

# חוברת

## קדם אנליזה

### כיתה י'

## 5 יחידות

תודה גדולה לעפר ילין ולניבה ברימבויס על הייעוץ הפדגוגי

והמקצועי בכתיבת החוברת

**כל הזכויות שמורות ליואל גבע ואריק דז'לדטי**

# תוכן עניינים

## קדם אנליזה

3	פונקציה ממעלה ראשונה – קו ישר
6	פונקציה ממעלה שנייה – פרבולה
13	גרף של פונקציה ללא תבנית אלגברית נתונה
13	חיוביות ושליליות של פונקציה
15	נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה
18	שרטוט גרף של פונקציה (ללא תבנית אלגברית) על פי נתונים
23	פונקציות חזקה עם מעריך טבעי
32	פונקציות פולינום
37	התנהגות פונקציית פולינום כאשר $x \rightarrow +\infty$ וכאשר $x \rightarrow -\infty$
44	התנהגות פונקציית פולינום בסביבת נקודות האפס שלה
54	בניית משוואת פונקציית פולינום על פי נקודות האפס שלה
57	פונקציה זוגית, פונקציה אי זוגית

## טרנספורמציות של פונקציות

.....	הזזה אנכית של גרף של פונקציה
.....	הזזה אופקית של גרף של פונקציה
.....	שאלות הכוללות הזזה אנכית והזזה אופקית
.....	מתיחה וכיווץ של גרף של פונקציה
.....	מתיחה או כיווץ המשלבים הזזה אנכית ו/או הזזה אופקית
.....	שיקוף גרף של פונקציה לעומת ציר ה- $x$
.....	הקשר בין הגרף של $f(x)$ לגרף של $a \cdot f(x)$ עבור $a$ שלילי
.....	שיקוף גרף של פונקציה לעומת ציר ה- $y$
.....	פונקציות עם ערך מוחלט
.....	שרטוט הגרף של $ f(x) $ על סמך הגרף של $f(x)$

## חשבון דיפרנציאלי - פולינומים

.....	קצב שינוי ממוצע של פונקציה
.....	שיפוע גרף של פונקציה בנקודה שעל הגרף
.....	חקירת פונקציית פולינום כולל קדם אנליזה

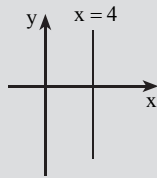
פריסת הוראה של משרד החינוך

[https://drive.google.com/file/d/12Vpy\\_YxpO\\_W35Q35usalfOBRMevsbofc/view](https://drive.google.com/file/d/12Vpy_YxpO_W35Q35usalfOBRMevsbofc/view)

# פונקציה ממעלה ראשונה – קו ישר

**פונקציה ממעלה ראשונה** היא פונקציה שמשוואתה  $f(x) = mx + b$ , והגרף המייצג אותה הוא **קו ישר**. פונקציה זו נקראת גם **פונקציה קווית** או **פונקציה ליניארית**. למדנו בהנדסה אנליטית שהמשוואה  $f(x) = mx + b$  נקראת **המשוואה המפורשת של הישר**. במשוואה כזו  $m$  ו- $b$  הם פרמטרים קבועים. הפרמטר  $m$  (המקדם של  $x$ ) נקרא **השיפוע של הישר**. הפרמטר  $b$  (שאינו כולל  $x$ ) נקרא **המספר החופשי**.

**במשוואה  $f(x) = mx + b$  ערך הפרמטר  $m$  קובע את מגמת הישר:**  
כאשר  $m$  חיובי ( $m > 0$ ) זוהי **פונקציה עולה**, וכאשר  $m$  שלילי ( $m < 0$ ) זוהי **פונקציה יורדת**. כאשר  $m = 0$ , הישר מקביל לציר ה- $x$  (או מתלכד איתו), כלומר הישר מאונך לציר ה- $y$ . זוהי **פונקציה קבועה**. דוגמה: ישר שמשוואתו  $y = 5$ .



הערה: כאשר ישר מאונך לציר ה- $x$ , שיפועו לא מוגדר, ולא ניתן להציג בצורה  $y = mx + b$ . לדוגמה: הישר  $x = 4$ . **ישר המאונך לציר ה- $x$  אינו פונקציה!** הסבר: בפונקציה לא ייתכן שקיים ערך של  $x$ , שעבורו מתקבל יותר מערך אחד של  $y$ , ובישר כזה עבור ערך מסוים של  $x$  קיימים אינסוף ערכי  $y$ . (הערה: להרחבה לגבי הגדרת הפונקציה, ראו בפרק הבא).

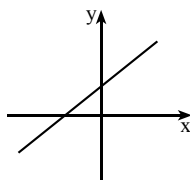
נזכיר את משמעות הפרמטר  $b$ .

**בפונקציה  $f(x) = mx + b$  ערך הפרמטר  $b$  מייצג את שיעור ה- $y$  של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$ , שהיא  $(0; b)$ .**  
לדוגמה: במשוואת הישר  $y = 2x + 5$  מתקיים  $b = 5$ , לכן הוא חותך את ציר ה- $y$  ב- $(0; 5)$ .

## הערות:

- המשוואה  $y = 0$  היא הייצוג האלגברי של ציר ה- $x$ . זו פונקציה קבועה. המשוואה  $x = 0$  היא הייצוג האלגברי של ציר ה- $y$ . זו אינה פונקציה!
- כפי שלמדנו, שרטוט קו ישר במערכת צירים נהוג לעשות על ידי הצבה בטבלת ערכים, או על פי הערכים של הפרמטרים  $m$  ו- $b$ .

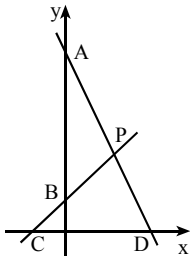
## תרגילים



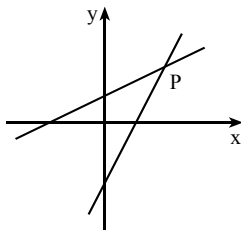
- לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = x + 1$ .
  - חשבו את  $f(3)$ .
  - מצאו את נקודת האפס של הפונקציה.
  - כתבו את התחום שבו הפונקציה חיובית, ואת התחום שבו היא שלילית.
  - רשמו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם ישנם).ה. (1) האם הנקודה  $(-4; -5)$  נמצאת על הישר?  
ז. (2) מהו מרחק של הנקודה  $(-4; -5)$  מציר ה- $x$ , ומהו מרחק מציר ה- $y$ ?

2. נתונה הפונקציה  $f(x) = -x - 2$ .
- מצאו את ערך הפונקציה עבור  $x = -8$ .
  - מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם ישנם).
  - מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
  - שרטטו את גרף הפונקציה.
  - מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה (אם ישנם).
  - דרך נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- $y$ , מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$ .  
(1) מהי משוואת הישר?  
(2) מהו מרחקו של הישר מציר ה- $x$ ?  
(3) מצאו משוואת ישר נוסף המקביל לציר ה- $x$ , ומרחקו מציר ה- $x$  שווה למרחק שמצאתם בתת סעיף (2).

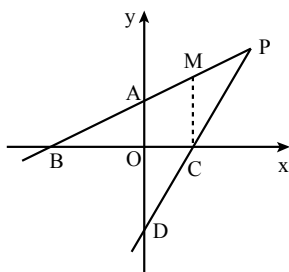
3. הישרים  $AD$  ו- $BC$  הם בהתאמה הגרפים של הפונקציות  $f(x) = -2x + 22$  ו- $g(x) = x + 4$ .
- מצאו את שיעורי הנקודות הבאות:  $A, B, C, D, P$ .
  - חשבו את שטח המשולש  $PCD$ .
  - חשבו את שטח המשולש  $PAB$ .
  - חשבו את שטח המרובע  $O B P D$  (ראשית הצירים).
  - מצאו ערך כלשהו של  $x$  שעבורו  $f(x) > g(x)$ .
  - מצאו על פי הציור, עבור אילו ערכי  $x$  מתקיים: (1)  $f(x) > g(x)$  (2)  $f(x) < g(x)$ .
  - פתרו בדרך אלגברית את אי השוויון  $-2x + 22 > x + 4$ .
  - בדקו שהפתרון זהה לפתרון שקיבלתם בתת סעיף (1).
  - פתרו בדרך אלגברית את אי השוויון  $-2x + 22 < x + 4$ .
  - בדקו שהפתרון זהה לפתרון שקיבלתם בתת סעיף (2).

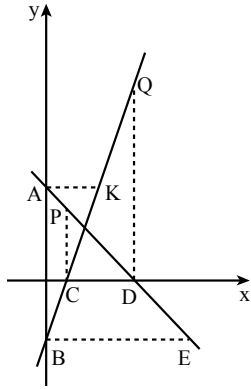


4. בציור מתוארים הגרפים של הפונקציות  $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$  ו- $g(x) = 2x - 2$ .
- לאיזה ערך של  $x$  מתקיים  $f(x) = g(x)$ ?
  - מצאו עבור אילו ערכי  $x$  מתקיים: (1)  $f(x) > g(x)$  (2)  $f(x) < g(x)$ .
  - מצאו על פי הציור עבור אילו ערכי  $x$  מתקיים  $g(x) \leq f(x)$ .
  - פתרו בדרך אלגברית את אי השוויון  $2x - 2 \leq \frac{1}{2}x + 1$ .
  - הסבירו מדוע הפתרון זהה לפתרון שקיבלתם בסעיף ג'.
  - פתרו בדרך אלגברית, ובדרך גרפית את אי השוויון  $g(x) > 0$ .

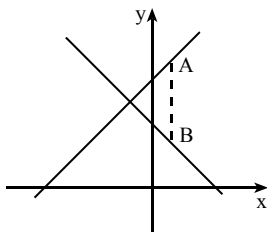


5. הישרים  $AB$  ו- $CD$  הם, בהתאמה, הגרפים של הפונקציות  $y = 2x - 4$  ו- $y = \frac{1}{2}x + 2$ .  $O$  ראשית הצירים.
- מצאו את שיעורי הנקודה  $P$ .
  - חשבו את שטח המשולש  $BCP$ .
  - נקודה  $C$  העלו אנך לציר ה- $x$ , החותך את הישר  $AB$  בנקודה  $M$ . מצאו את שיעורי הנקודה  $M$ .
  - חשבו את שטח המשולש  $PMC$ .
  - חשבו את אורך הקטע  $OM$ . היעזרו במשפט פיתגורס.

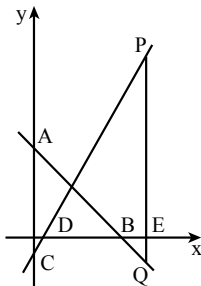




6. הישרים BC ו-AD מתארים את המשוואות  $y = -x + 10$  ו-  $y = 3x - 6$ .  
היעזרו בשרטוט ואנו על הסעיפים הבאים:  
א. מצאו את שיעורי הנקודות A, B, C, D.  
ב. מהנקודות C ו- D העלו אנכים לציר ה- x, החותכים את הישרים בנקודות P ו- Q.  
ג. מצאו את שיעורי הנקודות P ו- Q. מהנקודות A ו- B העלו אנכים לציר ה- y, החותכים את הישרים בנקודות K ו- E.  
ד. חשבו את שטח הטרפז APCB.  
ה. חשבו את שטח המשולש DQE.



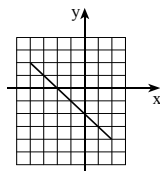
7. לפניכם הישרים  $y = -x + 4$  ו-  $y = x + 6$ . הנקודות A ו- B נמצאות על הישרים, כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.  
א. נסמן:  $x_A = x_B$ . הביעו באמצעות  $x_1$  את הנקודה B ואת אורך הקטע AB.  
ב. נתון:  $AB = 4$ . מהם שיעורי הנקודות A ו- B?  
ו. חשבו את מרחק הנקודה B מראשית הצירים.



8. הישרים AB ו-CD הם הגרפים של הפונקציות  $y = -x + 7$  ו-  $y = 2x - 2$ . בהתאמה, הנקודות P ו- Q נמצאות על הישרים, כך שהקטע PQ מאונך לציר ה- x, ואורכו שווה ל- 18 יחידות.  
א. מצאו את שיעורי הנקודות P ו- Q.  
ב. חשבו את שטח המשולש ACP.

### תשובות:

1. א.  $f(3) = 4$ . ב.  $(-1; 0)$ . ג. חיובית:  $x > -1$ , שלילית:  $x < -1$ . ד. עלייה: כל x, ירידה: אף x.



- ה. (1) כן. (2) מרחקה מציר ה- x הוא 4, ומציר ה- y הוא 5.  
2. א. 6. ב. עלייה: אין, ירידה: כל x.  
ג.  $(-2; 0)$ ,  $(0; -2)$ .  
ה. חיוביות:  $x < -2$ , שליליות:  $x > -2$ .  
ו. (1)  $y = -2$ . (2)  $y = 2$ .

3. א.  $A(0; 22)$ ,  $B(0; 4)$ ,  $C(-4; 0)$ ,  $D(11; 0)$ ,  $P(6; 10)$ . ב. 75. ג. 54. ד. 67. ה.  $x = 4$ .  
ו. (1)  $x < 6$ . (2)  $x > 6$ . ז.  $x < 6$ . ח.  $x > 6$ . ט.  $x = 2$ . י.  $x = 2$ . יא. (1)  $x < 2$ . יב. (2)  $x > 2$ . יג.  $x \leq 2$ .  
ד.  $x \leq 2$ . ה.  $x > 1$ . 5. א.  $P(4; 4)$ . ב. 12. ג.  $M(2; 3)$ . ד. 3. ה.  $\sqrt{13}$ .  
6. א.  $A(0; 10)$ ,  $B(0; -6)$ ,  $C(2; 0)$ ,  $D(10; 0)$ . ב.  $P(2; 8)$ ,  $Q(10; 24)$ . ג.  $K(5\frac{1}{3}; 10)$ ,  $E(16; -6)$ . ד. 24. ד. 72.  
7. א.  $AB = 2x_1 + 2$ ,  $B(x_1; -x_1 + 4)$ . ב.  $A(1; 7)$ ,  $B(1; 3)$ . ג.  $\sqrt{10}$ . 8. א.  $Q(9; -2)$ ,  $P(9; 16)$ . ב. 40.5.


# פונקציה ממעלה שנייה – פרבולה


**פונקציה ממעלה שנייה** היא פונקציה מהצורה  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (כאשר  $a \neq 0$ ,  $b$  ו- $c$  הם פרמטרים ו- $a \neq 0$ ).

פונקציה זו נקראת גם **פונקציה ריבועית**. דוגמאות:  $f(x) = 5x^2 + 2x - 1$ ,  $g(x) = x^2 - 5x$ .

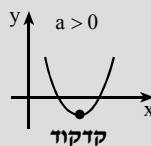
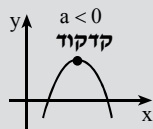
לגרף המתאר פונקציה ריבועית קוראים **פרבולה**.

צורת הפרבולה נקבעת על פי ערכו של  $a$ , שהוא המקדם של  $x^2$ . קיימות שתי אפשרויות:

א. כאשר  $a > 0$ , הצורה הכללית של הפרבולה היא 

ב. כאשר  $a < 0$ , הצורה הכללית של הפרבולה היא 

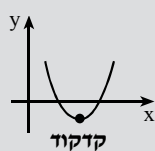
הנקודה שבה הפונקציה מקבלת את הערך הגדול ביותר או את הערך הקטן ביותר נקראת **קדקוד הפרבולה**.



כאשר  $a > 0$  נהוג לקרוא לפרבולה "ישרה", או "מחייכת", או "בעלת מינימום". בנקודת הקדקוד מתקבל הערך הקטן ביותר של הפונקציה (הערך המינימלי), והקדקוד נקרא **נקודת מינימום**.



כאשר  $a < 0$  נהוג לקרוא לפרבולה "הפוכה", או "בוכה", או "בעלת מקסימום". בנקודת הקדקוד מתקבל הערך הגדול ביותר של הפונקציה (הערך המקסימלי), והקדקוד נקרא **נקודת מקסימום**.

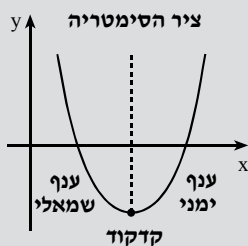


את שיעור ה- $x$  של קדקוד הפרבולה  $f(x) = ax^2 + bx + c$  נמצא בעזרת הנוסחה הבאה:

$$\text{הנוסחה: } x_{\text{קדקוד}} = \frac{-b}{2a}$$

כדי למצוא את שיעור ה- $y$  של הקדקוד, נציב את שיעור ה- $x$  של הקדקוד במשוואת הפרבולה.

## ציר הסימטריה, שרטוט פרבולה



גרף הפרבולה מורכב משני ענפים – ענף ימני וענף שמאלי. הישר המאונך לציר ה- $x$  ועובר דרך קדקוד הפרבולה (הקו המקווקו שבציור), נקרא **ציר הסימטריה** של הפרבולה.

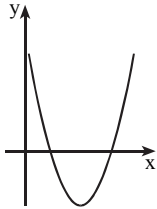
$$\text{משוואת ציר הסימטריה היא } x = -\frac{b}{2a}$$

שני הענפים של הפרבולה סימטריים ביחס לישר זה. לכן נקודות הנמצאות **משני צדי ציר הסימטריה**,

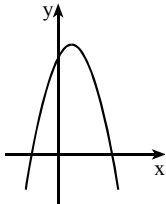
ובמרחקים שווים ממנו הן נקודות ששיעור ה- $y$  שלהן שווה, ולהיפך.

**כדי לשרטט פונקציה שמשוואתה  $f(x) = ax^2 + bx + c$  נפעל באופן הבא :**  
 א. נמצא את שיעורי נקודת קדקוד הפרבולה, ועל פי סימן המקדם  $a$  נחליט האם הקדקוד הוא מסוג מינימום או מקסימום.  
 ב. נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.  
 ג. נסמן את הנקודות במערכת צירים ונחברן באמצעות קו עקום.

## תרגילים



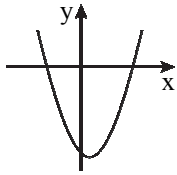
- 1.** בציור משורטט גרף הפונקציה  $y = x^2 - 8x + 12$ .
- מצאו את שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה.
  - מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
  - מהו הערך המינימלי של הפונקציה?
  - מהי משוואת ציר הסימטריה של הפרבולה?
  - מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.
  - רשמו את התחום שבו הפונקציה חיובית, ואת התחום שבו היא שלילית.
  - היעזרו בגרף ופתרו את אי-השוויון  $x^2 - 8x + 12 < 0$ .
  - היעזרו בגרף ובתשובתכם, ופתרו את אי-השוויון  $x^2 + 12 > 8x$ .
  - בכמה נקודות חותך הישר  $y = -2$  את גרף הפונקציה? ענו ללא חישובים.



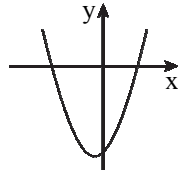
- 2.** בשרטוט מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ .
- מצאו את שיעורי נקודת המקסימום של הפונקציה.
  - מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
  - מהו מרחקה של נקודת המינימום מכל אחד מהצירים?
  - מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
  - מצאו את ערכי  $x$  שעבורם מתקיים  $f(x) > 0$ .
  - פתרו בעזרת הגרף את אי-השוויון  $-x^2 + 2x + 8 > 0$ .
  - פתרו בעזרת הגרף את אי-השוויון  $-x^2 + 2x + 8 \leq 0$ .
  - עפר טוען שאפשר לדעת ללא חישובים, ששיעור ה- $x$  של קדקוד הפרבולה הוא ממוצע שיעורי ה- $x$  של נקודות האפס. האם הוא צודק?
  - מצאו את משוואת הישר המחבר את נקודת המקסימום של הפונקציה עם נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .

- חקרו את הפונקציות הבאות על פי הסעיפים הבאים :
- כתבו את תחום ההגדרה של הפונקציה.
  - מצאו את שיעורי נקודת המינימום או המקסימום של הפונקציה.
  - מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם ישנן).
  - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.
  - מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

**3.**  $y = -(x-3)^2$       **4.**  $y = x^2 + 3$



(2)



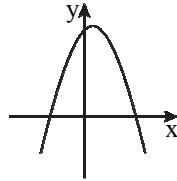
(1) נתונות משוואות של ארבע פונקציות:

$$f(x) = -x^2 + x + 6$$

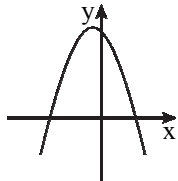
$$g(x) = x^2 + x - 6$$

$$h(x) = x^2 - x - 6$$

$$k(x) = -x^2 - x + 6$$

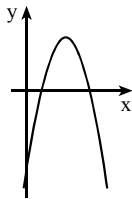


(4)



(3)

לפניכם גרפים של ארבע הפונקציות.  
התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאים לה.



.6

לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = -(x-8)(x-2)$ .א. עבור אילו ערכי  $x$  הפונקציה הנתונה חיובית?

ב. האם הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 9 או 5?

ג. מהו תחום הערכים שהפונקציה  $f(x)$  יכולה לקבל?ד. עבור אילו ערכי  $x$  הפונקציה עולה?

ה. מהו מרחקה של נקודת המקסימום מראשית הצירים?

ו. כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) = 0$ ? אין חובה למצוא את הפתרונות.ז. פתרו את אי-השוויון  $-(x-8)(x-2) < 0$ .ח. (1) חשבו את  $f(100)$  ואת  $f(1000)$ . (2) חשבו את  $f(-100)$  ואת  $f(-1000)$ .ט. (1) קבעו על פי הגרף האם כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .

האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(1)?

י. (2) קבעו על פי הגרף האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .

האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(2)?

יא. עבור אילו ערכים של  $k$ , הישר  $y = k$ : (1) נפגש עם גרף הפונקציה בנקודה אחת?

(2) נפגש עם גרף הפונקציה בשתי נקודות? (3) אינו נפגש עם גרף הפונקציה?

.7

נתונה הפונקציה  $y = (x-5)^2 - 16$ .

א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ב. מהי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ ?

ג. מצאו את שיעורי נקודת המינימום של הפונקציה.

ד. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה במערכת צירים.

ה. מצאו לאילו ערכי  $x$  הפונקציה עולה ושלילית.ו. מצאו לאילו ערכי  $x$  הפונקציה יורדת וחיובית.ז. קבעו נכון או לא נכון: (1) לכל ערך של  $x$  ערך הפונקציה גדול מ-16.(2) לכל ערך של  $x$  ערך הפונקציה גדול או שווה ל-16.

ח. נמקו, ללא חישובים, מדוע הפרבולה אינה עוברת בנקודה (4; -17).

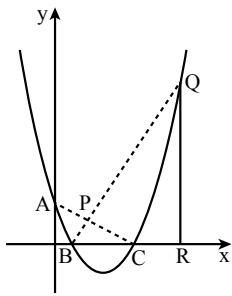
ט. פתרו את אי-השוויון  $(x-5)^2 > 16$ .י. (1) חשבו את  $f(100)$ . (2) חשבו את  $f(-100)$ .יא. (1) קבעו על פי הגרף האם כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .

האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(1)?

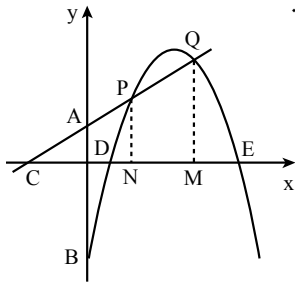
(2) קבעו על פי הגרף האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .

האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(2)?

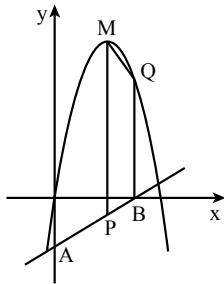




8. הפרבולה ABC היא גרף הפונקציה  $y = x^2 - 6x + 5$ .  
 QR מאונך לציר ה- $x$ , ואורכו שווה ל-21 יחידות.  
 P היא נקודת המפגש של הישרים AC ו-BQ.  
 א. מצאו את שיעורי הנקודה Q, הנמצאת ברביע הראשון.  
 ב. מצאו את משוואת הישר BQ.  
 ג. מצאו את שיעורי הנקודה P.  
 ד. מצאו את משוואת הישר, העובר דרך הנקודה C, ומקביל לישר BQ.

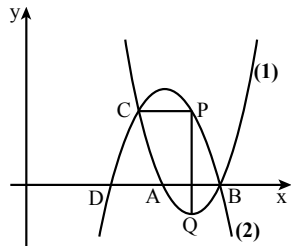


9. לפניכם הגרפים של הפונקציות (1)  $y = -x^2 + 8x - 7$  ו-(2)  $y = x + 3$ .  
 א. מצאו את שיעורי הנקודות: Q, P, E, D, C, B, A. (ראה שרטוט).  
 ב. מהנקודות P ו-Q הורידו אנכים לציר ה- $x$ , החותכים את ציר ה- $x$  בנקודות N ו-M.  
 ג. מצאו את שטח הטרפז PQMN ואת שטח המשולש PMQ. האם ערך הפונקציה (1) יכול להיות 11?

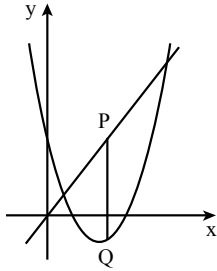


10. הגרפים שבשרטוט הם של הפונקציות  $y = -x^2 + 8x$  ו- $y = x - 6$ . M הוא קדקוד הפרבולה.  
 P היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם הישר  $y = x - 6$ . מנקודה B העלו אנך לציר ה- $x$ , החותך את הפרבולה בנקודה Q.  
 א. מצאו את שיעורי הנקודות P ו-Q.  
 ב. האם ערך הפונקציה  $y = -x^2 + 8x$  יכול להיות 11? בכמה נקודות?  
 ג. מצאו את שטח הטרפז MQBP.  
 ד. הנקודה C היא נקודה כלשהי על הישר MP. חשבו את שטח המשולש CBQ.

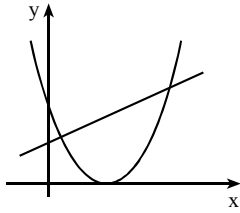
11. הפרבולות (1) ו-(2) הן הגרפים של הפונקציות (I)  $y = -x^2 + 10x - 21$  ו-(II)  $y = x^2 - 12x + 35$ .  
 א. מצאו איזה גרף מתאים לפונקציה (1), ואיזה - מתאים לפונקציה (2).



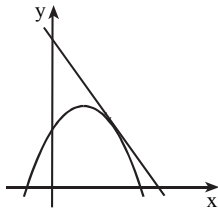
- ב. חשבו את שיעורי הנקודות A, B, C, D.  
 ג. דרך הנקודה C העבירו מקביל לציר ה- $x$  החותך את פרבולה (2) בנקודה P. מנקודה P הורידו אנך לציר ה- $x$ , החותך את פרבולה (1) בנקודה Q. מצאו את אורך הקטע PQ, והוכיחו שהנקודה Q היא קדקוד הפרבולה (1).



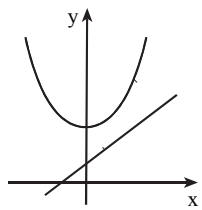
12. הישר והפרבולה שבשרטוט הם הגרפים של הפונקציות: (1)  $y = 3x + 1$  ו-(2)  $y = x^2 - 8x + 11$ .  
 הקטע PQ מאונך לציר ה-x, ואורכו שווה ל-20 יחידות (P מעל Q).  
 א. מצאו את שיעורי הנקודות P ו-Q.  
 ב. מצאו את משוואת הישר, העובר דרך הנקודה Q, המקביל לציר ה-x.



13. לפניכם הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = x^2 - 6x + 9$  ו- $g(x) = x + 3$ .  
 א. לאילו ערכי x מתקיים  $f(x) = g(x)$ ?  
 ב. לאילו ערכי x מתקיים  $f(x) > g(x)$ ?  
 ג. לאילו ערכי x מתקיים  $f(x) < g(x)$ ?  
 ד. פתרו את אי השוויון  $x^2 - 6x + 9 < x + 3$ .  
 ה. לאילו ערכי x הישר אינו מעל הפרבולה?  
 ו. מגדירים פונקציה חדשה  $h(x)$ , המקיימת  $h(x) = f(x) - g(x)$ .  
 מצאו עבור אילו ערכי x מתקיים  $h(x) > 0$ .



14. לפניכם גרפים של שתי פונקציות:  $f(x) = -x^2 + 2x + 2$  ו- $g(x) = -2x + 6$ .  
 א. מצאו מהי הנקודה שבה מתקיים  $f(x) = g(x)$ .  
 ב. מהנקודה שמצאתם בסעיף א' מעבירים אנכים לשני הצירים, כך שנוצר מרובע בין שני הצירים ושני האנכים. הסבירו מדוע המרובע הוא ריבוע וחשבו את שטחו.  
 ג. מצאו עבור אילו ערכי x מתקיים:  
 (1)  $f(x) > g(x)$  (2)  $f(x) - g(x) < 0$ .  
 ד. נסמן:  $h(x) = f(x) + g(x)$ . חשבו את  $h(4)$ .



15. לפניכם גרפים של שתי פונקציות:  $f(x) = x^2 + 3$  ו- $g(x) = x + 1$ .  
 א. הראו בדרך אלגברית שהגרפים של הפונקציות אינם נפגשים זה עם זה.  
 ב. מצאו עבור אילו ערכי x מתקיים:  
 (1)  $f(x) > g(x)$  (2)  $f(x) < g(x)$ .  
 ג. מגדירים פונקציה חדשה  $h(x)$ , המקיימת  $h(x) = f(x) - g(x)$ .  
 מצאו עבור אילו ערכי x מתקיים: (1)  $h(x) > 0$  (2)  $h(x) < 0$ .  
 ד. (1) מצאו את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות הנתונות עם ציר ה-y.  
 (2) חשבו את  $h(0)$  על פיתת סעיף ד(1).  
 ה. (1) קבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .  
 (2) קבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $g(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .

16. א. מצאו את נקודות המפגש בין הגרפים של הפונקציות  $f(x) = x^2 + 2x - 8$  ו- $g(x) = -x^2 - x + 12$ .  
 ב. מצאו עבור אילו ערכי x מתקיים  $f(x) > g(x)$ .

17. נתונה פונקציה ריבועית, המוצגת בעזרת מכפלה :  $f(x) = (x-5)(x+1)$ .
- א. מהן נקודות האפס של הפונקציה?  
 ב. נתונות שלוש פונקציות נוספות :  
 $i(x) = -7(x-5)(x+1)$  ,  $h(x) = 4(x-5)(x+1)$  ,  $g(x) = -(x-5)(x+1)$   
 הראו שנקודות האפס של שלוש הפונקציות זהות לנקודות האפס של הפונקציה הנתונה.  
 ג. דורון טוען שהפונקציות שבסעיף ב' הן מהצורה  $a \cdot f(x)$  ,  $a \neq 0$  , ולכן יש להן אותן נקודות אפס כמו לפונקציה  $f(x)$ . האם הוא צודק?

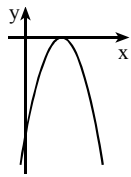
18. נתונה פונקציה ריבועית, המוצגת בעזרת מכפלה :  $f(x) = (x+6)(x-2)$ .
- א. מהן נקודות האפס של הפונקציה?  
 ב. כתבו משוואות של שתי פונקציות ריבועיות נוספות, שנקודות האפס שלהן זהות לנקודת האפס של הפונקציה הנתונה  $f(x)$ .  
 הדרכה : לפונקציות מהצורה  $a \cdot f(x)$  יש נקודות אפס זהות לנקודות האפס של הפונקציה  $f(x)$ , עבור  $a > 0$  ועבור  $a < 0$ .

19. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה ריבועית  $f(x)$  :
- א. שנקודות האפס שלה הן  $(4;0)$  ו- $(7;0)$ , והמקדם של  $x^2$  הוא 1.  
 הציגו את הפונקציה כמכפלה.  
 ב. שנקודות האפס שלה הן  $(4;0)$  ו- $(7;0)$ , והמקדם של  $x^2$  הוא -1.  
 הציגו את הפונקציה כמכפלה.

20. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה ריבועית  $f(x)$  :
- א. שנקודת האפס היחידה שלה היא  $(6;0)$ , והמקדם של  $x^2$  הוא 1.  
 ב. שנקודת האפס היחידה שלה היא  $(-8;0)$ , והמקדם של  $x^2$  הוא -1.

### תשובות :

1. א.  $(4;-4)$ . ב. עלייה :  $x > 4$ , ירידה :  $x < 4$ . ג.  $-4$ . ד.  $x = 4$ . ה.  $(2;0)$ ,  $(6;0)$ .  
 ו. חיובית :  $x > 6$  או  $x < 2$ , שלילית :  $2 < x < 6$ . ז.  $2 < x < 6$ . ח.  $x > 6$  או  $x < 2$ .  
 ט. בשתי נקודות.
2. א.  $(1;9)$ . ב. עלייה :  $x < 1$ , ירידה :  $x > 1$ .  
 ג. המרחק מציר ה- $x$  הוא 9, המרחק מציר ה- $y$  הוא 1. ד.  $(4;0)$ ,  $(-2;0)$ ,  $(0;8)$ .  
 ה.  $-2 < x < 4$ . ו.  $-2 < x < 4$ . ז.  $x \geq 4$  או  $x \leq -2$ . ח. כן, עפר צודק. ט.  $y = x + 8$ .



ד.

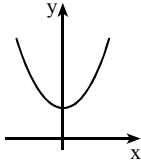
3. א. כל  $x$ .

ב. (3;0) מקסימום.

ג. (0;-9), (3;0).

ה. עלייה:  $x < 3$ , ירידה:  $x > 3$ .

ו. חיוביות: אין, שליליות:  $x \neq 3$ .



ד.

4. א. כל  $x$ .

ב. (0;3) מינימום.

ג. (0;3).

ה. עלייה:  $x > 0$ , ירידה:  $x < 0$ .

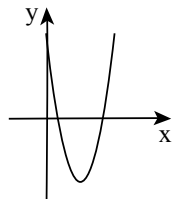
ו. חיוביות: כל  $x$ , שליליות: אף  $x$ .

5. א.  $f(x) - (4)$ ,  $g(x) - (1)$ ,  $h(x) - (2)$ ,  $k(x) - (3)$ .

6. א.  $2 < x < 8$ . ב. 9. ג.  $f(x) \leq 9$ . ד.  $x < 5$ . ה.  $\sqrt{106}$ . ו. שני פתרונות. ז.  $x > 8$  או  $x < 2$ .

ח. (1) חשבו את  $f(100) = -9,016$ ,  $f(1000) = -990,016$ , (2)  $f(-100) = -11,016$ ,  $f(-1000) = -1,010,016$ .

ט. (1) שואף ל- $-\infty$ , כן. (2) שואף ל- $-\infty$ , כן. י. (1)  $k = 9$ , (2)  $k < 9$ , (3)  $k > 9$ .



ד.

7. א. (1;0), (9;0). ב. (0;9). ג. (5;-16).

ה.  $5 < x < 9$ . ו.  $x < 1$ . ז. (1) לא נכון. (2) נכון.

ח. הערך המינימלי שלה הוא -16.

ט.  $x > 9$  או  $x < 1$ .

י. (1)  $f(100) = 9009$ , (2)  $f(-100) = 11009$ .

יא. (1) שואף ל- $+\infty$ , תואם. (2) שואף ל- $+\infty$ , תואם. י. (1) שואף ל- $-\infty$ , (2) שואף ל- $-\infty$ .

8. א.  $Q(8;21)$ . ב.  $y = 3x - 3$ . ג.  $P(2;3)$ . ד.  $y = 3x - 15$ .

9. א.  $A(0;3)$ ,  $B(0;-7)$ ,  $C(-3;0)$ ,  $D(1;0)$ ,  $E(7;0)$ ,  $P(2;5)$ ,  $Q(5;8)$ . ב. 12, 19.5. ג. לא.

10. א.  $P(4;-2)$ ,  $Q(6;12)$ . ב. כן, בשתי נקודות. ג. 30. ד. 12.

11. א. (1) מתאים ל-(II), (2) מתאים ל-(I). ב.  $A(5;0)$ ,  $B(7;0)$ ,  $C(4;3)$ ,  $D(3;0)$ .

ג.  $Q(6;-1)$ , 4.

12. א.  $P(5;16)$ ,  $Q(5;-4)$ . ב.  $y = -4$ .

13. א.  $x = 6$ ,  $x = 1$ . ב.  $x > 6$  או  $x < 1$ . ג.  $1 < x < 6$ . ד.  $1 < x < 6$ . ה.  $x \geq 6$  או  $x \leq 1$ .

ו.  $x > 6$  או  $x < 1$ .

14. א. (2;2). ב. 4. ג. (1) אף  $x$ , (2)  $x \neq 2$ . ד.  $h(4) = 8$ .

15. ב. (1) כל  $x$ , (2) אף  $x$ . ג. (1) כל  $x$ , (2) אף  $x$ . ד. (1) (0;3), (0;1). (2)  $h(0) = 2$ .

ה. (1)  $+\infty$ , (2)  $-\infty$ .

16. א.  $(-4;0)$ ,  $(2.5;3.25)$ . ב.  $x > 2.5$  או  $x < -4$ . 17. א.  $(-1;0)$ ,  $(5;0)$ . ג. דורון צודק.

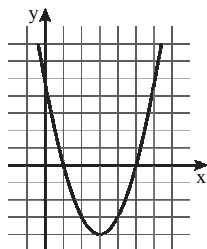
18. א.  $(-6;0)$ ,  $(2;0)$ . ב. לדוגמה:  $y = 3(x+6)(x-2)$ ,  $y = -(x+6)(x-2)$ .

19. א.  $f(x) = (x-4)(x-7)$ . ב.  $f(x) = -(x-4)(x-7)$ .

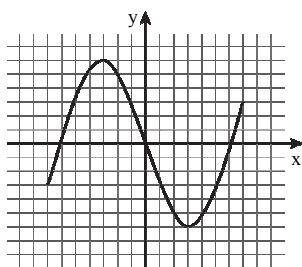
20. א.  $f(x) = (x-6)^2$ . ב.  $f(x) = -(x+8)^2$ .

# גרף של פונקציה ללא תבנית אלגברית נתונה

## קריאת נתונים מתוך גרף



1. בשרטוט מתואר גרף של פונקציה  $f(x)$ .  
 א. מצאו את  $f(1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(4)$ ,  $f(3)$ .  
 ב. (1) מצאו את ערכי  $x$  המקיימים  $f(x) = -4$ .  
 ג. האם קיים ערך של  $x$  שעבורו  $f(x) = -5$ ?  
 ד. קבעו עבור הנקודות הבאות, האם הן נמצאות על גרף הפונקציה: (1)  $(2; -3)$ , (2)  $(3; -2)$ .  
 ה. כתבו את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

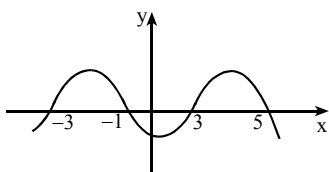


2. בשרטוט מתואר גרף של פונקציה  $f(x)$ .  
 א. מצאו את  $f(3)$  ואת  $f(-2)$ .  
 ב. מצאו את ערכי  $x$  המקיימים: (1)  $f(x) = 5$ , (2)  $f(x) = -3$ .  
 ג. מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה?  
 ד. היעזרו בגרף והשלימו את טבלת הערכים:

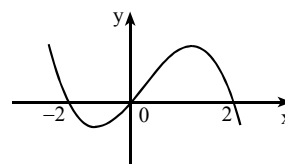
$x$	-7	-3	-1	0	1	3	7
$f(x)$							

## חיוביות ושליליות של פונקציה

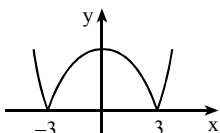
לפניכם סקיצות של גרפים ובהם מסומנות נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  (נקודות האפס של הפונקציה). היעזרו בשרטוט ורשמו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של כל אחת מן הפונקציות.



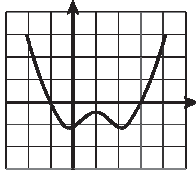
4.



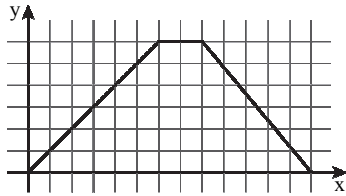
3.



5. לפניכם סקיצה של פונקציה ובה מסומנות נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  (נקודות האפס של הפונקציה). רשמו את התחומים שבהם  $f(x) > 0$ , ואת התחומים שבהם  $f(x) < 0$ .

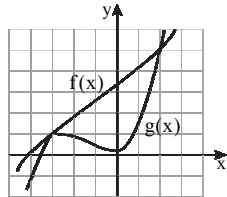


6. לפניכם גרף של פונקציה, המוגדרת לכל ערך של  $x$ .  
 כל משבצת מייצגת יחידה אחת.  
 א. כתבו את התחומים שבהם הפונקציה חיובית  
 ואת התחומים שבהם הפונקציה שלילית.  
 ב. כתבו את התחומים שבהם הפונקציה אי שלילית.

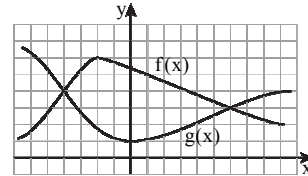


7. בשרטוט מתואר גרף של פונקציה  $f(x)$ .  
 א. מצאו את  $f(7)$ ,  $f(3)$ .  
 ב. מצאו את ערכי  $x$  שעבורם  $f(x) = 0$ .  
 ג. האם קיים ערך של  $x$  שעבורו  $f(x) = 7$ ?  
 ד. ינאי טוען שקיימים אינסוף ערכי  $x$  המקיימים  $f(x) = 6$ . האם הוא צודק?  
 ה. האם נכונה הטענה שבתחום  $0 \leq x \leq 13$  הפונקציה היא אי שלילית? נמקו.

8. בכל אחד מהסעיפים הבאים מתוארים גרפים של שתי פונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ , המוגדרות לכל ערך של  $x$ . היעזרו בציור ומצאו לאילו ערכי  $x$ :  
 (1) מתקיים  $f(x) = g(x)$ ? (2) מתקיים  $f(x) > g(x)$ ? (3) מתקיים  $f(x) < g(x)$ ?



ב.



א.

### תשובות:

1. א. 0, 4, -3, -4. ב. (1) 3. (2) 2 או 4. ג. לא. ד. (1) כן. (2) לא. ה. (0;4), (1;0), (5;0).  
 2. א.  $f(-2) = 5, f(3) = -6$ . ב. (1) -2 או -4. (2) 1 או 5. ג. (0;0), (6;0), (-6;0).

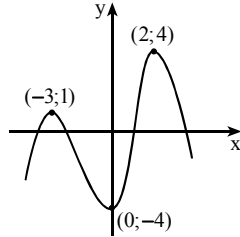
$x$	-7	-3	-1	0	1	3	7
$f(x)$	-3	6	3	0	-3	-6	3

3. חיוביות:  $0 < x < 2$  או  $x < -2$ , שליליות:  $-2 < x < 0$  או  $x > 2$ .  
 4. חיוביות:  $3 < x < 5$  או  $-3 < x < -1$ , שליליות:  $x > 5$  או  $-1 < x < 3$  או  $x < -3$ .  
 5.  $f(x) > 0$ :  $x > 3$  או  $-3 < x < 3$  או  $x < -3$  (אפשר לכתוב גם  $x \neq 3, x \neq -3$ ).  
 6.  $f(x) < 0$ : אין. א. חיובית:  $x > 3$  או  $x < -1$ , שלילית:  $-1 < x < 3$ . ב.  $x \geq 3$  או  $x \leq -1$ .  
 7. א.  $f(7) = 6, f(3) = 3$ . ב. 0 או 13. ג. לא. ד. כן. ה. כן, הטענה נכונה.  
 8. א. (1)  $x = 6, x = -4$ . (2)  $-4 < x < 6$ . (3)  $x < -4$  או  $x > 6$ .  
 ב. (1)  $x = 2, x = -3$ . (2)  $-3 < x < 2$  או  $x < -3$ . (3)  $x > 2$ .

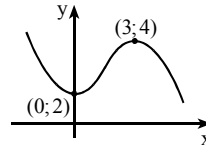
## נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה

9. בכל אחד מהגרפים שלפניכם מסומנות נקודות הקיצון של הפונקציה.  
 (1). קבעו עבור כל נקודת קיצון האם היא מסוג מינימום או מקסימום.  
 (2). רשמו את ערכי ה- $x$  שעבורם הפונקציה עולה, ואת ערכי ה- $x$  שעבורם הפונקציה יורדת.

א.

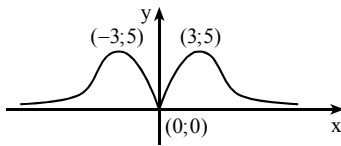


ב.

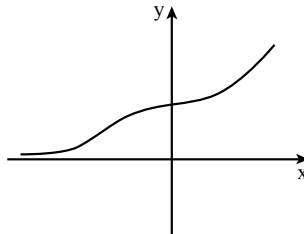


10. בכל אחד מהגרפים שלפניכם מסומנות נקודות הקיצון של הפונקציה.  
 היעזרו בשרטוט וכתבו את ערכי ה- $x$  שעבורם הפונקציה עולה,  
 ואת ערכי ה- $x$  שעבורם הפונקציה יורדת.

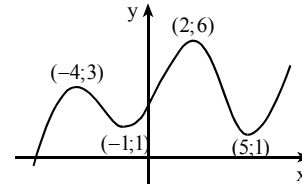
א.



ב.

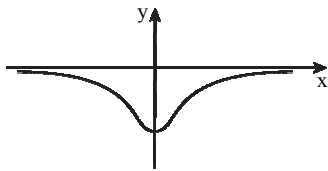


ג.

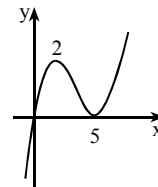


11. בסעיפים הבאים מתואר גרף של פונקציה עליו מסומנות נקודות האפס,  
 ומסומנים שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה. מצאו:  
 (1). את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה.  
 (2). את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה.

א.



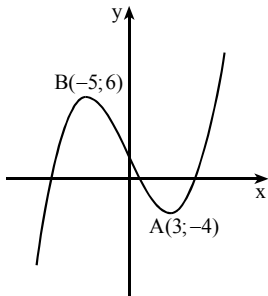
ב.



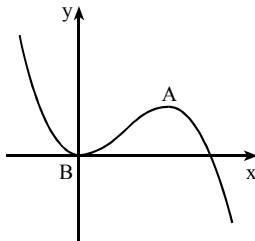
12. קבעו נכון או לא נכון:  
 א. יש פונקציות שאין להן נקודות קיצון.  
 ב. לכל פונקציה יש לפחות נקודת קיצון אחת.  
 ג. נקודת מקסימום של פונקציה היא הנקודה הגבוהה ביותר בגרף שלה.  
 ד. ערך הפונקציה בנקודת מינימום שלה הוא הערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום.  
 ה. תחום שבו פונקציה עולה הוא תחום חיוביות של הפונקציה.  
 ו. תחום שבו פונקציה שלילית הוא תחום ירידה של הפונקציה.

13. א. האם יש פונקציות שהן פונקציות עולות בלבד?  
 ב. האם יש פונקציות שהן פונקציות יורדות בלבד?  
 ג. השלימו: בסביבה הקרובה שמימין לנקודת מינימום הפונקציה \_\_\_\_  
 ובסביבה הקרובה שמשמאל לנקודת מינימום הפונקציה \_\_\_\_.

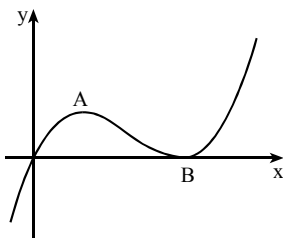
## קביעת מספר הפתרונות של משוואה על סמך הגרף



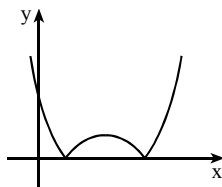
14. בציור מתואר גרף של פונקציה  $f(x)$ .  
 לפונקציה מינימום מקומי בנקודה  $A(3; -4)$ ,  
 ומקסימום מקומי בנקודה  $B(-5; 6)$ .  
 א. היעזרו בגרף, וקבעו בכמה נקודות  
 חותך כל אחד מהישרים הבאים  
 את גרף הפונקציה: (1)  $y = -8$ . (2)  $y = 6$ .  
 ב. כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) = -1$ .  
 ג. (1) מהם תחומי העלייה של הפונקציה?  
 (2) האם ניתן לדעת מהם תחומי החיוביות של הפונקציה?



15. בציור מתואר גרף של פונקציה  $f(x)$ .  
 לפונקציה נקודת מקסימום ב-  $A(4; 2)$ , ונקודת מינימום ב-  $B(0; 0)$ .  
 א. היעזרו בגרף וקבעו בכמה נקודות חותך הישר  $y = 6$   
 את גרף הפונקציה?  
 ב. קבעו כמה פתרונות יש למשוואות הבאות:  
 (1)  $f(x) = 2$ . (2)  $f(x) = 1$ .  
 ג. (1) מהם תחומי הירידה של הפונקציה?  
 (2) האם ניתן לדעת מהם תחומי השליליות של הפונקציה?



16. לפונקציה  $f(x)$ , שהגרף שלה מתואר לפניכם,  
 יש מקסימום ב-  $A(2; 2)$  ומינימום ב-  $B(5; 0)$ .  
 א. עבור אילו ערכים של  $k$ , הישר  $y = k$ :  
 (1) חותך את גרף הפונקציה בנקודה אחת?  
 (2) חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות?  
 ב. עבור אילו ערכים של  $k$ , יש למשוואה  $f(x) = k$   
 שלושה פתרונות?



17. לפונקציה  $f(x)$ , שהגרף שלה לפניכם, יש מקסימום מקומי  
 בנקודה  $(2.5; 1)$ , ומינימום בשתי נקודות שעל ציר ה- $x$ .  
 מצאו לאילו ערכי  $k$ , למשוואה  $f(x) = k$ :  
 א. יש שני פתרונות. ב. יש שלושה פתרונות.  
 ג. יש ארבעה פתרונות. ד. אין אף פתרון.

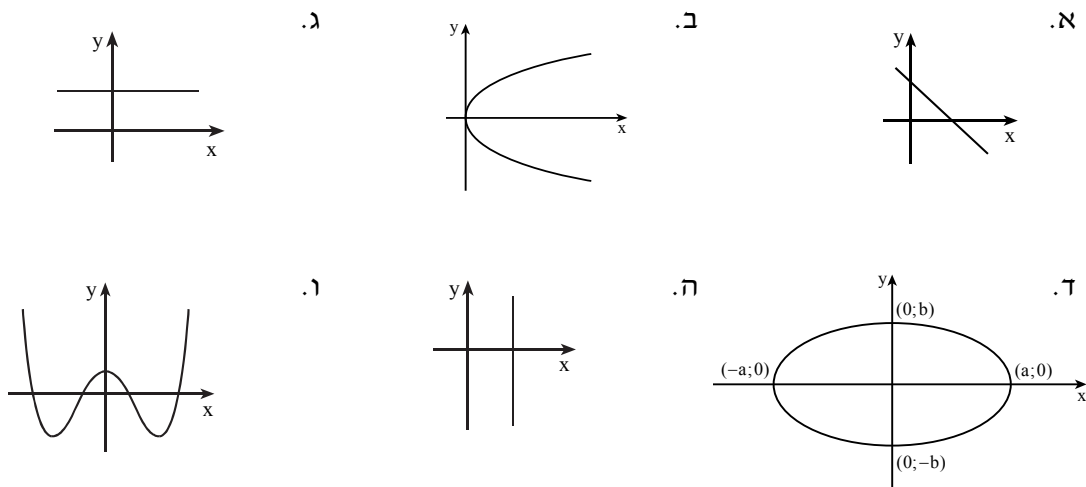


**תשובות:**

9. א. (1) (3;4) מקסימום, (0;2) מינימום. (2) עולה:  $0 < x < 3$ , יורדת:  $x > 3$  או  $x < 0$ .  
 ב. (1) (2;4) מקסימום, (0;-4) מינימום, (-3;1) מקסימום.  
 (2) עולה:  $0 < x < 2$  או  $x < -3$ . יורדת:  $x > 2$  או  $-3 < x < 0$ .
10. א. עולה:  $x > 5$  או  $-1 < x < 2$  או  $x < -4$ . יורדת:  $2 < x < 5$  או  $-4 < x < -1$ .  
 ב. עולה: כל  $x$ , יורדת: אין.  
 ג. עולה:  $0 < x < 3$  או  $x < -3$ . יורדת:  $x > 3$  או  $-3 < x < 0$ .
11. א. (1) עלייה:  $x > 5$  או  $x < 2$ . ירידה:  $2 < x < 5$ . (2) חיוביות:  $x > 0$ ,  $x \neq 5$ . שליליות:  $x < 0$ .  
 ב. (1) עלייה:  $x > 0$ . ירידה:  $x < 0$ . (2) חיוביות: אין. שליליות: כל  $x$ .
12. א. נכון. ב. לא נכון. ג. לא נכון. ד. לא נכון. ה. לא נכון. ו. לא נכון.
13. א. כן. ב. כן. ג. בסביבה שמימין לנקודת מינימום הפונקציה עולה, ובסביבה שמשמאל לנקודת מינימום הפונקציה יורדת.
14. א. (1) נקודה אחת. (2) שתי נקודות. ב. שלושה פתרונות. ג. (1)  $x > 3$  או  $x < -5$ . (2) לא.
15. א. נקודה אחת. ב. (1) שני פתרונות. (2) שלושה פתרונות. ג. (1)  $x > 4$  או  $x < 0$ . (2) לא.
16. א. (1)  $k > 2$  או  $k < 0$ . (2)  $k = 2$  או  $k = 0$ . ב.  $0 < k < 2$ .
17. א.  $k > 1$  או  $k = 0$ . ב.  $k = 1$ . ג.  $0 < k < 1$ . ד.  $k < 0$ .

**כיצד קובעים האם ציור יכול לייצג גרף של פונקציה**

18. בכל אחד מהסעיפים הבאים קבעו האם הציור מייצג גרף של פונקציה.



**תשובות:**

18. א. כן. ב. לא. ג. כן. ד. לא. ה. לא. ו. כן.

# שרטוט גרף של פונקציה (ללא תבנית אלגברית) על פי נתונים

הערה: בשאלות הבאות כל הגרפים הם רציפים, וקיימות עוד תשובות נוסף על התשובה שתינתן.

1. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $-2 \leq x \leq 3$ . נתון:  $f(-2) = -6$ ,  $f(3) = -1$ ,  $f(1) = 3$ .
  - א. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה.
  - ב. (1) האם ייתכן  $f(-1) = 0$ ? (2) האם ייתכן  $f(0) = 0$ ?
  - ג. (1) האם ייתכן שגרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  פעמיים? (2) האם ייתכן שגרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  פעם אחת?
2. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 6$ . גרף הפונקציה נפגש עם ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -9$ . נתון:  $f(6) = 9$ ,  $f(1) = -11$ ,  $f(5) = 11$ .
  - א. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה.
  - ב. כמה נקודות אפס לפחות יש לפונקציה?
  - ג. עפרה טוענת שגרף הפונקציה חותך את הישר  $y = 10$  לפחות פעמיים. האם היא צודקת?
3. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $-2 \leq x \leq 6$ . נתון:  $f(-2) = 0$ ,  $f(0) = 3$ ,  $f(x) = 6$  עבור  $2 \leq x \leq 6$ . שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה.
4. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בכל התחום  $-5 \leq x \leq 5$ .
  - א. יואב טוען שלגרף הפונקציה יש בדיוק נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- $y$ . האם הוא צודק?
  - ב. (1) שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $f(x)$ , אם הפונקציה מקיימת:  $f(-5) = -5$ ,  $f(5) = 10$ ,  $f(-2) = 8$ ,  $f(2) = 0$ ,  $f(1) = 3$ .
  - (2) האם הפונקציה יכולה לעבור דרך הנקודה  $(-2; 6)$ ? נמקו.
  - ג. קבעו האם ייתכן שיש לגרף הפונקציה ולציר ה- $x$ :
    - (1) נקודה אחת משותפת.
    - (2) שתי נקודות משותפות.
    - (3) שלוש נקודות משותפות.
5. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 8$ .
  - א. איתמר טוען שחייבת להיות לגרף הפונקציה נקודת חיתוך עם ציר ה- $x$ . האם הוא צודק?
  - ב. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$  אם היא מקיימת:  $f(0) = 4$ ,  $f(3) = 2$ ,  $f(x) = 3$  עבור  $5 \leq x \leq 8$ .
  - ג. (1) האם ייתכן שלגרף הפונקציה יש שתי נקודות ששיעור ה- $y$  שלהן הוא 2.5?  
(2) האם ייתכן שלגרף הפונקציה יש שתי נקודות ששיעור ה- $x$  שלהן הוא 2.5?  
ד. האם ייתכן שגרף הפונקציה ששרטטתם בסעיף ב' עובר דרך הנקודה  $(3; 3)$ ? נמקו.
6. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ , ומקיימת  $f(2) = 6$ . שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $f(x)$  במקרים הבאים:
  - א. לפונקציה אין נקודות אפס.
  - ב. לפונקציה יש נקודת אפס אחת ויש לה גם ערכים שליליים.
  - ג. לפונקציה יש נקודת אפס אחת ואין לה ערכים שליליים.

7. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 6$ .  
 הפונקציה חיובית בתחום  $2 < x \leq 6$  ושליילית בתחום  $0 \leq x < 2$ .  
 א. כתבו את שיעורי נקודת האפס של הפונקציה.  
 ב. (1) האם ייתכן  $f(6) > f(5)$ ? אם כן, שרטטו גרף מתאים.  
 (2) האם ייתכן  $f(6) < f(5)$ ? אם כן, שרטטו גרף מתאים.  
 ג. האם ניתן לקבוע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
8. נתונה פונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $-3 \leq x \leq 4$ .  
 הפונקציה חיובית בתחום  $0 < x < 3$  ושליילית בתחום  $x > 3$  או  $x < 0$ .  
 א. מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה?  
 ב. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה  $f(x)$  במקרים הבאים:  
 (1)  $f(-3) < f(-2)$  (2)  $f(-3) > f(-2)$ .  
 ג. האם ניתן לקבוע מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
9. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 8$ . נתון:  $f(8) = 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(6) = 4$ ,  $f(2) = -4$ .  
 א. כתבו שיעורי ארבע נקודות הנמצאות על גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. שרטטו שלוש סקיצות אפשריות של גרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 הערה: יש אינסוף אפשרויות לשרטט את גרף הפונקציה.  
 ג. כמה נקודות משותפות לפחות יש לגרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ ?
10. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ , ומקיימת  $f(-2) = f(4) = 0$ .  
 לפונקציה יש שתי נקודות אפס. שרטטו ארבע סקיצות אפשריות לגרף הפונקציה  $f(x)$ .  
 הערה: יש עוד המון אפשרויות אחרות.
11. נתונה פונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ .  
 הפונקציה חיובית עבור  $x > 0$ ,  $x \neq 5$ , ושליילית עבור  $x < 0$ .  
 א. מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה?  
 ב. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה.  
 ג. (1) האם מתקיים בוודאות  $f(5) = f(0)$ ? (2) האם ייתכן  $f(5) > f(0)$ ?
12. לפניכם טבלת ערכים הכוללת נתונים חלקיים עבור פונקציה  $f(x)$ , המוגדרת עבור  $0 \leq x \leq 10$ . נתון כי לפונקציה יש שלוש נקודות אפס.

$x$	0	1	3	4	5	6	7	9	10
$f(x)$	0	-2	-5	-4	0	4	5	2	0

- א. מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה?  
 ב. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה.  
 ג. כתבו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקציה.

13. א. שרטטו גרף אפשרי של הפונקציה  $f(x)$ , המקיימת את התנאים הבאים (1)-(3):  
 (1). שתי נקודות הקיצון של הפונקציה הן:  $(1;-2)$ ,  $(-1;2)$ .  
 (2). הפונקציה עולה עבור  $x > 1$  או  $x < -1$  ויורדת עבור  $-1 < x < 1$ .  
 (3). הפונקציה נפגשת עם הצירים בנקודות  $(2;0)$ ,  $(0;0)$ ,  $(-2;0)$ .  
 ב. השלימו: בתחום  $-1 < x < 1$  ככל ש- $x$  גדל, אז  $y$  \_\_\_\_\_.

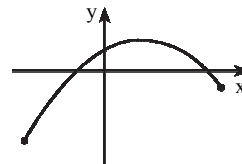
14. א. שרטטו סקיצה אפשרית של הפונקציה  $f(x)$  שנקודת המקסימום היחידה שלה היא  $(1;1)$ , ושתי נקודות המינימום היחידות שלה הן  $(0;0)$  ו- $(2;0)$ .  
 ב. קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה בוודאות, לא נכונה בוודאות, או שהיא יכולה להיות נכונה ויכולה להיות לא נכונה:  
 (1) גרף הפונקציה חותך את הישר  $y = 0.5$  בנקודה אחת בלבד.  
 (2) גרף הפונקציה חותך את הישר  $y = 0.5$  לפחות בשתי נקודות.  
 (3) גרף הפונקציה חותך את הישר  $y = 0.5$  בארבע נקודות בדיוק.  
 ג. האם קיים ערך של  $x$ , שעבורו מתקיים  $f(x) < 0$ ? נמקו.  
 ד. מה תחום הערכים של  $f(x)$  יכולה לקבל?

15. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$ , ומקיימת את התנאים האלה:  
 $f(0) = 0$ ,  $f(1) = 3$ ,  $f(-1) = -3$ . לפונקציה יש קיצון עבור  $x = 1$  ו- $x = -1$ .  
 הפונקציה עולה בתחום  $-1 < x < 1$  ויורדת בתחום  $x > 1$  או  $x < -1$ .  
 נתון:  $f(x) > 0$  עבור  $x > 0$ ,  $f(x) < 0$  עבור  $x < 0$ .  
 א. קבעו מהו סוג הקיצון כאשר  $x = 1$ , ומהו סוג הקיצון כאשר  $x = -1$ .  
 ב. שרטטו סקיצה אפשרית של גרף הפונקציה. ג. קבעו האם  $f(5) > f(6)$ .

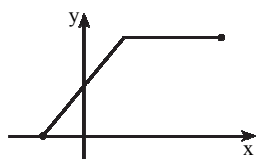
16. הפונקציה  $f(x)$  מוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq 7$ , ויש לה קיצון בנקודות  $(2,4)$  ו- $(5,0)$ .  
 הפונקציה יורדת בתחום  $2 < x < 5$  ועולה בתחום  $x > 5$  או  $0 < x < 2$ .  
 א. קבעו את סוג הקיצון בנקודה  $(2,4)$  ואת סוג הקיצון בנקודה  $(5,0)$ .  
 ב. האם ניתן לקבוע מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה?  
 ג. נתון:  $f(0) = 0$ . שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ד. מהם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה?  
 ה. (1) האם יתכן  $f(7) = 4$ ? (2) האם יתכן  $f(7) > 4$ ?

### תשובות אפשריות:

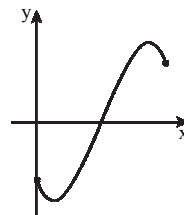
ב. (1) כן. (2) כן. ג. (1) כן. (2) לא ייתכן.



1. א.



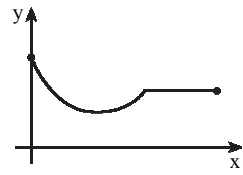
3.



2. א.

ב. לפחות נקודה אחת.  
 ג. כן, היא צודקת.

5. א. לא, איתמר לא צודק.

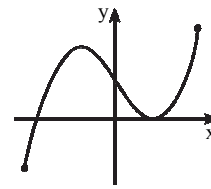


ב. ג. (1) כן. (2) לא.

ד. לא.

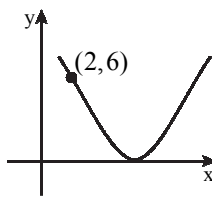
4. א. כן, יואב צודק.

ב. (1)

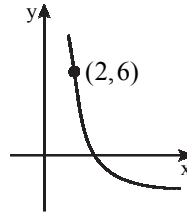


(2) לא.

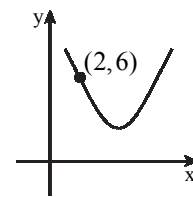
ג. (1) לא. (2) כן. (3) כן.



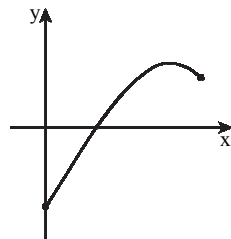
ג.



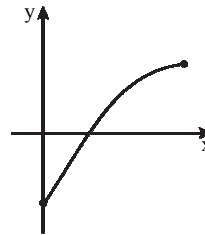
ב.



א. 6.



(2) כן.



א. (2, 0).

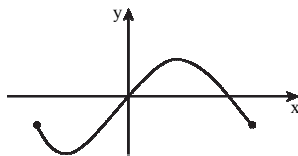
ב. (1) כן.

ג. לא.

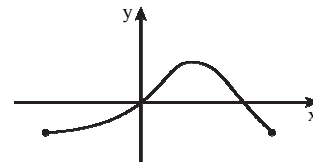
8. א. (0, 0), (3, 0).

ב. (1).

ג. לא.

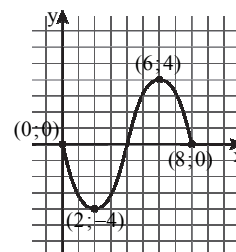
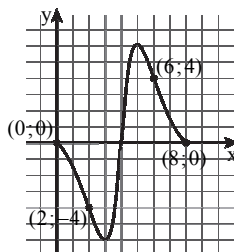
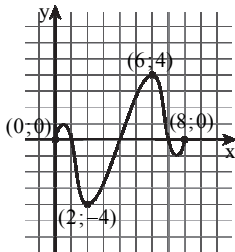


(2).



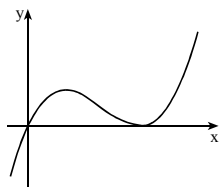
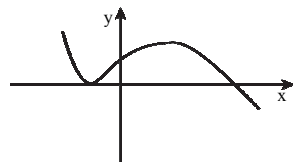
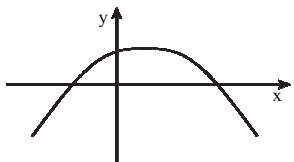
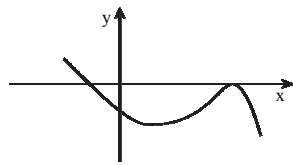
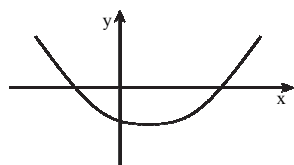
9. א. (2; -4), (6; 4), (8; 0) ו-(0; 0).

ב.



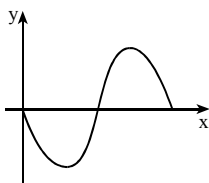
ג. לגרף יש לפחות שלוש נקודות משותפות עם ציר ה-x.

10.



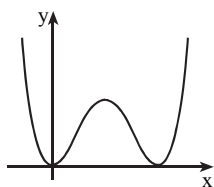
ב.

11. א.  $(0,0)$ ,  $(5,0)$   
 ג. (1) כן.  
 ד. (2) לא.



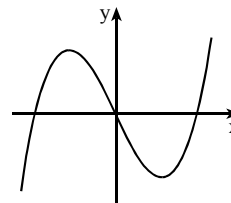
ב.

12. א.  $(0,0)$ ,  $(5,0)$ ,  $(10,0)$   
 ג. חיוביות:  $5 < x < 10$   
 ד. שליליות:  $0 < x < 5$



14. א.

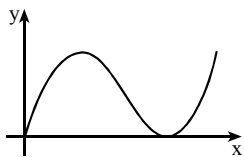
- ב. (1) לא נכונה בוודאות.  
 (2) נכונה בוודאות.  
 (3) יכולה להיות נכונה או לא נכונה.  
 ד. לא:  $f(x) \geq 0$



13. א.

ב. קטן.

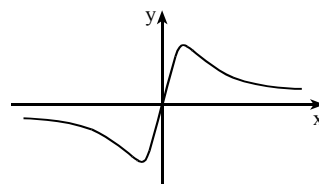
16. א.  $(2,4)$  מקסימום,  $(5,0)$  מינימום.



ב. לא.

- ד. חיוביות:  $5 < x \leq 8$  או  $0 < x < 5$   
 שליליות: אין. ה. (1) כן. (2) כן.

15. א.  $x=1$  מקסימום,  $x=-1$  מינימום.

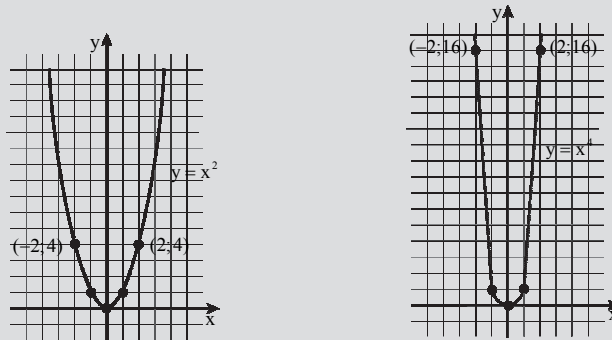


ג. כן.

# פונקציות חזקה עם מעריך טבעי

נדון עכשיו בפונקציות מהצורה  $y = x^n$ , כאשר  $n$  הוא מספר טבעי (מספר חיובי ושלם). פונקציה כזו נקראת **פונקציית חזקה עם מעריך טבעי**.  
 בפונקציה כזו  $x$  נקרא בסיס החזקה, ו- $n$  הוא מעריך החזקה. דוגמאות לפונקציות חזקה:  
 עבור  $n=1$  נקבל  $y = x^1$ . עבור  $n=2$  נקבל  $y = x^2$ .  
 עבור  $n=3$  נקבל  $y = x^3$ . עבור  $n=4$  נקבל  $y = x^4$ .  
 עבור  $n=5$  נקבל  $y = x^5$ . עבור  $n=6$  נקבל  $y = x^6$ .  
 נדון תחילה בפונקציה  $y = x^n$  עבור  $n$  זוגי. אחר כך נדון בפונקציה  $y = x^n$  עבור  $n$  אי זוגי.  
 נבנה טבלת ערכים ונשרטט את הגרפים של הפונקציות  $y = x^2$  ו- $y = x^4$ .

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y = x^2$	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$y = x^4$	16	5.0625	1	0.0625	0	0.0625	1	5.0625	16

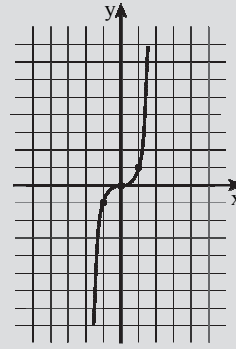
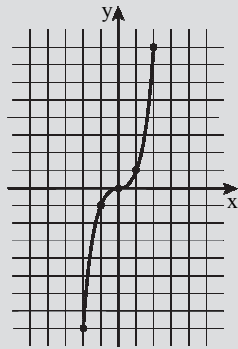


מהגרפים שקיבלנו נוכל ללמוד על מספר תכונות המאפיינות פונקציית חזקה מהצורה  $f(x) = x^n$  עבור  $n$  טבעי זוגי:

- תחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל  $x$ .
- לפונקציה יש נקודת מינימום ב- $(0;0)$ . נקודת האפס של הפונקציה היא נקודת קיצון. משני צדי נקודת האפס הפונקציה אינה עוברת מחיוביות לשליליות, או להיפך.
- הפונקציה עולה בתחום  $x > 0$  ויורדת בתחום  $x < 0$ .
- הפונקציה מקבלת רק ערכים אי שליליים (חיוביים או אפס), כלומר גרף הפונקציה אינו נמצא מתחת לציר ה- $y$ .
- הפונקציה חיובית עבור כל  $x \neq 0$ . עבור  $x = 0$  ערך הפונקציה הוא 0.
- גרף הפונקציה עובר תמיד דרך הנקודות  $(0;0)$ ,  $(1;1)$  ו- $(-1;1)$ , ראו שרטוטים. אלה "נקודות עוגן" קבועות של כל פונקציה מצורה זו.
- גרף הפונקציה סימטרי משני צדי ציר ה- $y$ . נדון בכך בהמשך בהרחבה.

נעבור לדון בפונקציה  $y = x^n$  עבור  $n$  טבעי אי-זוגי:  
 נבנה טבלת ערכים ונשרטט את הגרפים של הפונקציות  $y = x^3$  ו- $y = x^5$ .

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$y = x^3$	-8	-3.375	-1	-0.125	0	0.125	1	3.375	8
$y = x^5$	-32	-7.59375	-1	-0.03125	0	0.03125	1	7.59375	32



מהגרפים שקיבלנו נוכל ללמוד על מספר תכונות המאפיינות פונקציית חזקה מהצורה  $f(x) = x^n$  עבור  $n$  אי זוגי:

- א. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל  $x$ .
- ב. הפונקציה עולה בכל תחום ההגדרה שלה, ואין לה נקודות קיצון.
- ג. הפונקציה חיובית עבור  $x > 0$ , ושלילית עבור  $x < 0$ .
- ד. הנקודה  $(0;0)$  היא נקודת אפס של הפונקציה. משני צדי נקודת האפס הפונקציה עוברת משליליות לחיוביות, או להיפך. אפשר לראות שהסביבה של הנקודה אינה נראית רגילה, אלא בצורת "מגלשה". נרחיב על נקודות כאלה בהמשך.
- ה. גרף הפונקציה עובר תמיד דרך הנקודות  $(0;0)$ ,  $(1;1)$  ו- $(-1;-1)$ .
- ו. אלה "נקודות עוגן" קבועות של כל פונקציה מצורה זו.
- ז. גרף הפונקציה סימטרי לעומת הנקודה  $(0;0)$ . נדון בכך בהמשך בהרחבה.

בדקו בעזרת תוכנת מחשב, כיצד נראה גרף הפונקציה  $y = x^n$ , עבור  $n$  טבעי (זוגי או אי זוגי). היכנסו לקישור המצורף. מומלץ! לחצו כאן

## תרגילים

1. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4$ .
  - א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה. תוכלו להיעזר בטבלת ערכים.
  - ב. רשמו את שיעורי הנקודה הנמוכה ביותר שעל גרף הפונקציה.
  - ג. האם קיימת על גרף הפונקציה נקודה שהיא הגבוהה ביותר?
  - ד. כתבו את התחום שבו הפונקציה עולה.
  - ה. כתבו את התחום שבו הפונקציה יורדת.
  - ו. חשבו את  $f(3)$  ואת  $f(-3)$ .
  - ז. מצאו לאילו ערכים של  $x$  מתקיים  $f(x) = 16$ .
  - ח. עבור הנקודות הבאות, קבעו האם הן נמצאות על גרף הפונקציה: (1),  $(-1;1)$ , (2),  $(-1;-1)$ .
  - ט. (1) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע  $f(100) > 100$ .
  - י. (2) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע  $f(0.1) < 0.1$ .
  - יא. (1) חשבו את  $f(100)$ . (2) חשבו את  $f(-100)$ .
  - יב. (1) קבעו בעזרת הגרף האם כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ . האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף י'(1)?
  - (2) קבעו בעזרת הגרף האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ . האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף י'(2)?



2. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^6$ .
- א. בחרו את התשובה הנכונה: משוואת ציר הסימטריה של גרף הפונקציה היא  $y = 0/x = 0$ .
  - ב. חשבו את ערך הפונקציה בנקודות  $x = 1$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$ .
  - ג. מצאו את ערכי ה- $x$  שעבורם הפונקציה חיובית (אם ישנם).
  - ד. מצאו את ערכי ה- $x$  שעבורם הפונקציה שלילית (אם ישנם).
  - ה. מצאו את שיעורי הנקודות על גרף הפונקציה ששיעור ה- $y$  שלהן הוא 64.
  - ו. האם גרף הפונקציה נפגש עם הישר  $y = -1$ ? נמקו.
  - ז. (1) בכמה נקודות חותך גרף הפונקציה את הישר  $y = 12$ ? נמקו.  
(2) כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) = 12$ ?
  - ח. האם ניתן לדעת האם הפתרונות הם חיוביים או שליליים? נמקו.  
(1) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע  $f(100) > f(10)$ .  
(2) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע  $f(-0.5) = f(0.5)$ .
  - ט. נתון  $0 < k < 1$ . קבעו עבור כל אחת מהטענות הבאות האם היא נכונה:  
(1)  $0 < f(k) < 1$  (2)  $f(k) > k$ .
  - י. (1) קבעו בעזרת הגרף האם כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .  
(2) קבעו בעזרת הגרף האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .

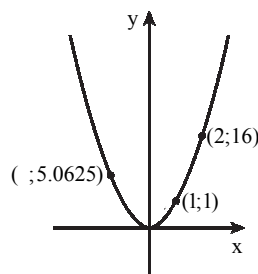
3. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3$ .
- א. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה. תוכלו להיעזר בטבלת ערכים.
  - ב. מצאו לאיזה ערך של  $x$  מתקיים  $f(x) = 27$ .
  - ג. מצאו את נקודת המפגש של גרף הפונקציה עם הישר  $y = -64$ .
  - ד. אסתי טוענת שכאשר נעים על הגרף משמאל לימין, ערכי ה- $y$  הולכים וגדלים, ולכן הפונקציה עולה לכל ערך של  $x$ . האם היא צודקת?  
ה. מצאו את שיעורי נקודות המפגש של גרף הפונקציה עם הישר  $y = x$ .
  - ו. (1) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע מתקיים  $f(10) > f(5)$ ?  
(2) נתון  $k > 1$ . האם מתקיים בהכרח  $f(k) > k$ ? נמקו.
  - ז. (1) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע  $f(0.5) < 0.5$ .  
(2) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע  $f(-12) < -12$ .
  - ח. (1) חשבו את  $f(1000)$ . (2) חשבו את  $f(-1000)$ .
  - ט. (1) קבעו בעזרת הגרף האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .  
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(1)?
  - (2) קבעו בעזרת הגרף האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .  
האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ח'(2)?

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^5$ .
- א. מצאו את ערכי ה- $x$  שעבורם הפונקציה חיובית, ואת ערכי ה- $x$  שעבורם היא שלילית.  
היעזרו בגרף הפונקציה.
  - ב. מצאו את נקודת המפגש של גרף הפונקציה עם הישר  $y = 32$ .
  - ג. היעזרו בגרף ופתרו את אי השוויון  $x^5 > 32$ .
  - ה. נתון  $t < -1$ . האם מתקיים  $f(t) > t$ ? נמקו.
  - ו. נתון  $-1 < m < 0$ . האם מתקיים  $f(m) > m$ ? נמקו.
  - ז. (1) קבעו על פי הגרף האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .  
(2) קבעו על פי הגרף האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .

5. נתונה הפונקציה  $y = x^n$  .  $n$  מספר אי זוגי.  
 א. השלימו את הטבלה.  
 ב. כתבו שיעורי שלוש נקודות דרכן עובר גרף הפונקציה, עבור כל ערך של  $n$  טבעי אי זוגי.

$y = x^n$	הייצוג האלגברי
	תחום הגדרה
	שיעורי נקודת הקיצון (אם יש) וסוג הקיצון
	נקודת החיתוך עם ציר ה- $x$ , נקודת אפס
	נקודת החיתוך עם ציר ה- $y$
	תחום עלייה
	תחום ירידה
	תחום חיוביות
	תחום שליליות

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^n$  .  $n$  מספר טבעי זוגי:  
 א. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו האם היא נכונה:  
 (1) הערך המינימלי של הפונקציה הוא אפס.  
 (2) הפונקציה חיובית לכל ערך של  $x$ .  
 (3) הערך של הפונקציה יכול להיות שלילי.  
 ב. כתבו שיעורי שלוש נקודות דרכן עובר גרף הפונקציה, עבור כל ערך של  $n$  טבעי זוגי.  
 ג. היעזרו בגרף הפונקציה, ומצאו את הערכים של המספר  $k$ , שעבורם:  
 (1) יש לגרף הפונקציה ולישר  $y = k$  שתי נקודות מפגש.  
 (2) אין לגרף הפונקציה ולישר  $y = k$  אף נקודת מפגש.  
 (3) יש לגרף הפונקציה ולישר  $y = k$  נקודת מפגש אחת.  
 ד. עבור ערכי  $k$ , שמצאתם בתת סעיף ג(1), קבעו כמה נקודות מפגש יש לגרף הפונקציה עם הישר  $y = -2k$  (אם ישנן).  
 נמקו.



7. לפניכם גרף של פונקציה מהצורה  $f(x) = x^n$ .  
 על הגרף מסומנות שתי נקודות הנמצאות עליו:  $(1;1)$ ,  $(2;16)$ .  
 כמו כן, מסומנת נקודה נוספת על הגרף, שבהן נתון שיעור ה- $y$ .  
 א. האם מעריך החזקה של הפונקציה הוא זוגי או אי זוגי?  
 ב. מצאו את מעריך החזקה  $n$ .  
 ג. השלימו את שיעורי הנקודה הנוספת שעל הגרף.  
 ד. מצאו את נקודות החיתוך בין גרף הפונקציה לישר  $y = 81$ .  
 ה. היעזרו בשרטוט וקבעו לאילו ערכי  $x$  מתקיים  $x^4 < 81$ .  
 ו. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה  $(f(x))^2 - f(x) - 2 = 0$ .  
 הדרכה: סמנו  $f(x) = t$ .

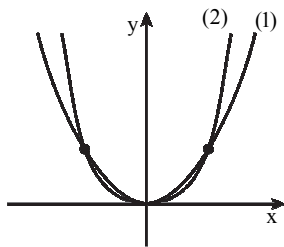
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)		-32	-1				

8. הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציית חזקה. לפניכם טבלת ערכים עבור פונקציה זו.

- א. האם מעריך החזקה של הפונקציה הוא זוגי או אי זוגי?  
 ב. מצאו את מעריך החזקה  $n$ .  
 ג. השלימו את הערכים החסרים בטבלה.  
 ד. כתבו את תחומי העלייה של הפונקציה.

9. לפניכם גרפים של שתי פונקציות:  $g(x) = x^4$ ,  $f(x) = x^6$ .

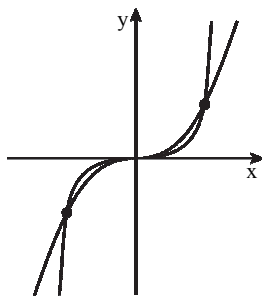
- א. מצאו את הנקודות המשותפות לגרפים של שתי הפונקציות.  
 ב. (1) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע מתקיים  $f(2) > g(2)$ .  
 (2) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע מתקיים  $f(0.5) < g(0.5)$ .  
 ג. התאימו כל פונקציה לגרף המתאים לה, גרף (1) או גרף (2).



- ד. לאילו ערכי  $x$  מתקיים  $f(x) > g(x)$ ?  
 ה. חניתה טוענת שבתחום  $0 < x < 1$  מתקיים  $x^6 < x^4$ . האם היא צודקת?  
 ו. מהם התחומים שבהם מתקיים  $x^6 < x^4$ ?  
 ז. נתונים  $k$  ו- $m$  מספרים טבעיים זוגיים, כך ש- $k > m$ .  
 עפר טוען שעבור  $x > 1$  או  $x < -1$  מתקיים  $x^k > x^m$ ,  
 ועבור  $0 < x < 1$  או  $-1 < x < 0$  מתקיים  $x^k < x^m$ .  
 האם הוא צודק? נמקו.

10. לפניכם הגרפים של שתי פונקציות:  $g(x) = x^3$ ,  $f(x) = x^5$ .

- א. מצאו את הנקודות המשותפות לגרפים של שתי הפונקציות.  
 ב. (1) הוסיפו את אחד הסימנים  $<$ ,  $>$ , או  $=$ :  $f(2)$  \_\_\_  $g(2)$ .  
 (2) הוסיפו את אחד הסימנים  $<$ ,  $>$ , או  $=$ :  $f(0.5)$  \_\_\_  $g(0.5)$ .



- הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון.  
 ג. התאימו כל פונקציה לגרף המתאים לה, גרף (1) או גרף (2).  
 ד. ינאי טוען שעבור  $-1 < x < 1$  מתקיים  $f(x) < g(x)$ . האם הוא צודק?

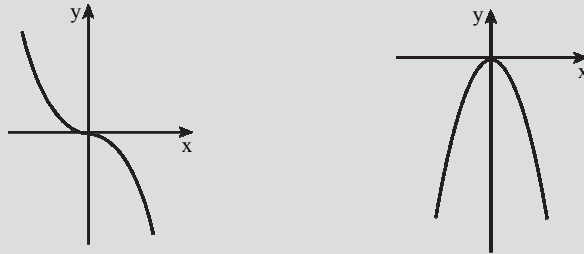
- ה. כתבו את התחום שבו מתקיים  $f(x) > g(x)$ .  
 ו. מהם התחומים שבהם מתקיים  $x^5 < x^3$ ?  
 ז. נתונים  $k$  ו- $m$  מספרים טבעיים אי זוגיים, כך ש- $k > m$ .  
 רינה טוענת שעבור  $x > 1$  או  $x < -1$  מתקיים  $x^k > x^m$ , ועבור  $0 < x < 1$  או  $-1 < x < 0$  מתקיים  $x^k < x^m$ . האם היא צודקת? נמקו.

11. נתונות שתי פונקציות:  $g(x) = x^2$ ,  $f(x) = x^7$ .

- א. מצאו את הנקודות המשותפות לגרפים של שתי הפונקציות.  
 ב. פתרו את אי השוויון  $x^7 < x^2$ . היעזרו בגרפים של הפונקציות.

## פונקציית מהצורה $f(x) = -x^n$

נדון בקצרה בפונקציות מהצורה  $y = -x^n$ , כאשר  $n$  הוא מספר טבעי (מספר חיובי ושלם).  
 דוגמאות:  $y = -x^5$ ,  $y = -x^4$ ,  $y = -x^3$ ,  $y = -x^2$ .  
 אם נשרטט את הגרפים בעזרת טבלת ערכים, נקבל את הגרפים הבאים.  
 הגרף הימני מתאר את הצורה הכללית של הפונקציה עבור מעריך זוגי, ונקודת האפס שלו  $(0;0)$  היא נקודת מקסימום. הגרף השמאלי מתאר את הצורה הכללית של הפונקציה עבור מעריך אי זוגי. בנקודת האפס  $(0;0)$  הפונקציה עוברת מחיוביות לשליליות, ובסביבת הנקודה הגרף נראה בצורת "מגלשה".  
 למעשה, גרף מהצורה  $y = -x^n$  מהווה שיקוף לעומת ציר ה- $x$  של הגרף  $y = x^n$ .  
 בהמשך נדון בהרחבה בשיקוף גרף של פונקציה לעומת ציר ה- $x$ .



12. נתונה הפונקציה  $f(x) = -x^4$ .

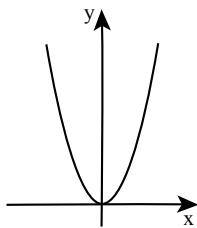
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה. תוכלו להיעזר בטבלת ערכים.
- חשבו את ערך הפונקציה בנקודות  $x = -1$ ,  $x = 1$ .
- רשמו את שיעורי הנקודה הגבוהה ביותר שעל גרף הפונקציה.
- כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
- מצאו לאילו ערכים של  $x$  מתקיים  $f(x) = -25$ .
- ז. (1) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע  $f(10) < -10$ .
- (2) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע  $f(0.1) > -0.1$ .
- ה. התבוננו בגרף הפונקציה.
  - קבעו האם כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .
  - קבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .

13. נתונה הפונקציה  $f(x) = -x^3$ .

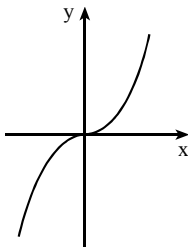
- שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה. תוכלו להיעזר בטבלת ערכים.
- מצאו לאיזה ערך של  $x$  מתקיים  $f(x) = 125$ .
- כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
- האם קיים ערך של  $x$ , שעבורו הפונקציה עולה?
- ה. מצאו את שיעורי נקודות המפגש של גרף הפונקציה עם הישר  $y = x$ .
- ז. (1) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע  $f(100) < -100$ .
- (2) הסבירו בעזרת חוקי חזקות, וללא מחשבון מדוע  $f(0.1) > -0.1$ .
- ה. התבוננו בגרף הפונקציה.
  - קבעו האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .
  - קבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .

## פונקציות מהצורה $f(x) = a \cdot x^n$

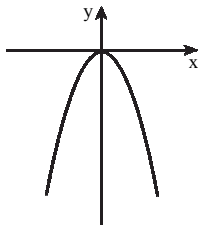
נדון בקצרה בפונקציות מהצורה  $y = a \cdot x^n$ , כאשר  $n$  הוא מספר טבעי (מספר חיובי ושלם), ו- $a$  הוא מספר חיובי או שלילי (כלומר אינו אפס).  
 דוגמאות:  $y = 4 \cdot x^2$ ,  $y = 8 \cdot x^3$ ,  $y = -7 \cdot x^4$ ,  $y = -3 \cdot x^5$ .  
 עבור  $a$  חיובי, גרף הפונקציה  $y = a \cdot x^n$  דומה בצורתו לגרף של  $y = x^n$ , והם נבדלים זה מזה בעיקר ברמת התלילות.  
 עבור  $a$  שלילי, גרף הפונקציה  $y = a \cdot x^n$  דומה בצורתו לגרף של  $y = -x^n$ , והם נבדלים זה מזה בעיקר ברמת התלילות.  
 בהמשך נדון באופן רחב בהשפעה על גרף של פונקציה  $f(x)$  כאשר כופלים את הפונקציה ב- $a$ , ומקבלים את הפונקציה  $a \cdot f(x)$ , ונראה שהכפלה זו גורמת למתיחה אנכית, או כיווץ אנכי של הגרף.



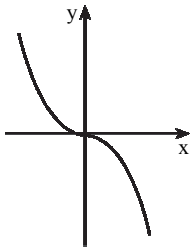
14. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = 2x^4$ .
- רשמו את שיעורי נקודת האפס של הפונקציה.
  - כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
  - כתבו את התחום שבו הפונקציה עולה.
  - כתבו את התחום שבו הפונקציה יורדת.
  - מצאו לאילו ערכים של  $x$  מתקיים  $f(x) = 32$ .
  - התבוננו בגרף הפונקציה.
    - קבעו האם כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .
    - קבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .



15. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ .
- רשמו את שיעורי נקודת האפס של הפונקציה.
  - כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
  - מצאו לאיזה ערך של  $x$  מתקיים  $f(x) = -9$ .
  - התבוננו בגרף הפונקציה, וקבעו האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .
  - התבוננו בגרף הפונקציה, וקבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .



16. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = -\frac{1}{4}x^6$ .
- רשמו את שיעורי הנקודה הגבוהה ביותר שעל גרף הפונקציה.
  - כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
  - מצאו לאילו ערכים של  $x$  מתקיים  $f(x) = -16$ .
  - הסבירו ללא מחשבון מדוע  $f(100) < 0$ .
    - הסבירו ללא מחשבון מדוע  $f(1000) < f(100)$ .
  - התבוננו בגרף הפונקציה.
    - קבעו האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .
    - קבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .

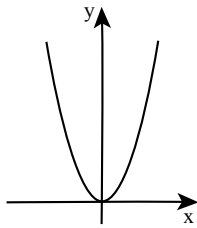


17. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = -3x^5$ .

- א. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.  
 ב. מצאו לאיזה ערך של  $x$  מתקיים  $f(x) = 6$ .  
 ג. מצאו את נקודות המפגש של גרף הפונקציה עם הישר  $y = -3x$ .  
 ד. (1) הסבירו ללא מחשבון מדוע  $f(100) < 0$ .  
 (2) הסבירו ללא מחשבון מדוע  $f(-100) > 0$ .  
 ה. התבוננו בגרף הפונקציה.

- (1) קבעו האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .  
 (2) קבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .

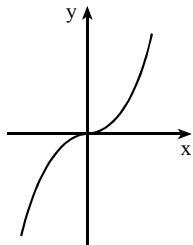
### תשובות:



א.

1. ב.  $(0;0)$ . ג. לא.  
 ד.  $x > 0$ . ה.  $x < 0$ . ו.  $f(-3) = 81$ ,  $f(3) = 81$ .  
 ז.  $x = -2$ ,  $x = 2$ .  
 ח. (1) כן. (2) לא.  
 י. (1)  $f(100) = 10^8 = 100,000,000$ . (2)  $f(-100) = 10^8 = 100,000,000$ .  
 יא. (1) שואף ל- $+\infty$ . (2) שואף ל- $+\infty$ .

2. א.  $x = 0$ . ב.  $f(1) = 1$ ,  $f(-1) = 1$ ,  $f(0) = 0$ . ג.  $x \neq 0$ . ד. אין.  
 ה.  $(2;64)$ ,  $(-2;64)$ . ו. לא. ז. (1) בשתי נקודות. (2) שני פתרונות, אחד חיובי, השני שלילי.  
 ט. (1) הטענה נכונה. (2) הטענה לא נכונה. י. (1) שואף ל- $\infty$ . (2) שואף ל- $\infty$ .



3. ב.  $x = 3$ . ג.  $(-4;-64)$ . ד. כן, אסתי צודקת.  
 ה.  $(0;0)$ ,  $(1;1)$ ,  $(-1;-1)$ . ו. (2) כן.  
 ח. (1)  $f(1,000) = 10^9 = 1,000,000,000$ .  
 (2)  $f(1,000) = -10^9 = -1,000,000,000$ .  
 ט. (1) שואף ל- $\infty$ . (2) שואף ל- $-\infty$ .

4. א.  $x > 0$ . ב.  $x < 0$ . ג.  $(2;32)$ . ד.  $x > 2$ . ה. לא. ו. כן.  
 ז. (1) שואף ל- $\infty$ . (2) שואף ל- $-\infty$ .

5. א.

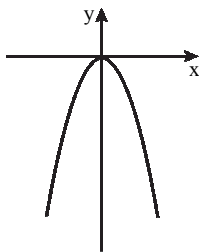
הייצוג האלגברי	$y = x^n$ , n אי זוגי
תחום הגדרה	כל $x$
שיעורי נקודת הקיצון (אם יש)	אין
נקודת החיתוך עם ציר ה- $x$ , נקודת אפס	$(0;0)$
נקודת החיתוך עם ציר ה- $y$	$(0;0)$
תחום עלייה	כל $x$
תחום ירידה	אין
תחום חיוביות	$x > 0$
תחום שליליות	$x < 0$

- ב.  $(-1;-1)$ ,  $(1;1)$ ,  $(0;0)$ .

6. א. (1) נכונה. (2) לא נכונה. (3) לא נכונה. ב.  $(-1;1)$ ,  $(1;1)$ ,  $(0;0)$ .  
 ג. (1)  $k > 0$ . (2)  $k < 0$ . (3)  $k = 0$ . ד. אין אף נקודת מפגש.  
 7. א. המעריך הוא זוגי. ב.  $n = 4$ . ג.  $(-1.5; 5.0625)$ .  
 ד.  $(-3; 81)$ ,  $(3; 81)$ . ה.  $-3 < x < 3$ . ו. שני פתרונות.  
 8. א. אי זוגי. ב.  $n = 5$ . ד. עולה לכל  $x$ .  
 ג.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-243	-32	-1	0	1	32	243

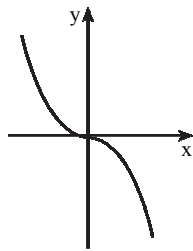
9. א.  $(-1;1)$ ,  $(1;1)$ ,  $(0;0)$ . ג.  $f(x) - (2)$ ,  $g(x) - (1)$ . ד.  $x > 1$  או  $x < -1$ .  
 ה. כן, היא צודקת. ו.  $0 < x < 1$  או  $-1 < x < 0$ . ז. כן, עפר צודק.  
 10. א.  $(-1;-1)$ ,  $(1;1)$ ,  $(0;0)$ . ב. (1)  $f(2) > g(2)$ . (2)  $f(0.5) < g(0.5)$ .  
 ג.  $f(x) - (2)$ ,  $g(x) - (1)$ . ד. לא, הוא לא צודק. ה.  $x > 1$  או  $-1 < x < 0$ .  
 ו.  $0 < x < 1$  או  $x < -1$ . ז. רינה אינה צודקת.



א.

11. א.  $(1;1)$ ,  $(0;0)$ . ב.  $x \neq 0$ ,  $x < 1$ .

12. א.  $(0;0)$ . ב.  $f(-1) = -1$ ,  $f(1) = -1$ . ג. עלייה:  $x < 0$ , ירידה:  $x > 0$ .  
 ה. חיוביות: אין, שליליות:  $x \neq 0$ . ו.  $x = -\sqrt{5}$ ,  $x = \sqrt{5}$ .  
 ח. (1) שואף ל- $-\infty$ . (2) שואף ל- $-\infty$ .



א.

13. א.  $x = -5$ . ב. חיוביות:  $x < 0$ , שליליות:  $x > 0$ .  
 ד. לא. ה.  $(0;0)$ . ז. (1) שואף ל- $-\infty$ . (2) שואף ל- $-\infty$ .

14. א.  $(0;0)$ . ב. חיוביות:  $x \neq 0$ , שליליות: אין. ג.  $x > 0$ . ד.  $x < 0$ . ה.  $x = -2$ ,  $x = 2$ .  
 ו. (1) שואף ל- $+\infty$ . (2) שואף ל- $+\infty$ .  
 15. א.  $(0;0)$ . ב. חיוביות:  $x > 0$ , שליליות:  $x < 0$ . ג.  $x = -3$ . ה.  $(0;0)$ .  
 ד. שואף ל- $+\infty$ . ה. שואף ל- $-\infty$ .  
 16. א.  $(0;0)$ . ב. חיוביות: אין, שליליות:  $x \neq 0$ . ג.  $x = -2$ ,  $x = 2$ .  
 ה. (1) שואף ל- $-\infty$ . (2) שואף ל- $-\infty$ .  
 17. א. חיוביות:  $x < 0$ , שליליות:  $x > 0$ . ב.  $x = \sqrt[5]{-2} = -\sqrt[5]{2}$ . ג.  $(-1;3)$ ,  $(1;-3)$ ,  $(0;0)$ .  
 ה. (1) שואף ל- $-\infty$ . (2) שואף ל- $+\infty$ .

# פונקציות פולינום

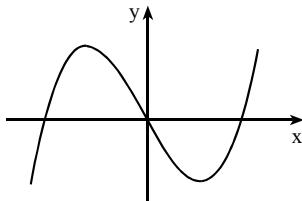
כאשר כופלים פונקציית חזקה במספר קבוע או כאשר מבצעים חיבור או חיסור בין שתי פונקציות חזקה (או יותר), מקבלים פונקציית חזקה חדשה. דוגמאות:  $f(x) = 2x^3$ ,  $g(x) = 3x^5 + 6x^2$ ,  $h(x) = -x^5 + 4x^2 - 1$ . פונקציות אלה המתקבלות על ידי הכפלת פונקציות חזקה במספר קבוע, וחיבורן או חיסורן זו מזו, נקראות **פונקציות פולינום**. משמעות המילה פולינום היא "רב איבר".

## הערות:

- מעריך החזקה הגבוה ביותר בפולינום נקרא **מעלת הפולינום**. דוגמה: הפולינום שמשוואתו  $f(x) = 4x^3 - x$  הוא ממעלה שלישית. באופן דומה, הפונקציה  $g(x) = 3x^2 - x$  היא פולינום ממעלה שנייה (פונקציה ריבועית), הפונקציה  $h(x) = -2x + 6$  היא פולינום ממעלה ראשונה (פונקציה לינארית), והפונקציה הקבועה  $j(x) = 4$  היא פולינום ממעלה אפס.
- פולינום נבנה בעזרת כפל, חיבור וחסור של פונקציות חזקה, ולכן תחום ההגדרה שלו הוא תמיד "כל  $x$ ".
- על פי הערה ב' נובע שגרף של פולינום הוא גרף "רציף".

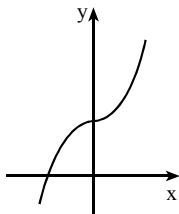
## מסקנות נוספת לגבי פולינומים:

- למשוואה ממעלה שלישית יש לכל היותר שלושה פתרונות, ולכן לפולינום ממעלה שלישית יש לכל היותר שלוש נקודות משותפות עם ציר ה- $x$ . באופן דומה, לפולינום ממעלה רביעית יש לכל היותר ארבע נקודות משותפות עם ציר ה- $x$  וכו'.
- בין כל שתי נקודות אפס של פולינום יש לפחות נקודת קיצון אחת (מינימום או מקסימום).



- לפניכם גרף הפונקציה  $y = x^3 - 16x$ .

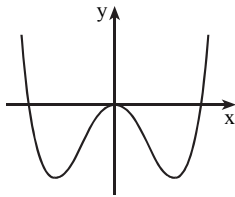
  - מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.
  - רשמו את התחומים שבהם הפונקציה חיובית.
  - רשמו את התחומים שבהם הפונקציה שלילית.
  - היעזרו בסעיפים קודמים, ופתרו את אי השוויונות הבאים: (1)  $x^3 - 16x > 0$  (2)  $x^3 - 16x < 0$ .



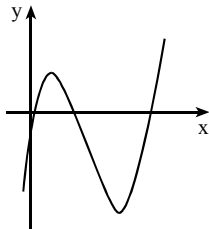
- לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 64$ .

  - מצאו את שיעורי נקודת האפס של הפונקציה.
  - רשמו לאילו ערכי  $x$  מתקיים  $f(x) > 0$ .
  - רשמו לאילו ערכי  $x$  מתקיים  $f(x) < 0$ .
  - התבוננו בגרף הפונקציה, וקבעו האם כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .
    - התבוננו בגרף הפונקציה, וקבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .

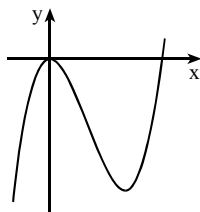




3. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x^2$ .
- מצאו את הנקודות המשותפות לגרף הפונקציה ולציר ה- $x$ .
  - מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
  - $k$  הוא מספר שלילי. למשוואה  $f(x) = k$  יש שני פתרונות. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) = -k$ . נמקו.



4. לפניכם גרף הפונקציה  $y = (x^2 - 7x + 1) \cdot (x - 2)$ .
- מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ . דייקו עד שלוש ספרות אחרי הנקודה העשרונית.
  - רשמו את תחומי החיוביות, ואת תחומי השליליות של הפונקציה.



5. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = x^2(x - 3)$ .
- מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.
  - נתון כי לפונקציה יש מקסימום בנקודה  $(0; 0)$ , ומינימום בנקודה שבה  $x = 2$ .
  - (1) מצאו את שיעורי נקודת המינימום.
  - (2) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = -x^3 + 12x$ .
- מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
  - נתון כי לפונקציה יש מקסימום בנקודה שבה  $x = 2$ , ומינימום בנקודה שבה  $x = -2$ . מצאו את שיעורי נקודות המינימום והמקסימום הנ"ל.
  - שרטטו גרף אפשרי של הפונקציה  $f(x)$ .
  - מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
  - יואב טוען שעל סמך מעלת הפולינום, אפשר לדעת מראש שלפונקציה יש לכל היותר שלוש נקודות אפס. האם הוא צודק? נמקו.
  - עידו טוען שעל סמך מעלת הפולינום, אפשר לדעת מראש שלפונקציה לכל היותר שתי נקודות קיצון. האם הוא צודק? נמקו.
  - ז. (1) חשבו את  $f(100)$ .
  - (2) חשבו את  $f(-100)$ .
  - ח. התבוננו בגרף הפונקציה.
    - (1) קבעו האם כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ . האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ז(1)?
    - (2) קבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ . האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ז(2)?

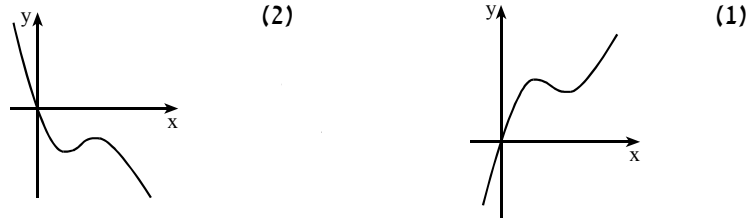
7. נתונות משוואות של שתי פונקציות:  $f(x) = x^3 - 9x$ ,  $g(x) = -x^3 + 9x$ .

- א. מצאו את נקודות האפס של כל אחת מהפונקציות.  
 ב. לפניכם שני גרפים. התאימו לכל פונקציה את הגרף המתאים לה – הימני או השמאלי.  
 הדרכה: הציבו בשתי הפונקציות אותם ערכי  $x$  בסביבת נקודות האפס שמצאתם, ועל סמך סימן התוצאה קבעו האם הפונקציה חיובית או שלילית באותו תחום.

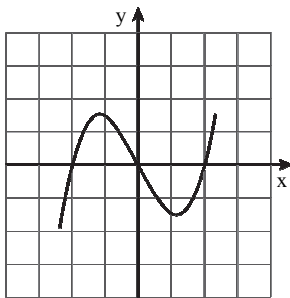


8. נתונות משוואות של שתי פונקציות:  $f(x) = \frac{1}{3}x(2x^2 - 9x + 12)$ ,  $g(x) = -\frac{1}{4}x(2x^2 - 9x + 12)$ .

- א. מצאו את שיעורי נקודות האפס של כל פונקציה (אם ישנן).  
 ב. עפר טוען שעל סמך מעלת הפולינום, אפשר לדעת מראש שלפונקציות הנתונות יש לכל היותר שלוש נקודות אפס, ולכל היותר שתי נקודות קיצון. האם הוא צודק? נמקו.  
 ג. לפניכם שני גרפים (1) ו-(2), המתאימים לשתי הפונקציות.



קבעו איזו משוואה מתאימה לכל גרף, על ידי כך שתציבו בשתי הפונקציות אותם ערכי  $x$  בסביבת נקודת האפס, ותיעזרו בסימן התוצאה המתקבלת.



9. בשרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה.

נתונים שני ייצוגים אלגבריים:

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x^2 - 4), \quad g(x) = \frac{1}{2}x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

אחד הייצוגים מתאים לגרף הנתון.

א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .

ב. קבעו על פי תוצאות סעיף א', איזה ייצוג אלגברי מתאים לגרף הנתון.

ג. על סמך סעיפים קודמים, פתרו את אי השוויון  $\frac{1}{2}x(x^2 - 4) > 0$ .

10. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^3 - 7x^2 + 10x$ .

א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ב. רשמו את התחומים שבהם הפונקציה חיובית.

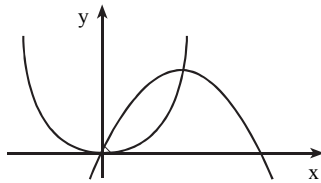
הדרכה: הציבו בפונקציה ערכי  $x$  בסביבת נקודות האפס שמצאתם.

ג. רשמו את התחומים שבהם הפונקציה שלילית.

ד. על סמך סעיפים קודמים, פתרו את אי השוויון  $x^3 - 7x^2 + 10x < 0$ .

- 11.** נתונה הפונקציה  $f(x) = x^2(5x-2)$ .  
 א. על סמך מעלת הפולינום, ינאי טוען שיש לפונקציה לכל היותר שלוש נקודות אפס. האם הוא צודק? נמקו.  
 ב. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.  
 ג. רשמו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.  
 ד. על סמך סעיפים קודמים, פתרו את אי השוויונות הבאים:  
 (1)  $x^2(5x-2) < 0$     (2)  $-x^2(5x-2) < 0$

- 12.** נתונה הפונקציה  $f(x) = (2-x)(x^2+2x+4)$ .  
 א. על סמך מעלת הפולינום, גור טוען שיש לפונקציה לכל היותר שלוש נקודות אפס. האם הוא צודק? נמקו.  
 ב. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה (אם ישנן).  
 ג. (1) מצאו לאילו ערכי  $x$  מתקיים  $f(x) > 0$ . (2) מצאו לאילו ערכי  $x$  מתקיים  $f(x) < 0$ .

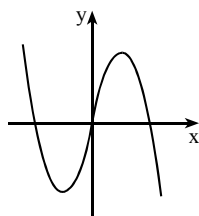


- 13.** הגרפים של הפונקציות  $y = x^4$  ו-  $y = 2x - x^2$   
 נפגשים בשתי נקודות בלבד (ראו ציור).  
 א. הראו ששיעורי נקודות המפגש של הגרפים הם  $(0;0)$  ו-  $(1;1)$ .  
 ב. פתרו את אי השוויון  $x^4 > 2x - x^2$ . היעזרו בציור.  
 ג. עפר טוען, שעל פי הציור ניתן לדעת, שבתחום  $0 < x < 1$  מתקיים  $x^4(2x - x^2) > 0$ . האם הוא צודק? הסבירו.

- 14.** נתונות משוואות של שתי פונקציות:  $f(x) = x^3$  ו-  $g(x) = -2x$ .  
 א. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.  
 ב. היעזרו בשרטוט וקבעו לאילו ערכי  $x$  מתקיים  $f(x) < g(x)$ .  
 הדרכה: הציבו בשתי הפונקציות ערכי  $x$  בסביבת נקודת החיתוך שמצאתם (מימין לה, ומשמאל לה).

**תשובות:**

1. א.  $(-4;0)$ ,  $(4;0)$ ,  $(0;0)$ . ב.  $x > 4$  או  $-4 < x < 0$ . ג.  $0 < x < 4$  או  $x < -4$ .  
 ד. (1)  $x > 4$  או  $-4 < x < 0$ . (2)  $0 < x < 4$  או  $x < -4$ .
2. א.  $(-4;0)$ . ב.  $x > -4$ . ג.  $x < -4$ . ד. (1) שואף ל- $+\infty$ . (2) שואף ל- $-\infty$ .
3. א.  $(-2;0)$ ,  $(0;0)$ ,  $(2;0)$ . ב. חיוביות:  $x > 2$  או  $x < -2$ , שליליות:  $-2 < x < 2$ ,  $x \neq 0$ .  
 ג. שתי נקודות משותפות.
4. א.  $(0.146;0)$ ,  $(6.854;0)$ ,  $(2;0)$ .  
 ב. תחומי חיוביות:  $x > 6.854$  או  $0.146 < x < 2$ , תחומי שליליות:  $2 < x < 6.854$  או  $x < 0.146$ .
5. א.  $(3;0)$ ,  $(0;0)$ .  
 ב. (1)  $(2;-4)$  מינימום. (2) עלייה:  $x > 2$  או  $x < 0$ , ירידה:  $0 < x < 2$ .



6. א.  $(-\sqrt{12};0)$ ,  $(\sqrt{12};0)$ ,  $(0;0)$ . ב.  $(2;16)$  מקסימום,  $(-2;-16)$  מינימום.  
 ד. עלייה:  $-2 < x < 2$ , ירידה:  $x < -2$  או  $x > 2$ .  
 ה. כן, יואב צודק. ו. כן, עידו צודק.  
 ז.  $f(-100) = 998,800$ ,  $f(100) = -998,800$ . ח. (1)  $-\infty$ , תואמת. (2)  $+\infty$ , תואמת. ג.
7. א.  $(-3;0)$ ,  $(0;0)$ ,  $(3;0)$ . ב.  $f(x)$  מתאים לגרף השמאלי,  $g(x)$  מתאים לגרף הימני.
8. א.  $f(x)$ :  $(0;0)$ .  $g(x)$ :  $(0;0)$ . ב. עפר צודק. ג. (1) מתאים ל- $f(x)$ , (2) מתאים ל- $g(x)$ .
9. א.  $f(x)$ :  $(-2;0)$ ,  $(2;0)$ ,  $(0;0)$ .  $g(x)$ :  $(-\sqrt{2};0)$ ,  $(\sqrt{2};0)$ ,  $(0;0)$ . ב.  $f(x)$ . ג.  $x > 2$  או  $-2 < x < 0$ .
10. א.  $(5;0)$ ,  $(2;0)$ ,  $(0;0)$ . ב.  $x > 5$  או  $0 < x < 2$ . ג.  $2 < x < 5$  או  $x < 0$ . ד.  $2 < x < 5$  או  $x < 0$ .
11. א. ינאי צודק. ב.  $(\frac{2}{3};0)$ ,  $(0;0)$ . ג. חיוביות:  $x > \frac{2}{3}$ , שליליות:  $0 < x < \frac{2}{3}$  או  $x < 0$ .  
 ד. (1)  $0 < x < \frac{2}{3}$  או  $x < 0$ . (2)  $x > \frac{2}{3}$ .
12. א. גור צודק. ב.  $(2;0)$ . ג. (1)  $x < 2$ . (2)  $x > 2$ .
13. א.  $x > 1$  או  $x < 0$ . ג. עפר צודק.
14. א.  $(0;0)$ . ב.  $x < 0$ .

# התנהגות של פולינומים עבור $x \rightarrow \infty$ , ו- $x \rightarrow -\infty$

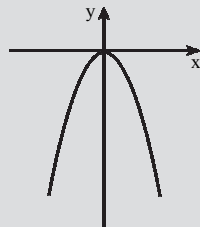
בפרק זה נדון בהתנהגות של פונקציות פולינום כאשר  $x \rightarrow \infty$  וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ . כפי שנראה, כאשר  $x \rightarrow \infty$ , פונקציית הפולינום  $f(x)$  תשאף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ , וגם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , פונקציית הפולינום  $f(x)$  תשאף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .

## התנהגות של פונקציות חזקה עבור $x \rightarrow \infty$ , ו- $x \rightarrow -\infty$

נתבונן תחילה בפונקציית חזקה מהצורה  $f(x) = a \cdot x^n$ , כאשר  $n$  הוא מספר טבעי (מספר חיובי ושלם), ו- $a$  הוא מספר שונה מאפס (כלומר חיובי או שלילי). התנהגות גרף הפונקציה  $f(x) = a \cdot x^n$ , כאשר  $x \rightarrow \infty$  וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ , נקבעת על פי מעריך החזקה  $n$  (שהוא זוגי או אי זוגי) ועל פי המקדם  $a$  (שיכול להיות חיובי או שלילי).

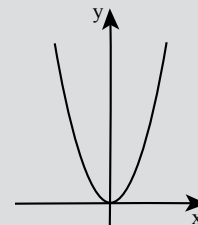
נסכם את ארבע הצורות "האופייניות" של הגרפים של פונקציות מהצורה  $f(x) = a \cdot x^n$ . נרשום על פי הגרפים, למה שואפת הפונקציה  $f(x)$  כאשר  $x \rightarrow \infty$  וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ .

עבור  $n$  זוגי ו- $a$  שלילי



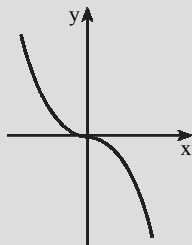
כאשר  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x)$  שואפת ל- $-\infty$   
כאשר  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x)$  שואפת ל- $-\infty$

עבור  $n$  זוגי ו- $a$  חיובי



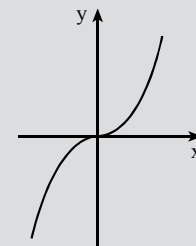
כאשר  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x)$  שואפת ל- $\infty$   
כאשר  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x)$  שואפת ל- $\infty$

עבור  $n$  אי זוגי ו- $a$  שלילי

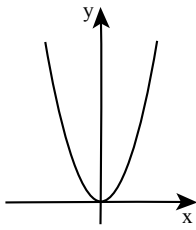


כאשר  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x)$  שואפת ל- $-\infty$   
כאשר  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x)$  שואפת ל- $\infty$

עבור  $n$  אי זוגי ו- $a$  חיובי



כאשר  $x \rightarrow \infty$ ,  $f(x)$  שואפת ל- $\infty$   
כאשר  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x)$  שואפת ל- $-\infty$



1. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = 2 \cdot x^6$ .

א. (1) חשבו את  $f(10)$  ואת  $f(100)$ .

(2) קבעו על פי הגרף האם כאשר  $x \rightarrow +\infty$ ,

ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .

האם תשובתכם תואמת את התוצאות

שקיבלתם בתת סעיף א'(1)?

ב. (1) חשבו את  $f(-10)$  ואת  $f(-100)$ .

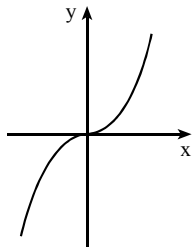
(2) היעזרו בגרף וקבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $-\infty$  או ל- $+\infty$ .

האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ב'(1)?

ג. השלימו: בפונקציה מהצורה  $f(x) = a \cdot x^n$ , כאשר  $n$  הוא זוגי ו- $a$  הוא מספר חיובי:

(1) כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל-\_\_\_\_.

(2) כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל-\_\_\_\_.



2. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = 4 \cdot x^3$ .

א. (1) חשבו את  $f(10)$  ואת  $f(100)$ .

(2) קבעו על פי הגרף האם כאשר  $x \rightarrow +\infty$ ,

ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $+\infty$  או ל- $-\infty$ .

האם תשובתכם תואמת את התוצאות

שקיבלתם בתת סעיף א'(1)?

ב. (1) חשבו את  $f(-10)$  ואת  $f(-100)$ .

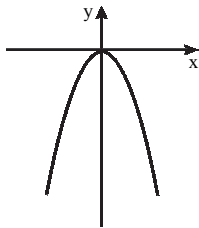
(2) היעזרו בגרף וקבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $-\infty$  או ל- $+\infty$ .

האם תשובתכם תואמת את התוצאות שקיבלתם בתת סעיף ב'(1)?

ג. השלימו: בפונקציה מהצורה  $f(x) = a \cdot x^n$ , כאשר  $n$  הוא אי זוגי ו- $a$  הוא מספר חיובי:

(1) כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל-\_\_\_\_.

(2) כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל-\_\_\_\_.



3. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = -7 \cdot x^4$ .

א. חשבו בעזרת מחשבון את  $f(10)$  ואת  $f(100)$ .

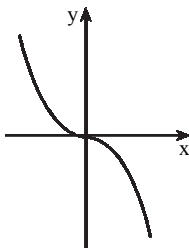
ב. חשבו בעזרת מחשבון את  $f(-10)$  ואת  $f(-100)$ .

ג. היעזרו בגרף והשלימו: בפונקציה מהצורה  $f(x) = a \cdot x^n$ ,

כאשר  $n$  הוא זוגי ו- $a$  הוא מספר שלילי:

(1) כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל-\_\_\_\_.

(2) כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל-\_\_\_\_.



4. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = -0.5 \cdot x^5$ .

א. חשבו בעזרת מחשבון את  $f(10)$  ואת  $f(100)$ .

ב. חשבו בעזרת מחשבון את  $f(-10)$  ואת  $f(-100)$ .

ג. השלימו: בפונקציה מהצורה  $f(x) = a \cdot x^n$ ,

כאשר  $n$  הוא אי זוגי ו- $a$  הוא מספר שלילי:

(1) כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל-\_\_\_\_.

(2) כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל-\_\_\_\_.

## התנהגות של פולינומים כאשר $x \rightarrow \infty$ , וכאשר $x \rightarrow -\infty$

ראינו כי כאשר כופלים פונקציית חזקה במספר קבוע או כאשר מבצעים חיבור או חיסור בין שתי פונקציות חזקה (או יותר), מקבלים פונקציית פולינום.

$$\text{דוגמאות: } f(x) = 2x^5 - 4x^2, \quad g(x) = -x^5 + 8x - 1.$$

מעריך החזקה הגבוה ביותר בפולינום נקרא **מעלת הפולינום**.

דוגמה: הפולינום שמשוואתו  $f(x) = 4x^3 - x$  הוא ממעלה שלישית.

מעלת הפולינום נקבעת על פי המחובר בעל מעריך החזקה הגבוה ביותר בפולינום.

במקרה של  $f(x) = 4x^3 - x$ , המחובר הזה הוא  $4x^3$ .

נהוג לקרוא למחובר זה "האיבר המוביל" או המחובר הדומיננטי של הפולינום.

נרצה לבחון את התנהגות הפולינום כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ .

כפי שנראה, התנהגות הפולינום דומה להתנהגות "האיבר המוביל" של הפולינום.

לדוגמה: בעמוד 38 ראינו שרטוט של הפונקציה  $y = 4x^3$ .

על פי השרטוט, כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה שואף ל- $\infty$ .

כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה שואף ל- $-\infty$ .

לכן, כאשר נתבונן בפונקציה  $f(x) = 4x^3 - x$ , שהאיבר המוביל שלה הוא  $4x^3$ , ההתנהגות שלה כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ , תהיה דומה להתנהגות של  $4x^3$ ,

שהוא האיבר המוביל שלה, ומכאן שהפונקציה  $f(x) = 4x^3 - x$  תתנהג כך:

כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x) = 4x^3 - x$  שואף ל- $\infty$ .

כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x) = 4x^3 - x$  שואף ל- $-\infty$ .

נסביר זאת בקצרה. אם נציב  $x = 100$  בביטוי  $4x^3$ , נקבל  $4 \cdot 100^3 = 4,000,000$ .

אם נציב  $x = 100$  בפונקציה  $f(x) = 4x^3 - x$ ,

$$\text{נקבל } f(100) = 4 \cdot 100^3 - 100 = 4,000,000 - 100 = 3,999,900, \text{ כלומר } f(100) = 3,999,900.$$

מההצבה ברור שכאשר נציב מספרים גדולים, האיבר המוביל יהיה בעל ערך "קיצוני"

(חיובי או שלילי) הרבה יותר מהמחברים האחרים, והוא יקבע את התנהגות הפולינום.

במקרה זה הצבנו  $x = 100$ . אם נציב לדוגמה  $x = 1,000$  או  $x = 10,000$ , נראה באופן מובהק

עוד יותר את הערך הקיצוני שמקבל האיבר המוביל, ולכן כאשר מדברים על  $x \rightarrow +\infty$ ,

או  $x \rightarrow -\infty$ , ניתן להסיק שהתנהגות הפונקציה נקבעת על פי האיבר המוביל.

באופן דומה, הפונקציה  $g(x) = -7x^4 - 9x + 4$  היא פולינום ממעלה רביעית.

האיבר המוביל בפולינום (בעל החזקה הגדולה ביותר) הוא  $-7x^4$ .

לכן, ההתנהגות של הפונקציה  $g(x) = -7x^4 - 9x + 4$ , כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ ,

תהיה דומה להתנהגות של  $-7x^4$ , שהוא האיבר המוביל של  $g(x)$  (והגרף שלו מתואר

בשאלה 3 בעמוד 38). נקבל שהפונקציה  $g(x) = -7x^4 - 9x + 4$  תתנהג כך:

כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , אז ערך הפונקציה  $g(x) = -7x^4 - 9x + 4$  שואף ל- $-\infty$ .

כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $g(x) = -7x^4 - 9x + 4$  שואף ל- $-\infty$ .

נדגיש שהתנהגות הפונקציה כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ , תעזור לנו להבין האם הגרף

חיובי או שלילי כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ , תעזור לנו לבצע התאמה בין משוואות

של פונקציות לגרפים, וגם לשרטט גרפים של פולינומים, אך התנהגות זו לבדה לא תעזור

לנו להבין מה מספר נקודות האפס או נקודות הקיצון של פונקציית הפולינום.

5. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה פונקציית פולינום. ענו על הסעיפים הבאים.

(1) מהו המחובר שבו מעריך החזקה הוא הגדול ביותר?

(כלומר האיבר המוביל של הפולינום)?

(2) האם מעריך החזקה של האיבר המוביל הוא זוגי או אי זוגי?

(3) האם המקדם של האיבר המוביל הוא חיובי או שלילי?

(4) כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , האם ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ ?

(5) כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , האם ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ ?

א.  $f(x) = 2x^4 - 3x$  . ב.  $f(x) = 6x^3 - x$  . ג.  $f(x) = -x^6 + 6x^2 + 1$  . ד.  $f(x) = -0.5x^5 + x^3 - 1$  .

6. נתונה הפונקציה  $f(x) = x^4 - 4x$  .

א. מהו המחובר בעל החזקה הגדולה ביותר בפולינום?

ב. היעזרו בתשובותיכם לסעיף א', וענו על תתי הסעיפים הבאים:

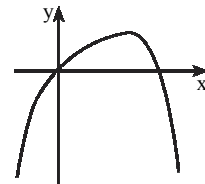
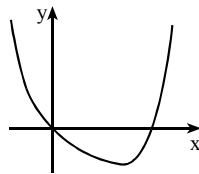
(1) האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$  .

(2) האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$  .

ג. לפניכם שני שרטוטים. אחד מהם מתאים לגרף הפונקציה  $f(x)$  .

קבעו האם הגרף המתאים הוא הימני או השמאלי.

היעזרו בסעיפים קודמים.



7. נתונה הפונקציה  $y = -x^3 + 12x^2 - 45x$  .

א. מהו האיבר הדומיננטי בפונקציית הפולינום הנתונה?

ב. היעזרו בתשובותיכם לסעיף א', וענו על תתי הסעיפים הבאים:

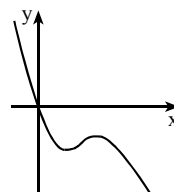
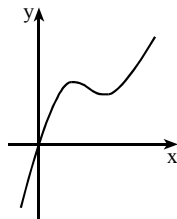
(1) האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$  .

(2) האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$  .

ג. לפניכם שני שרטוטים. אחד מהם מתאים לגרף הפונקציה  $f(x)$  .

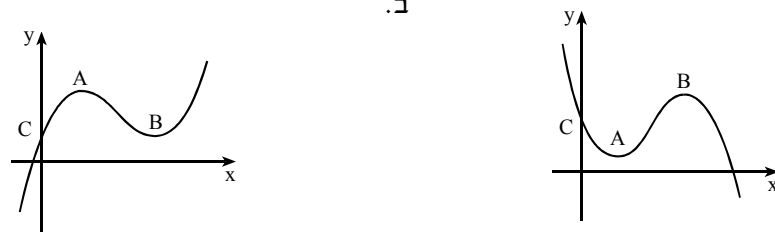
קבעו האם הגרף המתאים הוא הימני או השמאלי.

היעזרו בסעיפים קודמים.



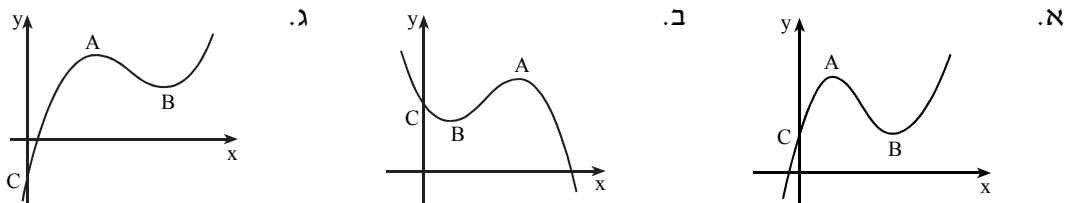


8. נתונות משוואות של שתי פונקציות:  $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10$ ,  $g(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x + 14$ . הגרפים הבאים מתארים, לאו דווקא לפי הסדר, את הפונקציות הנתונות.



- (1) קבעו איזה גרף מתאר כל אחת מהפונקציות הנתונות. הדרכה: התבוננו בכל פונקציה באיבר בעלת מעריך החזקה הגדולה, וקבעו האם המקדם שלו חיובי או שלילי, והאם מעריך החזקה שלו זוגי או אי זוגי. (2) נורית טוענת שלפונקציה ממעלה שלישית יש לפחות נקודת אפס אחת. הסבירו מדוע היא צודקת. האם טענה זו נכונה גם עבור פונקציה ממעלה שנייה?

9. נתונה הפונקציה  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 10$  וכן סקיצות של שלושה גרפים - א', ב' ו-ג'.



- (1) זהו את הגרף המתאר את הפונקציה הנתונה. (2) דליה טוענת שלפונקציה ממעלה שלישית יש לפחות נקודת אפס אחת. הסבירו מדוע היא צודקת. (3) הסבירו מדוע הטענה של דליה נכונה עבור כל פונקציית פולינום ממעלה אי זוגית.

10. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה פונקציית פולינום. ענו על הסעיפים הבאים. (1) מהו האיבר שבו מעריך החזקה הוא הגדול ביותר (האיבר המוביל של הפולינום)? (2) האם מעריך החזקה של האיבר המוביל הוא זוגי או אי זוגי? (3) האם המקדם של האיבר המוביל הוא חיובי או שלילי? (4) כאשר  $x \rightarrow +\infty$ , האם ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ ? (5) כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , האם ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ ?

הערה: כאשר הפונקציה מוצגת באמצעות סוגריים, אין חובה לפתוח את הסוגריים במלואם כדי לזהות את מעלת הפולינום והאיבר המוביל.

- א.  $f(x) = x(x-3)(x+3)$     ב.  $f(x) = -(x^2-9)(x^2-4)$     ג.  $f(x) = x^2(6-x)^2(8-x)$   
 ד.  $f(x) = x(3x-4)^3$     ה.  $f(x) = (x^3-8)^2$     ו.  $f(x) = -(2x^2-1)^4$

11. נתונה הפונקציה  $f(x) = x(2x^2 + 1)$ .
- א. מהו המחומר בעל החזקה הגדולה ביותר בפולינום?
- ב. (1) האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .
- (2) האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .
- ג. לפניכם שני שרטוטים. אחד מהם מתאים לגרף הפונקציה  $f(x)$ . קבעו האם הגרף המתאים הוא הימני או השמאלי. היעזרו בסעיפים קודמים.

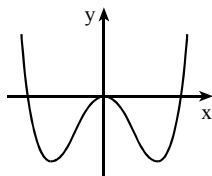


12. נתונה הפונקציה  $y = -x^2(x^2 - 8)$ .
- א. מהו האיבר המוביל של הפולינום?
- ב. היעזרו בתשובותיכם לסעיף א', וענו על תתי הסעיפים הבאים:
- (1) האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .
- (2) האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .
- ג. לפניכם שני שרטוטים. אחד מהם מתאים לגרף הפונקציה  $f(x)$ . קבעו בעזרת סעיפים קודמים האם הגרף המתאים הוא הימני או השמאלי.



13. נתונות משוואות של ארבע פונקציות:  $f(x) = x(x-3)(x+3)$ ,  $g(x) = x^2(x-3)(x+3)$ ,  $h(x) = -x^3(x-3)(x+3)$ ,  $i(x) = x^2(3-x)(3+x)$ .

א. לכל ארבע הפונקציות אותן נקודות אפס. מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.  
 ב. עבור כל אחת מארבע הפונקציות הנתונות, קבעו מהו האיבר המוביל של הפולינום.



- ג. לפניכם גרף של פונקציית פולינום.  
 קבעו עבור הפונקציה שהגרף שלה מתואר:  
 (1) האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .  
 (2) האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .
- ד. קבעו האם במחומר עם מעריך החזקה הגדול ביותר בפונקציה שהגרף שלה מתואר:  
 (1) מעריך החזקה הוא זוגי או אי זוגי. (2) המקדם של חזקה זו הוא חיובי או שלילי.  
 ה. קבעו איזו פונקציה מהפונקציות הנתונות מתוארת על ידי הגרף הנתון. נמקו.  
 ו. נטע טוענת שלפונקציה ממעלה רביעית יש תמיד לפחות נקודת אפס אחת. לעומתה, דליה טוענת שטענתה של נטע נכונה עבור פונקציית פולינום ממעלה אי זוגית, אך לא בהכרח נכונה כאשר מעלת הפולינום היא זוגית. מי מהן צודקת? נמקו.

## תשובות:

1. א. (1)  $f(10) = 2 \cdot 10^6 = 2,000,000$  ,  $f(100) = 2 \cdot 10^{12} = 2,000,000,000,000$  , שואף ל- $+\infty$  , תואמת.  
 ב. (1)  $f(-10) = 2 \cdot (-10)^6 = 2 \cdot 10^6 = 2,000,000$  ,  $f(-100) = 2 \cdot (-10)^{12} = 2 \cdot 10^{12} = 2,000,000,000,000$  , שואף ל- $+\infty$  (2) .  
 ג. (1)  $+\infty$  . (2)  $+\infty$  .
2. א. (1)  $f(10) = 4 \cdot 10^3 = 4,000$  ,  $f(100) = 4 \cdot 100^3 = 4,000,000$  , שואף ל- $+\infty$  , תואמת.  
 ב. (1)  $f(-10) = 4 \cdot (-10)^3 = -4 \cdot 10^3 = -4,000$  ,  $f(-100) = 4 \cdot (-100)^3 = -4,000,000$  , שואף ל- $-\infty$  (2) .  
 ג. (1)  $+\infty$  . (2)  $-\infty$  .
3. א.  $f(10) = -7 \cdot 10^4 = -70,000$  ,  $f(100) = -7 \cdot 100^4 = -7 \cdot 10^8 = -700,000,000$  , שואף ל- $-\infty$  (2) .  
 ב.  $f(-10) = -7 \cdot (-10)^4 = -7 \cdot 10^4 = -70,000$  ,  $f(-100) = -7 \cdot (-100)^4 = -7 \cdot 10^8 = -700,000,000$  , שואף ל- $-\infty$  (2) .
4. א.  $f(10) = -0.5 \cdot 10^5 = -50,000$  ,  $f(100) = -0.5 \cdot 100^5 = -5,000,000,000$  , שואף ל- $-\infty$  (2) .  
 ב.  $f(-10) = -0.5 \cdot (-10)^5 = -0.5 \cdot (-10^5) = 50,000$  ,  $f(-100) = -0.5 \cdot (-100)^5 = 5,000,000,000$  , שואף ל- $+\infty$  (2) .  
 ג. (1)  $-\infty$  . (2)  $+\infty$  .
5. א. (1)  $2x^4$  . (2) זוגי . (3) חיובי . (4) שואף ל- $+\infty$  . (5) שואף ל- $+\infty$  .  
 ב. (1)  $6x^3$  . (2) אי זוגי . (3) חיובי . (4) שואף ל- $+\infty$  . (5) שואף ל- $+\infty$  .  
 ג. (1)  $-x^6$  . (2) זוגי . (3) שלילי . (4) שואף ל- $-\infty$  . (5) שואף ל- $-\infty$  .  
 ד. (1)  $-0.5x^5$  . (2) אי זוגי . (3) שלילי . (4) שואף ל- $-\infty$  . (5) שואף ל- $-\infty$  .
6. א.  $x^4$  . ב. (1) שואף ל- $+\infty$  . (2) שואף ל- $+\infty$  . ג. הגרף המתאים הוא השמאלי.
7. א.  $-x^3$  . ב. (1) שואף ל- $-\infty$  . (2) שואף ל- $+\infty$  . ג. הגרף המתאים הוא הימני.
8. (1) גרף אי מתאר את הפונקציה  $g(x)$  , גרף ב' מתאר את הפונקציה  $f(x)$  .  
 (2) נורית צודקת. הטענה נכונה עבור כל פונקציית פולינום ממעלה אי זוגית, אך אינה נכונה לפונקציה ריבועית שהיא פונקציה ממעלה זוגית ויכולות להיות לה שתי נקודות אפס, או נקודת אפס אחת, או שאין לה כלל נקודות אפס.
9. (1) גרף א' מתאר את הפונקציה הנתונה. (2) דליה צודקת.
10. א. (1)  $x^3$  . (2) אי זוגי . (3) חיובי . (4) שואף ל- $+\infty$  . (5) שואף ל- $+\infty$  .  
 ב. (1)  $-x^4$  . (2) זוגי . (3) שלילי . (4) שואף ל- $-\infty$  . (5) שואף ל- $-\infty$  .  
 ג. (1)  $-x^5$  . (2) אי זוגי . (3) שלילי . (4) שואף ל- $-\infty$  . (5) שואף ל- $+\infty$  .  
 ד. (1)  $27x^4$  . (2) זוגי . (3) חיובי . (4) שואף ל- $+\infty$  . (5) שואף ל- $+\infty$  .  
 ה. (1)  $x^6$  . (2) זוגי . (3) חיובי . (4) שואף ל- $+\infty$  . (5) שואף ל- $+\infty$  .  
 ו. (1)  $-16x^8$  . (2) זוגי . (3) שלילי . (4) שואף ל- $-\infty$  . (5) שואף ל- $-\infty$  .
11. א.  $2x^3$  . ב. (1) שואף ל- $+\infty$  . (2) שואף ל- $+\infty$  . ג. הגרף המתאים הוא השמאלי.
12. א.  $-x^4$  . ב. (1) שואף ל- $-\infty$  . (2) שואף ל- $+\infty$  . ג. הגרף המתאים הוא הימני.
13. א.  $(-3;0)$  ,  $(0;0)$  ,  $(3;0)$  . ב.  $f(x) : x^3$  ,  $g(x) : x^4$  ,  $h(x) : -x^5$  ,  $i(x) : -x^4$  .  
 ג. (1) שואף ל- $+\infty$  . (2) שואף ל- $+\infty$  . ד. (1) זוגי . (2) חיובי . ה.  $g(x)$  . ו. דליה צודקת.

# התנהגות של פונקציית פולינום בסביבת

## נקודות האפס שלה

נדון עכשיו בעיקר בפונקציות פולינום המוצגות על ידי מכפלה בין גורמים לינאריים.

כלומר מכפלה בין גורמים ממעלה ראשונה. לדוגמה:  $f(x) = x(x+4)(x-6)$ .

במקרים מסוימים, חלק מהגורמים הלינאריים עולים בחזקה שגדולה מ-1.

לדוגמה:  $h(x) = (x-7)^2(x-9)^3$ ,  $g(x) = (x+3)(x-5)^2$ .

נראה כיצד מוצאים את נקודות האפס של פונקציית "מכפלה" כזו, ונבדוק בין היתר האם היא מחליפה סימן משני צדי נקודת האפס (מחיובי לשלילי, או להיפך), או לא מחליפה סימן.

ראינו בעבר שניתן לעשות זאת על ידי הצבת ערכי  $x$  משני צדי נקודת האפס.

כך למעשה מצאנו תחומי חיוביות ושליליות.

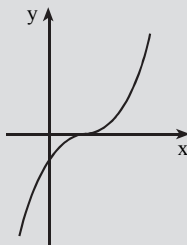
**כעת נראה שבחלק מהמקרים ניתן לעשות זאת בדרך קצרה יותר,**

באמצעות זיהוי החזקה שבה מעלים כל אחד מהגורמים הלינאריים של המכפלה.

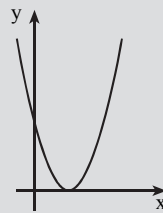
כהקדמה להסבר זה נתבונן בשלוש הפונקציות הבאות:  $y = x - 1$ ,  $y = (x - 1)^2$ ,  $y = (x - 1)^3$ .

נשרטט את הפונקציות בעזרת טבלת ערכים (לא נפרט על כך).

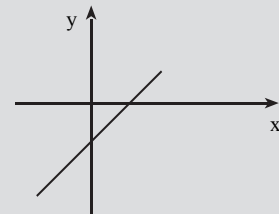
$$y = (x - 1)^3$$



$$y = (x - 1)^2$$



$$y = x - 1$$



לשלוש הפונקציות הללו יש אותה נקודת אפס ששיעוריה  $(1; 0)$ .

הבסיס של שלושתן הוא  $(x - 1)$ , וכאשר הוא מתאפס מתקבלת נקודת האפס  $(1; 0)$ .

בפונקציה  $y = x - 1$ , שבה הביטוי  $(x - 1)$  עולה בחזקת 1, הפונקציה מחליפה סימן משני צדי נקודת האפס  $(1; 0)$ . ניתן לראות זאת בציור. ואפשר גם להציב ערכי  $x$  משני צדי נקודת האפס,

ולהבין שהביטוי  $(x - 1)$  מחליף סימן בנקודה שבה  $x = 1$ .

מבחינה גרפית, בנקודת האפס הפונקציה "חותכת" את ציר ה- $x$ .

בפונקציה  $y = (x - 1)^2$ , שבה הביטוי  $(x - 1)$  עולה בחזקת 2, הפונקציה אינה מחליפה סימן משני צדי נקודת האפס  $(1; 0)$ . ניתן לראות זאת בציור. אפשר גם להציב לבדיקה ערכי  $x$

משני צדי נקודת האפס, ולהבין שהביטוי  $(x - 1)^2$  אינו מחליף סימן בנקודה שבה  $x = 1$ .

מבחינה גרפית, בנקודת האפס לפונקציה יש נקודת קיצון (במקרה זה מינימום),

והגרף משיק לציר ה- $x$  בנקודה זו.

בפונקציה  $y = (x - 1)^3$ , שבה הביטוי  $(x - 1)$  עולה בחזקת 3, הפונקציה מחליפה סימן משני צדי נקודת האפס  $(1; 0)$ . ניתן לראות זאת בציור. ואפשר גם להציב לבדיקה ערכי  $x$

משני צדי נקודת האפס, ולהבין שהביטוי  $(x - 1)^3$  מחליף סימן בנקודה שבה  $x = 1$ .

בנקודת האפס הפונקציה נראית בצורה של "מגלשה" לגבי מצב זה נרחיב בהמשך.

התוצאות שקיבלנו אינן מקריות. **נסכם אותן באופן הבא:**

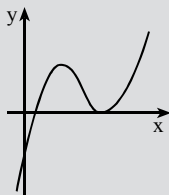
- (1) ביטוי ממעלה ראשונה מחליף סימן בנקודת האפס. מבחינה גרפית, נקודת המפגש שלו עם ציר ה- $x$  היא נקודת "חיתוך", בדומה למה שראינו בדוגמה עבור  $y = x - 1$ .
- (2) ביטוי ממעלה ראשונה שמועלה בחזקה זוגית, אינו מחליף סימן בנקודת האפס, בדומה למה שראינו בדוגמה עבור  $y = (x - 1)^2$ , ונקודת המפגש שלו עם ציר ה- $x$  היא נקודת מינימום או מקסימום של הפונקציה. הגרף "משיק" לציר ה- $x$  בנקודת האפס. הערה: גם גרף הפונקציה  $y = (x - 1)^4$  נראה דומה.
- (3) ביטוי ממעלה ראשונה שמועלה בחזקה אי זוגית שאינה 1, מחליף סימן בנקודת האפס, בדומה למה שראינו בדוגמה עבור  $y = (x - 1)^3$ , ונקודת המפגש שלו עם ציר ה- $x$  היא בצורה של "מגלשה". הערה: גם גרף הפונקציה  $y = (x - 1)^5$  נראה דומה.

נחזור לדון בפונקציית פולינום המוצגת כמכפלה בין גורמים לינאריים.

נבדוק האם היא **מחליפה סימן** משני צדי נקודת האפס (מחיובי לשלילי, או להיפך),

או **לא מחליפה סימן**.

מבחינה גרפית, נראה האם הגרף חותך את ציר ה- $x$ , או שבנקודת האפס מתקבל מינימום או מקסימום, או שהגרף נראה בצורת "מגלשה", על פי המעלה שבה מועלה הגורם הלינארי.



נתבונן בגרף הפונקציה  $f(x) = (x - 1)(x - 6)^2$ , המתואר משמאל.

הגורמים הלינאריים של המכפלה הם  $(x - 1)$  ו- $(x - 6)$ .

כאשר הגורם הלינארי  $(x - 1)$  מתאפס, מתקבלת נקודת האפס  $(1; 0)$ .

כאשר הגורם הלינארי  $(x - 6)$  מתאפס, מתקבלת נקודת האפס  $(6; 0)$ .

אם ננוע על הגרף משמאל לימין, נראה שבנקודת האפס השמאלית,

שהיא  $(1; 0)$ , הפונקציה הופכת משלילית לחיובית, כלומר **משנה סימן** משני צדי נקודת האפס.

הסיבה לכך היא שהגורם המאפס  $(x - 1)$  מועלה בחזקת 1, ולכן משנה את סימנו משני צדי

הנקודה. לעומת זאת, בנקודת האפס הימנית, שהיא  $(6; 0)$ , הפונקציה **אינה משנה סימן**

משני צדי הנקודה, והיא חיובית מימין וגם משמאל לנקודה. אפשר לבדוק זאת גם על ידי הצבת ערכי  $x$  משני צדי נקודת האפס.

הסיבה לכך היא שבפונקציה  $f(x) = (x - 1)(x - 6)^2$ , הגורם המאפס  $(x - 6)$  מועלה בפונקציה

בחזקת 2, שהיא חזקה זוגית, וביטוי כזה אינו משנה את סימנו משני צדי נקודת האפס.

מבחינה גרפית, ראינו שבמקרה כזה מתקבלת בנקודת האפס נקודת קיצון. כאן קיבלנו מינימום, אבל במקרים אחרים של מכפלה שאחד הגורמים שלה הוא  $(x - 6)^2$ , יכול להתקבל גם מקסימום.

נזכיר שכאשר ננתח התנהגות של פולינומים, ניעזר גם בכלים הקודמים שהכרנו. לדוגמה:

(1) הצבת ערכי  $x$  משני צדי נקודת האפס, כדי למצוא תחומי חיוביות ושליליות.

(2) הכרת התנהגות של פונקציית פולינום כאשר  $x \rightarrow \infty$  וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ .

**נסכם:** במבט מהיר על משוואת הפונקציה  $f(x) = (x - 1)(x - 6)^2$ , אפשר להבין שעבור  $x = 1$

מתקבלת נקודת אפס שהיא "חיתוך", ועבור  $x = 6$  מתקבלת נקודת אפס שהיא נקודת מינימום

או מקסימום. כמו כן, האיבר המוביל בפונקציה הוא  $x^3$ , ואפשר להסיק מכך את התנהגות

הפונקציה כאשר  $x \rightarrow \infty$  וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ . על פי ניתוח כזה אפשר כבר לשרטט גרף אפשרי

של הפונקציה. ואפשר גם לבצע הצבות כדי להגדיל את הביטחון שלנו בניתוח הפונקציה.

## תרגילים

1. נתונה הפונקציה  $f(x) = x(x-8)^2$ .

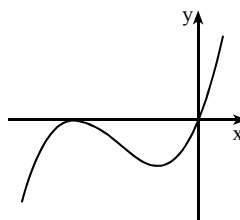
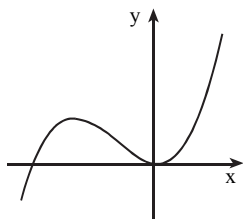
- א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.  
ב. קבעו עבור כל נקודת אפס שמצאתם בסעיף א', האם הפונקציה משנה את סימנה משני צדי הנקודה, או שהפונקציה אינה משנה את סימנה משני צדי הנקודה (ואז הנקודה היא נקודת קיצון של הפונקציה, וגרף הפונקציה משיק בנקודה זו לציר ה- $x$ ).  
הדרכה: הציבו ערכי  $x$  משני צדי כל נקודת אפס, ובדקו את סימן הפונקציה.  
ג. יוגב טוען שאפשר לפתור את סעיף ב' ללא הצבות, אלא על ידי התבוננות במשוואת הפונקציה, ובדיקה האם הגורם הלינארי מועלה בחזקה זוגית או בחזקה אי זוגית. האם יוגב צודק?  
ד. בחרו את התשובה הנכונה על פי גישתו של יוגב:  
(1) נקודת האפס  $(0;0)$  היא נקודת חיתוך/השקה.  
(2) נקודת האפס  $(8;0)$  היא נקודת חיתוך/השקה.

2. נתונה הפונקציה  $f(x) = -(x+2)(x+5)^2$ .

- א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.  
ב. קבעו עבור כל נקודת אפס שמצאתם בסעיף א', האם הפונקציה משנה את סימנה משני צדי הנקודה, או שהפונקציה אינה משנה את סימנה משני צדי הנקודה (ואז הנקודה היא נקודת קיצון של הפונקציה, וגרף הפונקציה משיק בנקודה זו לציר ה- $x$ ).  
פתרו בשתי דרכים, ובדקו שקיבלתם אותה התשובה בשתיהן.  
דרך א': הציבו ערכי  $x$  משני צדי כל נקודת אפס, ובדקו את סימן הפונקציה.  
דרך ב': התבוננו במשוואת הפונקציה, ובדקו עבור כל גורם לינארי, האם הוא מועלה בחזקה זוגית או בחזקה אי זוגית.

3. נתונה הפונקציה  $f(x) = x(x+3)^2$ .

- א. (1) מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.  
(2) קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ , או שהיא נקודת קיצון של הפונקציה (שהגרף משיק בה לציר ה- $x$ ).  
פתרו רק על סמך התבוננות במשוואת הפונקציה. אין צורך בחישובים.  
ב. לפניכם גרפים של שתי פונקציות.  
היעזרו בתשובותיכם לסעיפים קודמים, וקבעו איזו פונקציה מהפונקציות הנתונות מתוארת על ידי הגרף הנתון, הימנית או השמאלית. נמקו.



4. נתונה הפונקציה  $f(x) = -(x-1)(x-7)^2$ .

א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

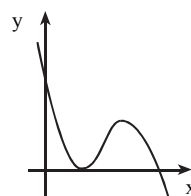
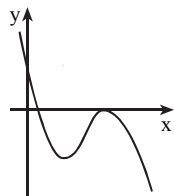
ב. קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ ,

או שהיא נקודת קיצון של הפונקציה (שבה גרף הפונקציה משיק לציר ה- $x$ ).

פתרו רק על סמך התבוננות במשוואת הפונקציה. אין צורך בחישובים.

ג. לפניכם גרפים של שתי פונקציות. היעזרו בתשובותיכם לסעיפים קודמים,

וקבעו איזה גרף מתאר את הפונקציה הנתונה. נמקו.



ג. פתרו את אי השוויונות הבאים: (1)  $-(x-1)(x-7)^2 \leq 0$  (2)  $-(x-1)(x-7)^2 \geq 0$ .

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-1)(x+8)^4$ .

א. מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

ב. קבעו עבור כל נקודת אפס שמצאתם בסעיף א', האם הפונקציה משנה את סימנה משני

צדי הנקודה, או שהפונקציה אינה משנה את סימנה משני צדי הנקודה (ואז הנקודה

היא נקודת קיצון של הפונקציה, וגרף הפונקציה משיק בנקודה זו לציר ה- $x$ ).

פתרו רק על סמך התבוננות במשוואת הפונקציה. אין צורך בחישובים.

ג. הציבו ערכי  $x$  משני צדי נקודת ההשקה שמצאתם בסעיף ב', והראו שלפונקציה

יש אותו סימן משני צדי הנקודה.

קבעו על סמך ההצבה האם נקודת האפס היא מינימום או מקסימום.

6. נתונות משוואות של שתי פונקציות:  $f(x) = (x+1)(x+5)^4$ ,  $g(x) = (x+1)^4(x+5)$ .

א. (1) מצאו את נקודות האפס של כל פונקציה.

(2) קבעו עבור כל נקודת אפס שמצאתם בסעיף א',

האם היא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ ,

או שהיא נקודת קיצון של הפונקציה

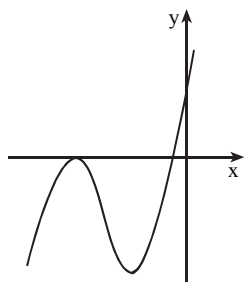
(שבה גרף הפונקציה משיק לציר ה- $x$ ).

ב. בשרטוט שמשמאל מתואר גרף של פונקציה.

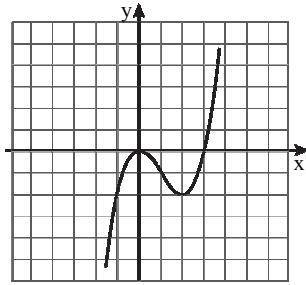
היעזרו בתשובותיכם לסעיפים קודמים, וקבעו אילו

מהפונקציות הנתונות מתוארת על ידי הגרף הנתון. נמקו.

ג. מצאו לאילו ערכי  $x$  מתקיים  $f(x) < 0$ .



7. בשרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה. כל משבצת היא יחידה אחת.



א. (1) מהם שיעורי נקודות האפס של הגרף הנתון?

(2) קבעו עבור כל נקודת אפס שבגרף הנתון,

האם היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- $x$ ,

או שהיא נקודת קיצון של הפונקציה

(שבה גרף הפונקציה משיק לציר ה- $x$ ).

ב. נתונים שני ייצוגים אלגבריים:

$$g(x) = \frac{1}{2}x(x-3), f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-3)$$

אחד הייצוגים מתאים לגרף הנתון.

קבעו איזה ייצוג אלגברי מתאים לגרף הנתון.

ג. ורד טוענת שעל פי התנהגות הגרף הנתון כאשר  $x \rightarrow \infty$ , וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ ,

אפשר לקבוע שהאיבר המוביל בייצוג האלגברי חייב להיות בעל מעריך חזקה אי זוגי,

והמקדם שלו בוודאות חיובי, ולכן אפשר להסיק שהייצוג האלגברי המתאים הוא של  $f(x)$ .

האם היא צודקת? נמקו.

ד. היעזרו בציור, וקבעו כמה פתרונות יש למשוואות הבאות:

$$(1) \frac{1}{2}x^2(x-3)=1 \quad (2) x^2(x-3)=-1$$

8. בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של פונקציית פולינום.

(1) מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.

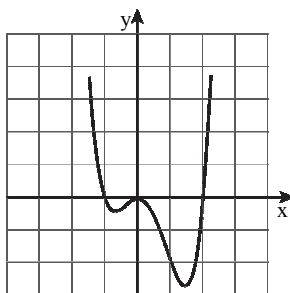
(2) קבעו עבור כל נקודת אפס שמצאתם בסעיף א', האם הפונקציה משנה את סימנה משני

צדי הנקודה, או שהפונקציה אינה משנה את סימנה משני צדי הנקודה (ואז הנקודה

היא נקודת קיצון של הפונקציה, וגרף הפונקציה משיק בנקודה זו לציר ה- $x$ ).

פתרו **רק** על סמך התבוננות במשוואת הפונקציה. אין צורך בחישובים.

א.  $f(x) = x^2(x+4)(x-3)$     ב.  $f(x) = (x-6)^2(x-4)^2(x-2)$     ג.  $f(x) = x^2(x-2)^2$



9. בשרטוט שלפניכם נתון גרף של פונקציה.

כל משבצת היא יחידה אחת.

נתונים שני ייצוגים אלגבריים:

$$g(x) = x^2(x+1)(x-2), f(x) = x(x+1)(x-2)$$

אחד הייצוגים מתאים לגרף הנתון.

א. מצאו את שיעורי נקודות האפס

של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .

ב. קבעו איזה ייצוג אלגברי מתאים

לגרף הנתון. פתרו בשתי דרכים:

דרך א': התייחסו להתנהגות הגרף הנתון כאשר  $x \rightarrow \infty$ , וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ ,

ולמעלת כל אחד מהייצוגים האלגבריים הנתונים.

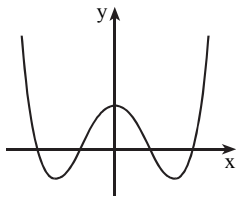
דרך ב': שימו לב שהנקודה  $(0;0)$  היא נקודת השקה ולא נקודת חיתוך.

ג. כמה פתרונות יש למשוואה  $2 \cdot g(x) + 2 = 0$ .

ד. כמה פתרונות יש למשוואה  $g^2(x) + g(x) - 2 = 0$ .



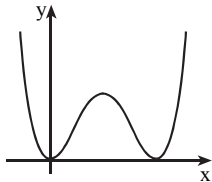
10. נתונות שתי פונקציות:  $f(x) = (x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$ ,  $g(x) = (x-2)^2(x-1)(x+1)(x+2)^2$ .



- א. מצאו את נקודות האפס של כל פונקציה.  
 קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ , או שהיא נקודת קיצון (שבה גרף הפונקציה משיק לציר ה- $x$ ).  
 ב. לפניכם גרף של פונקציה.  
 היעזרו בתשובותיכם לסעיפים קודמים, וקבעו איזו פונקציה מהפונקציות הנתונות מתוארת על ידי הגרף הנתון. נמקו.  
 ג. כתבו את תחומי החיוביות ותחומי השליליות של הגרף הנתון.

11. נתונות משוואות של ארבע פונקציות:  $f(x) = x^2(x-2)$ ,  $g(x) = x(2-x)^2$

$$i(x) = -x^2(x-2)^2, h(x) = x^2(x-2)^2$$



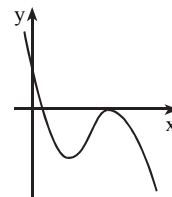
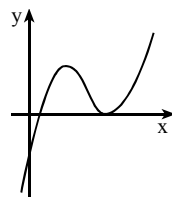
- א. לכל ארבע הפונקציות יש אותן נקודות אפס. מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.  
 ב. לפניכם גרף של פונקציה, המתאים לאחת המשוואות הנתונות. התבוננו בגרף, וקבעו איזו משוואה הוא מתאר.  
 פתרו בשתי דרכים:  
 דרך א': התייחסו לכך שעל פי הגרף שתי נקודות האפס הן נקודות קיצון של הפונקציה (ושבהן הגרף משיק לציר ה- $x$ ).  
 דרך ב': התייחסו להתנהגות הגרף הנתון כאשר  $x \rightarrow \infty$ , וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ , ולמעלה של כל אחד מהייצוגים האלגבריים הנתונים.

12. נתונות משוואות של ארבע פונקציות:

$$f(x) = (x-1)(x-4)^2, g(x) = (x-1)^2(x-4)$$

$$h(x) = -(x-1)^2(x-4), i(x) = -(x-1)(x-4)^2$$

- א. לכל ארבע הפונקציות יש אותן נקודות אפס. מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.  
 לפניכם שני גרפים (1) ו-(2), המתאימים לשתיים מהפונקציות.

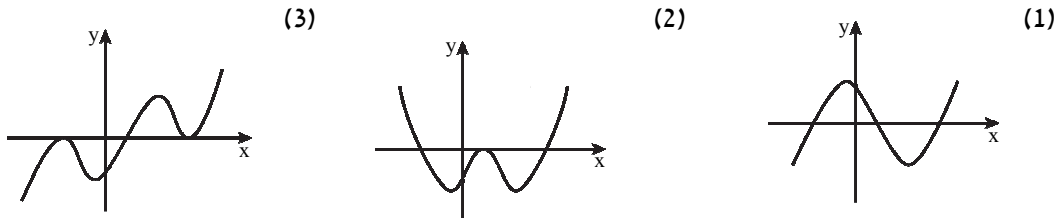


- ב. התייחסו לכך שאחת מנקודות האפס היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- $x$ , והאחרת היא נקודת קיצון של הפונקציה (נקודת השקה של הגרף עם ציר ה- $x$ ), וקבעו אילו שתי משוואות יכולות להתאים לגרפים הנתונים.  
 ג. התייחסו להתנהגות הגרפים ומשוואות הפונקציות כאשר  $x \rightarrow \infty$ , וכאשר  $x \rightarrow -\infty$ , והתאימו לכל אחד מהגרפים את משוואת הפונקציה אותה הוא מתאר.

13. נתונות משוואות של שלוש פונקציות :

$$h(x) = (x-4)(x-1)^2(x+2), \quad g(x) = (x-4)(x-1)(x+2), \quad f(x) = (x-4)^2(x-1)(x+2)^2$$

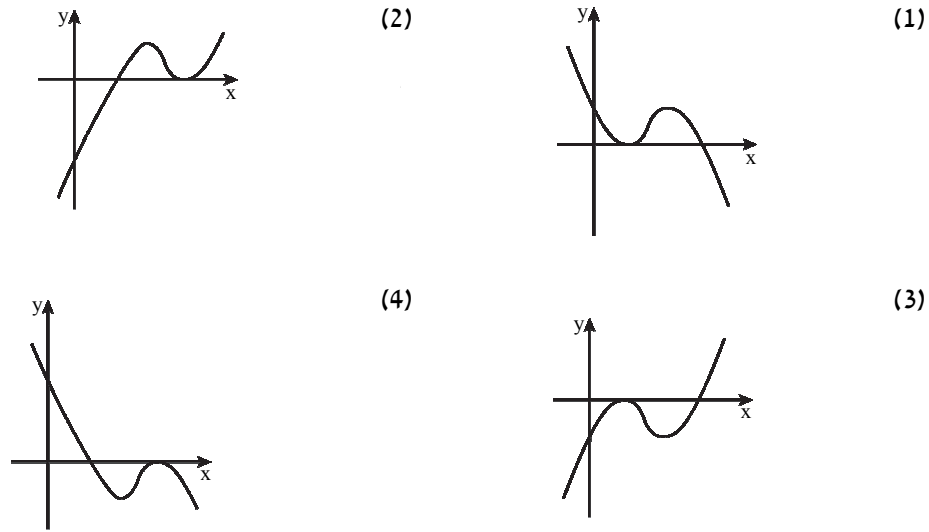
- א. לכל שלוש הפונקציות יש אותן נקודות אפס. מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.  
 ב. לפניכם שלושה גרפים (1), (2) ו-(3). כל אחד מהם מתאים לאחת מהפונקציות. קבעו עבור כל גרף לאיזו משוואת פונקציה הוא מתאים.



14. נתונות משוואות של ארבע פונקציות :

$$i(x) = -(x-6)(x-2)^2, \quad h(x) = (x-6)(2-x)^2, \quad g(x) = (x-6)^2(2-x), \quad f(x) = (x-6)^2(x-2)$$

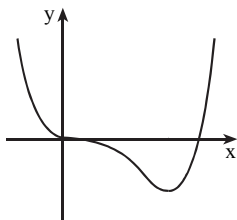
- א. לכל ארבע הפונקציות יש אותן נקודות אפס. מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.  
 ב. לפניכם ארבעה גרפים (1), (2), (3) ו-(4). כל אחד מהם מתאים לאחת מהפונקציות. קבעו עבור כל גרף לאיזו משוואת פונקציה הוא מתאים.

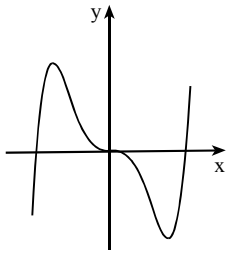


15. נתונות משוואות של שלוש פונקציות :

$$h(x) = x^3(3x-2)^3, \quad g(x) = x^3(3x-2), \quad f(x) = x(3x-2)^3$$

- א. לכל שלוש הפונקציות יש אותן נקודות אפס. מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.  
 ב. לפניכם גרף של פונקציה. הגרף מתאר את אחת הפונקציות הנתונות. קבעו איזו פונקציה הוא מתאר.





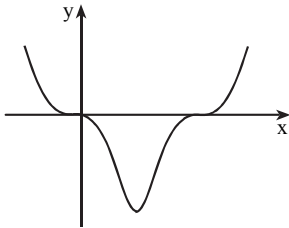
16. נתונות משוואות של ארבע פונקציות :

$$f(x) = x^2(x-2)(x+2), \quad g(x) = x(x-2)(x+2)$$

$$h(x) = x^3(2-x)(2+x), \quad i(x) = x^3(x-2)(x+2)$$

א. לכל ארבע הפונקציות יש אותן נקודות אפס.  
מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.  
ב. לפניכם גרף של פונקציה.

נקודות האפס של הגרף הן נקודות האפס שמצאתם בסעיף א'.  
קבעו איזו משוואה מתאימה לגרף המתואר.  
התייחסו לכך שבנקודת האפס שבראשית הצירים, הפונקציה מחליפה סימן,  
אבל נקודת החיתוך היא בצורת "מגלשה".



17. נתונות משוואות של ארבע פונקציות :

$$f(x) = -x^3(x-6)^3, \quad g(x) = x^3(x-6)^3$$

$$h(x) = x^3(x-6), \quad i(x) = x(x-6)^3$$

א. לכל ארבע הפונקציות יש אותן נקודות אפס.  
מצאו את שיעורי נקודות האפס הללו.  
ב. לפניכם גרף של פונקציה.

נקודות האפס של הגרף הן נקודות האפס שמצאתם בסעיף א'.  
קבעו איזו משוואה מתאימה לגרף המתואר.

הדרכה: התייחסו לכך ששתיים מנקודות האפס של הגרף המתואר הן נקודות שבהן הפונקציה משנה את סימנה משני צדי הנקודה, וצורת הגרף בסביבת נקודת האפס היא צורה של "מגלשה".

18. נתונה הפונקציה  $f(x) = (x-3)(x-7)(x+1)$ .

- א. אריאל טוען שהפונקציה היא ממעלה שלישית, ולכן אפשר לדעת ללא חישובים שיש לה לכל היותר שלוש נקודות אפס. האם הוא צודק? נמקו.
- ב. (1) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.  
(2) קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- $x$ , או נקודת השקה של הגרף עם ציר ה- $x$  (נקודת קיצון של הפונקציה).
- ג. (1) קבעו האם כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .  
(2) קבעו האם כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז ערך הפונקציה  $f(x)$  שואף ל- $\infty$  או ל- $-\infty$ .
- ד. שרטטו על סמך סעיפים קודמים גרף אפשרי של הפונקציה  $f(x)$ .
- ה. על סמך מספר נקודות האפס של הפונקציה, נורית טוענת שיש לפונקציה לפחות שתי נקודות קיצון. האם היא צודקת? נמקו.
- ו. נתון כי לפונקציה יש בדיוק שתי נקודות קיצון.  
כתבו את התחום שבו נמצא שיעור ה- $x$  של נקודת המינימום,  
ואת התחום שבו נמצא שיעור ה- $x$  של נקודת המקסימום.

19. נתונה הפונקציה  $f(x) = -2x(x-6)^2$ .  
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. על סמך מעלת הפולינום, ינאי טוען שיש לפונקציה לכל היותר שלוש נקודות אפס. האם הוא צודק? נמקו.  
 ג. (1) מצאו את נקודות האפס של הפונקציה.  
 (2) קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- $x$ , או נקודת קיצון של הפונקציה (שבה הגרף משיק לציר ה- $x$ ).  
 ד. על סמך מספר נקודות האפס של הפונקציה, רועי טוען שיש לפונקציה לפחות שתי נקודות קיצון. האם הוא צודק? נמקו.  
 ה. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה, אם נתון שיש לפונקציה שתי נקודות קיצון.

20. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{1}{125}(x-1)(x-5)^4$ .  
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. (1) מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.  
 (2) קבעו עבור כל נקודת אפס, האם היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- $x$ , או נקודת השקה של הגרף עם ציר ה- $x$  (נקודת קיצון של הפונקציה).  
 ג. שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה, אם נתון שיש לפונקציה שתי נקודות קיצון.

### תשובות:

1. א.  $(0;0)$ ,  $(8;0)$ . ב.  $(0;0)$  - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.  
 ג. יוגב צודק. ד.  $(0;0)$  היא נקודת חיתוך,  $(8;0)$  היא נקודת השקה (קיצון).  
 2. א.  $(-2;0)$ ,  $(-5;0)$ . ב.  $(-2;0)$  - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.  
 ג.  $(-5;0)$  - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת קיצון (השקה).  
 3. א. (1)  $(0;0)$ ,  $(-3;0)$ . (2)  $(0;0)$  נקודת חיתוך,  $(-3;0)$  נקודת השקה (קיצון). ב. הימנית.  
 4. א. (1)  $(1;0)$ ,  $(7;0)$ . (2)  $(1;0)$  נקודת חיתוך,  $(7;0)$  נקודת קיצון. ב. הגרף השמאלי.  
 ג. (1)  $x \geq 1$ . (2)  $x \leq 1$ .  
 5. א.  $(1;0)$ ,  $(-8;0)$ . ב.  $(1;0)$  - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.  
 ג.  $(-8;0)$  - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת קיצון (השקה). ג. מקסימום.  
 6. א. (1)  $(-1;0)$ ,  $(-5;0)$ . (2)  $(-1;0)$  נקודת חיתוך,  $(-5;0)$  נקודת קיצון. ב.  $f(x)$ .  
 ג.  $-5 < x < -1$  או  $x < -5$ .  
 7. א. (1)  $(0;0)$ ,  $(3;0)$ . (2)  $(0;0)$  נקודת קיצון,  $(3;0)$  נקודת חיתוך. ב.  $f(x)$ .  
 ג. כן, ורד צודקת. ד. (1) פתרון אחד. (2) שלושה פתרונות.  
 8. א. (1)  $(3;0)$ ,  $(0;0)$ ,  $(-4;0)$ . (2)  $(3;0)$  - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.  
 ג.  $(0;0)$  - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת השקה (קיצון).  
 ג.  $(-4;0)$  - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.  
 ב. (1)  $(6;0)$ ,  $(4;0)$ ,  $(2;0)$ . (2)  $(6;0)$  - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת השקה (קיצון).  
 ג.  $(4;0)$  - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת השקה (קיצון).

(2;0) - הפונקציה משנה סימן, נקודת חיתוך.

ג. (1) (0;0), (2;0). (2) (0;0) - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת השקה (קיצון).

(2;0) - הפונקציה אינה משנה סימן, נקודת השקה (קיצון).

9. א.  $f(x)$ : (2;0), (0;0), (-1;0).  $g(x)$ : (2;0), (0;0), (-1;0). ב.  $g(x)$ .

ג. שני פתרונות. ד. ארבעה פתרונות.

10. א.  $f(x)$ : (2;0) נקודת חיתוך, (1;0) נקודת חיתוך, (-1;0) נקודת חיתוך, (-2;0) נקודת חיתוך.

$g(x)$ : (2;0) נקודת קיצון, (1;0) נקודת חיתוך, (-1;0) נקודת חיתוך, (-2;0) נקודת קיצון.

ב.  $f(x)$ . ג. חיוביות:  $x > 2$  או  $-1 < x < 1$  או  $x < -2$ . שליליות:  $1 < x < 2$  או  $-2 < x < -1$ .

11. א. (2;0), (0;0). ב.  $h(x)$ .

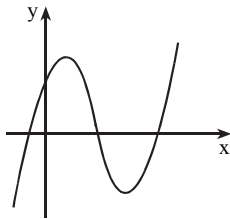
12. א. (4;0), (1;0). ב.  $f(x)$ ,  $i(x)$ . ג. גרף (1) -  $i(x)$ , גרף (2) -  $f(x)$ .

13. א. (4;0), (1;0), (-2;0). ב. גרף (1) -  $g(x)$ , גרף (2) -  $h(x)$ , גרף (3) -  $f(x)$ .

14. א. (6;0), (2;0). ב. גרף (1) -  $i(x)$ , גרף (2) -  $f(x)$ , גרף (3) -  $h(x)$ , גרף (4) -  $g(x)$ .

15. א. (0;0), ( $\frac{2}{3}$ ;0). ב.  $g(x)$ . 16. א. (2;0), (0;0), (-2;0). ב.  $i(x)$ . 17. א. (6;0), (0;0). ב.  $g(x)$ .

18. א. אריאל צודק. ד.



ב. (1) (-1;0), (3;0), (7;0).

(2) - נקודת חיתוך. (-1;0)

(3) - נקודת חיתוך.

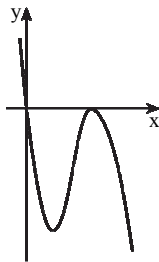
(7;0) - נקודת חיתוך.

ג. (1) שואף ל- $\infty$ . (2) שואף ל- $-\infty$ . ה. כן, נורית צודקת.

ו. שיעור ה- $x$  של נקודת המינימום מקיים  $3 < x < 7$ .

ז. שיעור ה- $x$  של נקודת המקסימום מקיים  $-1 < x < 3$ .

19. א. כל  $x$ . ב. כן, ינאי צודק. ה.

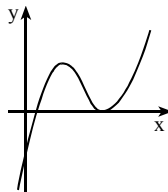


ג. (1) (0;0), (6;0).

(2) (0;0) - נקודת חיתוך, (6;0) - נקודת קיצון (השקה).

ד. כן, רועי צודק.

20. א. כל  $x$ . ג.



ב. (1) (1;0), (5;0).

(2) (1;0) - נקודת חיתוך,

(5;0) - נקודת קיצון (השקה).

# בניית משוואת פונקציית פולינום על פי נקודות האפס שלה

1. לפניכם פונקציית פולינום ממעלה שלישית:  $f(x) = (x-1)(x-3)(x+9)$ .  
 א. מהן נקודות האפס של הפונקציה?

ב. כתבו משוואות של שתי פונקציות פולינום נוספות, שנקודות האפס שלהן זהות לנקודת האפס של הפונקציה הנתונה  $f(x)$ . כמה פונקציות כאלה קיימות? נמקו.

2. כתבו משוואה אפשרית לפונקציית פולינום:

א. שנקודות האפס שלה הן  $(2;0)$ ,  $(3;0)$  ו- $(8;0)$ , והמקדם של האיבר עם מעריך החזקה הגדולה במשוואת הפונקציה הוא 1. הציגו את הפונקציה כמכפלה.

ב. שנקודות האפס שלה הן  $(2;0)$ ,  $(3;0)$  ו- $(8;0)$ , והמקדם של האיבר עם מעריך החזקה הגדולה במשוואת הפונקציה הוא -1. הציגו את הפונקציה כמכפלה.

3. בציור שלפניכם מתואר גרף של פונקציית פולינום.

על הגרף מסומנים שיעורי ה- $x$  של נקודות האפס של הפונקציה.  
 א. קבעו עבור כל טענה האם היא נכונה:

(1) כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז  $f(x) \rightarrow \infty$ .

(2) כאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

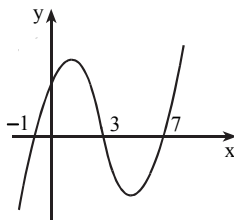
(3) כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז  $f(x) \rightarrow \infty$ .

(4) כאשר  $x \rightarrow -\infty$ , אז  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

ב. האם הפונקציה היא ממעלה זוגית או אי זוגית?

האם האיבר עם מעריך החזקה הגדולה במשוואת הפונקציה הוא חיובי או שלילי? נמקו.

ג. כתבו משוואה אפשרית לגרף הפונקציה. כמה משוואות אפשריות כאלה קיימות?



4. נתונה פונקציית פולינום  $f(x)$ , שנקודות האפס שלה הן  $(-1;0)$ ,  $(-5;0)$  ו- $(-7;0)$ .

נתון שהנקודה הימנית מבין שלוש הנקודות האפס הנ"ל היא נקודת השקה של הגרף עם ציר ה- $x$ , ושתי הנקודות האחרות הן נקודות חיתוך של הגרף עם ציר ה- $x$ .

א. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה  $f(x)$ , אם המקדם של האיבר המוביל שלה

(המחובר עם מעריך החזקה הגדולה) הוא 2.

ב. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה  $f(x)$ , אם המקדם של האיבר המוביל שלה

(המחובר עם מעריך החזקה הגדולה) הוא -3.

5. בציור שלפניכם מתואר גרף של פונקציה ממעלה שלישית.

הגרף חותך את ציר ה- $x$  בראשית הצירים  $(0;0)$ ,

ומשיק לציר ה- $x$  בנקודה  $(-3;0)$ .

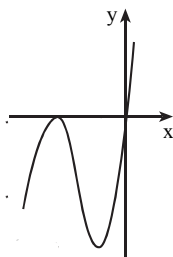
א. האם המקדם של  $x^3$  במשוואת הפונקציה

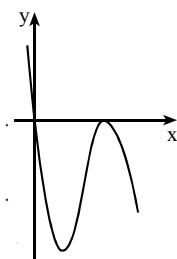
הוא חיובי או שלילי? נמקו.

ב. כתבו משוואה אפשרית לגרף הפונקציה.

ג. כמה משוואות אפשריות כאלה קיימות?

ד. כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.





6. בציור שלפניכם מתואר גרף של פונקציה ממעלה חמישית.  
 הגרף חותך את ציר ה- $x$  בראשית הצירים  $(0;0)$ ,  
 ומשיק לציר ה- $x$  בנקודה  $(5;0)$ .  
 א. האם המקדם של  $x^5$  במשוואת הפונקציה הוא חיובי או שלילי? נמקו.  
 ב. כתבו משוואה אפשרית לגרף הפונקציה.  
 ג. כמה משוואות אפשריות כאלה קיימות?

7. נתונה פונקציית פולינום  $f(x)$ , שנקודות האפס שלה הן  $(2;0)$ ,  $(-3;0)$  ו- $(6;0)$ .  
 נתון שהנקודה הימנית מבין שלוש הנקודות האפס הנ"ל היא נקודת חיתוך של הגרף עם ציר ה- $x$ , ושתי הנקודות האחרות הן נקודות השקה של הגרף עם ציר ה- $x$ .  
 א. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה  $f(x)$ , אם המקדם של האיבר המוביל שלה (המחובר עם מעריך החזקה הגדולה) הוא 4.  
 ב. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה  $f(x)$ , אם המקדם של האיבר המוביל שלה (המחובר עם מעריך החזקה הגדולה) הוא -2.

8. כתבו משוואה אפשרית לפונקציה  $f(x)$  ממעלה **שלישית** (קיימות אינסוף תשובות):  
 א. שנקודות האפס שלה הן  $(3;0)$  ו- $(-4;0)$ , אם נתון שכאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז  $f(x) \rightarrow \infty$ .  
 ב. שנקודות האפס שלה הן  $(3;0)$  ו- $(-4;0)$ , אם נתון שכאשר  $x \rightarrow \infty$ , אז  $f(x) \rightarrow -\infty$ .

9. א. כתבו משוואה לפונקציית פולינום  $f(x)$  ממעלה **רביעית**, שנקודות האפס שלה הן  $(8;0)$ ,  $(5;0)$ ,  $(-1;0)$  ו- $(-4;0)$ , אם נתון שהמקדם של  $x^4$  במשוואת הפונקציה הוא חיובי, ושכל נקודות האפס של הפונקציה הן נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ . הציגו את משוואת הפונקציה כמכפלה.  
 ב. כתבו משוואה לפונקציית פולינום  $f(x)$  ממעלה **שישית**, שנקודות האפס שלה הן  $(8;0)$ ,  $(5;0)$ ,  $(-1;0)$  ו- $(-4;0)$ , אם נתון שהמקדם של  $x^6$  במשוואת הפונקציה הוא שלילי, שתי נקודות האפס השמאליות של הפונקציה הן נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ , ושתי נקודות האפס האחרות הן נקודות השקה של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ . הציגו את משוואת הפונקציה כמכפלה.

10. כתבו משוואה לפונקציה  $f(x)$  ממעלה **רביעית**:  
 א. שנקודות האפס היחידות שלה הן  $(4;0)$  ו- $(2;0)$ .  
 כתבו שלוש אפשרויות (קיימות אינסוף אפשרויות).  
 ב. שנקודת האפס היחידה שלה היא  $(3;0)$ .  
 כתבו שלוש אפשרויות (קיימות אינסוף אפשרויות).

## תשובות:

1. א.  $(-9;0)$  ,  $(3;0)$  ,  $(1;0)$  .  
ב.  $y = 2(x-1)(x-3)(x+9)$  ,  $y = (x-1)^2(x-3)(x+9)$  . קיימות אינסוף פונקציות כאלה.
2. א.  $y = (x-2)(x-3)(x-8)$  . ב.  $y = -(x-2)(x-3)(x-8)$  .
3. א. (1) נכונה. (2) לא נכונה. (3) לא נכונה. (4) נכונה. ב. ממעלה אי זוגית. המקדם הוא חיובי.  
ג.  $y = (x-7)(x-3)(x+1)$  . קיימות אינסוף משוואות אפשריות.
4. א.  $y = 2(x+1)^2(x+5)(x+7)$  . ב.  $y = -3(x+1)^2(x+5)(x+7)$  .
5. א. חיובי. ב.  $y = x(x+3)^2$  . ג. אינסוף אפשרויות.  
ד. חיוביות:  $x > 0$  , שליליות:  $-3 < x < 0$  או  $x < -3$  .
6. א. שלילי. ב.  $y = -x(x-5)^4$  . ג. אינסוף אפשרויות.
7. א.  $y = 4(x-2)^2(x+3)^2(x-6)$  . ב.  $y = -2(x-2)^2(x+3)^2(x-6)$  .
8. א.  $y = (x-3)^2(x+4)$  . ב.  $y = -(x-3)^2(x+4)$  .
9. א.  $y = (x-8)(x-5)(x+1)(x+4)$  . ב.  $y = -(x-8)^2(x-5)^2(x+1)(x+4)$  .
10. א.  $y = (x-4)^2(x-2)^2$  ,  $y = (x-4)^3(x-2)$  ,  $y = (x-4)(x-2)^3$  .  
ב.  $y = -(x-3)^4$  ,  $y = 5(x-3)^4$  ,  $y = (x-3)^4$  .



# פונקציה זוגית, פונקציה אי-זוגית

## פונקציה זוגית

הגדרה: פונקציה  $f(x)$  נקראת פונקציה זוגית אם עבור כל  $x$  השייך לתחום ההגדרה שלה מתקיים:  $f(-x) = f(x)$ .

כאשר פונקציה היא זוגית, גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר ה- $y$ .  
כאשר פונקציה זוגית מוגדרת עבור  $x = 0$ , אז מתקבלת בנקודה זו נקודת קיצון.

## פונקציה אי זוגית

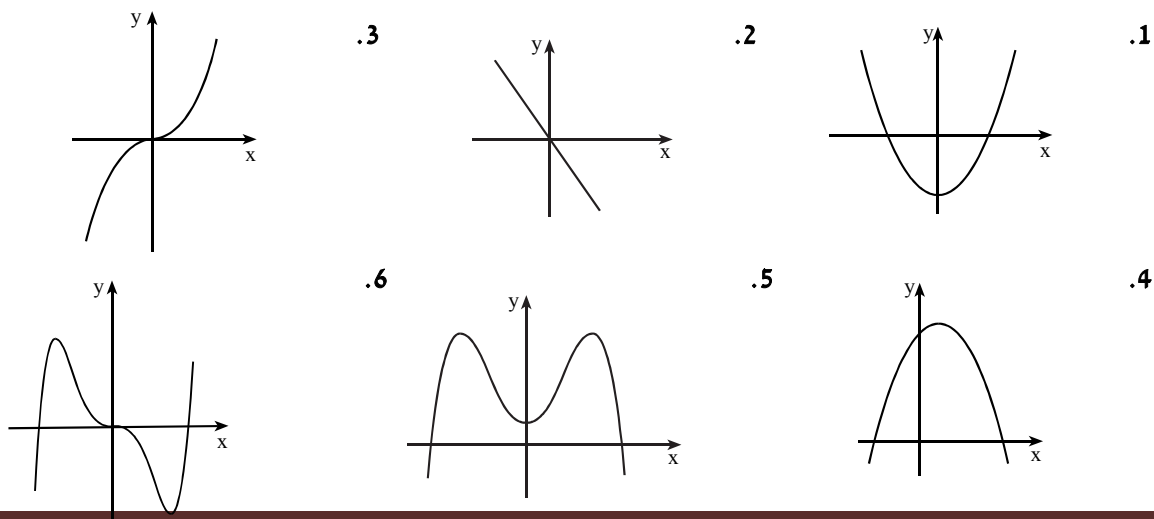
הגדרה: פונקציה  $f(x)$  נקראת פונקציה אי-זוגית אם עבור כל  $x$  השייך לתחום ההגדרה שלה מתקיים:  $f(-x) = -f(x)$ .

כאשר פונקציה היא אי-זוגית, גרף הפונקציה סימטרי ביחס לנקודת ראשית הצירים.  
גרף של פונקציה אי-זוגית, המוגדרת עבור  $x = 0$  תמיד עובר דרך ראשית הצירים,  
**הערה:** ייתכן שפונקציה לא תהיה זוגית ואף לא תהיה אי-זוגית.

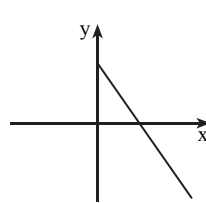
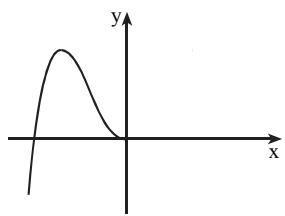
קבעו בעזרת תוכנת מחשב, האם הפונקציה היא פונקציה זוגית, או פונקציה אי זוגית.  
היכנסו לקישור המצורף. מומלץ! לחצו כאן

## תרגילים

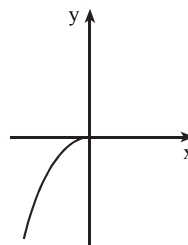
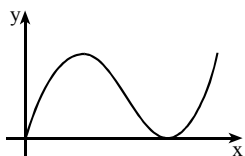
כתבו על פי התבוננות, אילו מהגרפים הבאים מתארים לדעתכם פונקציה זוגית, אילו מתארים פונקציה אי-זוגית ואילו מתארים פונקציה לא זוגית ולא אי-זוגית:



בתרגילים הבאים מתוארים חלקים מגרפים של פונקציות זוגיות. השלימו את הגרפים.



בתרגילים הבאים מתוארים חלקים מגרפים של פונקציות אי-זוגיות. השלימו את הגרפים.

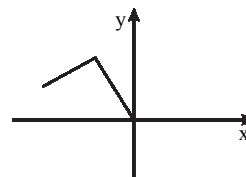
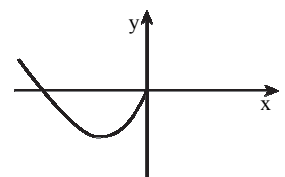


בכל אחד מהתרגילים הבאים מתואר חלק מגרף של פונקציה המוגדר לכל ערך של  $x$ . השלימו את הגרף:

א. כך שיתאים לגרף של פונקציה זוגית.

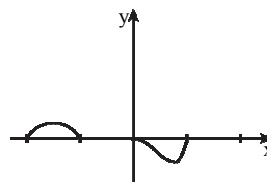
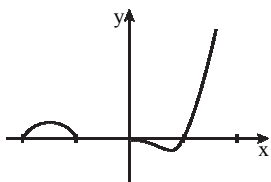
ב. כך שיתאים לגרף של פונקציה אי זוגית.

אם המשימה אינה אפשרית – הסבירו מדוע.



השלימו כל אחד מהגרפים שלפניכם כך שיתאים לפונקציה זוגית.

אם המשימה אינה אפשרית – הסבירו מדוע.



הוכיחו שהפונקציות הבאות הן פונקציות זוגיות. הדרכה: הראו ש-  $f(-x) = f(x)$ .

17.  $f(x) = 5$

16.  $f(x) = 2x^2 + 7$

15.  $f(x) = x^2$

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן פונקציות אי-זוגיות. הדרכה: הראו ש- $f(-x) = -f(x)$ .

18.  $f(x) = x^3$       19.  $f(x) = -3x$       20.  $f(x) = 2x^3 - 5x$

21. א. הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x^6 - 5x^2 + 8$  היא זוגית.  
ב. איזה סוג של סימטריה יש לגרף הפונקציה?  
ג. הסבירו ללא חישובים מדוע מתקיים  $f(-3) = f(3)$ .  
ד. הנקודה  $(-1; 4)$  נמצאת על גרף הפונקציה  $f(x)$ . כתבו על סמך תכונת הזוגיות של הפונקציה  $f(x)$ , שיעורי נקודה אחרת הנמצאת על גרף הפונקציה.  
ה. ענו ללא חישובים: האם ייתכן שמתקיים  $f(4) > f(-4)$ ?

22. א. הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = x(x-2)(x+2)$  היא אי זוגית.  
ב. איזה סוג של סימטריה יש לגרף הפונקציה?  
ג. הסבירו ללא חישובים מדוע מתקיים  $f(4) = -f(-4)$ .  
ד. בחרו את התשובה הנכונה: אם נקודה  $(3; 15)$  נמצאת על גרף הפונקציה, אז ערך הפונקציה עבור  $x = -3$  הוא חיובי/שלילי/אפס/לא ניתן לדעת.  
ה. מהו הערך של  $f(a) + f(-a)$ ? אין צורך בחישובים.

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן לא זוגיות ולא אי-זוגיות (אפשר גם על ידי דוגמה נגדית/סותרת):

23.  $f(x) = 5x + 7$       24.  $f(x) = x^2 - 8x + 5$

קבעו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא זוגית או אי-זוגית או שהיא לא זוגית ולא אי-זוגית. נמקו את תשובתכם.

25.  $f(x) = 9x + 5$       26.  $f(x) = x^4 + 3x^2$

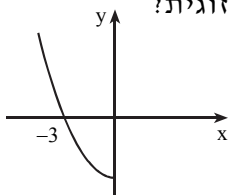
27. הסבירו מדוע הפונקציה  $f(x) = 0$  היא זוגית וגם אי זוגית.

28. א. יואב טוען שפונקציה אי זוגית המוגדרת עבור  $x = 0$  עוברת תמיד דרך ראשית הצירים. האם הוא צודק? נמקו.

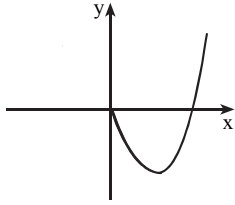
- ב.  $f(x)$  היא פונקציה אי זוגית המוגדרת לכל  $x$ . מה הערך של  $f(0)$ ?  
ג. נתון ש- $g(x)$  היא פונקציה זוגית המוגדרת עבור  $x = 0$ . האם אפשר לחשב את הערך של  $g(0)$ ? נמקו.

29. לפניכם חלק מגרף של פונקציה  $f(x)$ , המוגדרת לכל ערך של  $x$ .

- א. האם אפשר להשלים את הגרף, כך שיתאים לגרף של פונקציה אי זוגית?  
ב. נתון שהפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.  
(1) כתבו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.  
(2) כתבו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.  
ג. נתון כי אחד הפתרונות של המשוואה  $f(x) = -3$  הוא  $x = -1$ . מצאו פתרון נוסף של המשוואה  $f(x) = -3$ . נמקו.

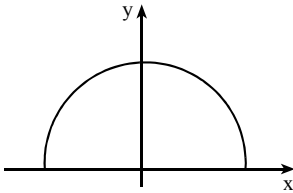


30. לפניכם חלק מגרף של פונקציה  $f(x)$  אי זוגית, המוגדרת לכל ערך של  $x$ .  
א. השלימו את הגרף.



- ב. לפונקציה  $f(x)$  נקודת מינימום פנימית שבה  $x=3$ .  
מהו שיעור ה- $x$  של נקודת המקסימום הפנימית?  
ג. דרך כל אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$ . המרחק בין שני הישרים הוא 8. מהם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה?  
ד. עפר טוען שהישר העובר דרך נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  עובר דרך ראשית הצירים. האם הוא צודק?  
ה. האם נכון לטעון שכאשר יש לפונקציה אי זוגית נקודת קיצון, אז הישר העובר דרך נקודת הקיצון וראשית הצירים, עובר דרך נקודת קיצון אחרת של הפונקציה? נמקו.

31. לפניכם גרף של פונקציה  $f(x)$ , המוגדרת בתחום  $-10 \leq x \leq 10$ .



- א. נתון כי גרף הפונקציה עובר דרך הנקודות  $(6;8)$  ו- $(-6;8)$ .  
האם ניתן להסיק שהפונקציה היא פונקציה זוגית?  
ב. נתון כי הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית.  
הישר  $y=6$  חותך את גרף הפונקציה בנקודות A ו-B.  
חשבו את הערך של  $x_A + x_B$ .

32. הפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה זוגית המוגדרת לכל ערך של  $x$ .  
א. הפונקציה חיובית בתחום  $x > 0$ . קבעו איזו טענה היא הנכונה:  
(1)  $f(x)$  חיובית בתחום  $x < 0$ . (2)  $f(x)$  שלילית בתחום  $x < 0$ .  
ב. הפונקציה עולה בתחום  $2 < x < 4$ . האם בתחום  $-4 < x < -2$  הפונקציה  $f(x)$  עולה או יורדת?

33. הפונקציה  $f(x) = x^2 + ax$  היא פונקציה זוגית. מצאו את הערך של  $a$ .

34. הפונקציה  $f(x) = x^3 + b$  היא פונקציה אי-זוגית.

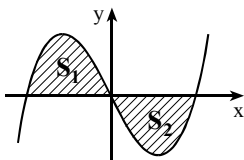
- א. מצאו את הערך של  $b$ .  
ב. לפניכם טבלת ערכים חלקית עבור  $f(x)$ . השלימו את הערכים החסרים ללא חישובים.

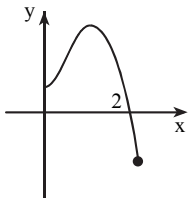
$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27		-1			8	

35. א. הוכיחו שפונקציית החזקה  $f(x) = x^n$  היא זוגית, עבור  $n$  זוגי.  
ב. הוכיחו שפונקציית החזקה  $f(x) = x^n$  היא אי זוגית, עבור  $n$  אי זוגי.

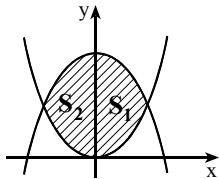
36. לפניכם גרף הפונקציה  $f(x) = x^3 - 4x$ .

- א. הוכיחו שהפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה אי זוגית.  
ב. מצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.  
ג. התבוננו בשרטוט, והסבירו מדוע השטח  $(S_1)$  שווה לשטח  $(S_2)$ .

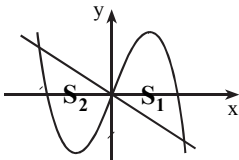




- 37.** נתונה פונקציה  $f(x)$  שתחום ההגדרה שלה הוא  $-3 \leq x \leq 3$ .  
 לפניכם גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום  $0 \leq x \leq 3$ .  
 א. יואב טוען כי על פי הגרף הנתון, לא ייתכן שהפונקציה  $f(x)$  היא פונקציה אי-זוגית. האם יואב צודק? נמקו.  
 ב. הניחו כי נתון ש- $f(x)$  היא פונקציה זוגית בתחום  $-3 \leq x \leq 3$ .  
 (1) העתיקו את השרטוט למחברתכם, והשלימו את הגרף של  $f(x)$  לכל התחום  $-3 \leq x \leq 3$ .  
 (2) הסבירו מדוע השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה וציר ה- $x$  ברביע הראשון, שווה לשטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה וציר ה- $x$  ברביע השני.



- 38.** לפניכם גרפים של הפונקציות  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 18 - x^2$ .  
 א. הוכיחו ששתי הפונקציות הן פונקציות זוגיות.  
 ב. האם השטח  $(S_1)$ , המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות ברביע הראשון, שווה לשטח  $(S_2)$ , המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות ברביע השני? נמקו.



- 39.** לפניכם הגרפים של שתי פונקציות:  $f(x) = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{2}{5}x$  ו- $g(x) = -\frac{1}{5}x$ .  
 א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.  
 ב. היעזרו בשרטוט וקבעו לאילו ערכי  $x$ :  
 (1) מתקיים  $f(x) > g(x)$ . (2) מתקיים  $-\frac{1}{15}x^3 + \frac{2}{5}x < -\frac{1}{5}x$ .  
 ג. הוכיחו שכל אחת משתי הפונקציות היא פונקציה אי-זוגית.  
 ד. הסבירו מדוע כל השטח המוגבל על ידי שני הגרפים בתחום שמימין לראשית הצירים, שווה לכל השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות בתחום שממאל לראשית.

- 40.** נתונות שתי פונקציות זוגיות  $f(x)$  ו- $g(x)$ . הפונקציה  $h(x)$  מקיימת  $h(x) = f(x) + g(x)$ . הוכיחו:  $h(x)$  היא פונקציה זוגית.

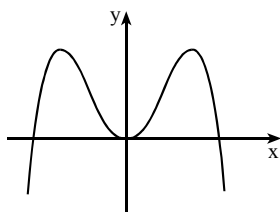
- 41.** הוכיחו: מכפלה של שתי פונקציות אי-זוגיות היא פונקציה זוגית. הדרכה: סמנו ב- $f(x)$  ו- $g(x)$  את שתי הפונקציות הנתונות, והוכיחו שהמכפלה שלהן  $h(x)$  היא פונקציה זוגית.

- 42.** הוכיחו: מכפלה של שתי פונקציות זוגיות היא פונקציה זוגית. הדרכה: סמנו ב- $f(x)$  ו- $g(x)$  את שתי הפונקציות הנתונות, והוכיחו שהמכפלה שלהן  $h(x)$  היא פונקציה זוגית.

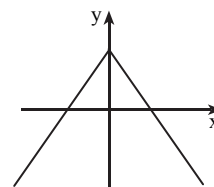
- 43.** הוכיחו: מכפלה של פונקציה זוגית בפונקציה אי-זוגית היא פונקציה אי-זוגית.

**תשובות:**

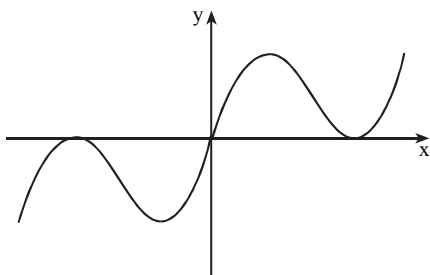
1. זוגית. 2. אי-זוגית. 3. אי-זוגית. 4. לא זוגית ולא אי-זוגית.  
5. זוגית. 6. אי-זוגית.



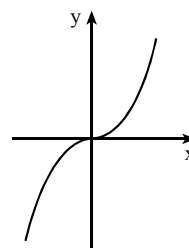
8.



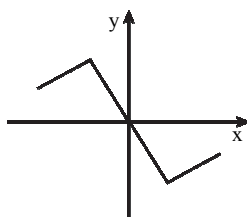
7.



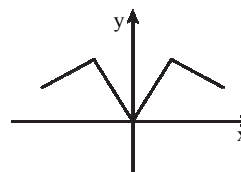
10.



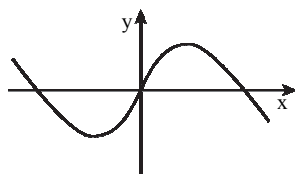
9.



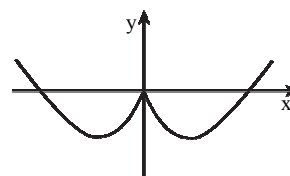
ב.



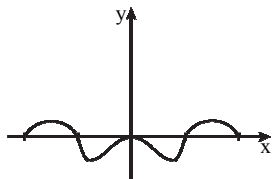
א. 11.



ב.



א. 12.

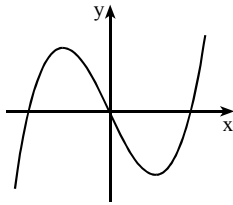


13. המשימה אפשרית. ניתן לקחת כל חלק בגרף הנמצא מימין לציר ה- $y$ , או משמאל לציר ה- $y$ , ולבצע שיקוף שלו לעומת ציר ה- $y$ .

14. המשימה אינה אפשרית. חלק הגרף בתחום  $1 < x < 2$  אינו סימטרי לחלק הגרף שבתחום  $-2 < x < -1$ . אם ניקח את חלק הגרף שבתחום  $1 < x < 2$  ונבצע שיקוף שלו לעומת ציר ה- $y$ , הגרף שיתקבל לא יתלכד עם חלק הגרף הנתון בתחום  $-2 < x < -1$ .

21. ב. סימטריה סביב ציר ה- $y$ . ד.  $(1;4)$ . ה. לא.  
 22. ב. סימטריה סביב ראשית הצירים. ד. שלילי. ה. 0.  
 25. לא זוגית ולא אי-זוגית. 26. זוגית.

28. א. כן. ב.  $f(0)=0$ . ג. לא.  
 29. א. אי אפשר. ב. (1) עלייה:  $x > 0$ , ירידה:  $x < 0$ .  
 (2) חיוביות:  $x > 3$  או  $x < -3$ , שליליות:  $-3 < x < 3$ . ג.  $x = 1$ .



30. ב.  $x = -3$ .  
 ג.  $(-3;4)$  מקסימום,  $(3;-4)$  מינימום.  
 ד. עפר צודק.  
 ה. כן, נכון לטעון זאת.

31. א. לא. ב.  $x_A + x_B = 0$ .

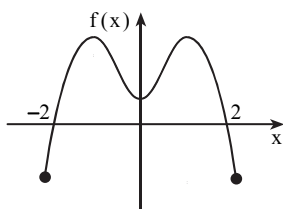
32. א. (1). ב. יורדת. 33.  $a = 0$ .

34. א.  $b = 0$ .

ב. לפניכם טבלת ערכים חלקית עבור  $f(x)$ . השלימו את הערכים החסרים ללא חישובים.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-27	-8	-1	0	1	8	27

36. ב.  $(-2;0)$ ,  $(0;0)$ ,  $(2;0)$ .



ב. (1)

37. א. כן, יואב צודק. פונקציה אי זוגית, המוגדרת עבור  $x = 0$ , עוברת תמיד דרך ראשית הצירים, והגרף הנתון של  $f(x)$  מוגדר עבור  $x = 0$ , אך לא עובר בראשית.

38. ב. כן.

39. א.  $(0;0)$ ,  $(3;-\frac{3}{5})$ ,  $(-3;\frac{3}{5})$ . ב. (1)  $0 < x < 3$  או  $x < -3$ . (2)  $x > 3$  או  $-3 < x < 0$ .