y=|3x|$.
א. שרטטו סקיצה של הפונקציה הנתונה.
ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
ג. כמה נקודות חיתוך יש לגרף של הפונקציה הנתונה עם כל אחד מהישרים הבאים :
(1) הישר $y=3$. (2) הישר $y=0$. (3) הישר $y=-4$.

.18 נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-10x+21$.
א. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים של $f(x)$.
ב. מצאו את נקודות המינימום והמקסימום של $f(x)$.
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $|f(x)|$.
ה. רשמו את נקודות המינימום והמקסימום של $|f(x)|$.

.19 נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+8x-7$.

א. מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים של $f(x)$.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של $f(x)$.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $|f(x)|$.

ה. רשמו את נקודות המינימום והמקסימום של $|f(x)|$.

ו. כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $|f(x)|$.

ז. מצאו לאילו ערכים של k, לגרף הפונקציה $|f(x)|$ ולישר $y=k$:

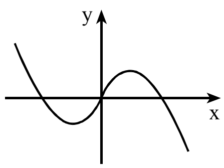
(1) אין אף נקודה משותפת.

(2) יש שתי נקודות משותפות.

(3) יש שלוש נקודות משותפות.

(4) יש ארבע נקודות משותפות.

.20 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x-\frac{x^3}{3}$.



א. הוכיחו ש- $f(x)$ היא פונקציה אי זוגית.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של הגרף של $f(x)$ עם הצירים.

ג. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $|f(x)|$.

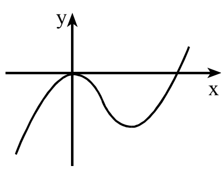
ה. נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הן $(-1;-\frac{2}{3})$ מינימום ו- $(1;\frac{2}{3})$ מקסימום.

מצאו את כל נקודות הקיצון של הפונקציה $|f(x)|$.

ו. (1) לאילו ערכי x מתקיים $|f(x)|=f(x)$.

(2) לאילו ערכי x מתקיים $|f(x)|=-f(x)$.

.21 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{6}-x^2$.



א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה $f(x)$.

ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=|f(x)|$.

ד. נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$

הן $(4;-5\frac{1}{3})$ מינימום ו- $(0;0)$ מקסימום.

מצאו את כל נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

ה. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)=|f(x+6)|$.

.22 קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה :

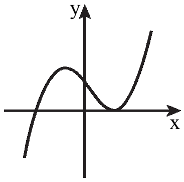
א. כאשר $f(x)$ עולה וחיובית, אז גם $|f(x)|$ עולה וחיובית.

ב. כאשר $f(x)$ עולה ושלילית, אז $|f(x)|$ יורדת וחיובית.

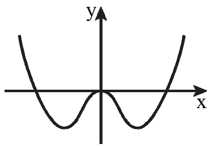
.23 א. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=|4x|$ היא פונקציה זוגית.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=|x|+5$ היא פונקציה זוגית.

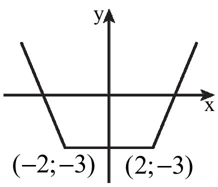
24. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$.
שרטטו את הגרף של כל אחת
מהפונקציות הבאות:
א. $-f(x)$. ב. $|f(x)|$. ג. $-|f(x)|$.



25. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, שנקודות
האפס שלה הן $(5;0)$ $(0;0)$ ו- $(-5;0)$,
ונקודות הקיצון שלה הן $(3;-3)$ מינימום,
$(0;0)$ מקסימום, $(-3;-3)$ מינימום.
שרטטו את הגרף של כל אחת מהפונקציות הבאות:
א. $|f(x)|$. ב. $f(x)-4$. ג. $|f(x)|-4$. ד. $|f(x)-4|$.



26. בציור שלפניכם מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.
הנקודות $(2;-3)$ ו- $(-2;-3)$ נמצאות על הגרף.
שרטטו את הגרף של הפונקציות הבאות:
א. $|f(x)|$. ב. $f(x)+2$.
ג. $|f(x)+2|$. ד. $|f(x)|+2$.

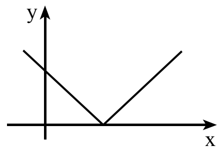


27. נתונה פונקציה $f(x)$. מגדירים פונקציה חדשה $|f(x)|$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה.
אם כן – הסבירו. אם לא – הביאו דוגמה נגדית.
א. הפונקציה $|f(x)|$ היא בהכרח זוגית.
ב. גרף הפונקציה $|f(x)|$ עובר בהכרח דרך ראשית הצירים.
ג. כל ערכי הפונקציה $|f(x)|$ הם אי שליליים.

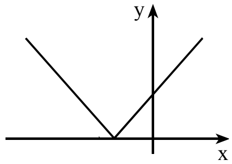
28. נתונה הפונקציה $f(x)=x|x|$.
א. הוכח שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי- זוגית.
ב. (1) הסבר מדוע עבור $x \ge 0$ מתקיים $f(x)=x^2$.
(2) הסבר מדוע עבור $x \le 0$ מתקיים $f(x)=-x^2$.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות:

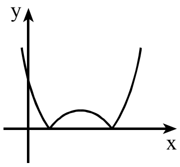
.9



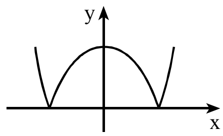
.10



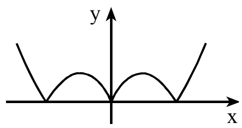
.11



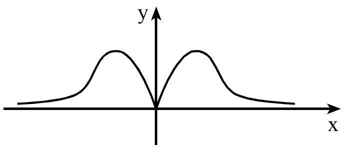
.12



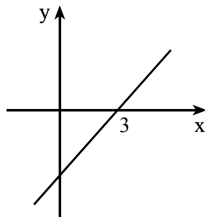
.13



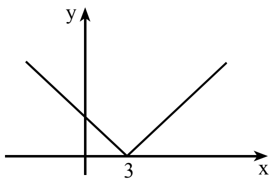
.14



.15 א.

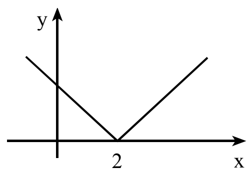


ב.



ג. $(0;3)$, $(3;0)$. ד. $(3;0)$ מינימום. ה. עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 3$.

.16 א.

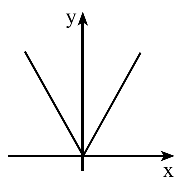


ב. **(1)** $k > 0$

(2) $k = 0$

(3) $k < 0$

.17 א.



ב. חיוביות: $x \neq 0$, שליליות: אין.

ג. **(1)** שתי נקודות.

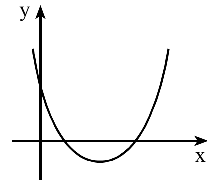
(2) נקודה אחת.

(3) אף נקודה.

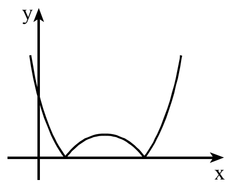
18. א. $(0;21)$, $(3;0)$, $(7;0)$.

ב. $(5;-4)$ מינימום.

ג.



ד.

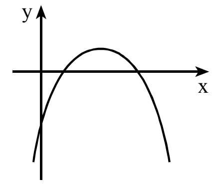


ה. $(7;0)$ מינימום, $(5;4)$ מקסימום, $(3;0)$ מינימום.

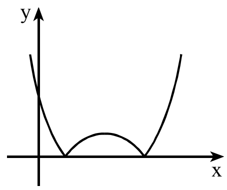
19. א. $(0;-7)$, $(1;0)$, $(7;0)$.

ב. $(4;9)$ מקסימום.

ג. הערה: השרטוט אינו פרופורציונלי לנקודות שנמצאו.



ד. הערה: השרטוט אינו פרופורציונלי לנקודות שנמצאו.



ה. $(1;0)$ מינימום, $(4;9)$ מקסימום, $(7;0)$ מינימום.

ו. **עלייה:** $7 < x$ או $1 < x < 4$. **ירידה:** $4 < x < 7$ או $x < 1$.

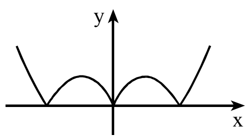
ז. **(1)** $k < 0$. **(1)** $k = 0$ או $k > 9$. **(1)** $k = 9$. **(1)** $0 < k < 9$.

20. ב. $(0;0)$, $(\sqrt{3};0)$, $(-\sqrt{3};0)$.

ג. **חיוביות:** $0 < x < \sqrt{3}$ או $x < -\sqrt{3}$.

שליליות: $x > \sqrt{3}$ או $-\sqrt{3} < x < 0$.

ד.



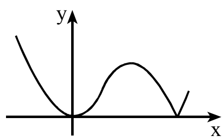
ה. $(-\sqrt{3};0)$ מינימום, $(-1;\frac{2}{3})$ מקסימום,

$(0;0)$ מינימום, $(1;\frac{2}{3})$ מקסימום, $(\sqrt{3};0)$ מינימום.

ו. **(1)** $0 \le x \le \sqrt{3}$ או $x \le -\sqrt{3}$. **(2)** $x \ge \sqrt{3}$ או $-\sqrt{3} \le x \le 0$.

21. א. $(0;0)$, $(6;0)$. ב. **חיוביות:** $x > 6$,

שליליות: $0 < x < 6$ או $x < 0$.



ד. $(6;0)$ מינימום, $(4;5\frac{1}{3})$ מקסימום,

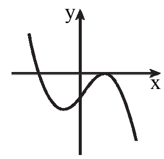
$(0;0)$ מינימום.

ה. $(0;0)$ מינימום, $(-2;5\frac{1}{3})$ מקסימום,

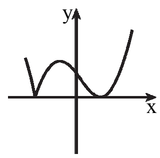
$(-6;0)$ מינימום.

22. א. הטענה נכונה. ב. הטענה נכונה.

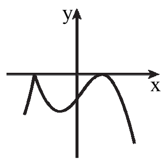
24. א.



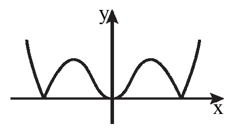
ב.



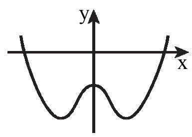
ג.



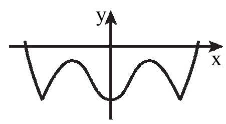
25. א.



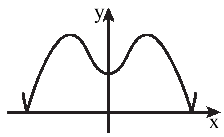
ב.



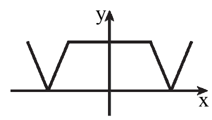
ג.



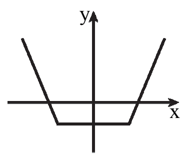
ד.



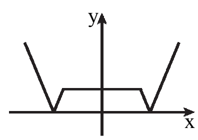
26. א.



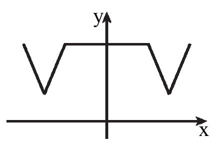
ב.



ג.

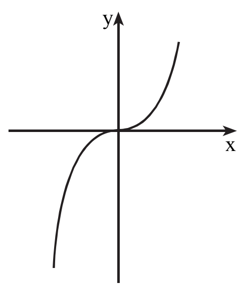


ד.



27. א. הטענה לא נכונה. ב. הטענה לא נכונה. ג. הטענה נכונה.

28. ג.



שרטוט של גרף הפונקציה $[f(x)]^n$ על פי הגרף של $f(x)$

נדון עכשיו בקשר שבין גרף הפונקציה $y=f(x)$ לבין גרף הפונקציה $y=[f(x)]^n$,
כאשר $y=f(x)$ היא פונקציית פולינום, או פונקציה שהתבנית האלגברית שלה אינה נתונה,
והמעריך n הוא מספר טבעי (חיובי ושלם).

באופן כללי, כדי לשרטט את גרף הפונקציה $y=[f(x)]^n$, נשים לב כי כל נקודה $(x_1;y_1)$,
הנמצאת על הגרף של $f(x)$, "מועתקת" לנקודה $(x_1;y_1^n)$, הנמצאת על הגרף של $y=[f(x)]^n$.
בהתאם לכך, נוכל לעבור משמאל לימין על הגרף של הפונקציה $f(x)$,
ולשרטט באופן כללי את הגרף של $y=[f(x)]^n$.

נפריד את הדיון לשני מקרים : (1) מקרה שבו המעריך n הוא מספר זוגי.
(2) מקרה שבו המעריך n הוא מספר אי זוגי שגדול מ- 1 .

נרשום מספר כללי עזר.
נתחיל ממקרה (1) שבו המעריך n הוא **מספר זוגי**. נזכיר כי כאשר מעלים בחזקה זוגית
מספר חיובי או שלילי, תוצאת החזקה היא חיובית. בהתאם לכך :
א. כאשר הפונקציה $y=f(x)$ היא חיובית, אז גם הפונקציה $y=[f(x)]^n$ היא חיובית.
ב. כאשר הפונקציה $y=f(x)$ היא שלילית, אז הפונקציה $y=[f(x)]^n$ היא חיובית.
ג. כאשר הפונקציה $y=f(x)$ מתאפסת, אז גם הפונקציה $y=[f(x)]^n$ מתאפסת.

למעשה, במקרה שבו המעריך n הוא **מספר זוגי**, הפונקציה $y=[f(x)]^n$ היא אי שלילית.

כמו כן, כפי שנראה כאשר נשרטט :
אם לגרף של $f(x)$, יש נקודת קיצון $(x_1;y_1)$, אז לגרף של $[f(x)]^n$ יש קיצון בנקודה $(x_1;y_1^n)$,
(יתכן גם שסוג הקיצון ישתנה). ואם לגרף של $f(x)$, יש נקודת אפס $(x_1;0)$, אז לגרף
של $[f(x)]^n$ יש נקודת אפס $(x_1;0)$, שהיא גם **נקודת קיצון** (גם אם קודם לא הייתה קיצון).

נעבור למקרה (2) שבו המעריך n הוא **מספר אי זוגי**.
נזכיר כי כאשר מעלים בחזקה אי זוגית מספר חיובי, תוצאת החזקה היא חיובית.
וכאשר מעלים בחזקה אי זוגית מספר שלילי, תוצאת החזקה היא שלילית.
בהתאם לכך :
א. כאשר הפונקציה $y=f(x)$ היא חיובית, אז גם הפונקציה $y=[f(x)]^n$ היא חיובית.
ב. כאשר הפונקציה $y=f(x)$ היא שלילית, אז גם הפונקציה $y=[f(x)]^n$ היא שלילית.
ג. כאשר הפונקציה $y=f(x)$ מתאפסת, אז גם הפונקציה $y=[f(x)]^n$ מתאפסת.

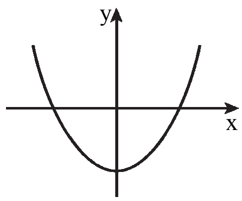
למעשה, במקרה שבו המעריך n הוא **מספר אי זוגי**, תחומי החיוביות, תחומי השליליות
ונקודות ההתאפסות של הפונקציה $y=[f(x)]^n$ זהים בהתאמה לתחומי החיוביות,
תחומי השליליות ונקודות ההתאפסות של הפונקציה $y=f(x)$.

כמו כן : אם לגרף של $f(x)$, יש נקודת קיצון $(x_1;y_1)$, אז לגרף של $[f(x)]^n$ יש קיצון
מאותו סוג בנקודה $(x_1;y_1^n)$.
אם לגרף של $f(x)$, יש נקודת אפס $(x_1;0)$, שאינה נקודת קיצון, אז לגרף של $[f(x)]^n$
יש נקודת אפס $(x_1;0)$, שהסביבה שלה אינה נראית רגילה, אלא בצורת **"מגלשה"**.
(הסברים לגבי צורת "מגלשה" ראו בתחילת החוברת, בעמוד 24 ובעמודים 44-45).

הערה:
אם בסיס החזקה הוא מספר שלילי ומעריך החזקה הוא זוגי, אז אפשר להחליף את הבסיס השלילי במספר החיובי הנגדי לו, ותוצאת החזקה תישאר זהה.
לדוגמה: $(-5)^4 = 5^4$. ועבור n זוגי מתקיים לדוגמה: $(-2)^n = 2^n$.
לעומת זאת, אם בסיס החזקה הוא מספר שלילי ומעריך החזקה הוא אי-זוגי, אז אם נרצה להחליף את הבסיס השלילי במספר החיובי הנגדי לו, נצטרך לרשום סימן מינוס (−) לפני החזקה. לדוגמה: $(-8)^3 = -8^3$. ועבור n אי זוגי מתקיים לדוגמה: $(-4)^n = -4^n$.

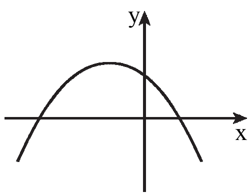
תרגילים

1. בציור מתואר גרף הפונקציה $f(x)$. הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות $(2;0)$ ו- $(-2;0)$.
לפונקציה נקודת קיצון אחת והיא $(0;-2)$ מינימום.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \left[f(x)\right]^2$.



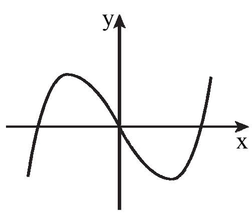
א. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x) = \left[f(x)\right]^3$.
(1) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
(2) כתבו את נקודות הקיצון של $h(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $-h(x)$.

2. בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.
הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות $(-6;0)$ ו- $(2;0)$
לפונקציה נקודת קיצון אחת והיא $(-2;3)$ מקסימום.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \left[f(x)\right]^4$.



א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ב. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x) = \left[f(x)\right]^5$.
(1) כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
(2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(-x)$.

3. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$. הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות $(-3;0)$, $(0;0)$ ו- $(3;0)$.
לפונקציה שתי נקודות קיצון: $(2;-2)$ מקסימום, $(-2;2)$ מקסימום.

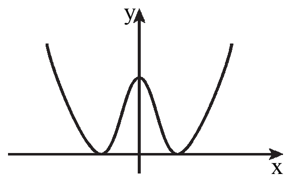


א. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \left[f(x)\right]^n$, n זוגי.
(1) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
(2) כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון. תוכלו להביע על ידי n .
ב. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x) = \left[f(x)\right]^n$, n אי זוגי.
(1) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
(2) כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוג הקיצון. תוכלו להביע על ידי n .

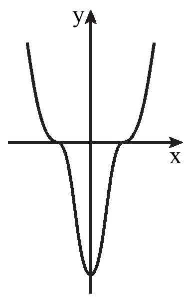
תשובות:

1. א. $(-2;0)$ מינימום, $(0;4)$ מקסימום, $(2;0)$ מינימום.   ג. **(2)** $(0;-8)$ מינימום.

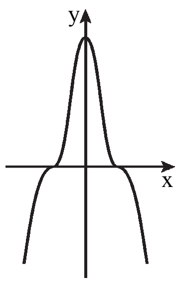
ב.



ג. **(1)**

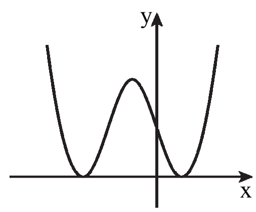


ד.

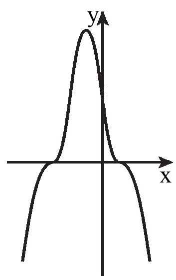


2. ב. $(-6;0)$ מינימום, $(-2;81)$ מקסימום, $(2;0)$ מינימום.   ג. **(1)** $(-2;243)$ מקסימום.

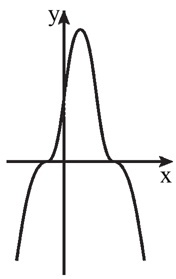
א.



ג. **(2)**



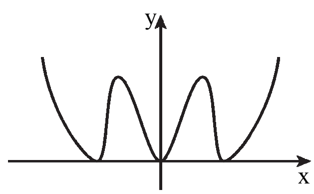
ד.



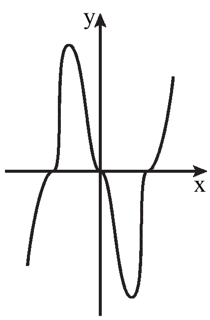
3. א. **(2)** $(-3;0)$ מינימום, $(-2;2^n)$ מקסימום, $(0;0)$ מינימום, $(2;2^n)$ מקסימום, $(3;0)$ מינימום.

ב. **(2)** $(-2;2^n)$ מקסימום, $(2;-2^n)$ מינימום.

א. **(1)**



ב. **(1)**



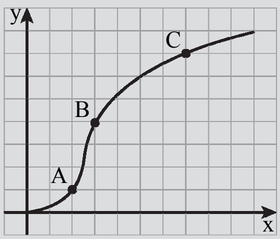
חשבון דיפרנציאלי

מבוא

פרק זה הוא הפרק הראשון בנושא חשבון דיפרנציאלי.
בנושא זה נרחיב את הידע שלנו לגבי פונקציות והגרף שלהן.

בין היתר נכיר מושגים שבעזרתם נבין באילו תחומים גרף של פונקציה עולה, ובאילו תחומים הוא יורד. נלמד לחשב שיפוע של פונקציה בכל נקודה שעליה (במידה וזה אפשרי), נדע מה רמת התלילות של הגרף, וגם האם התלילות קבועה או משתנה.

קצב שינוי ממוצע של פונקציה



נתבונן בגרף של פונקציה $f(x)$, המתואר במערכת צירים שבה כל משבצת היא יחידה אחת.
על הגרף מסומנות הנקודות $A(2;1)$, $B(3;4)$ ו- $C(7;7)$.
נרצה לדון ב"תלילות" של הגרף.

נתבונן בקטעים AB ו- BC.
ההשתנות של הפונקציה $f(x)$ מנקודה A לנקודה B היא ההפרש $y_B - y_A$. השתנות זו שווה ל- $4-1$, כלומר שווה ל- 3. כמו כן, ההשתנות של הפונקציה $f(x)$ מנקודה B לנקודה C, שהיא ההפרש $y_C - y_B$ שווה ל- $7-4$, כלומר שווה גם היא ל- 3.

השתנות הפונקציה מ- A ל- B, **שווה** להשתנות הפונקציה מ- B ל- C, (שתיהן שוות ל- 3), אבל ניתן לראות ש"תלילות" הגרף **שונה** בשני הקטעים.
במילים אחרות, השתנות ערכי הפונקציה ה- y בלבד, לא נותנת מידע מספיק איכותי לגבי תלילות הפונקציה. למעשה, אנו מעוניינים להבין את **קצב** השתנות ה- y.
קצב השתנות זה שווה ל**יחס** בין השינוי בערכי ה- y לבין השינוי בערכי ה- x.
נהוג לקרוא לו ***"קצב השינוי הממוצע"*** של הפונקציה.

באופן כללי, אם A ו- B הן נקודות על גרף של פונקציה,
אז קצב השינוי הממוצע של הפונקציה בקטע מ- A ל- B הוא: $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

נחשב את קצב השינוי הממוצע בפונקציה המתוארת $f(x)$.
בקטע מ- A ל- B, קצב השינוי הממוצע הוא $\frac{4-1}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$.

לעומת זאת, בקטע מ- B ל- C, קצב השינוי הממוצע הוא $\frac{7-4}{7-3} = \frac{3}{4}$.

תוצאות אלה תואמות את העובדה שהשינוי בערכי ה- y, בקטע AB, נראה "מהיר" ו-"תלול" יותר לעומת השינוי בערכי ה- y, בקטע BC.

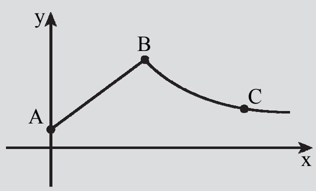
הנוסחה שהצגנו לחישוב קצב השינוי הממוצע משמשת גם לחישוב שיפוע של קו ישר.
כמו בחישוב שיפוע, גם כאן אפשר לומר שקצב השינוי הממוצע הוא ההשתנות הממוצעת של הפונקציה ל**יחידה אחת** של x. כלומר בקטע AB, כל הגדלה של x ביחידה אחת, גורמת להגדלה ממוצעת של y ב- 3 יחידות. לעומת זאת, בקטע BC, כל הגדלה של x ביחידה אחת, גורמת להגדלה ממוצעת של y ב- $\frac{3}{4}$.

הערות:

א. אם גרף הפונקציה הוא **קו ישר**, אז קצב השינוי הממוצע הוא **קבוע** (אחיד), ושווה ל**שיפוע הישר**. במקרה כזה, עבור כל שתי נקודות שנבחר על הגרף, קצב השינוי של הפונקציה בקטע שביניהם הוא קבוע. גם ההיפך הוא נכון – אם קצב השינוי של פונקציה הוא קבוע (אחיד), אז גרף הפונקציה הוא קו ישר.

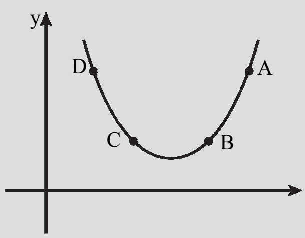
ב. בדוגמה שהצגנו, ראינו גרף שבו קצב השינוי **אינו** קבוע.
באופן כללי, אם הגרף הוא לא קו ישר, אז קצב השינוי הממוצע הוא לא קבוע (כלומר לא אחיד). גם ההיפך הוא נכון - אם קצב השינוי אינו קבוע (כלומר הקצב לא אחיד), אז הגרף הוא לא קו ישר.

ג. קיימות פונקציות, שבחלק מהתחום הגרף שלהן הוא בעל קצב שינוי קבוע, ובחלק אחר של התחום, הגרף שלהן הוא בעל קצב שינוי משתנה.
לדוגמה: בשרטוט שמשמאל, חלק הגרף מ- A ל- B, הוא בעל קצב שינוי **קבוע**, ואילו חלק הגרף מ- B ל- C, הוא בעל קצב שינוי **משתנה**.



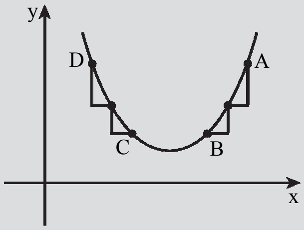
ד. אם הפונקציה **עולה**, אז קצב השינוי הממוצע הוא **חיובי**.
אם הפונקציה **יורדת**, אז קצב השינוי הממוצע הוא **שלילי**.
ואם הגרף הוא ישר המקביל לציר ה- x, או מתלכד איתו, אז הפונקציה היא קבועה, וקצב השינוי הממוצע שלה הוא **אפס**.

ה. כאשר פונקציה **עולה**, אז ככל שהגרף שלה **תלול** יותר, קצב השינוי הממוצע שלה גדול יותר.
לדוגמה: בשרטוט שמשמאל, הפונקציה עולה בנקודות A ו- B. בסביבת הנקודה A, העלייה תלולה יותר, לכן קצב השינוי גדול יותר.



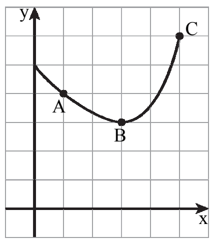
באופן דומה, בנקודות C ו- D הפונקציה יורדת.
בנקודה D הגרף **תלול** יותר, כלומר קצב הירידה של הפונקציה "מהיר" יותר.
לכן קצב השינוי הממוצע של הפונקציה בנקודה D "שלילי יותר" לעומת הנקודה C, ומיוצג על ידי מספר קטן יותר.

הערה: אפשר לבדוק את התלילות גם על ידי כך שמוסיפים לגרף "מדרגות" ברוחב **קבוע** (אפשר רוחב של 1). אם הגבהים של המדרגות הולכים וגדלים, אז תלילות הגרף הולכת וגדלה, כפי שנעשה מ- B ל- A . אם הגבהים של המדרגות אינם משתנים, אז תלילות הגרף אחידה.

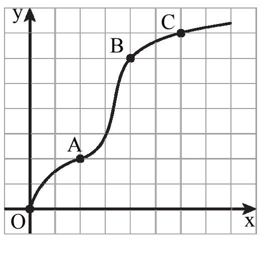


תרגילים

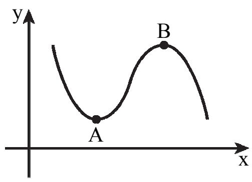
1. על גרף הפונקציה f(x) מסומנות הנקודות A , B ו- C .
א. חשבו את קצב השינוי הממוצע של הפונקציה בין A ל- B .
ב. חשבו את קצב השינוי הממוצע של הפונקציה בין B ל- C .
ג. האם קצב השינוי הממוצע הוא קבוע או משתנה?
ד. הנקודה D נמצאת על הגרף בין A ל- B .
האם קצב השינוי הממוצע של הפונקציה בין A ל- D הוא חיובי, שלילי או אפס? נמקו.



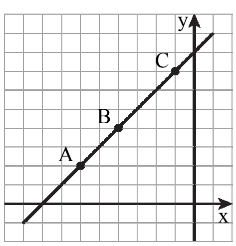
2. לפניכם גרף של פונקציה f(x) .
על הגרף מסומנות הנקודות O , A B ו- C .
א. ענו על פי הגרף: האם קצב השינוי הממוצע של הפונקציה הוא קבוע או משתנה?
ב. חשבו את קצב השינוי הממוצע של הפונקציה בין A ל- B .
ג. חשבו את קצב השינוי הממוצע בין B ל- C .
ד. באיזה קטע הגרף "תלול" יותר: בין A ל- B , או בין B ל- C ?
האם אפשר לענות על סעיף זה ללא חישובים?



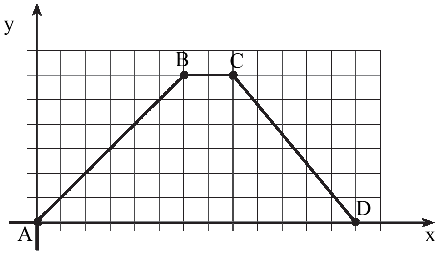
3. על הגרף שלפניכם מסומנות הנקודות A ו- B .
א. האם קצב השינוי הממוצע של הפונקציה הוא קבוע או משתנה?
ב. קבעו האם קצב השינוי הממוצע של הפונקציה הוא חיובי, שלילי או אפס:
(1) משמאל ל- A . (1) בין A ל- B . (1) מימין ל- B .



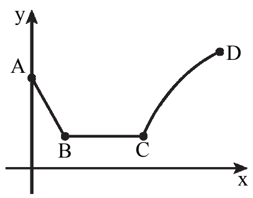
4. לפניכם גרף של פונקציה ממעלה ראשונה f(x) .
א. חשבו את קצב השינוי הממוצע בין A ל- B .
ב. חשבו את קצב השינוי הממוצע בין B ל- C .
ג. חשבו את קצב השינוי הממוצע בין A ל- C .
ד. האם קצב השינוי הוא קבוע או משתנה? נמקו.
ה. מסמנים נקודה נוספת D על הגרף.
מהו קצב השינוי הממוצע בין A ל- D ?



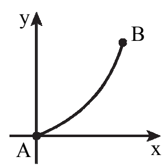
5. גרף הפונקציה שלפניכם מחולק לשלושה תחומים:
בין A ל-B, בין B ל-C, בין C ל-D.
קבעו בכל תחום האם קצב השינוי
הממוצע הוא:
(1) אחיד, או לא אחיד.
(2) חיובי, שלילי או אפס.

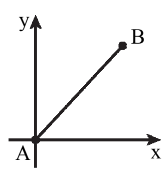


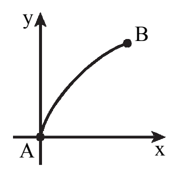
6. גרף הפונקציה שלפניכם, מחולק לשלושה תחומים:
בין A ל-B, בין B ל-C, ובין C ל-D.
א. קבעו בכל אחד מהתחומים, האם קצב השינוי
הממוצע הוא: (1) קבוע או משתנה.
(2) חיובי, שלילי או אפס.
ב. עפר טוען שבתחום העלייה שבין C ל-D,
תלילות הגרף היא הגבוהה ביותר בסביבת הנקודה C (מימין לנקודה),
והיא הולכת וקטנה על חלק הגרף מ-C ל-D. האם הוא צודק?



7. לפניכם שלושה גרפים (גרף ימני, גרף אמצעי וגרף שמאלי), המתארים שלוש פונקציות שונות. שלושת הגרפים עוברים דרך הנקודות $A(0;0)$ ו- $B(4;4)$.
קבעו עבור כל אחד מהגרפים:
(1) האם קצב השינוי הממוצע הוא חיובי או שלילי.
(2) האם קצב השינוי הממוצע הוא קבוע או משתנה.
(3) האם בתחום שבין A ל-B, קצב השינוי הממוצע גדול יותר בסביבת הנקודה A,
או בסביבת הנקודה B או שווה בשניהם.
(4) האם התלילות בין A ל-B, קבועה, הולכת וגדלה או הולכת וקטנה.





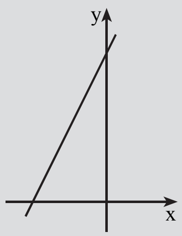


תשובות:

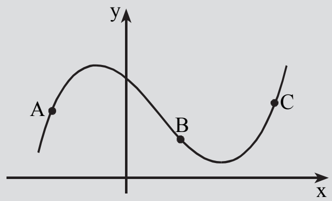
1. א. $-\frac{1}{2}$. ב. $1\frac{1}{2}$. ג. משתנה. ד. שלילי.
2. א. משתנה. ב. 2. ג. $\frac{1}{2}$. ד. בין A ל-B. אפשר לענות גם ללא חישובים.
3. א. משתנה. ב. (1) שלילי. (2) חיובי. (3) שלילי. **4.** א. 1. ב. 1. ג. 1. ד. קבוע. ה. 1.
5. א. בין A ל-B: (1) אחיד. (2) חיובי. בין B ל-C: (1) אחיד. (2) אפס.
בין C ל-D: (1) אחיד. (2) שלילי. **6.** א. בין A ל-B: (1) קבוע. (2) שלילי.
בין B ל-C: (1) קבוע. (2) אפס. בין C ל-D: (1) משתנה. (2) חיובי. ב. עפר צודק.
7. גרף ימני: (1) חיובי. (2) משתנה. (3) B. (4) הולכת וגדלה.
גרף אמצעי: (1) חיובי. (2) קבוע. (3) שווה בשניהם. (4) קבועה.
גרף שמאלי: (1) חיובי. (2) משתנה. (3) A. (4) הולכת וקטנה.

שיפוע גרף של פונקציה בנקודה שעל הגרף

נעסוק עכשיו במושג "שיפוע של פונקציה בנקודה שעל גרף הפונקציה", במקרים שבהם התיאור הגרפי של הפונקציה אינו קו ישר.
מושג זה קשור למושג "קצב השינוי" של פונקציה עליו כבר למדנו.

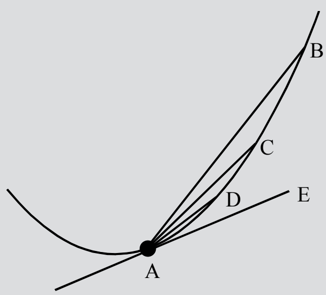


נזכיר: כאשר פונקציה ממעלה ראשונה רשומה
בצורה $y = mx + b$, אז m מייצג את שיפוע הישר.
לדוגמה: בציור מתואר הישר $y = 2x + 3$.
שיפוע הישר **קבוע** (ושווה ל- 2),
ולכן גם רמת התלילות של הפונקציה קבועה.
במקרה זה השיפוע חיובי ולכן הישר עולה.



בציור שמשמאל מתואר גרף של פונקציה.
ניתן לראות בציור שבנקודות A ו- C
הגרף עולה ובנקודה B הגרף יורד.
אנו יודעים ששיפוע של גרף כזה **אינו קבוע**,
אלא משתנה מנקודה לנקודה.

ננסה להגדיר מהו **שיפוע של פונקציה בנקודה שעל גרף הפונקציה**.



נשרטט גרף של פונקציה ונסמן נקודה A על הגרף.
דרך נקודה A נעביר את הישרים AB , AC ו- AD ,
החותכים את גרף הפונקציה בנקודה A ,
ובנקודה נוספת הנמצאת על גרף הפונקציה.

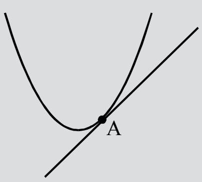
ניתן לראות כי ככל שהנקודה הנוספת (הנמצאת
על גרף הפונקציה), הולכת ומתקרבת לנקודה A ,
הישר המתקבל הולך ומתקרב לישר AE ,
שהוא למעשה הגבול של הישרים החותכים.

הישר AE נקרא **משיק** לגרף הפונקציה בנקודה A .

נגדיר את המשיק כ"ישר גבולי של המיתרים".

הגדרה נוספת למשיק:
ישר הנוגע בפונקציה בנקודה אחת בלבד בסביבה הקרובה של הנקודה.

כאשר מעבירים לגרף משיק בנקודה A , הנקודה A נקראת נקודת ההשקה.
לישר המשיק יש שיפוע.

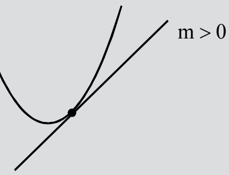


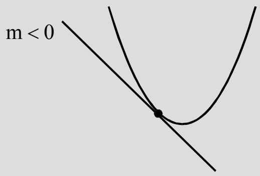
נגדיר שיפוע של פונקציה בנקודה שעל גרף הפונקציה:

שיפוע של פונקציה בנקודה שעל גרף הפונקציה שווה לשיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה באותה נקודה.
למעשה כדי לחשב שיפוע של פונקציה בנקודה שעל גרף הפונקציה
צריך להעביר ישר המשיק לגרף באותה נקודה, ולחשב את שיפוע המשיק.

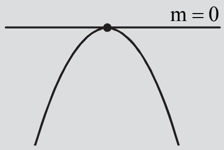
הערות:

(1) ניתן לראות שכאשר שיפוע המשיק הוא חיובי, אז הפונקציה עולה,
וכאשר שיפוע המשיק הוא שלילי, אז הפונקציה יורדת.



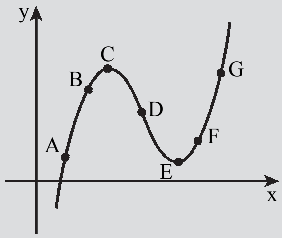


(2) כאשר שיפוע המשיק הוא אפס, המשיק מקביל לציר ה- x (או מתלכד איתו), ושיפוע הפונקציה בנקודת ההשקה שווה גם הוא לאפס.



דוגמה:

על גרף הפונקציה שלפניכם מסומנות שבע נקודות: A , B , C , D , E , F ו- G .



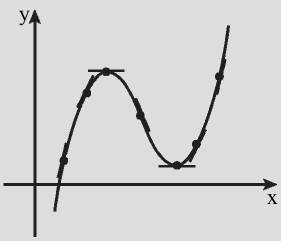
א. קבעו בכל אחת מהנקודות הנ"ל, האם שיפוע הפונקציה הוא חיובי, שלילי או אפס.

ב. הסבירו מדוע שיפוע הפונקציה בנקודה A , גדול יותר משיפוע הפונקציה בנקודה B .

פתרון:

א. על פי השרטוט, בנקודות A , B , F ו- G הפונקציה עולה, ושיפוע הפונקציה בנקודות אלה הוא חיובי.
אפשרות נוספת (וחשובה!) היא להסתמך על כך ש**שיפוע הפונקציה בנקודה שעל הגרף שווה לשיפוע המשיק לגרף באותה נקודה.**

נעביר לפונקציה משיקים בנקודות A , B , F ו- G .
המשיקים הם בעלי שיפוע חיובי, לכן גם שיפוע הפונקציה בנקודות אלה הוא חיובי.



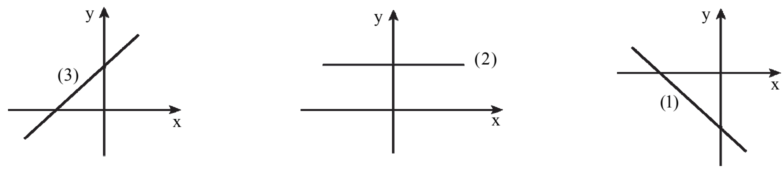
בנקודה D הפונקציה יורדת, לכן שיפוע הפונקציה בנקודה זו הוא שלילי. גם כאן נוכל להעביר משיק בנקודה ולראות ששיפועו שלילי.

בנקודות C ו- E יש לפונקציה נקודות קיצון.
אם נעביר לפונקציה משיק בנקודות אלה, המשיק מקביל לציר ה- x , ושיפועו אפס.
לכן שיפוע הפונקציה בנקודות אלה הוא אפס.

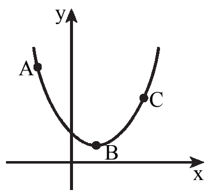
ב. בנקודות A ו- B הפונקציה עולה, ושיפוע הפונקציה הוא חיובי.
בנקודה A הגרף "**תלול**" יותר, לכן שיפוע הפונקציה בה גדול יותר.
דרך נוספת: נעביר משיקים לגרף בנקודות A ו- B . בנקודה A שיפוע המשיק גדול יותר, לכן שיפוע הפונקציה בנקודה זו גדול יותר.

תרגילים

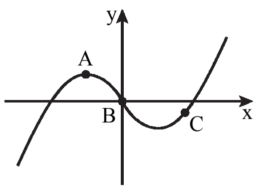
1. לפניכם שלוש מערכות צירים. על כל מערכת משורטט ישר. הישרים מסומנים (1), (2), (3).
קבעו עבור כל ישר האם השיפוע שלו חיובי, שלילי או אפס.



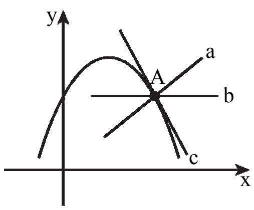
2. על גרף הפונקציה שלפניכם מסומנות הנקודות A, B ו-C.
קבעו האם שיפוע הפונקציה בכל אחת מהנקודות הללו
הוא חיובי, שלילי או אפס. הערה: אפשר גם להעביר
משיק לגרף הפונקציה בכל אחת מהנקודות הנ"ל.



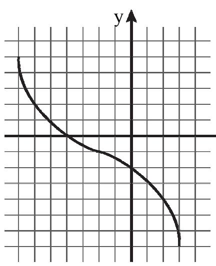
3. על גרף הפונקציה שלפניכם מסומנות הנקודות A, B ו-C.
היעזרו בגרף, וקבעו עבור כל אחת מהנקודות,
האם שיפוע הפונקציה בנקודה הוא חיובי, שלילי או אפס.
והאם ערך הפונקציה בנקודה הוא חיובי, שלילי או אפס.



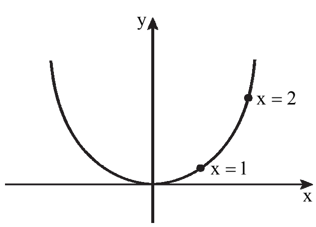
4. לפניכם גרף של פונקציה. דרך הנקודה A,
שעל גרף הפונקציה, מעבירים שלושה ישרים.
שיפועו של אחד הישרים שווה לשיפוע הפונקציה
בנקודה A. קבעו באיזה ישר מדובר.



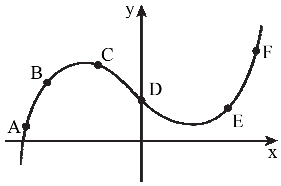
5. לפניכם גרף של פונקציה.
א. האם קיימות נקודות על הגרף:
(1) שבהן שיפוע הגרף הוא שלילי?
(2) שבהן שיפוע הגרף הוא חיובי?
ב. האם ייתכן שבשתי נקודות על גרף
של פונקציה יש אותו שיפוע? נמקו.



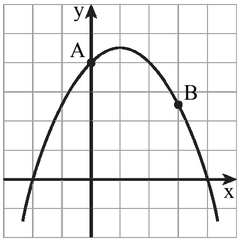
6. לפניכם גרף של פונקציה.
א. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה או לא נכונה:
(1) בין $x=1$ ל- $x=2$ השיפוע לא משתנה.
(2) בין $x=1$ ל- $x=2$ השיפוע משתנה.
(3) בין $x=1$ ל- $x=2$ השיפוע הולך וגדל.
(4) בין $x=1$ ל- $x=2$ השיפוע הולך וקטן.
ב. עבור אילו ערכי x שיפוע הגרף הוא חיובי?
ג. עבור אילו ערכי x שיפוע הגרף הוא שלילי?
ד. עבור איזה ערך של x שיפוע הגרף הוא אפס?



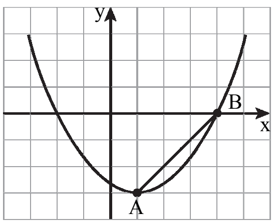
7. לפניכם גרף של פונקציה. הוסיפו בסעיפים הבאים את אחד הסימנים $<$, $>$ או $=$. הדרכה: תוכלו להעביר משיקים.
א. השיפוע ב- A ____ השיפוע ב- B .
ב. השיפוע ב- E ____ השיפוע ב- F .
ג. השיפוע ב- C ____ השיפוע ב- D .



8. על גרף הפונקציה שלפניכם מסומנות הנקודות A ו- B . בכל אחת משתי הנקודות:
א. קבעו האם שיפוע הפונקציה הוא חיובי, שלילי או אפס.
ב. נסו להעריך מהו השיפוע של הפונקציה.
העבירו משיק בנקודה, והיעזרו במשבצות.



9. לפניכם גרף של פונקציה.
א. חשבו את שיפוע הקטע AB .
ב. האם נכון להגיד שהשיפוע של הגרף שווה **תמיד** לשיפוע הקטע AB ?
ג. עידו טוען, שבנקודה A השיפוע של גרף הפונקציה קטן מ- 1, ובנקודה B השיפוע של גרף הפונקציה גדול מ- 1. נסו להעריך האם הוא צודק. הסבירו.



תשובות:

1. (1). שלילי. (2). אפס. (3). חיובי.

2. השיפוע ב- A הוא שלילי, השיפוע ב- B הוא אפס, השיפוע ב- C הוא חיובי.

3. ב- A השיפוע שווה לאפס, ערך הפונקציה הוא חיובי. ב- B השיפוע שלילי, ערך הפונקציה הוא אפס. ב- C השיפוע חיובי, ערך הפונקציה הוא שלילי.

4. הישר c , מכיוון שהוא משיק לגרף הפונקציה בנקודה A .

5. א. (1) כן. (2) לא. ב. כן, ייתכן. במקרה כזה המשיקים מקבילים.

6. א. (1) הטענה לא נכונה. (2) הטענה נכונה. (3) הטענה נכונה.
(4) הטענה לא נכונה. ב. $x > 0$. ג. $x < 0$. ד. $x = 0$.

7. א. השיפוע ב- A $>$ השיפוע ב- B . ב. השיפוע ב- E $<$ השיפוע ב- F . ג. השיפוע ב- C $>$ השיפוע ב- D .

8. א. השיפוע ב- A הוא חיובי, השיפוע ב- B הוא שלילי.
ב. השיפוע ב- A הוא בערך 1 , השיפוע ב- B הוא בערך -2 .

9. א. השיפוע הוא 1 . ב. לא, כי שיפוע הגרף אינו קבוע, ואילו שיפוע הקטע AB קבוע ושווה ל- 1 .
ג. עידו צודק. בנקודה A השיפוע של גרף הפונקציה שווה לאפס. כדי להעריך את שיפוע הפונקציה בנקודה B , נעביר משיק בנקודה B . בעזרת משבצות ניתן להעריך ששיפוע המשיק גדול מ- 1, ולכן השיפוע של גרף הפונקציה בנקודה גדול מ- 1 .

נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה – פולינומים

סעיף זה כולל מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה של פונקציית פולינום, בעזרת הנגזרת, ושילובים של **טרנספורמציות של פונקציות**.
השאלות מהוות השלמה לשאלות המופיעות בספר הלימוד.

נסכם את הכללים העיקריים לגבי טרנספורמציות של גרף של פונקציית פולינום, והשפעתן על נקודות הקיצון, ועל תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

א. הזזה אנכית **אינה** משנה את שיעור ה- x של נקודות הקיצון, **אינה** משנה את סוג הקיצון, **ואינה** משנה את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, אך **כן** משנה את שיעור ה- y של נקודות הקיצון של הפונקציה.

ב. הזזה אופקית **כן** משנה את שיעור ה- x של נקודות הקיצון, ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, אך **אינה** משנה את סוג הקיצון ואת שיעור ה- y של נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מתיחה אנכית או כיווץ אנכי **אינם** משנים את שיעור ה- x של נקודות הקיצון, **אינם** משנים את סוג הקיצון, **ואינם** משנים את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, אך **כן** משנים את שיעור ה- y של נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. שיקוף לעומת ציר ה- x **לא** משנה את שיעור ה- x של נקודות הקיצון, אך **כן** משנה את סוג הקיצון, את שיעור ה- y של נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ה. שיקוף לעומת ציר ה- y **כן** משנה את שיעור ה- x של נקודות הקיצון, ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה, אך **לא** משנה את סוג הקיצון ואת שיעור ה- y של נקודות הקיצון.

1. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+10x-24$.

א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוג הקיצון.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+3$.

(1) מצאו ללא חישובים את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

(2) האם הזזה אנכית משנה את תחומי העלייה והירידה של פונקציה?

ד. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=f(x+3)$.

(1) מצאו ללא חישובים את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

(2) האם הזזה אופקית משנה את תחומי העלייה והירידה של פונקציה?

(3) מצאו ללא חישובים את תחומי העלייה והירידה של $h(x)$.

2. נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-32x$.

א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.

ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=(x-4)^4-32(x-4)$.

(1) הביעו את $h(x)$ באמצעות $f(x)$.

(2) האם הזזה אופקית משנה את תחומי העלייה והירידה של פונקציה?

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $h(x)$. אין צורך בחישובים נוספים.

3. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-27x$.
א. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=-f(x)$.
(1) מהן נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$? אין צורך בחישובים.
(2) האם שיקוף כזה של גרף הפונקציה סביב ציר ה- x משנה את תחומי העלייה והירידה של פונקציה?
(3) מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$? אין צורך בחישובים נוספים.
ד. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=2x^3-54x$.
(1) הביעו את $h(x)$ באמצעות $f(x)$.
(2) מהם שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה $h(x)$?
אין צורך לגזור את הפונקציה $h(x)$.

4. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-6x+10$.
א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוגה.
ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)-k$.
(1) האם תחום העלייה של $g(x)$ זהה לתחום העלייה של $f(x)$? נמקו.
(2) שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ הוא -4 . מצאו את הערך של k .
ד. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=f(-x)$.
(1) יואב טוען שהגרף של $h(x)$ הוא שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ לעומת ציר ה- y .
האם הוא צודק?
(2) מהי נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$? אין צורך לגזור את $h(x)$.

תשובות:

1. א. $(5;1)$ מקסימום. ב. עלייה: $x<5$, ירידה: $x>5$. ג. **(1)** $(5;4)$ מקסימום. **(2)** לא.
ד. **(1)** $(2;1)$ מקסימום. **(2)** כן. **(3)** עלייה: $x<2$, ירידה: $x>2$.

2. א. $(2;-48)$ מינימום. ב. עלייה: $x>2$, ירידה: $x<2$.
ג. **(1)** $h(x)=f(x-4)$. **(2)** כן. **(3)** עלייה: $x>6$, ירידה: $x<6$.

3. א. $(3;-54)$ מינימום, $(-3;54)$ מקסימום. ב. עלייה: $x>3$ או $x<-3$, ירידה: $-3<x<3$.
ג. **(1)** $(3;54)$ מקסימום, $(-3;-54)$ מינימום. **(2)** כן. **(3)** עלייה: $-3<x<3$,
ירידה: $x>3$ או $x<-3$. ד. **(1)** $h(x)=2\cdot f(x)$. **(2)** $(3;-108)$ מינימום, $(-3;108)$ מקסימום.

4. א. $(3;1)$ מינימום. ב. עלייה: $x>3$, ירידה: $x<3$.
ג. **(1)** כן. הזזה אנכית לא משנה את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
(2) $k=5$. ד. **(1)** כן, יואב צודק. **(2)** $(-3;1)$ מינימום.

חקירת פונקציה – פולינומים

סעיף זה כולל חקירה של פונקציית פולינום.

<u>החקירה משלבת גם סעיפים של קדם אנליזה, ובעיקר **טרנספורמציות של פונקציות**.</u>

דוגמה:

נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-2x^2$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.

ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. הוכיחו בצורה אלגברית שהפונקציה היא **פונקציה זוגית**. מהי המשמעות הגרפית?

ז. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ המקיימת $g(x)=f(x)+4$.
שרטטו באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
כתבו גם את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

ח. מגדירים פונקציה חדשה $h(x)$ המקיימת $h(x)=(x+4)^4-2(x+4)^2$.
(1) בטאו את $h(x)$ באמצעות $f(x)$.
(2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
(3) כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $h(x)$.

ט. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $k(x)$, המקיימת $k(x)=|f(x)|$.
כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $k(x)$.

פתרון:

א. **תחום הגדרה:** כמו כל פולינום, הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x .

ב. **נקודות מינימום ומקסימום:** נגזרת הפונקציה היא $f'(x)=4x^3-4x$.
נשווה את הנגזרת לאפס. נקבל: $4x^3-4x=0$, כלומר $4x(x^2-1)=0$.
נשווה לאפס כל אחד מגורמי המכפלה. נקבל $x^2-1=0$ או $4x=0$.
הפתרונות הם: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$.
נמצא את שיעור ה- y של הנקודות על ידי הצבה בפונקציה המקורית $f(x)$.
נציב $x=0$ ונקבל $f(0)=0^4-2\cdot0^2=0$. הנקודה היא $(0;0)$.
נציב $x=1$ ונקבל $f(1)=-1$. הנקודה היא $(1;-1)$.
נציב $x=-1$ ונקבל $f(-1)=-1$. הנקודה היא $(-1;-1)$.

נסמן בטבלה את שיעור ה- x של הנקודות שהתקבלו עבור $f'(x)=0$. נוצרו ארבעה תחומים. בכל אחד מהם נבחר ערך כלשהו של x , ונציב אותו בנגזרת $f'(x)=4x^3-4x$.

בתחום שמשמאל ל- $x=-1$, נציב $x=-2$. נקבל: $f'(-2)=-24<0$

בתחום שבין $x=-1$ ל- $x=0$, נציב $x=-0.5$. נקבל: $f'(-0.5)=1.5>0$

בתחום שבין $x=0$ ל- $x=1$, נציב $x=0.5$. נקבל: $f'(0.5)=-1.5<0$

בתחום שמימין ל- $x=1$, נציב $x=2$. נקבל: $f'(2)=24>0$

נמלא בטבלה את התוצאות שהתקבלו:

x	$x<-1$	-1	$-1<x<0$	0	$0<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	MIN	↗	MAX	↘	MIN	↗

על פי הטבלה נקבל: $(1;-1)$ מינימום, $(0;0)$ מקסימום, $(-1;-1)$ מינימום.

ג. **תחומי עלייה וירידה:** על פי הטבלה נקבל שתחומי העלייה הם $-1<x<0$ או $x>1$, ותחומי הירידה הם $x<-1$ או $0<x<1$.

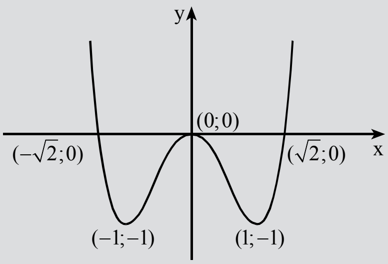
ד. **נקודות חיתוך עם הצירים:** נקודת החיתוך עם ציר ה- y:
נציב $x=0$ בפונקציה ונקבל: $f(0)=0$. הנקודה היא $(0;0)$.
נקודות החיתוך עם ציר ה- x: נציב $f(x)=0$ בפונקציה.
נקבל: $x^4-2x^2=0$, כלומר $x^2(x^2-2)=0$.

$$x^2=0 \quad \text{או} \quad x^2-2=0$$

$$x_1=0 \quad x_2=\sqrt{2} \quad x_3=-\sqrt{2}$$

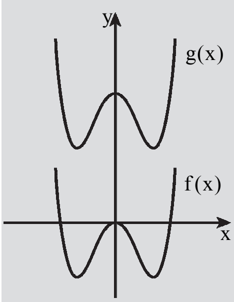
נקודות החיתוך עם ציר ה- x הן: $(0;0)$, $(\sqrt{2};0)$, $(-\sqrt{2};0)$.

ה. **שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה:**
נסמן במערכת הצירים את נקודות המינימום והמקסימום ואת נקודות החיתוך עם הצירים.
נחבר בין הנקודות בצורה רציפה,
משמאל לימין (או להיפך),
ונקבל את הסקיצה של גרף הפונקציה.



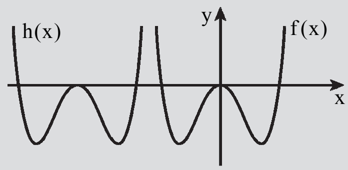
ו. כדי להוכיח שהפונקציה היא זוגית,
נוכיח שמתקיים: $f(-x)=f(x)$. נתון $f(x)=x^4-2x^2$. נמצא את $f(-x)$.
נקבל: $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2$, כלומר $f(-x)=x^4-2x^2$.
קיבלנו $f(-x)=f(x)$, לכן הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.
לפונקציה זוגית יש תכונה: גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר ה- y.
(ואכן גרף הפונקציה ששורטט נראה סימטרי משני צדי ציר ה- y).

ז. כדי לשרטט את גרף הפונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x)+4$,
ניקח את הגרף של $f(x)$ ונזיז אותו הזזה אנכית של 4 יחידות כלפי מעלה.
גרף הפונקציה $g(x)$ מתואר בציור שמשמאל.
לנקודות הקיצון של $g(x)$ יש אותו שיעור x כמו לנקודות הקיצון של $f(x)$,
אך שיעור ה- y שלהן גדול ב- 4 משיעור ה- y של נקודות הקיצון של $f(x)$.
נקודות הקיצון של $f(x)$ הן: $(1;-1)$ מינימום, $(0;0)$ מקסימום, $(-1;-1)$ מינימום, לכן נקודות הקיצון של $g(x)$ הן:
$(1;3)$ מינימום, $(0;4)$ מקסימום, $(-1;3)$ מינימום.



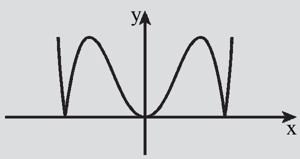
ח. (1) המשוואות הן: $f(x)=x^4-2x^2$, $h(x)=(x+4)^4-2(x+4)^2$.
ניתן לראות שאם מציבים $(x+4)$ במקום x , במשוואה של $f(x)$,
מקבלים את המשוואה של $h(x)$. כלומר $h(x)=f(x+4)$.

(2) בהתאם לכך ש- $h(x)=f(x+4)$,
נוכל להסיק שגרף הפונקציה $h(x)$
מתקבל על ידי הזזה אופקית של גרף
הפונקציה $f(x)$, ב- 4 יחידות לכיוון שמאל.
הגרף של $h(x)$ מתואר בציור שמשמאל.



(3) לנקודות הקיצון של $h(x)$ יש אותו שיעור y כמו לנקודות הקיצון של $f(x)$,
אך שיעור ה- x שלהן קטן ב- 4 משיעור ה- x של נקודות הקיצון של $f(x)$.
נקבל שנקודות הקיצון של $h(x)$ הן: $(-3;-1)$ מינימום, $(-4;0)$ מקסימום,
$(-5;-1)$ מינימום. בהתאם לכך נקבל שתחומי העלייה של $h(x)$ הם $-5<x<-4$
או $x>-3$, ותחומי הירידה הם $x<-5$ או $-4<x<-3$.

ט. נשרטט את גרף הפונקציה $|f(x)|$ באופן הבא:
בתחומים שבהם $f(x)\geq 0$ (כלומר $x\geq\sqrt{2}$ או $x\leq-\sqrt{2}$)
הגרף של $|f(x)|$ זהה לגרף של $f(x)$.
לעומת זאת, בתחומים שבהם $f(x)<0$
(כלומר $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$), הגרף של $|f(x)|$
זהה לגרף של $-f(x)$, כלומר הוא שיקוף של גרף הפונקציה $f(x)$ לעומת ציר ה- x .
נקבל את הגרף המתואר משמאל וזהו הגרף של פונקציית הערך המוחלט $|f(x)|$.
ניתן לראות שנקודות האפס של הפונקציה $|f(x)|$ הן נקודות מינימום,
שכן הן נמוכות מהנקודות שבסביבתן. נקבל: $(\sqrt{2};0)$ מינימום, $(1;1)$ מקסימום,
$(0;0)$ מינימום, $(-1;1)$ מקסימום, $(-\sqrt{2};0)$ מינימום. נשים לב שבנקודות ה"שפיץ"
$(\sqrt{2};0)$ מינימום ו- $(-\sqrt{2};0)$ מינימום, הנגזרת אינה מוגדרת (הפונקציה אינה גזירה).



תרגילים

5. נתונה הפונקציה $f(x)=-\frac{x^2}{4}+x$.

א. מצאו: (1) תחום ההגדרה. (2) נקודות קיצון.
(3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך על הצירים. .

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(x)+1$.
שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

ד. קבעו נכון או לא נכון:
(1) הזזה אנכית אינה משנה את תחומי העלייה והירידה.
(2) הזזה אנכית אינה משנה את תחומי החיוביות והשליליות.

ה. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=f(x)+c$.
לפונקציה $h(x)$ יש מקסימום בנקודה שבה שיעור ה- y הוא -1 . מצאו את הערך של c .

ו. מצאו את הערך של k , אם נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)=k\cdot f(x)$ היא $(2;4)$ מקסימום.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3(3x^2-20)$.
א. הוכיחו שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה **אי זוגית.**
ב. מצאו את שיעורי הנקודות על גרף הפונקציה שבהן $f'(x)=0$.
ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצאו את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה המקבילים לציר ה- x.
ה. מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x)-6$.
ענו על תתי הסעיפים הבאים, מבלי לחקור את הפונקציה $g(x)$.
(1) מצאו את הנקודות על גרף הפונקציה שבהן $g'(x)=0$.
(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
ו. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=2\cdot f(x)+1$. ענו מבלי לחקור את הפונקציה $h(x)$:
(1) מהם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ ומהו סוגן?
(2) מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $h(x)$?

7. נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-18x^2+32$.
א. הוכיחו שהפונקציה היא **פונקציה זוגית.**
ב. מצאו: (1) נקודות קיצון. (2) תחומי עלייה וירידה. (3) נקודות חיתוך על הצירים.
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ד. מהם תחומי החיוביות של הפונקציה $f(x)$?
ה. היעזרו בסעיפים קודמים, ופתרו את אי השוויון $x^4-18x^2+32<0$.
ו. פתרו את אי השוויון $\frac{1}{2}x^4>9x^2-16$.
ז. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+k$. מצאו לאיזה ערך של k:
(1) גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה- x.
(2) גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לישר שמשוואתו $y=7$.

8. נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-\frac{2x^3}{3}$.
א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
ג. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
ו. מהו התחום שבו הפונקציה יורדת וחיובית?
ז. לאילו ערכי x מתקיים $f(x)<0$ וגם $f'(x)>0$?
ח. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=-f(x)$.
מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
ט. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, המקיימת $h(x)=f(-x)$.
י. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, המקיימת $j(x)=|f(x)|$.

9. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^4}{4}-2x^2$.

א. מצאו : (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.

(3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x-1)$.

(1) בכמה יחידות ולאיזה כיוון יש להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$, כדי לקבל את גרף הפונקציה $g(x)$?

(2) מצאו (ללא חישובים) את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

(3) שרטטו (ללא חישובים נוספים) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=\frac{(x+3)^4}{4}-2(x+3)^2$.

(1) בכמה יחידות ולאיזה כיוון יש להזיז את גרף הפונקציה $f(x)$, כדי לקבל את גרף הפונקציה $h(x)$?

(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.

ה. מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בשתי נקודות שונות.

10. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^4}{4}-x$.

א. חקרו את הפונקציה ומצאו :

(1) תחום הגדרה (2) נקודות קיצון.

(3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=3\cdot f(x)$.

שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של הפונקציה $g(x)$ **באותה מערכת צירים**.

ד. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=-3\cdot f(x)$.

הוסיפו למערכת הצירים שבסעיף ג' סקיצה של הפונקציה $h(x)$.

ה. הפונקציה $k(x)$ מקיימת $k(x)=a\cdot f(x)$.

באיזה תחום צריך להיות הפרמטר a , כדי שלפונקציה $k(x)$:

(1) תהיה נקודת מינימום. (2) תהיה נקודת מקסימום.

11. נתונה הפונקציה $f(x)=3x^4-2x^3$.

א. מצאו : (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.

(3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. (1) עידו טוען ש- $f'(0)=f(0)$. האם הוא צודק?

(2) מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף בנקודה $x=0$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=-3x^4+2x^3$.

(1) בטאו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.

(2) מצאו (ללא חישובים) את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

(3) שרטטו (ללא חישובים נוספים) סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ה. הפונקציה $k(x)$ מקיימת $k(x)=g(x)-k$.

לאילו ערכי k גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא כולו מתחת לציר ה- x ?

12. נתונה הפונקציה $f(x)=-\frac{1}{2}x^3+6x$.

א. מצאו: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.
(3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ג. הראו שהפונקציה היא פונקציה **אי זוגית**.

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=2\cdot f(x)$.
(1) כתבו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
(2) שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של הפונקציה $g(x)$ **באותה מערכת צירים**.

ה. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)$.
(1) כתבו את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.
(2) שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של הפונקציה $h(x)$ **באותה מערכת צירים**.

ו. הפונקציה $k(x)$ מקיימת $k(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)+3$.
הוסיפו למערכת הצירים שבסעיף ה(2) סקיצה של הפונקציה $k(x)$.

13. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{6}x^3-2x^2+7\frac{1}{2}x$.

א. מצאו: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון.
(3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים.

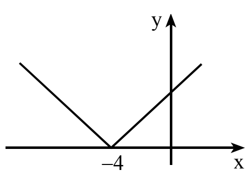
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=f(-x)$. קבעו האם גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$ סימטריים זה לזה לעומת ציר ה- x , או לעומת ציר ה- y .

ד. (1) מהם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$?
(2) מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?
(3) הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של הפונקציה $g(x)$.

ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $-f(x)+4$.

14. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=|x+4|$.

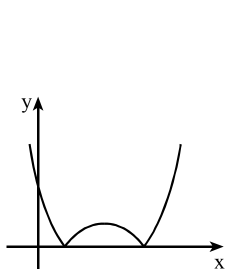


א. הסבירו מדוע הנקודה $(-4;0)$ היא נקודת מינימום של הפונקציה.

ב. האם הנגזרת של הפונקציה $f(x)=|x+4|$ מוגדרת בנקודה $(-4;0)$?

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x-6)$.

15. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=|x^2-10x+21|$.
הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות $(3;0)$ ו- $(7;0)$.
נקודת המקסימום של הפונקציה היא $(5;4)$.



א. הסבירו מדוע נקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה- x הן נקודות מינימום.

ב. האם הנגזרת של $f(x)$ מוגדרת בנקודות שמצאתם בסעיף א׳?

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $y=|x^2-10x+21|+2$.

.16 נתונה הפונקציה $f(x)=3x-x^3$.

א. מצאו : **(1)** נקודות חיתוך עם הצירים. **(2)** נקודות מינימום מקסימום.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $|f(x)|$.

ד. חשבו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $|f(x)|$: **(1)** בנקודה $x=2$. **(2)** בנקודה $x=-2$.

.17 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{6}x^3-x^2$.

א. מצאו : **(1)** נקודות חיתוך עם הצירים. **(2)** נקודות מינימום מקסימום.

ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $|f(x)|$.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=f(x)-4$.

ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=|f(x)|-4$.

ו. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$ המקיימת $h(x)=|f(x)-4|$.

.18 נתונה הפונקציה $f(x)=2x^3+x^2-4x$.

א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוג הקיצון.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת : $g(x)=f(x-a)$.

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מקסימום כאשר $x=3$. מצאו את הערך של a .

ג. כתבו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה $g(x)$.

.19 נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-32x+5$.

א. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה וקבעו את סוג הקיצון.

נתונות שתי פונקציות נוספות : $p(x)=f(x)+k$ ו- $m(x)=k\cdot f(x)$, $k>0$.

ב. מצאו את k , אם לפונקציה $p(x)$ ולפונקציה $m(x)$ יש מינימום באותה נקודה.

.20 נתונה הפונקציה $f(x)=2x^3-6x$.

א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוג הקיצון.

ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)=f(x-3)+2$.

ג. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $m(x)=4\cdot f(x)-5$.

ד. מגדירים : $p(x)=f(x+a)+5$.

מצאו את הפרמטר a , אם נקודת המינימום של הפונקציה $p(x)$ היא $(3;1)$.

.21 נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+6x$.

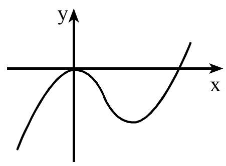
א. מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה.

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות :

(1) $g(x)=f(x+4)$ **(2)** $h(x)=-f(x+4)$ **(3)** $i(x)=-f(x+4)+1$

(4) $j(x)=\frac{1}{2}f(x+4)$ **(5)** $k(x)=-\frac{1}{2}f(x+4)$ **(6)** $m(x)=-\frac{1}{2}f(x+4)-2$

22. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^3-6x^2$.

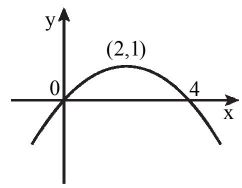


א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.
ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $|f(x)|$.
ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=|f(x)|+1$.
מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוגן.
ה. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=|f(x-1)|$.
מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוגן.
ו. הפונקציה $m(x)$ מקיימת: $m(x)=f(|x|)$.
מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $m(x)$, וקבעו את סוגן.
ז. הפונקציה $k(x)$ מקיימת: $k(x)=f(-|x|)$.
מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $k(x)$, וקבעו את סוגה.

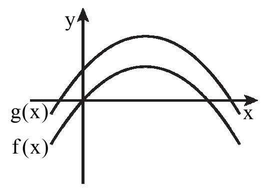
תשובות:

5. א. **(1)** כל x . **(2)** $(2;1)$ מקסימום. **(3)** עלייה: $x<2$, ירידה: $x>2$. **(4)** $(0;0)$, $(4;0)$.

ב.



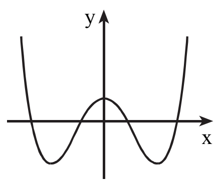
ג.



ד. **(1)** נכון. **(2)** לא נכון. ה. $c=-2$. ו. $k=4$.

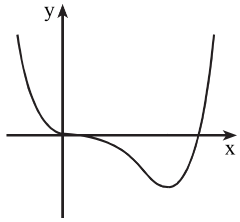
6. ב. $(0;0)$, $(2;-64)$, $(-2;64)$. ג. עלייה: $x>2$ או $x<-2$, ירידה: $-2<x<2$.
ד. $y=64$, $y=-64$. ה. **(1)** $(0;-6)$, $(2;-70)$, $(-2;58)$.
(2) עלייה: $x>2$ או $x<-2$, ירידה: $-2<x<2$.
ו. **(1)** $(2;-127)$ מינימום, $(-2;129)$ מקסימום. **(2)** עלייה: $x>2$ או $x<-2$, ירידה: $-2<x<2$.

7. ב. **(1)** $(3;-49)$ מינימום, $(0;32)$ מקסימום, $(-3;-49)$ מינימום. ג.



(2) עלייה: $x>3$ או $-3<x<0$, ירידה: $0<x<3$ או $x<-3$.
(3) $(0;32)$, $(4;0)$, $(-4;0)$, $(\sqrt{2};0)$, $(-\sqrt{2};0)$.
ד. $x>4$ או $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ או $x<-4$.
ה. $\sqrt{2}<x<4$ או $-4<x<-\sqrt{2}$.
ו. $x>4$ או $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ או $x<-4$.
ז. **(1)** $k=49$ או $k=-32$. **(2)** $k=56$ או $k=-25$.

8. א. כל x . ה.



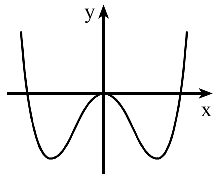
ב. $(0.5;-0.021)$ מינימום.
ג. עלייה: $x>0.5$, ירידה: $x<0.5$.
ד. $(0;0)$, $\left(\frac{2}{3};0\right)$. ו. $x<0$. ז. $0.5<x<\frac{2}{3}$.
ח. $(0.5;0.021)$ מקסימום. ט. $(-0.5;-0.021)$ מינימום.
י. $(0;0)$ מינימום, $(0.5;0.021)$ מקסימום, $\left(\frac{2}{3};0\right)$ מינימום.

9. א. **(1)** כל x. **(2)** $(0;0)$ מקסימום, $(2;-4)$ מינימום, $(-2;-4)$ מינימום.

(3) עלייה: $x>2$ או $-2<x<0$, ירידה: $x<-2$ או $0<x<2$.

(4) $(0;0)$, $(\sqrt{8};0)$, $(-\sqrt{8};0)$.

ב.



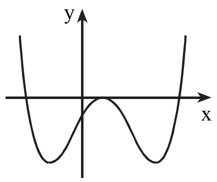
ג. **(1)** יחידה אחת ימינה.

(2) $(1;0)$ מקסימום,

$(3;-4)$ מינימום,

$(-1;-4)$ מינימום.

(3)



ד. **(1)** 3 יחידות שמאלה.

(2) $(-3;0)$ מקסימום, $(-1;-4)$ מינימום, $(-5;-4)$ מינימום.

ה. $y=-4$.

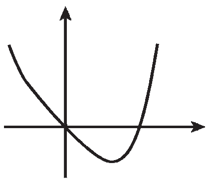
10. א. **(1)** כל x.

(2) $(1;-\frac{3}{4})$ מינימום.

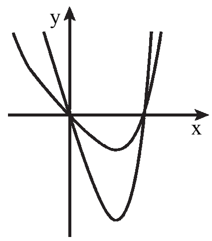
(3) עלייה: $x>1$, ירידה: $x<1$.

(4) $(0;0)$, $(1.587;0)$.

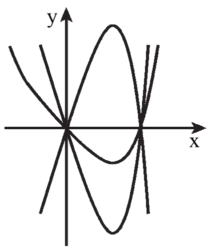
ב.



ג.



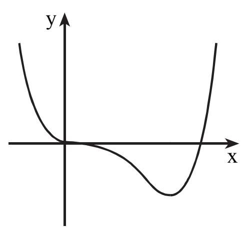
ד.



ה. **(1)** $a>0$. **(2)** $a<0$.

11. א. **(1)** כל x. **(2)** $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{16}\right)$ מינימום. **(3)** עלייה: $x>0.5$; ירידה: $x<0.5$. **(4)** $(0;0)$, $\left(\frac{2}{3};0\right)$.

ב.

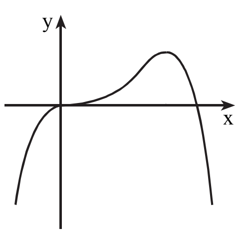


ג. **(1)** כן, עידו צודק. **(2)** $y=0$.

ד. **(1)** $g(x)=-f(x)$.

(2) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{16}\right)$ מקסימום.

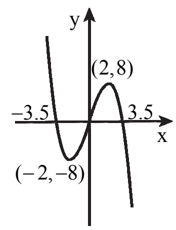
(3)



ה. $k>\frac{1}{16}$.

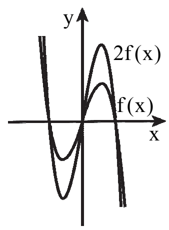
12. א. **(1)** כל x . **(2)** $(2;8)$ מקסימום, $(-2;-8)$ מינימום.
(3) עלייה: $-2 < x < 2$, ירידה: $x > 2$ או $x < -2$. **(4)** $(0;0)$, $(3.464;0)$, $(-3.464.0)$.

ב.

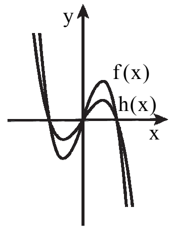


ד. **(1)** $(2;16)$ מקסימום, $(-2;-16)$ מינימום.

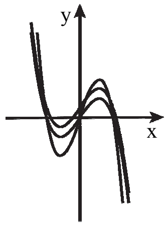
(2)



ה. **(1)** $(2;4)$ מקסימום, $(-2;-4)$ מינימום. **(2)**

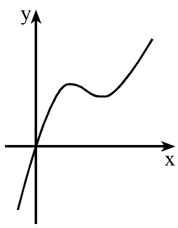


ו.



13. א. **(1)** כל x .
(2) $(3;9)$ מקסימום, $(5;8\frac{1}{3})$ מינימום.
(3) עלייה: $x > 5$ או $x < 3$;
ירידה: $3 < x < 5$. **(4)** $(0;0)$.

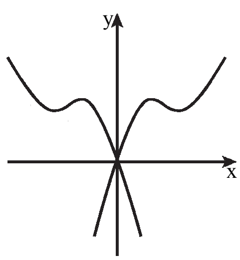
ב.



ג. לעומת ציר ה- y .

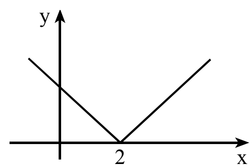
ד. **(1)** $(-5;8\frac{1}{3})$ מינימום, $(-3;9)$ מקסימום.
(2) עלייה: $-5 < x < -3$;
ירידה: $x > -3$ או $x < -5$.

(3)

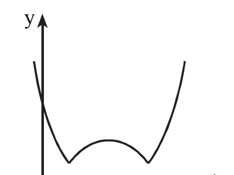


ה. $(3;-5)$ מינימום, $(5;-4\frac{1}{3})$ מקסימום.

14. ב. לא. ג.

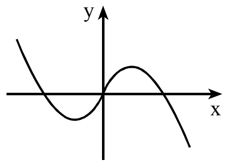


15. ב. לא. ג.

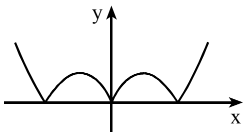


16. א. **(1)** $(0;0)$, $(\sqrt{3};0)$, $(-\sqrt{3};0)$.   **(2)** $(1;2)$ מקסימום, $(-1;-2)$ מינימום.

ב.



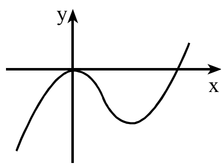
ג.



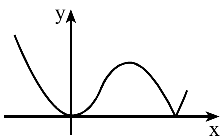
ד. **(1)** 9 . **(2)** -9 .

17. א. **(1)** $(0;0)$, $(6;0)$.   **(2)** $(0;0)$ מקסימום, $(4;-5\frac{1}{3})$ מינימום.

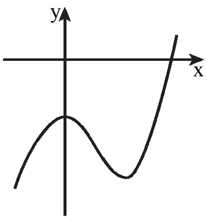
ב.



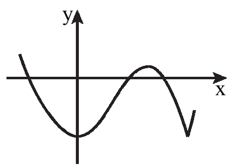
ג.



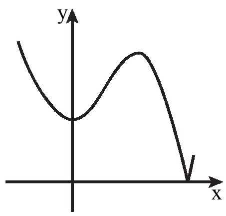
ד.



ה.



ו.



18. א. $\left(\frac{2}{3};-1\frac{17}{27}\right)$ מינימום, $(-1;3)$ מקסימום. ב. $a=4$. ג. $\left(4\frac{2}{3};-1\frac{17}{27}\right)$ מינימום, $(3;3)$ מקסימום.

19. א. $(2;-43)$ מינימום. ב. $\frac{43}{44}$.

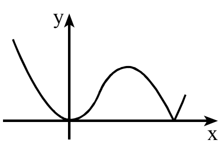
20. א. $(1;-4)$ מינימום, $(-1;4)$ מקסימום.   ב. $(4;-2)$ מינימום, $(2;6)$ מקסימום.
ג. $(1;-21)$ מינימום, $(-1;11)$ מקסימום. ד. $a=-2$.

21. א. $(3;9)$ מקסימום.
ב. **(1)** $(-1;9)$ מקסימום. **(2)** $(-1;-9)$ מינימום. **(3)** $(-1;-8)$ מקסימום.
(4) $(-1;4.5)$ מקסימום. **(5)** $(-1;-4.5)$ מינימום. **(6)** $(-1;-6.5)$ מינימום.

22. א. $(0;0)$, $(6;0)$.

ב. $(0;0)$ מקסימום, $(4;-32)$ מינימום.

ג.

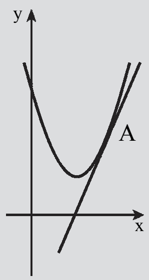


ד. $(0;1)$ מינימום, $(4;33)$ מקסימום, $(6;1)$ מינימום.
ה. $(7;0)$ מינימום, $(5;32)$ מקסימום, $(1;0)$ מינימום.
ו. $(4;-32)$ מינימום, $(0;0)$ מקסימום, $(-4;-32)$ מינימום.
ז. $(0;0)$ מקסימום.

השפעת טרנספורמציות על ישר המשיק לגרף של פונקציה

נדון עכשיו בשאלות הכוללות פונקציות פולינום וישר המשיק להן, והשפעת טרנספורמציות של גרף הפונקציה על נקודת ההשקה ושיפוע המשיק.

דוגמה:



לגרף הפונקציה $f(x)=x^2-6x+11$, המתואר בציור, מעבירים משיק בנקודה A שבה $x=4$.

א. (1) מצאו את שיעור ה- y של נקודת ההשקה.

(2) מצאו את שיפוע המשיק.

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+2$.

לגרף של $g(x)$ מעבירים משיק בנקודה $x=4$.

(1) מצאו את שיעור ה- y של נקודת ההשקה. אין צורך להציב בפונקציה.

(2) מהו שיפוע המשיק? אין צורך לגזור את הפונקציה.

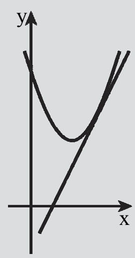
פתרון:

א. (1) נציב $x=4$ בפונקציה $f(x)=x^2-6x+11$.

נקבל: $f(4)=4^2-6\cdot4+11=3$, כלומר נקודת ההשקה היא $A(4;3)$.

(2) נגזרת הפונקציה היא: $f'(x)=2x-5$. נציב $x=4$ בנגזרת ונקבל: $f'(4)=2\cdot4-5=3$.

ערך הנגזרת הוא 3, ולכן שיפוע המשיק בנקודה A הוא 3 .



ב. (1) הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+2$, לכן גרף הפונקציה $g(x)$ מתקבל על ידי **הזזה** אנכית של גרף הפונקציה $f(x)$ ב- 2 יחידות כלפי מעלה. הזזה אנכית **אינה משנה את צורת הגרף**, אלא רק את מיקומו במערכת הצירים.

נקבל שנקודת ההשקה "הוזזה" ב- 2 יחידות כלפי מעלה, ולכן נקודת ההשקה לגרף של $g(x)$ היא $(4;5)$.

(2) כאשר מתבצעת הזזה אנכית, הרי עבור אותו x , גרף הפונקציה שומר על "שיפועו", ולכן גם הישר המשיק לגרף הפונקציה שומר על שיפועו, ולכן שיפועו נשאר 3 .

נסכם את הכללים העיקריים:

א. הזזה אנכית **אינה** משנה את שיעור ה- x של נקודת ההשקה, **ואינה** משנה את שיפוע המשיק, אך **כן** משנה את שיעור ה- y של נקודת ההשקה (בהתאם להזזה).

ב. הזזה אופקית **כן** משנה את שיעור ה- x של נקודת ההשקה (בהתאם להזזה), אך **אינה** משנה את שיעור ה- y של נקודת ההשקה, ואינה משנה את שיפוע המשיק.

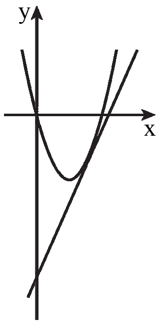
ג. מתיחה אנכית או כיווץ אנכי **אינם** משנים את שיעור ה- x של נקודת ההשקה, אך **כן** משנים את שיעור ה- y של נקודת ההשקה ואת שיפוע המשיק (בהתאם למתיחה או הכיווץ).

ד. שיקוף לעומת ציר ה- x **לא** משנה את שיעור ה- x של נקודת ההשקה, אך **כן** משנה את שיעור ה- y של נקודת ההשקה (הופך אותו לנגדי לעומת נקודת ההשקה המקורית) **וכן** משנה את שיפוע המשיק (הופך אותו לנגדי לעומת שיפוע המשיק המקורי).

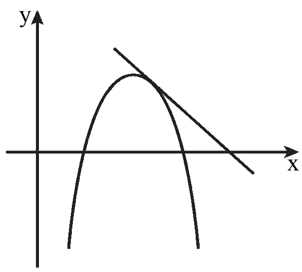
ה. שיקוף לעומת ציר ה- y **לא** משנה את שיעור ה- y של נקודת ההשקה, אך **כן** משנה את שיעור ה- x של נקודת ההשקה (הופך אותו לנגדי לעומת נקודת ההשקה המקורית) **וכן** משנה את שיפוע המשיק (הופך אותו לנגדי לעומת שיפוע המשיק המקורי).

תרגילים

23. לגרף הפונקציה $f(x)=x^2-4x$, המתואר בציור,
מעבירים משיק בנקודה שבה $x=3$.
א. (1) מצאו את שיעור ה- y של נקודת ההשקה.
(2) מצאו את שיפוע המשיק.
ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+5$.
לגרף של $g(x)$ מעבירים משיק בנקודה $x=3$.
(1) מצאו את שיעור ה- y של נקודת ההשקה. אין צורך להציב בפונקציה.
(2) מהו שיפוע המשיק? אין צורך לגזור את הפונקציה.



24. לגרף הפונקציה $f(x)=-x^2+10x-21$, מעבירים משיק ששיפועו -1 .
א. (1) מצאו את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
(2) מצאו את שיעור ה- y של נקודת ההשקה.
ב. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$, המקיימת $g(x)=f(x+8)$.
לאיזה כיוון ובכמה יחידות מזיזים
את הגרף של $f(x)$ כדי לקבל את הגרף של $g(x)$?
ג. לגרף הפונקציה $g(x)$ מעבירים משיק ששיפועו -1 .
מצאו ללא שימוש בנגזרת את שיעורי נקודת ההשקה.



25. לגרף הפונקציה $f(x)$ מעבירים משיק בנקודה $(4;13)$ שעל הגרף. שיפוע המשיק הוא 4 .
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=-f(x)$. לגרף הפונקציה $g(x)$ מעבירים משיק בנקודה $x=4$.
א. מהם שיעורי נקודת ההשקה?
ב. מהו שיפוע המשיק?

26. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-9x+23$.
לגרף הפונקציה $f(x)$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x=5$.
א. (1) מצאו את שיעור ה- y של נקודת ההשקה.
(2) מצאו את שיפוע המשיק.
מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$, המקיימת $g(x)=2x^2-18x+46$.
ב. הביעו את $g(x)$ באמצעות $f(x)$.
ג. הראו כי $g'(x)=2\cdot f'(x)$.
ד. לגרף הפונקציה $g(x)$ מעבירים משיק בנקודה שבה $x=5$.
מבלי להציב במשוואה של $g(x)$: (1) מצאו את שיעור ה- y של נקודת ההשקה.
(2) חשבו את שיפוע המשיק.

תשובות:

23. א. (1) -3 . (2) 2 . ב. (1) 2 . (2) 2 .

24. א. (1) 5.5 . (2) 3.75 . ב. 8 יחידות לכיוון שמאל. ג. $(-2.5;3.75)$.

25. א. $(4;-13)$. ב. -4 . **26.** א. (1) $(5;3)$. (2) 1 . ב. $g(x)=2\cdot f(x)$. ד. (1) 6 . (2) 2 .

נגזרת של פונקציה מורכבת ושל מכפלת שתי פונקציות

חלק זה כולל שאלות עם נגזרת של פונקציה מורכבת ונגזרת של מכפלת שתי פונקציות.
נתרגל תחילה אלגברה של פונקציות כאלה.
אחר כך נזכיר מקרים שבהם על סמך הגרף של $f(x)$ נשרטט את הגרף של $\left[f(x)\right]^n$.
ראינו מקרים כאלה בעבר. החידוש הוא שעכשיו נוכל להשתמש בנגזרת, במידת הצורך.

27. פתרו את המשוואות הבאות:

א. $(x+4)^3=8$ ב. $(3x-5)^5=-32$ ג. $(x-3)^4=16$

ד. $(2x+3)^4=81$ ה. $(2x-7)^3=(x+2)^3$ ו. $(4x-1)^4=(x+2)^4$

28. פתרו את המשוואות הבאות:

הדרכה: אל תפתחו סוגריים. הוציאו גורם משותף מקסימלי.

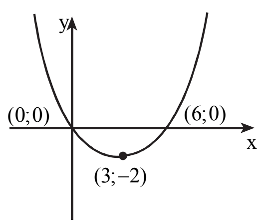
א. $4(x-3)^3-x(x-3)^2=0$ ב. $x(x+2)^3+x^2(x+2)^2=0$

ג. $x^2(3x-7)^3-x(3x-7)^4=0$ ד. $(x+5)^3(x-6)^2-(x+5)^2(x-6)^3=0$

29. נתונה הפונקציה $f(x)=(x-1)(2x-8)^2$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה.
ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
ו. נתון הישר $y=k$ (k הוא קבוע). עבור אילו ערכים של k,
הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה **לפחות** בשתי נקודות?
ז. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)=-2\cdot f(x)$, ומהו סוג הקיצון?
ח. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)=f(x-2)$?

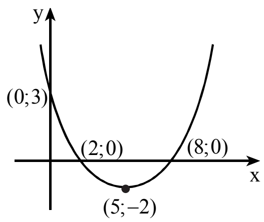
30. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.



הגרף חותך את ציר ה-x בנקודות $(6;0)$ ו-$(0;0)$.
לפונקציה נקודת קיצון אחת והיא $(3;-2)$ מינימום.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\left[f(x)\right]^3$.
א. מצאו את שיעורי הנקודות שבהן $g'(x)=0$,
וקבעו עבור כל אחת מהן האם היא מינימום
או מקסימום או שאינה נקודת קיצון.
ב. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

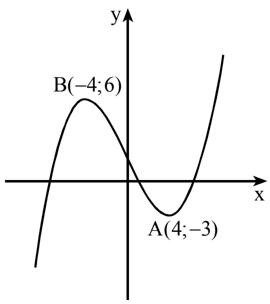
הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=\left[f(x)\right]^4$.
ד. מצאו את שיעורי הנקודות שבהן $h'(x)=0$, וקבעו עבור כל אחת מהן האם היא מינימום
או מקסימום או שאינה נקודת קיצון.
ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

.31 בציור שלפניכם מתואר גרף הפונקציה $f(x)$.
הגרף חותך את ציר ה- x בנקודות $(2;0)$ ו- $(8;0)$
וחותך את ציר ה- y בנקודה $(0;3)$.
לפונקציה נקודת קיצון אחת $(5;-2)$ מינימום.



הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=[f(x)]^n$.
א. עבור n זוגי:
(1) מצאו את שיעורי נקודת המפגש של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- y (תוכלו להביע תשובתכם על ידי n).
(2) מצאו את שיעורי הנקודות שבהן $g'(x)=0$ (תוכלו להביע על ידי n), וקבעו עבור כל אחת מהן האם היא מינימום או מקסימום או שאינה נקודת קיצון.
(3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ב. עבור n אי- זוגי:
(1) מצאו את שיעורי נקודת המפגש של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- y (תוכלו להביע תשובתכם על ידי n).
(2) מצאו את שיעורי הנקודות שבהן $g'(x)=0$ (תוכלו להביע על ידי n), וקבעו עבור כל אחת מהן האם היא מינימום או מקסימום או שאינה נקודת קיצון.
(3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

.32 בציור מתואר גרף של פונקציה $f(x)$.
לפונקציה $f(x)$ מינימום מקומי בנקודה $A(4;-3)$
ומקסימום מקומי בנקודה $B(-4;6)$.
גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x
בשלוש נקודות שבהן: $x=6$, $x=1$, $x=-7$.



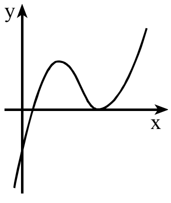
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\left(f(x-3)\right)^{99}$.
מצאו את שיעורי הנקודות שבהן $g'(x)=0$,
וקבעו עבור כל אחת מהן האם היא מינימום
או מקסימום או שאינה נקודת קיצון.

תשובות:

.27 א. 2. ב. -1. ג. 5, -1. ד. 0, -3. ה. 9. ו. 1, $-\frac{1}{5}$.

.28 א. 3, 4. ב. 0, -2, -1. ג. 0, $2\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{2}$. ד. -5, 6.

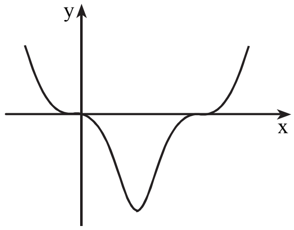
.29 א. כל x.
ב. $(0;-64)$, $(1;0)$, $(4;0)$.
ג. $(2;16)$ מקסימום, $(4;0)$ מינימום.
ד. עלייה: $x>4$ או $x<2$, ירידה: $2<x<4$.
ה.



ו. $0\le k\le 16$.
ז. $(2;-32)$ מינימום, $(4;0)$ מקסימום.
ח. עלייה: $x>6$ או $x<4$
ירידה: $4<x<6$.

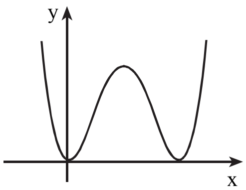
30. א. $(0;0)$ אינה קיצון, $(6;0)$ אינה קיצון,
$(3;-8)$ מינימום.
ב. עלייה: $x > 3$, ירידה: $x < 3$.

ג.



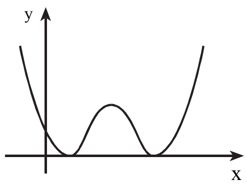
ד. $(0;0)$ מינימום, $(3;16)$ מקסימום,
$(6;0)$ מינימום.

ה.



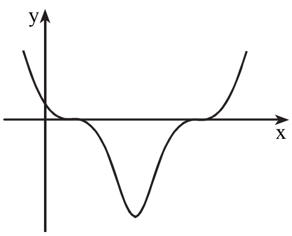
31. א. **(1)** $(0;3^n)$.
(2) $(2;0)$ מינימום,
$(5;2^n)$ מקסימום, $(8;0)$ מינימום.

(3)



א. **(1)** $(0;3^n)$.
ב. **(2)** $(2;0)$ אינה קיצון, $(5;-2^n)$ מינימום,
$(8;0)$ אינה קיצון.

(3)



32. $(9;0)$ אינה קיצון, $(4;0)$ אינה קיצון, $(-4;0)$ אינה קיצון,
$(7;-3^{99})$ מינימום, $(-1;6^{99})$ מקסימום.

מינימום ומקסימום מוחלטים

חלק זה כולל מינימום ומקסימום מוחלטים עם שימושים של קדם אנליזה.

33. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3-3x^2$.
א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ב. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה $f(x)$ בתחום $-0.5 \le x \le 3.2$.
ה. שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $-0.5 \le x \le 3.2$.
ו. מצאו עבור אילו ערכי k , למשוואה $f(x)=k$ בתחום $-0.5 \le x \le 3.2$:

(1) יש שלושה פתרונות. (2) יש שני פתרונות.
(3) יש פתרון אחד. (4) אין פתרון.

34. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^4}{8}-x^2$ בקטע $[-4,4]$.
א. הוכיחו שהפונקציה היא **פונקציה זוגית**.
ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה בקטע הנתון.
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון.
ד. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{x^4}{4}-2x^2$.
מבלי למצוא את הנגזרת $g'(x)$, מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום המוחלטים של הפונקציה בקטע $[-4,4]$.

35. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-6x+10$ בתחום $[2,5]$.
א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבעו עבור כל אחת מהן האם היא קיצון מוחלט, או קיצון מקומי שאינו מוחלט.
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x+3)$.
(1) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $[-1,2]$, וקבעו עבור כל אחת מהן האם היא מינימום או מקסימום.
(2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $[-1,2]$.

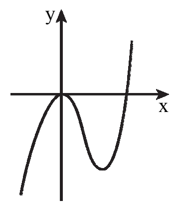
36. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+8x-5$ המוגדרת בקטע $[0,9]$.
א. מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה.
ב. הסבירו מדוע גרף הפונקציה חותך את הישר $y=7$ בשתי נקודות.
תוכלו להיעזר בגרף הפונקציה.
ג. נסמן : $g(x)=f(x)-6$.
מצאו את הערך המקסימלי, ואת הערך המינימלי של הפונקציה $g(x)$ בקטע $[0,9]$.

37. הפונקציה $f(x)=x^3-15x^2+48x-3$ מוגדרת בקטע $[0,11]$.
א. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה (נקודות הקיצון הפנימיות ונקודות הקיצון שבקצוות התחום הנתון).
ב. סמנו במערכת צירים את נקודות הקיצון שמצאתם בסעיף א',
והסבירו מדוע גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x ב- 3 נקודות שונות.
ג. נסמן: $g(x)=-f(x)$. ללא חישובים נוספים:
(1) מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה $g(x)$ בקטע $[0,11]$.
(2) בכמה נקודות גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- x?

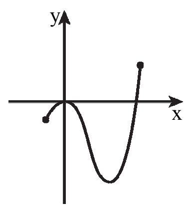
תשובות:

33. א. $(0;0)$, $(3;0)$. ב. $(0;0)$ מקסימום, $(2;-4)$ מינימום.
ד. $(3.2;2.048)$ מקסימום מוחלט, $(2;-4)$ מינימום מוחלט.
ו. **(1)** $-0.875\le k<0$. **(2)** $-4<k<-0.875$ או $k=0$.
(3) $0<k\le 2.048$ או $k=-4$. **(4)** $k>2.048$ או $k<-4$.

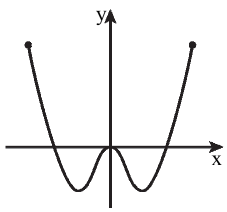
ג.



ה.



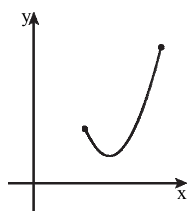
34. ב. $(4;16)$ מקסימום מוחלט, $(-4;16)$ מקסימום מוחלט,
$(2;-2)$ מינימום מוחלט, $(-2;-2)$ מינימום מוחלט.
ג.



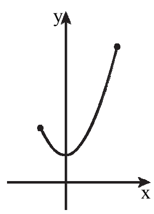
ד. $(4;32)$ מקסימום מוחלט,
$(-4;32)$ מקסימום מוחלט,
$(2;-4)$ מינימום מוחלט, $(-2;-4)$ מינימום מוחלט.

35. א. $(2;2)$ מקסימום מקומי שאינו מוחלט, $(3;1)$ מינימום מוחלט, $(5;5)$ מקסימום מוחלט.
ג. **(1)** $(-1;2)$ מקסימום, $(-2;1)$ מינימום, $(2;5)$ מקסימום.

ב.



ג. **(2)**



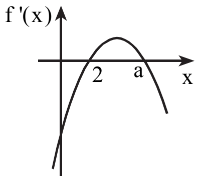
36. א. 11, -14. ג. 5, -20.

37. א. $(0;-3)$ מינימום, $(2;41)$ מקסימום, $(8;-67)$ מינימום, $(11;41)$ מקסימום.
ג. **(1)** -41, 67. **(2)** בשלוש נקודות.

הקשר בין גרף הפונקציה לבין גרף הנגזרת שלה

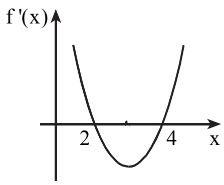
חלק זה כולל מינימום ומקסימום מוחלטים עם שימושים של קדם אנליזה.

38. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}+bx+1$.



בשרטוט מתואר חלק מגרף הנגזרת $f'(x)$.
היעזרו בנתונים שעל השרטוט:
א. מצאו את הפרמטרים b ו- a .
ב. נסמן: $g(x)=f(x)+k$. האם הגרף של $g'(x)$ זהה לגרף של $f'(x)$? נמקו.

39. נתונה פונקציה $f(x)$. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.



א. היעזרו בנתונים שעל השרטוט ומצאו את שיעור ה- x
של נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה $f(x)$.
ב. משוואת הפונקציה $f(x)$ היא $f(x)=\frac{x^3}{3}-3x^2+8x-4$.

מבלי לגזור את הפונקציה $f(x)$, מצאו את שיעורי נקודות הקיצון
של $f(x)$ וקבעו את סוג הקיצון.
ג. מצאו את שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה $f'(x)$ שבציור.
ד. נסמן: $g(x)=-f'(x)+k$. מצאו את הערך של k , אם גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לישר $y=3$.

40. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון בלבד: נקודת מקסימום ב- $x=-1$ ונקודת מינימום
ב- $x=5$. נתון: הנגזרת $f'(x)$ שונה מאפס בכל הנקודות שאינן נקודות קיצון.
א. שרטטו גרף של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.
ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+4$.
האם הגרף של $g'(x)$ זהה לגרף של $f'(x)$? נמקו.
ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=2\cdot f(x)$.
(1) מהן נקודות האפס של $h'(x)$?
(2) האם הגרף של $h'(x)$ זהה לגרף של $f'(x)$?
(3) שרטטו את הגרף של $f'(x)$ ו- $h'(x)$ באותה מערכת צירים.

41. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד. הנקודה היא מסוג מינימום, והיא מתקבלת ב- $x=5$.
א. שרטטו גרף אפשרי של הפונקציה הנגזרת $f'(x)$.
ב. הפונקציה $h(x)$ מקיימת $h(x)=-f(x)$.
(1) האם נקודות האפס של $h'(x)$ זהות לאלה של $f'(x)$? נמקו.
(2) שרטטו את הגרפים של $h'(x)$ ו- $f'(x)$ באותה מערכת צירים.

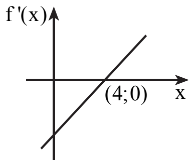
42. נתונה פונקציה $f(x)$. לפניכם הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

$f'(x)$ היא פונקציה קווית, ויש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x)=2$.

א. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$,
המקיימת $g(x)=1-f(x+1)$, וקבעו את סוג הקיצון.

ג. מהם תחומי השליליות של הפונקציה $h(x)$ המקיימת $h(x)=f'(x-2)$?



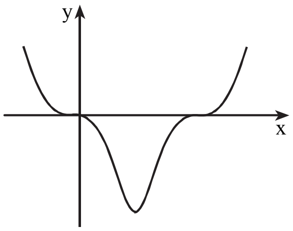
43. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=(x^2-cx)^3$.

נתון כי הפונקציה $f(x)$ מקבלת
את כל הערכים $y\ge -729$ ורק אותם.

א. מצאו את ערך הפרמטר c .

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך
של גרף הפונקציה $f(x+2)$ עם ציר ה- x .

ג. באיזה תחום מתקיים $f(x+2)\cdot f'(x+2)>0$?



44. נתונה הפונקציה $f(x)=kx^3+18x^2+mx+1$.

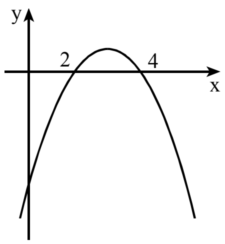
בשרטוט שלפניך מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים k ו- m .

ב. נגדיר פונקציה $g(x)$ המקיימת : $g(x)=f'(x+3)$.

(1) הוכח שהפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית.

(2) הוכח שהפונקציה $g'(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

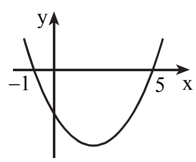


תשובות:

38. א. $b=10$, $a=5$. ב. כן. **39.** א. $x=2$ מקסימום, $x=4$ מינימום.

ב. $(2;2\frac{2}{3})$ מקסימום, $(4;1\frac{1}{3})$ מינימום. ג. $(3;-1)$. ד. $k=2$.

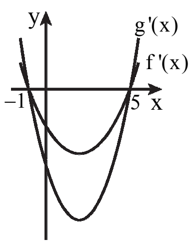
40. א.



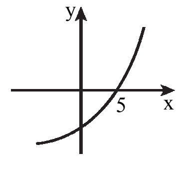
ב. כן, מכיוון ש- $f'(x)=g'(x)$.

ג. (1) $(5;0)$, $(-1;0)$. (2) לא.

(3)

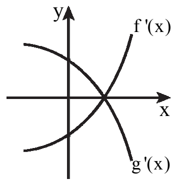


41. א.



ב. (1) כן.

(2)



42. א. $(4;2)$ מינימום. ב. $(3;-1)$ מקסימום. ג. $x<6$.

43. א. $c=6$. ב. $(4;0)$, $(-2;0)$. ג. $-2<x<1$ או $x>4$. **44.** א. $k=-2$, $m=-48$.

פונקציות רציונליות

פרק זה כולל פונקציות רציונליות המתאימות לשאלון 571, והוא מהווה השלמה לפרק הנמצא בספר הלימוד. רוב השאלות קצרות יחסית ואינן כוללות חקירה מלאה של הפונקציה, אלא מדגישות רעיון מסוים. הדגשנו בעיקר את הרעיונות הבאים:

פתרון שאלות באמצעות גרף הפונקציה, טרנספורמציות של פונקציה רציונלית (הזזות, מתיחות, שיקופים וכו׳) וחקירה של הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$, הנקראת פונקציה הופכית ל- $f(x)$, בהסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$.

הבעה על ידי פרמטרים (כולל הקשר בין ערך הפרמטר למספר הפתרונות של המשוואה), אסימפטוטות אנכיות ואופקיות, ״חור״ בגרף, פונקציות ללא תבנית אלגברית ידועה.

מומלץ לפתור שאלות מהפרק תוך כדי לימוד הנושא ובעיקר לקראת סיום הנושא.

תרגילים

1. נתונות משוואות של שלוש פונקציות:

$$f(x)=\frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} \quad , \quad g(x)=\frac{x^2}{(x-3)(x+3)} \quad , \quad h(x)=\frac{x(x-3)}{(x-3)^2(x+3)}$$

קבעו לאיזו פונקציה יש את התכונה הבאה:
יש לה שני ערכי x שבהם היא לא מוגדרת, ואסימפטוטה אנכית אחת.
נמקו את בחירתכם, והסבירו מדוע הפונקציות האחרות אינן מתאימות.

2. נתונה פונקציה רציונלית $f(x)$, המקיימת: $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה. נמקו.
(1) נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x מתקבלות בהכרח בכל נקודה שבה $g(x)=0$.
(2) נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x מתקבלות בהכרח בכל נקודה שבה $h(x)=0$.
(3) לפונקציה $f(x)$ יש בהכרח אסימפטוטות אנכיות כאשר $h(x)=0$.

3. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+12x+32}{x^2+9x+20}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$
והראו שעבור כל $x\neq -4$ בתחום מתקיים: $f(x)=\frac{x+8}{x+5}$.
ב. מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.
ג. הנקודה A היא נקודת אי-רציפות סליקה (״חור״) של הפונקציה $f(x)$.
(1) מצאו את שיעורי הנקודה A.
(2) הראו שהישר המחבר את הנקודה A עם ראשית הצירים חוצה את הזווית שבין הצירים.

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-kx+m}{x^2-6x+5}$, המוגדרת כאשר $x\neq 5$, $x\neq 1$. נתון : $\lim_{x\to 5} f(x)=1.75$.
מצאו את ערכי הפרמטרים k ו- m .

5. נתונה שתי פונקציות : $f(x)=x^2+1$, $g(x)=x+\frac{1}{x}$. נסמן : $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$?
ב. הראו שבתחום שמצאתם בסעיף א׳ מתקיים : $h(x)=x$.
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+x-a}{x^2-x+a}$, a הוא פרמטר.
א. לאילו ערכים של a , הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל ערך של x .
ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$, אם נתון $a>1$.
ג. הביעו באמצעות a את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$, אם נתון $a<0$.

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-k-6}{x^2+1}$.
א. מצאו לאילו ערכים של הפרמטר k גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות שונות.
ב. נתון שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x .
דרך נקודות אלה העבירו ישרים המאונכים לציר ה- x . המרחק בין הישרים הוא 8 .
מצאו את ערך הפרמטר k .

8. הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{x^2-k+4}$ מוגדרת לכל ערך של x .
א. מצאו את התחום של הפרמטר k .
ב. האם ייתכן שלפונקציה יש נקודת מקסימום? נמקו.

9. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-k}{x^2-9}$.
א. מהו הערך של k שבעבורו אין לפונקציה $f(x)$ אסימפטוטה אנכית?
ב. נתון $k\neq 9$.
(1) מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.
(2) לגרף הפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x ,
הנמצאות בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.
מצאו את תחום הערכים של k . נמקו.

.10 נתונה הפונקציה $f(x)=x+\frac{m(x-1)}{x}$. m הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

נתון שלפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון.

ב. (1) מצאו את תחום הערכים של m .

(2) הביעו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ באמצעות m , וקבעו את סוגן.

ג. לכל ערך של m מתקבל גרף אחר לפונקציה $f(x)$.
קיימת נקודה הנמצאת על כל הגרפים המתקבלים ל- $f(x)$, ושיעוריה אינם תלויים ב- m .
מצאו את שיעורי נקודה קבועה זו.

.11 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-a}{x^3}$.

מצאו לאילו ערכים של הפרמטר a יש לפונקציה $f(x)$ נקודות קיצון.
כמה נקודות קיצון יש לפונקציה במקרה זה?

.12 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x}{x^2-4x+k}$.

א. מצאו באיזה תחום נמצא הפרמטר k , כדי שלפונקציה $f(x)$:

(1) יש שני ערכי x שעבורם היא לא מוגדרת .

(2) יש ערך אחד של x שעבורו היא לא מוגדרת .

(3) אין ערכי x שעבורם היא לא מוגדרת .

ב. מצאו באיזה תחום נמצא הפרמטר k , כדי שלפונקציה $f(x)$:

(1) יש שתי נקודות קיצון. (2) יש נקודת קיצון אחת. (3) אין נקודות קיצון.

.13 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^4-1}{x^4-4x+4}$.

נסמן : $g(x)=x^4-4x+4$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$,
והסבירו מדוע לכל x מתקיים : $g(x)\geq 1$.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$? נמק.

.14 נתונות שלוש פונקציות :

$$h(x)=\frac{x^2-1}{x} \quad , \quad g(x)=\frac{x^2}{x-6} \quad , \quad f(x)=\frac{x-6}{x^2}$$

קבעו איזו פונקציה משיקה לציר ה- x . נמקו.

הערה : עדיף לפתור מבלי לגזור את הפונקציה.

15. א. רשמו תבנית אלגברית של פונקציה שיש לה שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת, שתי אסימפטוטות אנכיות ואסימפטוטה אופקית אחת.

ב. רשמו תבנית אלגברית של פונקציה שיש לה שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת, אסימפטוטה אנכית אחת ואסימפטוטה אופקית אחת.

16. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$.

הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(2x)$. נתון: $g(x)=\frac{kx}{x^2+m}$. מצאו את הערכים של k ו- m .

17. הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ מקיימות: $f(x)=\frac{x^2}{g(x)}$. נתון: $f(x_1)=288$, $f'(x_1)=354$, $g'(x_1)=0$.
חשבו את הערך של x_1 .

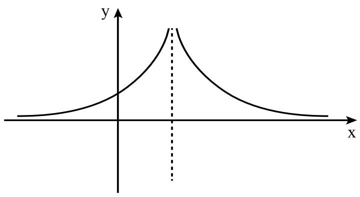
18. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2}{x^2-x}$.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
(3) מצאו את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=f(x)-2$.
ענו על פי סעיף א' על התת-סעיפים שלפניכם.
(1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$?
(2) מה הם השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$
(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ג. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=f(x)+k$.
מצאו את הערך של k , שעבורו שיעור ה- y של נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$ הוא 4 .

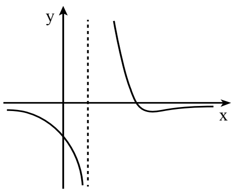
19. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{9x-18}{x^2-9x+18}$.

א. מצאו: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+k$.
הגרף של הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x .
(1) מצאו את הערכים האפשריים של k .
(2) מבין שני ערכי k שמצאתם, הציבו את הערך הגדול יותר של k , ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

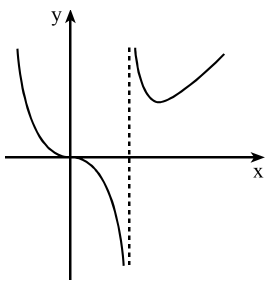
20. א. לפניכם גרף של פונקציה רציונלית $f(x)$,
המוגדרת בתחום $x \neq 1$. נגדיר $g(x) = -f(x)$.
שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$
באותו התחום.



ב. לפניכם גרף של פונקציה רציונלית $h(x)$,
המוגדרת בתחום $x \neq 1$. נגדיר $k(x) = -h(x)$.
שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $k(x)$
באותו התחום.



21. לפניכם גרף של פונקציה רציונלית $f(x)$, המוגדרת כאשר $x \neq 2$.
גרף הפונקציה נפגש עם הצירים רק בראשית, ונקודת הקיצון
היחידה של הגרף היא $(3;27)$ מינימום, ראו ציור.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = f(x-2)$.
א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
ב. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של גרף הפונקציה $g(x)$.
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ד. נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x+a)$ נמצאת על ציר ה- y.
מצאו את הערך של הפרמטר a.



22. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x+5}{x-4}$.
א. מצאו : (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. נתונה הפונקציה $g(x) = -\frac{2x+5}{x-4}$.
(1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$?
(2) היעזרו בסעיפים קודמים ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ד. מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של כל אחת מהפונקציות הבאות :
(1) $f(x)-6$ (2) $f(x-6)$ (3) $6 \cdot f(x)$ (4) $-f(x)+6$

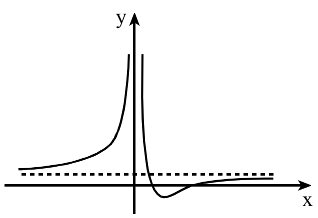
23. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$.
א. מצאו : (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = -\frac{1}{2}f(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ד. מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של כל אחת מהפונקציות הבאות :
(1) $2f(x)-3$ (2) $f(-x)$ (3) $f(2 \cdot x)$ (4) $f(3x-6)$

24. א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+4x+6}{x^2+4x+5}$.
מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגה.
ב. נגדיר : $g(x)=f(2x)$.
מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון. היעזרו בסעיף א.
ג. נגדיר : $h(x)=f(-x)$.
מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוג הקיצון. היעזרו בסעיף א.
ד. נגדיר : $i(x)=f(-2x+1)$.
מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $h(x)$, וקבעו את סוג הקיצון. היעזרו בסעיף א.

25. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2+6x}{x^2-7x+10}$.
א. חקרו את הפונקציה ומצאו : תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת : $g(x)=\left(f(x)\right)^n$, n הוא מספר <u>זוגי</u>.
(1) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
היעזרו ב- n במידת הצורך. תוכלו להיעזר בסעיפים קודמים.
(2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

26. לפניכם שתי טענות.
קבעו עבור כל אחת מהן האם היא נכונה או לא נכונה. נמקו את תשובתכם.
אם הטענה אינה נכונה, הציגו דוגמה נגדית.
(1) גרף של פונקציה אינו חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
(2) גרף של פונקציה תמיד חותך את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.

27. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת עבור $x\neq 0$.
נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים הן $(2;0)$, $(6;0)$.
נקודת הקיצון של הפונקציה היא $(3,-\frac{1}{3})$ מינימום.
הישר $y=1$ הוא אסימפטוטה אופקית
של הפונקציה, ראו ציור.



א. נגדיר : $g(x)=|f(x)+k|$.
ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.
מצאו את הערך של k (מצאו את שתי האפשרויות).
ב. נגדיר : $h(x)=|f(x)|+m$.
ידוע שגרף הפונקציה $h(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.
מצאו את הערך של m (מצאו את שתי האפשרויות).
ג. מצאו לאילו ערכי x :
(1) הגרף של הפונקציה $|f(x)|+f(x)$ מתלכד עם גרף הפונקציה $2f(x)$.
(2) הגרף של הפונקציה $|f(x)|+f(x)$ מתלכד עם ציר ה- x .

הקשר בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הגרף של $\frac{1}{f(x)}$

נתמקד עכשיו במקרה שבו נתונה פונקציה $f(x)$, ובהסתמך על הפונקציה ועל הגרף שלה, נחקור ונשרטט את גרף הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$, הנקראת פונקציה הופכית ל- $f(x)$.

נסכם את הכללים העיקריים לגבי הקשר בין פונקציה $f(x)$ לפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$:

א. בנקודה שבה הפונקציה $f(x)$ חותכת את ציר ה- x, הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת, לכן $g(x)$ אינה מוגדרת עבור ערך x זה, וגם כפופה לתחום ההגדרה המקורי של $f(x)$.

ב. עבור כל x בתחום ההגדרה של $g(x)$, ערך הפונקציה $g(x)$ שווה למספר ההופכי לערך של הפונקציה $f(x)$.

ג. לגרף של $g(x)$ אין נקודות מפגש עם ציר ה- x.

ד. כאשר הפונקציה $f(x)$ חיובית, כלומר הגרף שלה נמצא מעל ציר ה- x, אז גם הפונקציה $g(x)$ חיובית, וכאשר הפונקציה $f(x)$ שלילית, כלומר הגרף שלה נמצא מתחת לציר ה- x, אז גם הפונקציה $g(x)$ שלילית.

ה. כאשר הפונקציה $f(x)$ עולה, אז הפונקציה $g(x)$ יורדת (בתנאי שהיא מוגדרת), וכאשר הפונקציה $f(x)$ יורדת, אז הפונקציה $g(x)$ עולה (בתנאי שהיא מוגדרת).

ו. עבור ערך x שעבורו לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום פנימית, לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מקסימום פנימית (בתנאי ש- $g(x)$ מוגדרת עבור אותו x).
נקודת מינימום $(x_1;y_1)$ של $f(x)$, הופכת לנקודת מקסימום $(x_1;\frac{1}{y_1})$ של $g(x)$.

ועבור ערך x שעבורו לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום פנימית, לפונקציה $g(x)$ יש נקודת מינימום פנימית (בתנאי ש- $g(x)$ מוגדרת עבור אותו x).
נקודת מקסימום $(x_1;y_1)$ של $f(x)$, הופכת לנקודת מינימום $(x_1;\frac{1}{y_1})$ של $g(x)$.

ז. הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יכולים להיפגש רק בנקודות שבהן $f(x)=1$ או $f(x)=-1$ (אם בכלל קיימות כאלה נקודות).

ח. אסימפטוטות אנכיות ו"חורים":
(1) אם גרף הפונקציה $f(x)$ נפגש עם ציר ה- x בנקודה $(b;0)$, אז לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אנכית שמשוואתה $x=b$.
(2) אם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית שמשוואתה $x=b$, אז הפונקציה $g(x)$ אינה מוגדרת עבור ערך זה של x, ויש לה "חור" בנקודה שערך ה- y שלה הוא אפס, כלומר בנקודה $(b;0)$.
(3) כאשר לפונקציה $f(x)$ יש "חור" בנקודה $(x_1;y_1)$:
אם $x_1 \neq 0$, אז לפונקציה $g(x)$ יש "חור" בנקודה $(x_1;\frac{1}{y_1})$.
ואם $x_1=0$, אז לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אנכית שמשוואתה $x=x_1$.

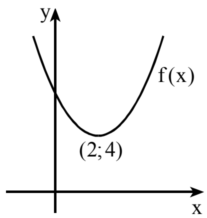
ט. אסימפטוטות אופקיות:

(1) אם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = a$ $(a \neq 0)$,
אז לפונקציה $g(x)$ יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = \frac{1}{a}$.

(2) אם עבור $x \to +\infty$ (או $x \to -\infty$) הפונקציה $f(x)$ שואפת ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$,
כלומר אין לה אסימפטוטה אופקית, אז הפונקציה $g(x)$ שואפת ל- 0^+,
או ל- 0^-, ויש לה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

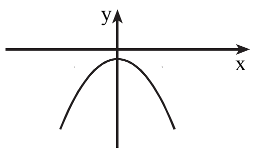
(3) אם עבור $x \to +\infty$ (או $x \to -\infty$) הפונקציה $f(x)$ שואפת ל- 0^+ או ל- 0^-,
כלומר יש לה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$, אז הפונקציה $g(x)$
שואפת ל- $+\infty$ או ל- $-\infty$, ואין לה אסימפטוטה אופקית.

.28 בציור נתונה פונקציה ריבועית $f(x)$, שיש לה
נקודת מינימום ב- $(2;4)$ והיא חיובית לכל ערך של x.
נקודת המפגש של הגרף עם ציר ה- y היא $(0;6)$.
נסמן: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. מצאו עבור הפונקציה $g(x)$:



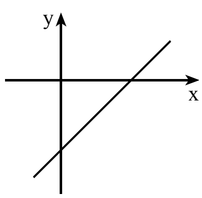
א. תחום הגדרה. ב. נקודת המפגש של הגרף עם ציר ה- y.
ג. תחומי חיוביות ושליליות.
ד. נקודת קיצון. ה. תחומי עלייה וירידה.
ו. שרטטו את הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ באותה מערכת צירים.

.29 לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת, רציפה ושלילית לכל x.
נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$
היא $(0;-\frac{1}{3})$ מקסימום.
מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.



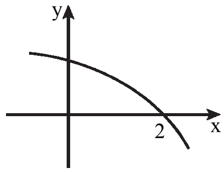
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.
ג. כתבו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ד. היעזרו בשרטוט הנתון וקבעו מהי האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$.
ה. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

.30 בציור שלפניכם מתוארת פונקציה קווית $f(x)$, החותכת את ציר ה- x בנקודה $(3;0)$.
נסמן: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. מצאו עבור הפונקציה $g(x)$:



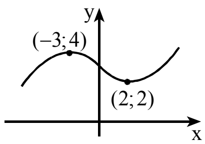
א. אסימפטוטה אנכית ואסימפטוטה אופקית.
ב. תחומי חיוביות ושליליות.
ג. הסבירו מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון.
ד. הסבירו מדוע הפונקציה $g(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה.
ה. שרטטו במערכת צירים אחת את הגרף של $f(x)$ ואת הגרף של $g(x)$.
ו. נתון: $g(a) = \frac{2}{5}$. מהו הערך של $f(a)$? נמקו.

31. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת, רציפה ויורדת לכל x.
על השרטוט מסומנת נקודת האפס
היחידה של הפונקציה $f(x)$.
מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.
ג. הסבירו מדוע הפונקציה $g(x)$ עולה בכל תחום שבו היא מוגדרת, ורשמו תחום עלייה זה.
ד. האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון? נמקו.

32. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$,
המוגדרת ורציפה לכל x.
על השרטוט מסומנת נקודות הקיצון
היחידות של הפונקציה $f(x)$.
מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.



כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.

33. $f(x)$ היא פונקציה מוגדרת ורציפה לכל x.

א. הסבירו מדוע כאשר הפונקציה $f(x)$ חיובית בתחום מסוים, אז גם הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$
חיובית באותו תחום; וכאשר הפונקציה $f(x)$ שלילית בתחום מסוים,
אז גם הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ שלילית באותו התחום.

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ חיובית כאשר $x>5$ או $0<x<2$ או $x<-3$.
כתבו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$.

34. נתונה הפונקציה $f(x)=x^2-3x+2$.

א. מצאו עבור $f(x)$: **(1)** נקודת קיצון וקבעו את סוגה.
(2) נקודות חיתוך עם הצירים.
(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. היעזרו בסעיף א' ומצאו עבור פונקציה זו:
(1) אסימפטוטות מאונכות לצירים. **(2)** נקודת קיצון.
(3) תחומי עלייה וירידה. **(4)** תחומי חיוביות ושליליות.

ג. הוסיפו את גרף הפונקציה $g(x)$ לאותה מערכת צירים.

ד. קבעו ללא חישובים, מהו ערך הביטוי $f(6)\cdot g(6)$. נמקו.

35. א. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)=-x^2+6x-9$ ואת נקודות החיתוך שלה עם הצירים, ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$. היעזרו בגרף הפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים הבאים:

(1) מצאו את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הפונקציה $g(x)$.
(2) האם לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון? נמקו.
(3) רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
(4) רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.

ג. שרטטו את גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

36. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x. נסמן: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, כך ש- $g(x)$ מוגדרת לכל x.

עבור כל אחת מהטענות קבעו האם היא נכונה בוודאות:
א. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש אותה נקודת חיתוך עם ציר ה- y.
ב. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש אותן נקודות אפס.
ג. אם לפונקציה $g(x)$ יש קיצון עבור x מסוים, אז לפונקציה $f(x)$ יש קיצון עבור אותו x.
ד. אם לפונקציה $f(x)$ יש קיצון עבור x מסוים, אז לפונקציה $g(x)$ יש קיצון עבור אותו x.

37. $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x. הוכיחו שאם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ נפגשים זה עם זה, אז נקודת המפגש נמצאת על הישר $y=1$ או על הישר $y=-1$.

38. א. דניאל טוען שהפונקציה $y=x$ מתלכדת עם הפונקציה ההופכית שלה. האם הוא צודק?
ב. כתבו משוואה של פונקציה שמתלכדת עם הפונקציה ההופכית שלה (שתי אפשרויות).

39. נתונה הפונקציה $f(x)=x^4$.
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ב. היעזרו בסעיף א' ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x^4}$.

40. נתונה הפונקציה $f(x)=x^3$.
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ב. היעזרו בסעיף א' ושרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x^3}$.

41. נתונה הפונקציה $f(x)=x^n$.
א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$: (1) עבור n זוגי. (2) עבור n אי זוגי.
ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x^n}$: (1) עבור n זוגי. (2) עבור n אי זוגי.

.42 $f(x)$ היא פונקציה גזירה ומוגדרת לכל x, כך ש- $f(x) \neq 0$ לכל x.

א. הוכיחו שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע;

ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

ב. נתון כי הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע $x < 3$.

כתבו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$.

.43 א. נתונה פונקציה $f(x)$. ידוע כי x_1 היא נקודת מינימום (מקומי) של הפונקציה $f(x)$.

כמו כן, $f'(x_1) = 0$, $f''(x_1) \neq 0$, $f(x_1) \neq 0$. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

הוכיחו: x_1 היא נקודת מקסימום (מקומי) של הפונקציה $g(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבעו את סוגה.

ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$, וקבעו את סוגה.

.44 $f(x)$ היא פונקציה מוגדרת וגזירה לכל x, כך ש- $f(x) \neq 0$ לכל x.

נתון כי לפונקציה יש מינימום עבור $x = x_1$. מגדירים פונקציה חדשה: $g(x) = \frac{k}{f(x)}$, k פרמטר.

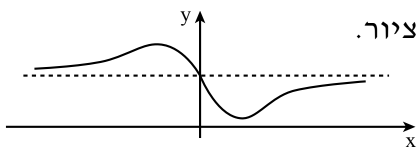
מצאו את התחום של הפרמטר k, אם לפונקציה $g(x)$:

א. יש מקסימום עבור $x = x_1$. ב. יש מינימום עבור $x = x_1$.

.45 נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x. הפונקציה חיובית בכל התחום.

נקודות הקיצון של הפונקציה הן $\left(\frac{2}{3};a\right)$ מינימום, $\left(-\frac{2}{3};b\right)$ מקסימום.

לפונקציה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 1$, ראו ציור.



נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

א. (1) הסבירו מדוע הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x.

(2) מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומה סוגן?

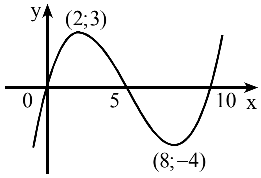
(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(5) כמה נקודות מפגש יש בין הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$? נמקו.

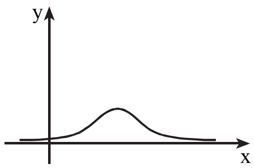
ב. הוסיפו לסרטוט של גרף הפונקציה $f(x)$ סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

.46 לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת ורציפה לכל x.
על השרטוט מסומנת נקודות האפס
ונקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$.
מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.
ג. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ד. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
ה. האם יש לפונקציה $g(x)$ אסימפטוטות מאונכות לצירים? אם כן, רשמו את משוואותיהן.

.47 לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת, רציפה וחיובית לכל x.
נקודת הקיצון היחידה של הפונקציה $f(x)$
היא $(3;1)$ מקסימום. לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית $y=0$.
מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

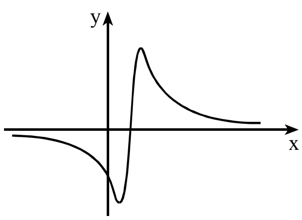


א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
ב. כתבו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ג. היעזרו בשרטוט הנתון והשלימו:
(1) עבור $x\to\infty$ הפונקציה $f(x)$ שואפת ל- ____, ולכן הפונקציה $g(x)$ שואפת ל- ____.
(2) עבור $x\to-\infty$ הפונקציה $f(x)$ שואפת ל- ____, ולכן הפונקציה $g(x)$ שואפת ל- ____.
ד. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

.48 נתונה פונקציה רציונלית $f(x)$, שיש לה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=3$.
מצאו את האסימפטוטה האופקית של כל אחת מהפונקציות הבאות:

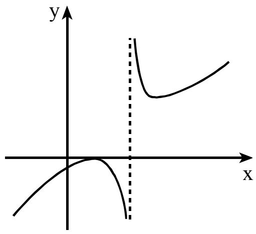
(1) $\frac{1}{f(x)}$ **(2)** $\frac{1}{f(x)+2}$ **(3)** $\frac{1}{-f(x-5)}$ **(4)** $\frac{1}{2f(x)+1}$

.49 לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$,
המוגדרת ורציפה לכל x.
נקודת האפס היחידה של הפונקציה היא $(3;0)$,
ונקודות הקיצון שלה הן $(2;-2)$ מינימום, $(4;2)$ מקסימום.
מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
ב. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$.
ג. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ד. רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
ה. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות: **(1)** $\frac{1}{f(x)}+3$. **(2)** $\frac{1}{f(x-3)}$.

50. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$.



לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית אחת שמשוואתה $x=5$.
נקודת האפס היחידה של הפונקציה היא $(3;0)$,
ונקודות הקיצון שלה הן $(7;8)$ מינימום, $(3;0)$ מקסימום.

מגדירים פונקציה $g(x)$, המקיימת $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
ב. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$,
אם ישנן, וקבעו את סוג הקיצון.
ג. כתבו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $g(x)$.
ד. כתבו את משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $g(x)$.
ה. כתבו את שיעורי הנקודה שבה מתקבל "<u>חור</u>" בגרף הפונקציה $g(x)$.
ו. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות: **(1)** $-\frac{1}{f(x)}$. **(2)** $\frac{1}{f(-x)}$.

51. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-3}$.

מצאו עבור הפונקציה $f(x)$: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$.

היעזרו בסעיפים קודמים, ומצאו עבור פונקציה זו:

(1) תחום הגדרה. **(2)** נקודות קיצון.

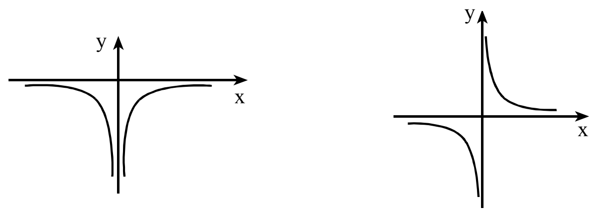
(3) אסימפטוטות מאונכות לצירים. **(4)** שיעורי נקודה שבה יש "חור" בגרף.

ד. כתבו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות: **(1)** $6-\frac{1}{2\cdot f(x)}$. **(2)** $\frac{1}{f(2x)}$.

שאלות עם הקשר בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הגרף של $f'(x)$

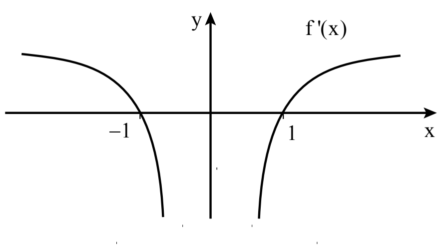
52. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+\frac{27}{x}+60$.
מצאו את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה $2\cdot f'(x)$,
והראו כי נקודה זו נמצאת על גרף הפונקציה $f(x^2)$.

53. לפניכם גרפים של הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$, המוגדרות עבור $x\neq 0$.

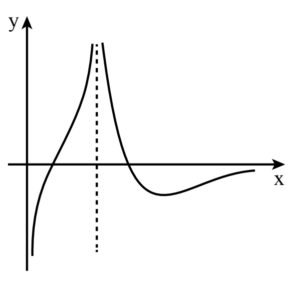


א. קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה :
(1) הגרף הימני יכול להתאים ל- $f(x)$ והשמאלי ל- $f'(x)$.
(2) הגרף השמאלי יכול להתאים ל- $f(x)$ והימני ל- $f'(x)$.
ב. נתון כי משוואת הפונקציה $f(x)$ היא $f(x)=\frac{a}{x}$, a הוא פרמטר.
(1) איזה מבין שני הגרפים מתאים ל- $f(x)$?
(2) מהו תחום הערכים המתאים לפרמטר a ?

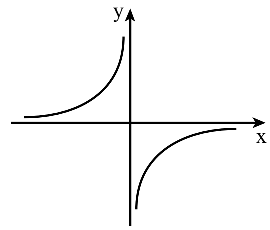
54. בציור שלפניכם מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
האסימפטוטה <u>היחידה</u> של הפונקציה $f(x)$ היא $x=0$.
נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x)=4$
ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x)=-4$.
רק על פי נתוני השאלה :
א. שרטטו סקיצה של הפונקציה $f(x)$.
ב. כמה פתרונות יש למשוואה $|f(x)|=6$?



55. נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת בתחום $x>0$.
לפניכם גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, המוגדרת אף היא בתחום $x>0$.
האסימפטוטות האנכיות של $f'(x)$ הן $x=0$ ו- $x=3$, ראו ציור.
ידוע כי לפונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש גם אסימפטוטה אופקית, $y=0$.
נקודות החיתוך של $f'(x)$ עם הצירים הן $(1;0)$ ו- $(5;0)$.
א. האם ישנן נקודות על הגרף של $f(x)$ שבהן שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ הוא 0.25 ? אם כן, כמה נקודות כאלה קיימות?
ב. היעזרו בציור ורשמו את התחומים שבהם הפונקציה $f(x)$ עולה, ואת התחומים שבהם היא יורדת.
ג. הישר $y=-4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x>3$.
(1) מצאו את השיעורים של נקודת ההשקה. נמקו.
(2) הסבירו מדוע $f(10)<-4$.



56. בציור שמשמאל מתואר גרף של פונקציה אי-זוגית $f(x)$.

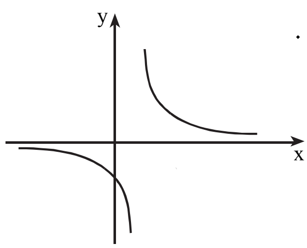


א. הסבירו מדוע פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא פונקציה זוגית.

ב. העבירו ישר ℓ_1 המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $(2;-1)$, והעבירו ישר אחר ℓ_2, המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה אחרת, T. שני המשיקים מקבילים זה לזה. (T היא הנקודה היחידה על גרף הפונקציה $f(x)$ שבה המשיק מקביל ל- ℓ_1). מצאו את השיעורים של הנקודה T.

ג. מגדירים פונקציות נוספות: $g(x)=|f(x)+k|$, $h(x)=|f(x)|+k$, $k>0$.
קבעו עבור הטענות הבאות האם הן נכונות:
(1) אם $f(x)<0$, אז $h(x)>g(x)$. (2) אם $f(x)\geq 0$, אז $h(x)=g(x)$.

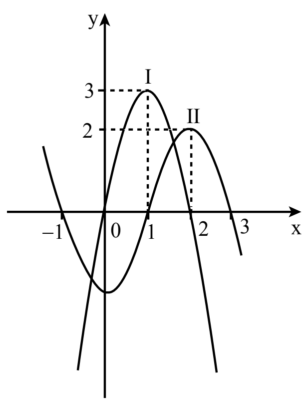
57. נתונה פונקציה רציונלית אי-זוגית $f(x)$, המוגדרת עבור $x\neq 0$.
הגרף של $f(x)$ הוזז ב- a יחידות ימינה כך שהתקבלה הפונקציה $g(x)$.
לפניכם סקיצה של הפונקציה $g(x)$.



א. הביעו באמצעות a את משוואת האסימפטוטה האנכית של הפונקציה $g(x)$.

ב. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x=3$, והעבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x=0$. המשיקים מקבילים זה לזה. מצאו את הערך של a.

58. בציור שלפניכם מוצגים שני גרפים I ו- II, של פונקציות המוגדרות בתחום $-1.1\leq x\leq 3.1$.
אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$ והאחר הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



א. קבעו איזה מבין הגרפים I ו- II הוא של הפונקציה $f(x)$. נמקו.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

(1) מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של $g(x)$, וקבעו את סוגן.

(2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $h(x)=-\dfrac{1}{f(x)}$.

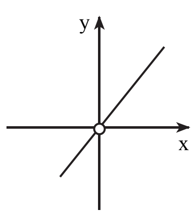
מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון הפנימיות של $h(x)$, וקבעו את סוגן.

תשובות:

1. $f(x)$. **2.** (1) לא נכונה. (2) לא נכונה. (3) לא נכונה.

3. **א.** $x\neq -4$, $x\neq -5$. **ב.** $x=-5$, $y=1$. **ג.** (1) $A(-4;4)$.

4. $k=3$, $m=-10$. **5. א.** $x\neq 0$. **ג.**



6. א. $a > 0.25$. ב. כל x . ג. $x \neq \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$. **7.** א. $k > -6$. ב. $k = 10$.

8. א. $k < 4$. ב. לא. **9.** א. $k = 9$. ב. **(1)** $x = 3$, $x = -3$. **(2)**. $0 < k < 9$.

10. א. $x \neq 0$. ב. **(1)** $m < 0$.

(2) $\left(\sqrt{-m}; m + 2\sqrt{-m}\right)$ מינימום, $\left(-\sqrt{-m}; m - 2\sqrt{-m}\right)$ מקסימום. ג. $(1;1)$.

11. $a > 0$, שתי נקודות קיצון.

12. א. **(1)** $k < 4$. **(2)** $k = 4$ **(3)** $k > 4$. ב. **(1)** $k > 0$, $k \neq 4$. **(2)** $k = 4$. **(3)** $k \leq 0$.

13. א. **(1)** כל x . **(2)** $(1;1)$ מינימום. ב. כל x . **14.** $g(x)$.

15. א. לדוגמה: $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}$. ב. לדוגמה: $g(x) = \frac{x(x+4)}{(x-3)(x+4)}$.

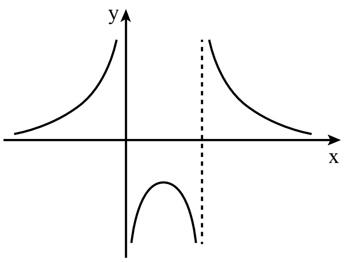
16. $k = 1\frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{4}$. **17.** $1\frac{37}{59}$.

18. א. **(1)** $x \neq 0$, $x \neq 1$.

(2) $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.

(3) $\left(\frac{1}{2}; -8\right)$ מקסימום.

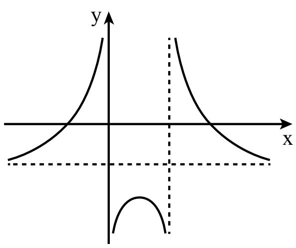
(4)



ב. **(1)** $x = 0$, $x = 1$, $y = -2$.

(2) $\left(\frac{1}{2}; -10\right)$ מקסימום.

(3)



ג. $k = 12$.

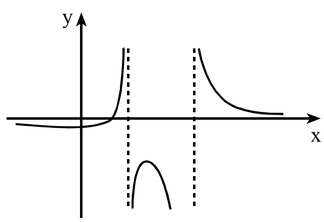
19. א. תחום הגדרה: $x \neq 3$, $x \neq 6$. נקודות חיתוך: $(0;-1)$, $(2;0)$.

אסימפטוטות: $x = 3$, $x = 6$, $y = 0$.

נקודות קיצון: $(4;-9)$ מקסימום, $(0;-1)$ מינימום.

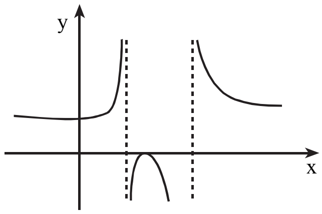
עלייה: $3 < x < 4$ או $0 < x < 3$. ירידה: $x > 6$ או $4 < x < 6$ או $x < 0$.

ב.

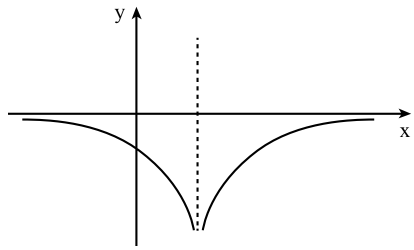


ג. **(1)** $k = 9$ או $k = 1$.

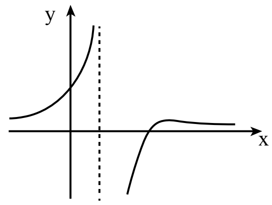
(2)



20. א.



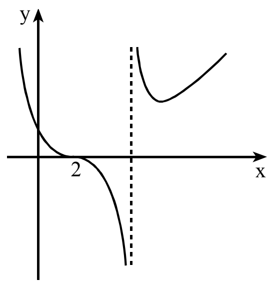
ב.



21. א. $x \neq 4$.

ב. $(5;27)$ מינימום.

ג.



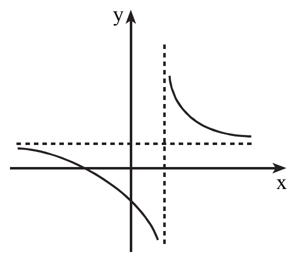
ד. $a = 3$.

22. א. **(1)** $x \neq 4$. **(2)** אין. **(3)** עלייה: אין, ירידה: $x > 4$ או $x < 4$.

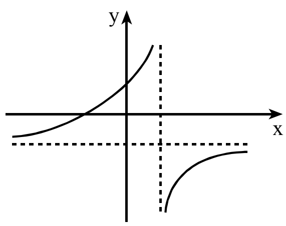
(4) $(0;-1.25)$, $(-2.5;0)$. **(5)** $x = 4$, $y = 2$. ג. **(1)** $x = 4$, $y = -2$.

ד. **(1)** $x = 4$, $y = -4$. **(2)** $x = 10$, $y = 2$. **(3)** $x = 4$, $y = 12$. **(4)** $x = 4$, $y = 4$.

ב.



ג. **(2)**

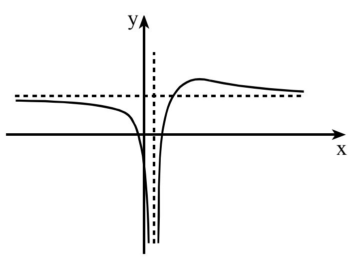


23. א. **(1)** $x \neq 1$. **(2)** $(5;1\frac{1}{8})$ מקסימום.

(3) עלייה: $1 < x < 5$, ירידה: $x > 5$ או $x < 1$.

(4) $(0;-2)$, $(2;0)$, $(-1;0)$. **(5)** $x = 1$, $y = 1$.

ב.



ג. $(5;-\frac{9}{16})$ מינימום.

ד. **(1)** $x = 1$, $y = -1$. **(2)** $x = -1$, $y = 1$.

(3) $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$. **(4)** $x = 2\frac{1}{3}$, $y = 1$.

24. א. $(-2;2)$ מקסימום. ב. $(-1;2)$ מקסימום. ג. $(2;2)$ מקסימום. ד. $(1.5;2)$ מקסימום.

25. א. תחום הגדרה: $x \neq 2$, $x \neq 5$.

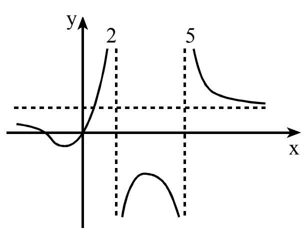
נקודות חיתוך: $(0;0)$, $(-3;0)$.

עלייה: $2 < x < 3$ או $-1 < x < 2$.

ירידה: $x > 5$ או $3 < x < 5$ או $x < -1$.

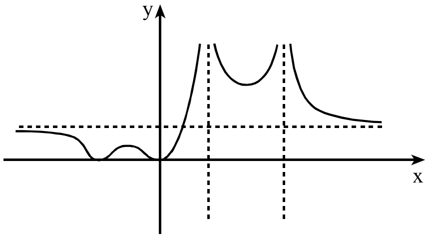
$(3;-18)$ מקסימום, $(-1;-\frac{2}{9})$ מינימום.

אסימפטוטות: $x = 2$, $x = 5$, $y = 2$.

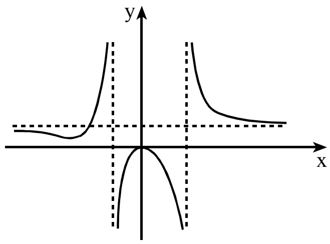


ג. **(1)** $(3;18^n)$ מינימום, $(0;0)$ מינימום,
$\left(-1;(\frac{2}{9})^n\right)$ מקסימום,
$(-3;0)$ מינימום.

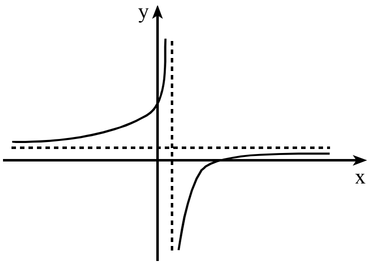
(2)



26. **(1)** לא נכונה. דוגמה נגדית:
הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{x^2-x-2}$
חותכת את האסימפטוטה האופקית
שלה בנקודה $(-2;1)$.

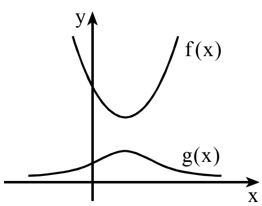


(2) לא נכונה. דוגמה נגדית:
הפונקציה $f(x)=\frac{x-5}{x-1}$
אינה חותכת את האסימפטוטה
האופקית שלה.

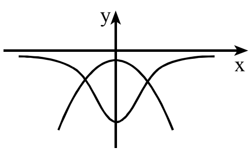


27. א. $k=1\frac{1}{3}$ או $k=-\frac{2}{3}$. ב. $m=\frac{2}{3}$. ג. **(1)** $x\ge 6$ או $x\le 2$, $x\ne 0$. **(2)** $2\le x\le 6$.

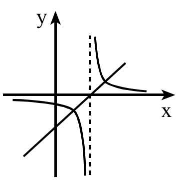
28. א. כל x. ב. $(0;\frac{1}{6})$.
ג. חיוביות: כל x, שליליות: אף x.
ד. $(2;\frac{1}{4})$ מקסימום.
ה. עלייה: $x<2$, ירידה: $x>2$.
ו.



29. א. כל x.
ב. חיוביות: אין, שליליות: כל x.
ג. $(0;-3)$ מינימום.
ד. $y=0$.
ה.



30. א. $x=3$, $y=0$.
ב. חיוביות: $x>3$;
שליליות: $x<3$.
ו. $f(a)=\frac{5}{2}$.
ה.

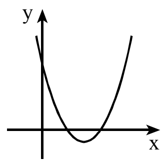


31. א. $x \neq 2$. ב. חיוביות: $x < 2$, שליליות: $x > 2$. ג. $x > 2$ או $x < 2$. ד. לא.

32. $(2;\frac{1}{2})$ מקסימום, $(-3;\frac{1}{4})$ מינימום.

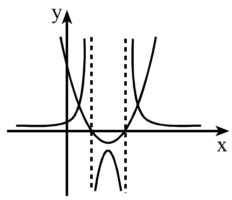
33. ב. חיוביות: $2 < x < 5$ או $-3 < x < 0$, שליליות: $x > 5$ או $0 < x < 2$ או $x < -3$.

34. א. (1) $(1.5;-0.25)$ מינימום. (2) $(0;2)$, $(2;0)$, $(1;0)$. (3)



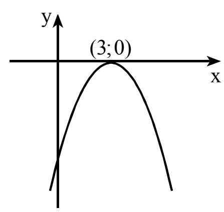
ב. (1) $x = 2$, $x = 1$, $y = 0$.
(2) $(1.5;-4)$ מקסימום.
(3) עלייה: $1 < x < 1.5$ או $x < 1$.
ירידה: $x > 2$ או $1.5 < x < 2$.
(4) חיוביות: $x > 2$ או $x < 1$,
שליליות: $1 < x < 2$.

ג.



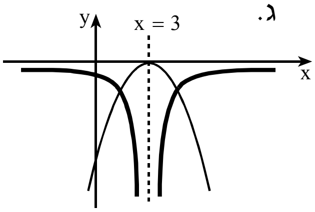
ד. $f(6) \cdot g(6) = 1$.

35. א. $(3;0)$ מקסימום; $(3;0)$, $(0;-9)$.



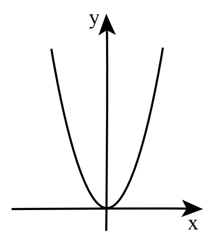
ב. (1) $x = 3$, $y = 0$. (2) לא.
(3) עלייה: $x > 3$,
ירידה: $x < 3$.
(4) חיוביות: אין,
שליליות: $x \neq 3$.

ג.

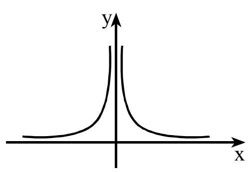


36. א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. נכונה. ד. לא נכונה. 38. א. דניאל אינו צודק. ב. $y = 1$, $y = -1$.

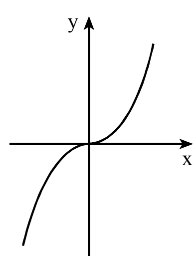
39. א.



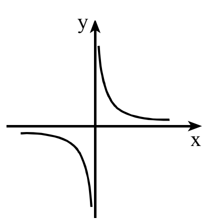
ב.



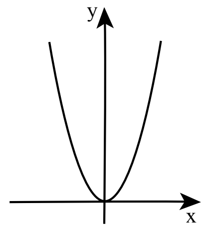
40. א.



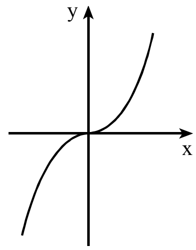
ב.



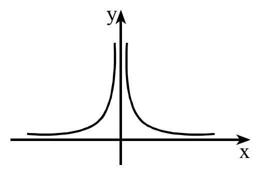
41. א. (1)



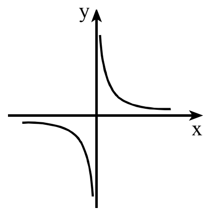
(2)



ב. (1)



(2)



42. ב. עלייה: $x>3$, ירידה: $x<3$. **43.** ב. $(0;\frac{1}{2})$ מינימום. ג. $(0;2)$ מקסימום.

44. א. $k>0$. ב. $k<0$.

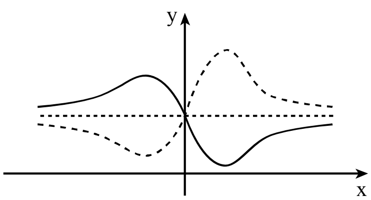
45. א. (2) $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{a}\right)$ מקסימום, $\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{b}\right)$ מינימום.

(3) עלייה: $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$;

ירידה: $x>\frac{2}{3}$ או $x<-\frac{2}{3}$.

(4) $y=1$. (5) נקודה אחת.

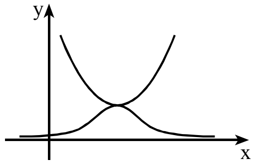
ב.



46. א. $x\neq 0$, $x\neq 5$, $x\neq 10$. ב. חיוביות: $x>10$ או $0<x<5$, שליליות: $5<x<10$ או $x<0$.
ג. $(8;-\frac{1}{4})$ מקסימום, $(2;\frac{1}{3})$ מינימום.
ד. עלייה: $2<x<5$ או $5<x<8$, ירידה: $x>10$ או $8<x<10$ או $0<x<2$ או $x<0$.
ה. כן, $x=0$, $x=5$, $x=10$, $y=0$.

47. א. כל x. ב. $(3;1)$ מינימום.
ג. (1) עבור $x\to\infty$ הפונקציה $f(x)$ שואפת ל- 0,
ולכן הפונקציה $g(x)$ שואפת ל- ∞.
(2) עבור $x\to-\infty$ הפונקציה $f(x)$ שואפת ל- 0,
ולכן הפונקציה $g(x)$ שואפת ל- ∞.

ד.



48. (1) $y=\frac{1}{3}$. (2) $y=\frac{1}{5}$. (3) $y=-\frac{1}{3}$. (4) $y=\frac{1}{7}$.

49. א. $x \neq 3$. ב. חיוביות: $x > 3$, שליליות: $x < 3$. ג. $(2;-\frac{1}{2})$ מקסימום, $(4;\frac{1}{2})$ מינימום.

ד. עלייה: $x > 4$ או $x < 2$, ירידה: $3 < x < 4$ או $2 < x < 3$.

ה. **(1)** $(2;2\frac{1}{2})$ מקסימום, $(4;3\frac{1}{2})$ מינימום. **(2)** $(5;-\frac{1}{2})$ מקסימום, $(7;\frac{1}{2})$ מינימום.

50. א. $x \neq 3$, $x \neq 5$. ב. $(7;\frac{1}{8})$ מקסימום. ג. $y = 0$. ד. $x = 3$. ה. $(5;0)$.

ד. **(1)** $(7;-\frac{1}{8})$ מינימום. **(2)** $(-7;\frac{1}{8})$ מקסימום.

51. א. $x \neq 3$. ב. $(5;8)$ מינימום, $(1;0)$ מקסימום.

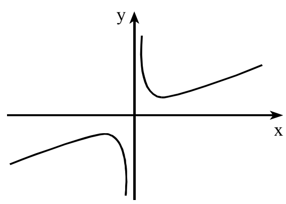
ג. **(1)** $x \neq 3$, $x \neq 1$. **(2)** $(5;\frac{1}{8})$ מקסימום. **(3)** $x = 1$, $y = 0$. **(4)** $(3;0)$.

ד. **(1)** $(5;-5\frac{15}{16})$ מקסימום. **(2)** $(2\frac{1}{2};\frac{1}{8})$ מקסימום.

52. $(3;-18)$ מקסימום.

53. א. **(1)** נכונה. **(2)** נכונה. ב. **(1)** הגרף הימני. **(2)** $a > 0$.

54. א.



ב. ארבעה.

55. א. כן, שתי נקודות. ב. עולה: $3 < x < 5$ או $1 < x < 3$; יורדת: $x > 5$ או $0 < x < 1$. ג. **(1)** $(5;-4)$.

56. ב. $(-2;1)$. ג. **(1)** נכונה. **(2)** נכונה. **57.** א. $x = a$. ב. $a = 1.5$.

58. א. גרף II הוא של $f(x)$.

ב. **(1)** $x = 0$ מקסימום, $x = 2$ מינימום,

(2) עלייה: $3 < x < 3.1$ או $2 < x < 3$ או $-1 < x < 0$ או $-1.1 < x < -1$;

ירידה: $1 < x < 2$ או $0 < x < 1$.

ג. $x = 0$ מינימום, $x = 2$ מקסימום.

פונקציות עם שורשים ריבועיים

פרק זה כולל פונקציות עם שורשים ריבועיים, המתאימות לשאלון 571.
הפרק מובא כהשלמה לספר הלימוד. רוב השאלות קצרות יחסית ואינן כוללות חקירה מלאה של הפונקציה, אלא מדגישות רעיון מסוים. הדגשנו בעיקר את הרעיונות הבאים: פתרון שאלות באמצעות גרף הפונקציה, טרנספורמציות של פונקציה (הזזות, מתיחות, שיקופים וכו׳), וחקירה של הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ בהסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$.
כמו כן, הדגשנו תחום הגדרה (כולל פתרון אי שוויונות עם פרמטרים), חיוביות ושליליות (אלגברית וגם בכלים אינטואיטיביים), נקודות קצה, הבעה על ידי פרמטרים, והתייחסות לקשר בין פונקציית שורש ריבועי לפונקציית ערך מוחלט בחלק מהמקרים.
לא עסקנו בפונקציות שורש הכוללות מנה, באסימפטוטות, ו״חורים״ בגרף הפונקציה.
גם את הקשר בין גרף של פונקציה לגרף הנגזרת לא כללנו כאן, מכיוון שגרף הנגזרת של פונקציות עם שורשים כולל לרוב אסימפטוטות.
נושאים אלה נלמדים בכיתה יא׳ גם על פי פריסת ההוראה של משרד החינוך.

תרגילים

1. א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-2}$.
ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)=\sqrt{x\cdot(x-2)}$.
ג. דניאל טוען שעל פי החוק $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ תחום ההגדרה של הפונקציות שבסעיפים א׳ ו-ב׳ אמור להיות זהה, וזה אינו תואם את התוצאות שהוא קיבל. מה דעתכם?

2. נתונה שתי פונקציות: $f(x)=\sqrt{(x-2)}\cdot\sqrt{(x+6)}$, $g(x)=\sqrt{(x-2)\cdot(x+6)}$.
א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
ב. רועי טוען ששתי הפונקציות זהות. הוא מסתמך על חוק השורשים $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$.
אריאל טוען שהפונקציות אינן זהות, שכן תחום ההגדרה שלהן שונה.
מי מהשניים צודק? נמקו.
ג. יונתן טוען שהפונקציות זהות רק בתחום שבו שתיהן מוגדרות. האם הוא צודק?

3. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{(x-k)^2+1}$, k הוא פרמטר.
א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
ב. נמקו מדוע $f(x)\geq 1$ בכל תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

4. נתונה פונקציה זוגית $f(x)=\sqrt{-x^2+bx+c}$, b ו- c הם פרמטרים.
א. מצאו את הערך של הפרמטר b .
ב. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $-3\leq x\leq 3$. מצאו את הערך של הפרמטר c .

5. תחום ההגדרה של הפונקציה הזוגית $f(x)=\sqrt{cx^2+bx-1}$ הוא $|x|\ge 4$.
מצאו את הערך של הפרמטרים b ו- c.

6. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2-kx+1}$, k הוא פרמטר.
ידוע כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל ערך של x.
א. מצאו את התחום שבו נמצא הפרמטר k.
ב. נתון: $-2\le k\le 2$.
(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
(2) ידוע כי הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים $y\ge\frac{\sqrt{7}}{4}$ ורק אותם.
מצאו את הערך של k.

7. נתונה משפחת הפונקציות $f(x)=2x+m\sqrt{x-6}$, m הוא פרמטר.
א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציות $f(x)$ השייכות למשפחה.
ב. הנקודה P היא נקודה קבועה ששיעוריה אינם תלויים ב- m, והיא נמצאת על כל הגרפים השייכים למשפחת הפונקציות $f(x)$. מצאו את שיעורי הנקודה P.

8. קבעו כמה פתרונות יש למשוואה $x^2=\sqrt{x+4}$.
הדרכה: שרטטו את הגרפים של הפונקציות $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=\sqrt{x+4}$.

9. נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\sqrt{2x-x^2}$, $f(x)=\sqrt{ax-bx^2}$. a ו- b הם פרמטרים.
נתון: $a>0$, $b>0$. ידוע שלשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה. הוכיחו: $a=2b$.

10. נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^n}$, הפרמטר n הוא מספר טבעי.
מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$: א. עבור n זוגי. ב. עבור n אי- זוגי.

11. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$.
א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{x}$.
(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
(2) האם הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ זהות זו לזו? נמקו.
(3) עבור אילו ערכים של x מתקיים $f(x)=g(x)$? נמקו.

12. נתונות שתי פונקציות: $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{1+x}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
א. האם תחום ההגדרה של שתי הפונקציות זהה?
ב. האם הגרפים של שתי הפונקציות מתלכדים זה עם זה?
אם כן, הסבירו מדוע. אם לא, רשמו מה ההבדל ביניהם.

13. א. הוכיחו: עבור $x \ge 0$ מתקיים $\sqrt{x^2} = x$, ועבור $x \le 0$ מתקיים $\sqrt{x^2} = -x$.
ב. נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x^2}$.
(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) הראו כי עבור $x \ge 0$ מתקיים $f(x) = x^2$, ועבור $x \le 0$ מתקיים $f(x) = -x^2$.
(3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

14. א. הסבירו מדוע עבור כל x מתקיים: $\sqrt{x^2} = |x|$.
ב. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.
(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) הראו כי עבור $x > 0$ מתקיים $f(x) = 1$ ועבור $x < 0$ מתקיים $f(x) = -1$.
(3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

15. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{(x+2)^2}$.
א. הראו כי הפונקציה מוגדרת לכל ערך של x.
ב. הוכיחו: $f(x) = |x+2|$.
ג. קבעו לאילו ערכי x מתקיים: $f(x) = x+2$. נמקו.
ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

16. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \sqrt{(x+1)^2}$, $g(x) = |x+1|$.
א. יואב טוען שעבור כל ערך של x מתקיים $f(x) = g(x)$. האם יואב צודק? נמקו.
ב. שרטטו את גרף הפונקציה $f(x)$.

17. נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{(x-6)^2}$. קבעו לאילו ערכי x מתקיים: $g(x) = x-6$. נמקו.

18. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$.
א. קבעו האם הפונקציות זהות. נמקו.
ב. האם קיים תחום שבו הפונקציות מתלכדות? נמקו.

19. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2\sqrt{5-x}$.
א. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
ב. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + c$. c הוא פרמטר.
מהו הערך של c שעבורו גרף הפונקציה $g(x)$ משיק לציר ה- x? נמקו.
ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x) = 2 - f(x)$, וקבעו את סוגן.
ד. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $k(x) = f(-x)$, וקבעו את סוגן.
ה. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $n(x) = f(-5x)$, וקבעו את סוגן.

הקשר בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין הגרף של $\sqrt{f(x)}$

נתמקד עכשיו בחקירה של הפונקציה $\sqrt{f(x)}$, בהסתמך על גרף הפונקציה $f(x)$.

נסכם את הכללים העיקריים לגבי הקשר בין פונקציה $f(x)$ לפונקציה $g(x)=\sqrt{f(x)}$:

א. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת רק כאשר $f(x)\ge 0$, כלומר היא מוגדרת כאשר הפונקציה $f(x)$ היא חיובית (והגרף שלה נמצא מעל ציר ה- x) או כאשר הפונקציה $f(x)$ מתאפסת (והגרף שלה נפגש עם ציר ה- x).
כאשר $f(x)<0$, הפונקציה $g(x)$ <u>אינה</u> מוגדרת.

ב. עבור כל x בתחום שבו $g(x)$ מוגדרת, ערך הפונקציה $g(x)$ שווה לשורש הריבועי של ערך הפונקציה $f(x)$.

ג. נקודות המפגש של $g(x)$ עם ציר ה- x זהות לנקודות המפגש של $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש נקודות כאלה).

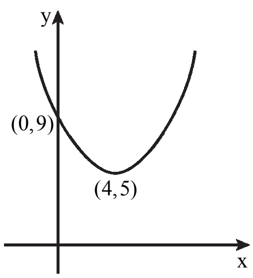
ד. הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה אי שלילית בכל התחום שבו היא מוגדרת.

ה. כאשר הפונקציה $f(x)$ חיובית (במצב זה, כאמור, הפונקציה $g(x)$ מוגדרת):
(1) אם הפונקציה $f(x)$ עולה, אז גם הפונקציה $g(x)$ עולה.
(2) אם הפונקציה $f(x)$ יורדת, אז גם הפונקציה $g(x)$ יורדת.
(3) אם לערך מסוים של x יש לפונקציה $f(x)$ נקודת קיצון פנימית, אז עבור אותו ערך של x גם לפונקציה $g(x)$ יש נקודת קיצון פנימית ומאותו סוג.

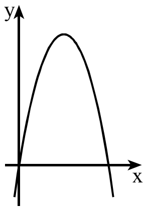
ו. הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יכולים להיפגש רק בנקודות שבהן $f(x)=1$ או $f(x)=0$ (אם קיימות כאלה נקודות על הגרף של $f(x)$).

בהקשר זה, נשים לב שכאשר $0<f(x)<1$, אז $\sqrt{f(x)}>f(x)$, כלומר הגרף של $\sqrt{f(x)}$ נמצא מעל הגרף של $f(x)$.
וכאשר $f(x)>1$, אז $\sqrt{f(x)}<f(x)$, כלומר הגרף של $\sqrt{f(x)}$ נמצא מתחת לגרף של $f(x)$.

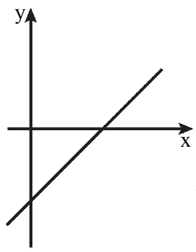
20. לפניכם גרף של פונקציה $f(x)$, המוגדרת וחיובית לכל x.
לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון (מינימום) רק ב- $(4;5)$.
והיא חותכת את ציר ה- y בנקודה $(0;9)$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.
בהסתמך על הציור:
א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
ב. מצאו את נקודת החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- y.
ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ד. שרטטו באותה מערכת צירים סקיצות של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.



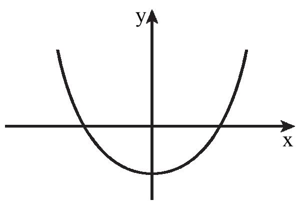
.21 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל ערך של x.
לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון (מקסימום) רק ב- $(2;4)$
והיא חותכת את ציר ה- x בנקודות $(0;0)$ ו- $(4;0)$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$. בהסתמך על הציור:
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$
(כולל הנקודות שבקצות תחום ההגדרה של הפונקציה), וקבעו את סוג הקיצון.
ג. (1) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
(2) שרטטו את הגרפים של $f(x)$ ו- $g(x)$ באותה מערכת צירים. (את $f(x)$ שרטטו במקווקו).
ד. הסבירו מדוע הפונקציות $f(x)$ ו- $\sqrt{f(x)}$ נפגשות כאשר $f(x)=1$ או כאשר $f(x)=0$.
כמה נקודות מפגש כאלה קיימות בסך הכול? נמקו.
ה. מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $h(x)=3\sqrt{f(x)}+1$, וקבעו את סוג הקיצון.



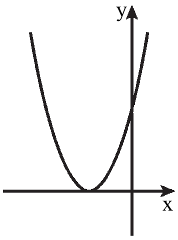
.22 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x-3$.
א. מצאו את נקודת האפס של הפונקציה.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.
ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
ג. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ד. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ה. (1) מצאו את שיעורי נקודות המפגש בין הגרף של $f(x)$ לגרף של $g(x)$.
(2) באילו תחומים מתקיים $g(x)>f(x)$? (3) באילו תחומים מתקיים $g(x)<f(x)$?



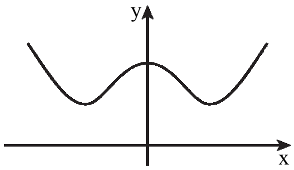
.23 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^2-0.64$.
א. מצאו את נקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$.
ב. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.
ג. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.
ה. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ו. הראו שהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ הן פונקציות זוגיות.
ז. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ח. (1) מצאו את שיעורי נקודות המפגש בין הגרף של $f(x)$ לגרף של $g(x)$.
(2) באילו תחומים מתקיים $g(x)>f(x)$? (3) באילו תחומים מתקיים $g(x)<f(x)$?



.24 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=x^2+4x+4$.
א. מצאו את נקודת המינימום של הפונקציה.
ב. מצאו את נקודות המפגש של הפונקציה עם הצירים.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.
ג. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
ד. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.
ה. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ו. (1) הסבירו מדוע $g(x)=|x+2|$. (2) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

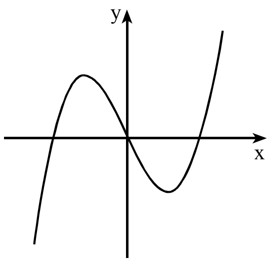


.25 הפונקציה $f(x)$, שהגרף שלה מתואר לפניכם,
מוגדרת, רציפה וחיובית לכל x.
לפונקציה יש שלוש נקודות קיצון:
$(3;2)$ מינימום, $(0;4)$ מקסימום, $(-3;2)$ מינימום.



הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.
א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
ב. מהם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, ומהו סוגן?
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ באותה מערכת צירים.

.26 לפניכם גרף הפונקציה $f(x)$.
לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון ב- $(2;-16)$
ו- $(-2;16)$ והיא חותכת את ציר ה- x
בנקודות $(0;0)$, $(\sqrt{12};0)$ ו- $(-\sqrt{12};0)$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.
מבלי לחקור את הפונקציה $g(x)$:



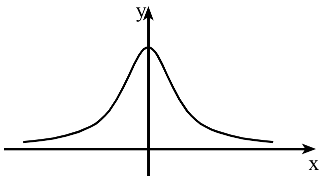
א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוג הקיצון.
ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ד. (1) הסבירו מדוע הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)=\sqrt{f(x)}$ נפגשות על הישר $y=1$ או על ציר ה- x.
(2) כמה נקודות מפגש בין $f(x)$ ו- $g(x)=\sqrt{f(x)}$ קיימות בסך הכול? נמקו.
ה. מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $h(x)=-\sqrt{f(x)}+7$, וקבעו את סוג הקיצון.

.27 נתונה פונקציה $f(x)$, המוגדרת, חיובית וגזירה לכל ערך של x.
ידוע כי x_1 היא נקודת מינימום פנימית של הפונקציה $f(x)$. כמו כן, $f'(x_1)=0$, $f''(x_1)\neq 0$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.
הוכיחו: x_1 היא נקודת מינימום פנימית של הפונקציה $g(x)$.

.28 נתונה פונקציית פולינום $f(x)$, חיובית לכל x.
הוכיחו שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום מסוים, אז הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ עולה גם היא באותו התחום; ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום מסוים, אז הפונקציה $\sqrt{f(x)}$ יורדת גם היא באותו התחום.

.29 $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x.
א. הוכיחו שאם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $\sqrt{f(x)}$ נפגשים זה עם זה,
אז נקודת המפגש נמצאת על הישר $y=1$ או על ציר ה- x.
ב. הראל טוען שכאשר $0<\sqrt{f(x)}<1$, אז $\sqrt{f(x)}>f(x)$. האם הוא צודק?
ג. טלי טוענת שכאשר $\sqrt{f(x)}>1$, אז $\sqrt{f(x)}<f(x)$. האם היא צודקת?

30. לפונקציה $f(x)$, שהגרף שלה מתואר לפניכם,
יש נקודת קיצון יחידה (מקסימום) ב- $(0;6)$,
ואסימפטוטה אחת שמשוואתה $y=0$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

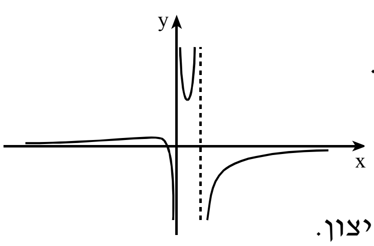


א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
ב. מצאו את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$,
וקבעו את סוג הקיצון.
ג. הוסיפו למערכת הצירים סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ד. תמר טוענת כי אם $f(x)$ היא פונקציה זוגית <u>וחיובית</u>, אז גם הפונקציה $\sqrt{f(x)}$
היא פונקציה זוגית וחיובית. האם תמר צודקת? נמקו.
ה. בחרו את התשובה הנכונה:
עבור $x\to\infty$, גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא מעל/מתחת לגרף הפונקציה $f(x)$.

31. נתונה פונקציה $f(x)$. רועי טוען כי אם $f(x)$ היא פונקציה אי- זוגית, אז גם הפונקציה $\sqrt{f(x)}$
היא פונקציה אי- זוגית. האם רועי צודק? נמקו.

32. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4x+5}$.
א. מצאו: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
(4) תחומי חיוביות ושליליות. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g(x)=\sqrt{f(x)}$.
(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.
(2) מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.
(3) שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
ד. מצאו את נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $h(x)=\sqrt{f(x-5)}-6$, וקבעו את סוג הקיצון.
ה. מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $h(x)=\sqrt{f(x-5)}-6$.

33. לפניכם גרף הפונקציה $f(x)=-\frac{3x+1}{x^2-x}$.
נקודות הקיצון של הפונקציה הן: $(\frac{1}{3};9)$ מינימום, $(-1;1)$ מקסימום.
מגדירים: $g(x)=\sqrt{-\frac{3x+1}{x^2-x}}$



א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?
ב. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבעו את סוג הקיצון.
ג. מצאו את שיעורי נקודות המפגש בין הגרף של הפונקציה $f(x)$
לגרף של הפונקציה $g(x)$ (אם ישנן).
ד. מצאו לאילו ערכי x מתקיים $f(x)<g(x)$.
ה. מצאו את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $h(x)=\sqrt{f(x)+4}$.

34. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-6}{x^2-1}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=-\sqrt{\frac{x-6}{x^2-1}}$. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ד. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)=\frac{\sqrt{x-6}}{\sqrt{x^2-1}}$?

תשובות:

1. א. $x\ge 2$. ב. $x\ge 2$ או $x\le 0$.

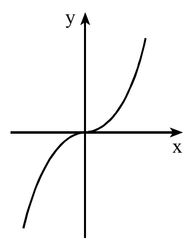
2. א. **(1)** $x\ge 2$. **(2)** $x\ge 2$ או $x\le -6$. ב. אריאל צודק. ג. כן, יונתן צודק. **3.** א. כל x .

4. א. $b=0$. ב. $c=9$. **5.** $b=0$, $c=\frac{1}{16}$. **6.** א. $-2\le k\le 2$. ב. **(1)** כל x . **(2)** $k=1.5$ או $k=-1.5$.

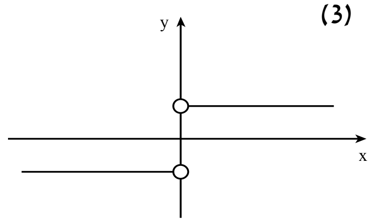
7. א. $x\ge 6$. ב. $P(6;12)$. **8.** שני פתרונות. **10.** א. כל x . ב. $x\ge 0$.

11. א. $x>0$. ב. **(1)** $x\ge 0$. **(2)** לא. **(3)** $x>0$. **12.** א. כן. ב. כן.

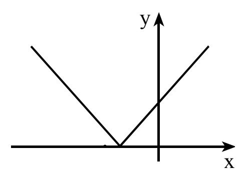
13. ב. **(1)** כל x . **(3)**



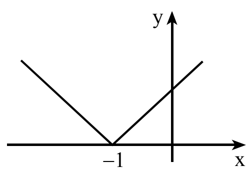
14. ב. **(1)** $x\ne 0$. **(3)**



15. ג. $x\ge -2$. ד.



16. א. כן. ב.



17. $x\ge 6$. **18.** א. לא. תחום ההגדרה שלהן שונה. ב. כן, בתחום $x\ge 0$.

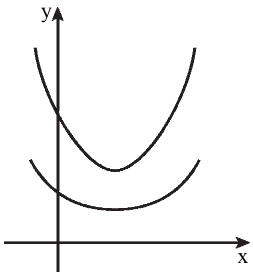
19. א. $(5;0)$ מינימום, $(0;0)$ מינימום, $(4;16)$ מקסימום. ב. $c=0$ או $c=-16$.

ג. $(5;2)$ מקסימום, $(0;2)$ מקסימום, $(4;-14)$ מינימום.

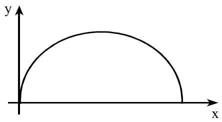
ד. $(-5;0)$ מינימום, $(0;0)$ מינימום, $(-4;16)$ מקסימום.

ה. $(-1;0)$ מינימום, $(0;0)$ מינימום, $(-0.8;16)$ מקסימום.

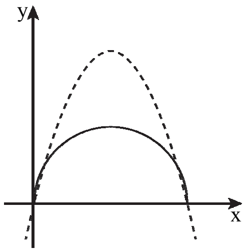
20. א. כל x .
ב. $(0;3)$.
ג. $(4;\sqrt{5})$ מינימום.
ד.



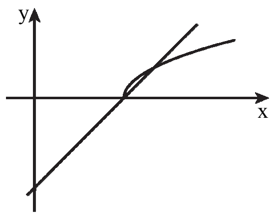
21. א. $0 \le x \le 4$.
ב. $(4;0)$ מינימום, $(2;2)$ מקסימום,
$(0;0)$ מינימום.
ד. ארבע נקודות.
ה. $(2;7)$ מקסימום.
ג. **(1)**



(2)

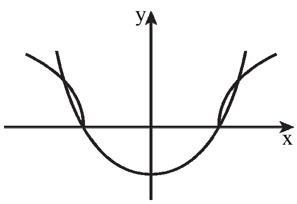


22. א. $(3;0)$.
ב. $x \ge 3$.
ג. $(3;0)$ מינימום,
ד.



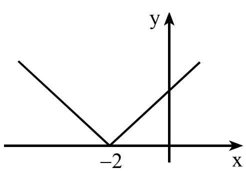
ה. **(1)** $(3;0)$, $(4;1)$. **(2)** $3 < x < 4$. **(3)** $x > 4$.

23. א. $(0;-0.64)$. ב. $(0;-0.64)$, $(0.8;0)$, $(-0.8;0)$.
ג. $x \ge 0.8$ או $x \le -0.8$. ד. $(0.8;0)$, $(-0.8;0)$.
ה. $(0.8;0)$ מינימום, $(-0.8;0)$ מינימום.
ז.

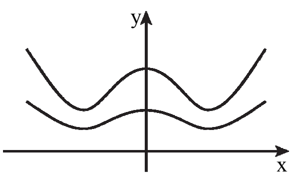


ח. **(1)** $(0.8;0)$, $(-0.8;0)$, $(\sqrt{1.64};1)$, $(-\sqrt{1.64};1)$.
(2) $0.8 < x < \sqrt{1.64}$ או $-\sqrt{1.64} < x < -0.8$.
(3) $x > \sqrt{1.64}$ או $x < -\sqrt{1.64}$.

24. א. $(-2;0)$. ב. $(0;4)$, $(-2;0)$.
ג. כל x .
ד. $(0;2)$, $(-2;0)$.
ה. $(-2;0)$ מינימום.
ו. **(2)**



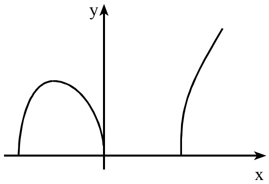
25. א. כל x .
ב. $(3;\sqrt{2})$ מינימום,
$(0;2)$ מקסימום,
$(-3;\sqrt{2})$ מינימום.
ג.



26. א. $x \ge \sqrt{12}$ או $-\sqrt{12} \le x \le 0$.

ב. $(-2;4)$ מקסימום, $(0;0)$ מינימום,
$(\sqrt{12};0)$ מינימום, $(-\sqrt{12};0)$ מינימום.

ג.



ד. **(2)** שש נקודות.

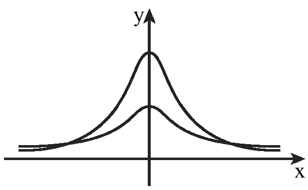
ה. $(-2;3)$ מינימום.

29. א. הראל צודק. ב. טלי צודקת.

30. א. כל x.

ב. $(0;\sqrt{6})$ מקסימום.

ג.



ד. כן, תמר צודקת.

ה. מעל.

31. רועי אינו צודק.

32. א. **(1)** כל x.

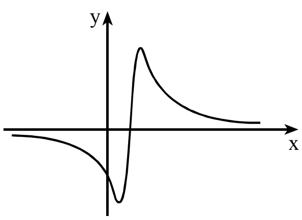
(2) $(1;-\frac{1}{2})$ מינימום, $(3;\frac{1}{2})$ מקסימום.

(3) עלייה: $1 < x < 3$, ירידה: $x > 3$ או $x < 1$.

(4) חיוביות: $x > 2$, שליליות: $x < 2$.

(5) $y = 0$.

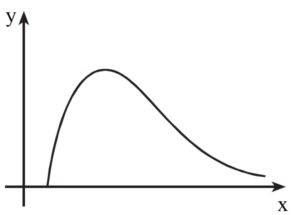
ב.



ג. **(1)** $x \ge 2$.

(2) $(2;0)$ מינימום,
$(3;\frac{1}{\sqrt{2}})$ מקסימום.

(3)



ד. $(8;\frac{1}{\sqrt{2}}-6)$ מקסימום. ה. $y = -6$.

33. א. $0 < x < 1$ או $x \le -\frac{1}{3}$. ב. $(\frac{1}{3};3)$ מינימום, $(-\frac{1}{3};0)$ מינימום, $(-1;1)$ מקסימום.

ג. $(-1;1)$, $(-\frac{1}{3};0)$. ד. $-1 < x < -\frac{1}{3}$ או $x < -1$. ה. $y = 2$.

34. א. $x \ne 1$, $x \ne -1$. ב. חיוביות: $x > 6$ או $-1 < x < 1$,
שליליות: $1 < x < 6$ או $x < -1$. ג. $x \ge 6$ או $-1 < x < 1$. ד. $x \ge 6$.