

מתמטיקה

5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

תוכנית חדשה

א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש,

של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $20 \times 5 = 100$ נקודות.

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.

(2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים

בעזרת מחשבון.

יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

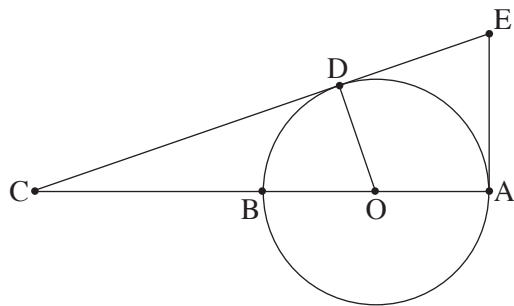
השאלות

יש לענות על חמש מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – "שאלות קצרות", סדרות והסתברות

1. ענו על שלושה מארבעת הסעיפים א-ד שלפניכם. אם תענו על יותר משלושה סעיפים, ייבדקו רק שלוש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

א. בעבור כל n טבעי הוכיחו באינדוקציה או בדרך אחרת כי מתקיים: $\frac{A}{2} + \frac{A}{2^2} + \dots + \frac{A}{2^n} = A\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
 A הוא פרמטר.



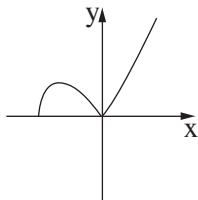
ב. הנקודה B היא אמצע הקטע AC.
 AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
 מן הנקודה C מעבירים ישר המשיק למעגל בנקודה D.
 בנקודה A מעבירים משיק נוסף למעגל.
 שני המשיקים נחתכים בנקודה E (ראו סרטוט).
 (1) הוכיחו כי המרובע AODE הוא בר חסימה במעגל.
 (2) הביעו באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AODE.

ג. לפניכם שלוש פונקציות והגרפים א-ד. כל אחת מן הפונקציות מתוארת על ידי אחד מן הגרפים.

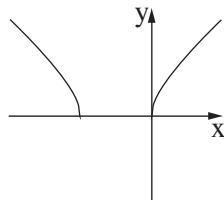
$$f(x) = \sqrt{x^2(x+2)}$$

$$h(x) = \sqrt{x(x+2)}$$

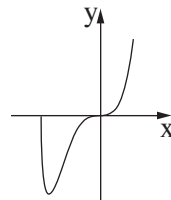
$$k(x) = x\sqrt{x+2}$$



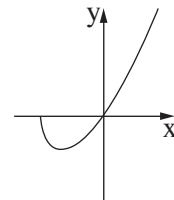
גרף ד



גרף ג



גרף ב

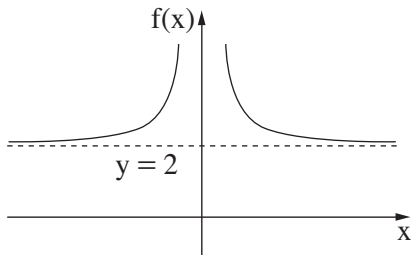


גרף א

(1) בעבור כל אחת מן הפונקציות, קבעו איזה מן הגרפים מתאר אותה. נמקו את קביעותיכם.

נתונה הפונקצייה $g(x) = x^n \sqrt{x+2}$, הוא פרמטר טבעי גדול מ-1. n

(2) מצאו עבור אילו ערכים של n , הגרף הנותר מתאר את הפונקצייה $g(x)$.



ד. לפניכם גרף של הפונקצייה $f(x)$, המוגדרת לכל $x \neq 0$.

הישרים $y = 2$ ו- $x = 0$ הם אסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$.

הפונקצייה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה.

(1) סרטטו סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(2) רשמו את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

נתון: $a > 0$ הוא פרמטר.

(3) סדרו את הביטויים (1)-(4) שלפניכם מן הקטן ביותר אל הגדול ביותר

(כתבו בצד שמאל את מספרו של הביטוי הקטן ביותר וכן הלאה).

(1) $\int_a^{a+1} f(x) dx$, (2) $\int_{a+1}^{a+2} f(x) dx$, (3) $\int_a^{a+1} f'(x) dx$, (4) המספר 2.

2. נתונה סדרה חשבונית a_1, a_2, \dots, a_{3n} שבה $3n$ איברים, וההפרש שלה הוא d .
נסמן ב- S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל-0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים $a_1 = 19 \cdot |d|$.

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה: $a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3n-4}$.
סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 36.

ד. מצאו את d .

3. עיתון יומי המופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל ביתם בכל יום עד השעה 6:00.

מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן.

כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא.

מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא $\frac{3}{4}$,

וההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא $\frac{5}{9}$.

נסמן ב- p את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה.

בוחרים באקראי אחד מן המנויים.

א. הביעו באמצעות p את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5 ממספר המנויים שגרים בתל אביב וקיבלו את העיתון בזמן.

ב. כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

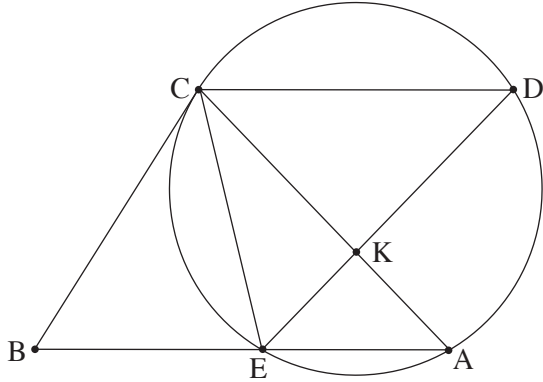
מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מנויים.

ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

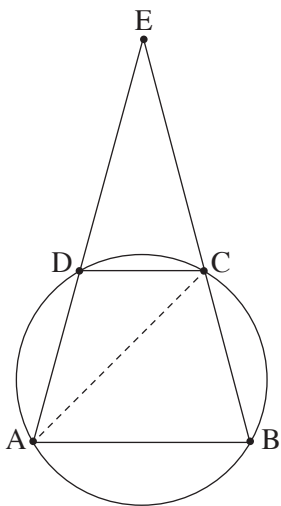
באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מהם גרים בחיפה?

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C, וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו-A, כמתואר בסרטוט. הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA. המיתרים ED ו-AC נחתכים בנקודה K.
- א. הוכיחו: $\triangle CEB \sim \triangle DCE$.
- נתון: $ED = 7$, $AK = 3$.
- נסמן את שטח המשולש CEK ב-S.
- ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.
- נתון: $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$.
- ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.
- הנקודה O היא מרכז המעגל.
- ד. הוכיחו: $\angle COE = \angle CKE$.
- נתון: $\angle CAE = 45^\circ$.
- ה. הסבירו מדוע הנקודות E, C, O ו-K נמצאות על מעגל אחד.



5. נתון טרפז ABCD ($AB \parallel DC$), החסום במעגל. המשכי הצלעות AD ו-BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט. נתון: $\angle ACB = 60^\circ$.
- נסמן: $\angle CDE = \alpha$, $AC = k$.
- א. (1) מצאו את זוויות המשולש ACE (הביעו באמצעות α אם יש צורך).
- (2) הביעו באמצעות α ו-k את אורכי הצלעות AB ו-DC.
- נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.
- ב. מצאו את גודל הזווית α .
- ג. מצאו את הערך של k שבעבורו אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא $\sqrt{7}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x - 4)^2}$, $0 < a < 4$ הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

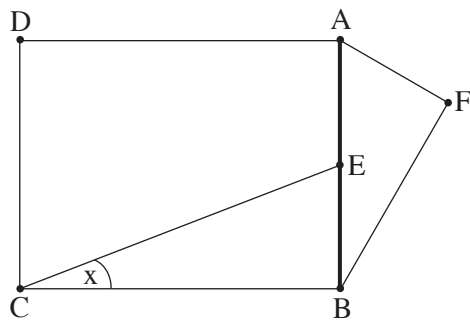
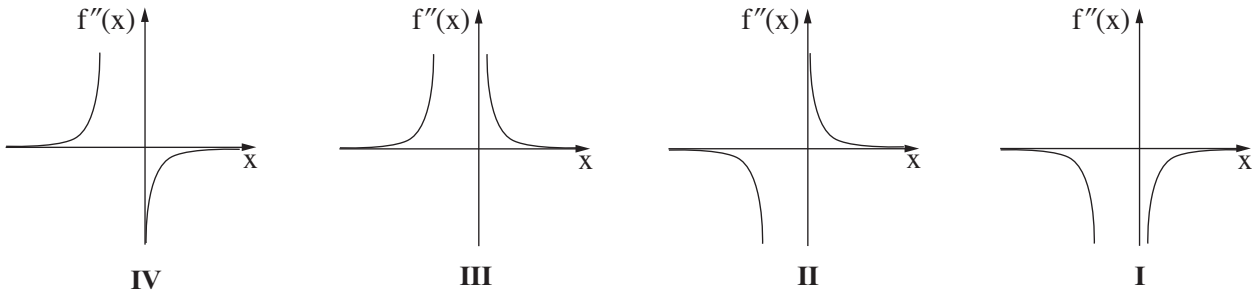
נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{x^2}{(x - 4)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ב. (1) הוכיחו כי גרף הפונקצייה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי הישר $x = 1$ ועל ידי ציר ה- y .

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x}}$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 - (2) האם גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.
 - (3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
 - (4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.
- נתון כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 - ג. היעזרו בגרף הפונקצייה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$. נמקו את קביעתכם.
 - ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = 2$.



8. הנקודה E היא אמצע הקטע AB. על הקטע AB בונים מלבן ABCD ומשולש ישר זווית AFB, $\angle AFB = 90^\circ$, כמתואר בסרטוט. נתון: $\angle ECB = x$, $\angle FAB = 2x$. נסמן את אורך הקטע AB ב- h .
- א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x ? הסבירו את תשובתכם.
 - ב. הביעו באמצעות x ו- h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF.
 - ג. מצאו את הערך של x שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.
 - ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB.

בהצלחה!