

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023 , מועד א', שאלון: 35571

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. נתונות שתי סדרות המוגדרות לכל n טבעי: $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^n$.

נסמן: $T_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

(1) נוכיח כי: אם בעבור k טבעי כלשהו מתקיים: $T_k = (2k - 3) \cdot 2^{k+1}$,

אז מתקיים $T_{k+1} = (2k - 1) \cdot 2^{k+2}$.

$$T_{k+1} = T_k + a_{k+1} b_{k+1}$$

$$T_{k+1} = (2k - 3) \cdot 2^{k+1} + (2(k+1) - 1) \cdot 2^{k+1}$$

$$T_{k+1} = 2^{k+1} (2k - 3 + 2k + 2 - 1)$$

$$T_{k+1} = 2^{k+1} (4k - 2)$$

$$T_{k+1} = 2^{k+1} \cdot 2(2k - 1)$$

$$T_{k+1} = (2k - 1) 2^{k+2}$$

הוכחנו כי אם בעבור k טבעי כלשהו מתקיים: $T_k = (2k - 3) \cdot 2^{k+1}$,

אז מתקיים $T_{k+1} = (2k - 1) \cdot 2^{k+2}$.

(2) אומנם: $T_{k+1} = (2k - 1) \cdot 2^{k+2} \rightarrow T_{k+1} = (2(k+1) - 3) \cdot 2^{k+1+1}$

אך לא ניתן להסיק, מהתשובה לסעיף (1) כי לכל n טבעי, מתקיים $T_n = (2n - 3) \cdot 2^{n+1}$,

כי לא עשינו את השלב הראשון והחשוב באינדוקציה, והוא בדיקה עבור $n = 1$.

כדי להסביר שהטענה אינה נכונה, נבדוק עבור $n = 1$.

$$T_1 = a_1 b_1 \rightarrow T_1 = (2 \cdot 1 - 1) \cdot 2^1 \rightarrow T_1 = 2 : T_n \text{ על-פי הגדרת}$$

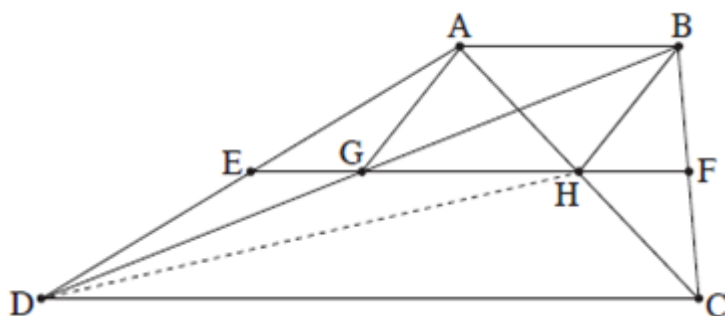
$$T_n = (2n - 3) \cdot 2^{n+1} \rightarrow T_1 = (2 \cdot 1 - 3) \cdot 2^{1+1} \rightarrow T_1 = -4 \text{ על-פי הטענה:}$$

ולא קיים שוויון מספרי.

תשובה: הסברנו מדוע הטענה אינה נכונה.

הערה לתת-סעיף (1): אין להציב ישירות $(k+1)$ בביטוי $T_k = (2k - 3) \cdot 2^{k+1}$,

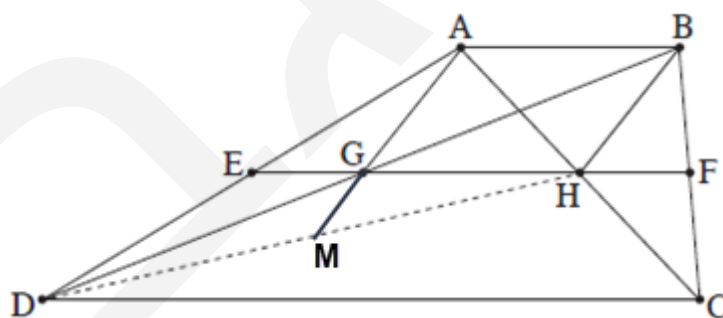
שכן $T_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ הוגדר כאן, ורק מכאן ניתן למצוא את האיבר הבא בסדרה..



נתונים

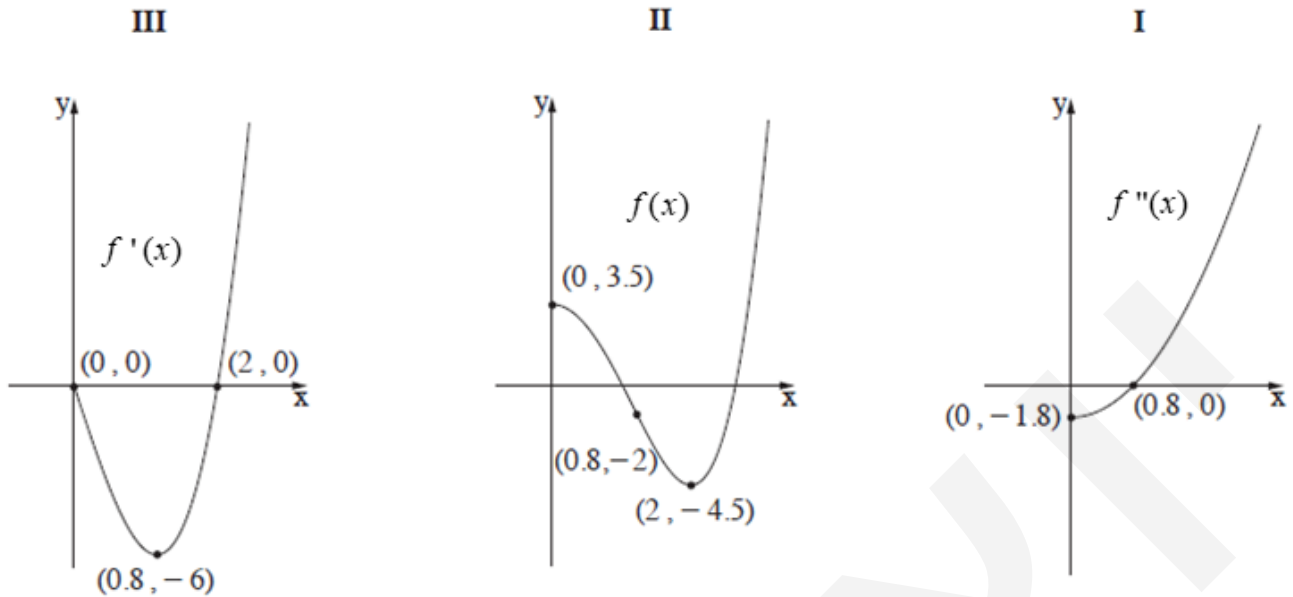
1. ABCD טרפז . 2. $AB \parallel CD$. 3. EF הוא קטע אמצעים בטרפז. 4. ABHG מקבילית
צ"ל: (1) $GH = 2EG$ (2) AM חוצה את הקטע DH

הסבר	מס'	טענה	נימוק
3	5	$EF \parallel AB$	קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים
3	6	$AE = ED$	קטע אמצעים בטרפז חוצה את השוקיים
5, 6	7	EG קטע אמצעים ב- $\triangle ABD$	יוצא מאמצע צלע ומקביל לצלע שממול
7	8	$AB = 2EG$	קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע שממול
4	9	$GH = AB$	צלעות נגדיות שוות במקבילית
8, 9	10	$GH = 2EG$	
מ.ש.ל. (1)			



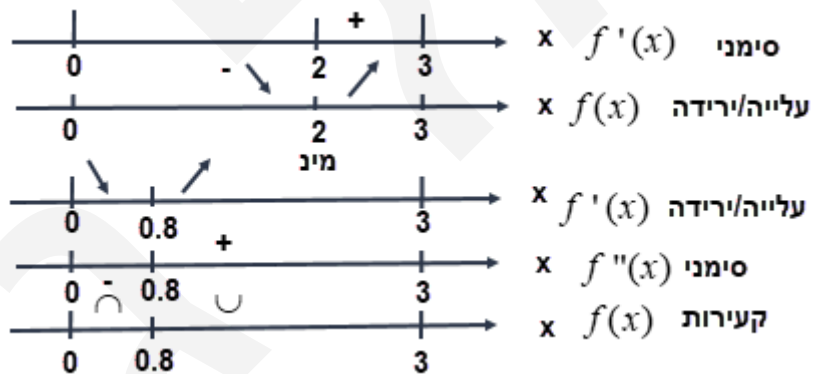
6	11	EH תיכון ב- $\triangle AHD$	יוצא מקודקוד וחוצה את הצלע
10, 11	12	G מפגש תיכונים ב- $\triangle AHD$	נמצאת על תיכון ומחלקת אותו ביחס 2:1 מקודקוד
12	13	AM תיכון ב- $\triangle AHD$	יוצא מקודקוד ועובר בנקודת מפגש תיכונים
13	14	AM חוצה את הקטע DH	
מ.ש.ל. (2)			

או: DK תיכון ב- $\triangle AHD$ (K מפגש אלכסוני המקבילית) כי אלכסונים חוצים זה את זה במקבילית,
ו- AM תיכון ב- $\triangle AHD$ כי יוצא מקודקוד ועובר במפגש תיכונים G.



הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ מוגדרות עבור $0 \leq x \leq 3$.

(1) נתאים את הגרפים לפונקציות, באמצעות חמישה קווים שעוזרים תמיד, וחוסכים דיבורים.



תשובה: גרף I מתאים ל- $f''(x)$, גרף II מתאים ל- $f(x)$, גרף III מתאים ל- $f'(x)$.

(2) בנקודת הפיתול $f''(x)$ מחליפה סימן, לכן $x = 0.8$, ונקודת הפיתול על פי גרף $f(x)$ היא $(0.8, -2)$.

השיפוע על פי גרף $f'(x)$ הוא $m = -6$

$$y - (-2) = -6(x - 0.8)$$

$$y + 2 = -6x + 4.8$$

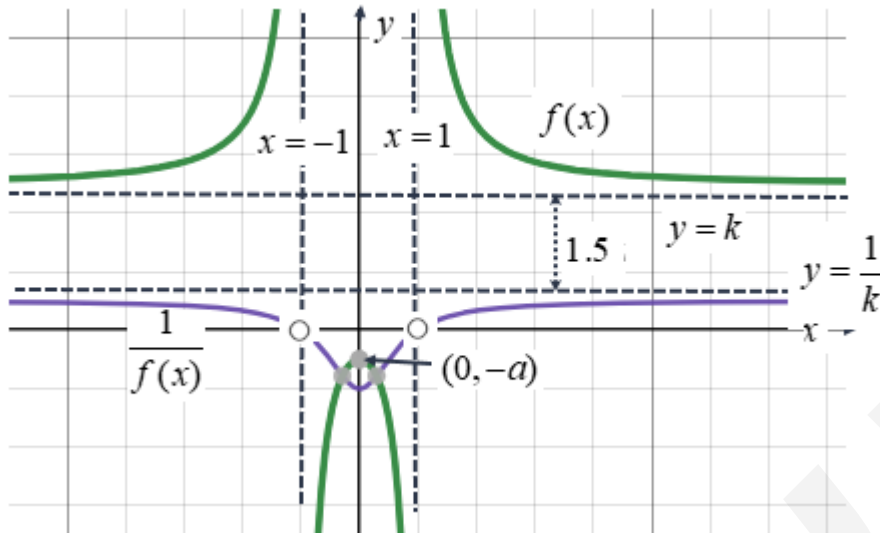
$$\boxed{y = -6x + 2.8}$$

תשובה: משוואת המשיק, לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה, היא $y = -6x + 2.8$.

(3) נמצא את הערך של האינטגרל המסוים $\int_0^{0.8} f''(x) dx$.

$$\int_0^{0.8} f''(x) dx = f'(x) \Big|_0^{0.8} = f'(0.8) - f'(0) = -6 - 0 = -6$$

$$\text{תשובה: } \int_0^{0.8} f''(x) dx = -6$$



הקדמה

תחום ההגדרה של טרנספורמציה של $\frac{1}{f(x)}$

הוא תחום ההגדרה של $f(x)$, למעט ה- x של נקודות האפס של $f(x)$.

אסימפטוטות אנכיות הופכות לחורים על ציר ה- x , ואופקיות הופכות כמובן.

תחומי חיוביות ושליליות נשארים ללא שינוי.

תחומי עלייה וירידה מתהפכים, וסוג קיצון משתנה גם.

(1) הגרפים של $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ נחתכים כאשר $f(x) = 1$ או $f(x) = -1$.

כיוון ש- $k > 1$ אז לא יהיה מפגש מעל ציר ה- x .

אם $0 < a < 1$ אז נקבל שתי נקודות חיתוך, כי אז $\frac{1}{f(x)} < -1$, כפי שניתן לראות בסרטוט.

תשובה: עבור $0 < a < 1$ יש לגרפים של $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ שתי נקודות חיתוך.

(2) המרחק בין שתי האסימפטוטות האופקיות $y = k$ ו- $y = \frac{1}{k}$ הוא 1.5.

$$k - \frac{1}{k} = 1.5$$

$$k^2 - 1.5k - 1 = 0$$

$$\boxed{k=2}, \cancel{k=-0.5} \leftarrow k > 1$$

תשובה: $k = 2$.

- א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת A , שהאיבר הכללי שלה הוא a_n , ומנתה q_A .
 נתונה סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת B , שהאיבר הכללי שלה הוא b_n , ומנתה q_B .
 בונים סדרה חדשה P , שגם היא הנדסית אין-סופית מתכנסת, שהאיבר הכללי שלה הוא $p_n = \frac{a_n}{b_n}$.

נמצא את מנת הסדרה החדשה:

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} : \frac{a_n}{b_n} \\ \frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot \frac{b_n}{a_n} \\ \boxed{\frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{q_A}{q_B}} \end{aligned}$$

תשובה: מנת הסדרה ההנדסית החדשה היא $\frac{q_A}{q_B}$.

ב. נבדוק את שני ההיגדים, על בסיס המידע החדש.

(1) "מנת הסדרה החדשה היא חיובית."

הסידרה A אינה עולה ואינה יורדת, מכאן ש- $-1 < q_A < 0$, ואיברי הסדרה מחליפים סימנים.

הסידרה B עולה, ומכיוון והיא מתכנסת, כלומר $b_n \rightarrow 0$, אז $0 < q_B < 1$.

$$\text{לכן מנת הסדרה ההנדסית החדשה } \frac{q_A}{q_B} = \frac{(-)}{(+)} < 0$$

תשובה: ההיגד לא נכון.

(2) "כל איברי הסדרה B הם שליליים."

הסידרה B עולה, ומכיוון והיא מתכנסת, כלומר $b_n \rightarrow 0$, אז $0 < q_B < 1$, וכל איברי הסדרה שליליים.

תשובה: ההיגד נכון.

ג. המספרים c_1 , c_2 ו- c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית, שנסמן ב- d את הפרשה.

נתון כי $c_2 = -c_1$, ומתקיים גם: $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{45}$.

האיברים הראשונים הם: $c_1, -c_1, c_1 + 2d$, ולכן $-c_1 + d = c_1 + 2d$.

מכאן ש- $-2c_1 = d$, ושלושת האיברים הראשונים בסדרה הם: $c_1, -c_1, -3c_1$.

אפשר גם: כל איבר בסדרה חשבונית (למעט הראשון) הוא ממוצע חשבוני של "שכניו",

ולכן: $-2c_1 = d \rightarrow -4c_1 = 2d \rightarrow -2c_1 = 2c_1 + 2d \rightarrow -c_1 = \frac{c_1 + c_1 + 2d}{2}$

$$\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{45} \rightarrow \frac{c_1 \cdot (-c_1)}{-3c_1} = -\frac{1}{45}$$

$$\frac{c_1}{3} = -\frac{1}{45} \rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{1}{15}}$$

תשובה: $c_1 = -\frac{1}{15}$.

ד. נתון כי $q_A = -\frac{1}{15}$, ומתקיים גם $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$,

כלומר, מתקיים: $S_p = \frac{S_A}{S_B}$.

$$\frac{a_1/b_1}{1 - \frac{q_A}{q_B}} = \frac{a_1/(1-q_A)}{b_1/(1-q_B)} \quad (a_1/b_1 \neq 0)$$

$$\frac{q_B}{q_B - q_A} = \frac{1 - q_B}{1 - q_A}$$

$$q_B \left(1 + \frac{1}{15}\right) = (1 - q_B) \left(q_B + \frac{1}{15}\right)$$

$$\frac{16}{15} q_B = q_B + \frac{1}{15} - q_B^2 - \frac{1}{15} q_B \quad / \cdot 15$$

$$16q_B = 15q_B + 1 - 15q_B^2 - q_B$$

$$15q_B^2 + 2q_B - 1 = 0$$

$$\boxed{q_B = \frac{1}{5}} \quad \cancel{q_B = -\frac{1}{3}} \quad \leftarrow 0 < q_B < 1$$

תשובה: $q_B = \frac{1}{5}$.

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - תלמידי שנה א' $\bar{A}$ - תלמידי שנה ב'B - תומכים בהצעה $\bar{B}$ - מתנגדים להצעהנתונים ומשמעויות מידיותנסמן p - ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה, מבין כלל משתתפי המשאל $(P(B) = p)$.

$$P(A/B) = 0.8 \rightarrow P(\bar{A}/B) = 0.2 \quad (1)$$

$$N(A \cap B) = N(\bar{A} \cap \bar{B}) \rightarrow P(A \cap B) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) \quad (2)$$

פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$0.8 = \frac{P(A \cap B)}{p}$$

$$P(A \cap B) = 0.8p \rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.8p$$

נשלים את הטבלה:

	$\bar{A}$ תלמידי שנה ב'	A תלמידי שנה א'	
p	$0.2p$	$0.8p$	B - תומכים בהצעה
$1-p$	$0.8p$	$1-1.8p$	$\bar{B}$ - מתנגדים להצעה
1	p	$1-p$	

$$P(\bar{B}/\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.8p}{p} = 0.8$$

תשובה: ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שנגד ההצעה, מבין תלמידי שנה ב', היא 0.8.

$$B. \text{ נתון: } P(B/A) = P(B/\bar{A}) + \frac{13}{35}$$

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} + \frac{13}{35}$$

$$\frac{0.8p}{1-p} = \frac{0.2p}{p} + \frac{13}{35}$$

$$\frac{0.8p}{1-p} = \frac{4}{7}$$

$$5.6p = 4 - 4p$$

$$9.6p = 4$$

$$p = \frac{5}{12}$$

$$\text{תשובה: } p = \frac{5}{12}$$

ג. נעדכן את הטבלה.

	$\bar{A}$ תלמידי שנה ב'	A תלמידי שנה א'	
$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	B - תומכים בהצעה
$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0.25	$\bar{B}$ - מתנגדים להצעה
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$	

נחשב את ההסתברות המבוקשת: לפחות טענה אחת נכונה –

כלומר תנאי אחד בדיוק מתקיים $(P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cap B))$ או שני התנאים מתקיימים $(P(\bar{A} \cap B))$.

בקצרה: $1 - P(A \cap \bar{B}) = 1 - 0.25 = 0.75$.

תשובה: ההסתברות, שלפחות אחד מבין שני התנאים מתקיים, היא 0.75 .

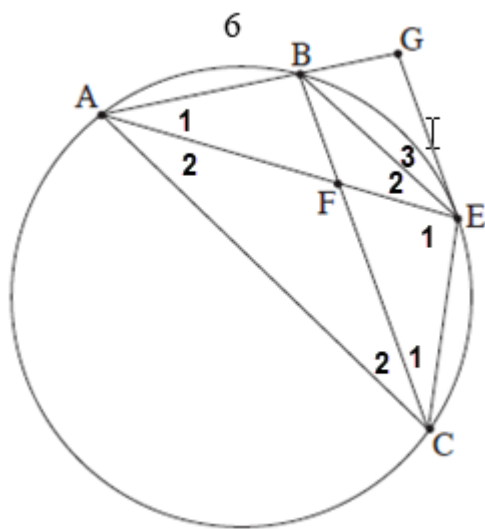
ד. מדובר בהתפלגות בינומית, כאשר $n = 5$, $p = P(B / \bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{1/12}{5/12} = 0.2$, $k = 2, 3$.

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

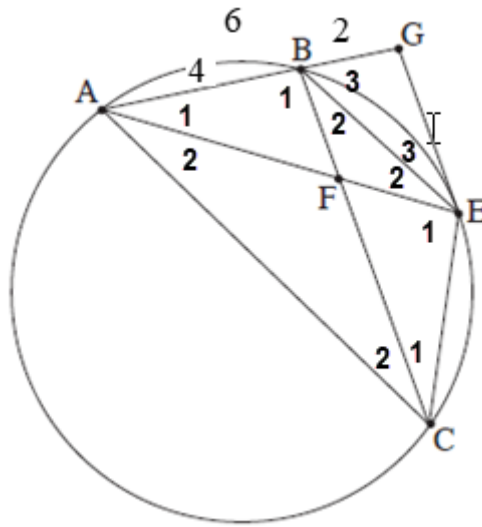
$$P_5(2) + P_5(3) = \binom{5}{2} \cdot 0.2^2 \cdot (1-0.2)^{5-2} + \binom{5}{3} \cdot 0.2^3 \cdot (1-0.2)^{5-3} = 10 \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 + 10 \cdot 0.2^3 \cdot 0.8^2 = 0.256$$

תשובה: ההסתברות שמבין תלמידי שנה ב',

לפחות 2 הם בעד ההצעה ולפחות 2 הם נגד ההצעה, היא 0.256 .

נתונים1. $BE = CE$ 2. GE משיק ב- E .עבור ב: 3. $AG = 6$ 4. $AE = 3\sqrt{6}$ עבור ד: 5. $S_{\triangle ABF} = 2S_{\triangle BFE}$ צ"ל: א. $\triangle ACE \sim \triangle AEG$ ב. $AC \parallel GE$ ג.ד. AB ה. $\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AFC}}$ 

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	6	$\angle A_1 = \angle A_2$ (ז)	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות
1	7	$\angle E_2 = \angle C_2$	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות
2	8	$\angle E_3 = \angle C_1$	זווית בין משיק למיתר
8, 7	9	$\angle E_2 + \angle E_3 = \angle C_1 + \angle C_2$	חיבור זוויות שוות לזוויות שוות
9	10	$\angle GEA = \angle ECA$ (ז)	סכום זוויות
10, 6	11	$\triangle ACE \sim \triangle AEG$	משפט דמיון זווית זווית
מ.ש.ל. א			
11	12	$\frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AG} = \frac{CE}{EG}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
12, 4, 3	13	$\frac{AC}{3\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{CE}{EG} = \frac{\sqrt{6}}{2}$	
13	14	$AC = 9$	
מ.ש.ל. ב			
1	15	$\angle EBC = \angle C_1$	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות
15, 8	16	$\angle EBC = \angle E_3$	
16	17	$BC \parallel GE$	אם זוויות מתחלפות שוות אז ישרים מקבילים
מ.ש.ל. ג			



הסבר	מס'	טענה	נימוק
5	18	$\frac{AF}{FE} = \frac{2}{1}$	יחס שטחים שווה ליחס צלעות בעלי גובה משותף, היורד מקודקוד B
18, 17	19	$\frac{AB}{BG} = \frac{AF}{FE} = \frac{2}{1}$	משפט תאלס
19	20	$\frac{AB}{AG} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{AB}{6} = \frac{2}{3}$	
20, 3	21	$AB = 4$	
מ.ש.ל. ד			
21, 14, 6	22	$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{9}$	משפט חוצה זווית $\triangle ABC$
22	23	$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle AFC}} = \frac{4}{9}$	יחס שטחים שווה ליחס צלעות בעלי גובה משותף, היורד מקודקוד A
מ.ש.ל. ה			

א. ABCD דלתון חסום במעגל שרדיוסו R.

במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות 180° , ובדלתון זוויות צד שוות זו לזו.

לכן $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ו- $AC = 2R$ האלכסון הראשי הוא קוטר המעגל הגדול.

(1) נחשב את זוויות המשולש AOC.

מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות.

$$\angle CAB = \alpha \rightarrow \angle BAO = \angle CAO = \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle ACB = 90^\circ - \alpha \quad (\text{סכום זוויות } 180^\circ \text{ ב- } \triangle ABC)$$

$$\angle BCO = \angle ACO = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\angle AOC = 135^\circ \quad (\text{סכום זוויות } 180^\circ \text{ ב- } \triangle AOC)$$

$$\text{תשובה: } \angle CAO = \frac{\alpha}{2}, \angle ACO = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}, \angle AOC = 135^\circ.$$

(2) נביע את אורך הקטע AO באמצעות R ו- α .

$\triangle AOC$ לפי משפט הסינוסים.

$$\frac{AO}{\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \frac{AC}{\sin 135^\circ}$$

$$AO = 2R\sqrt{2} \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

$$\text{תשובה: } AO = 2R\sqrt{2} \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$$

ב. נתון כי $AO = R\sqrt{2}$. נמצא את α .

$$2R\sqrt{2} \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = R\sqrt{2} \quad / : 2R\sqrt{2} > 0$$

$$\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

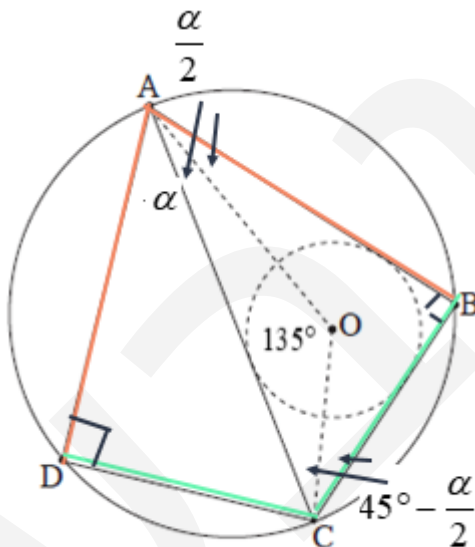
$$45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 30^\circ + 360^\circ k \quad 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = 150^\circ + 360^\circ k$$

$$-\frac{\alpha}{2} = -15^\circ + 360^\circ k \quad -\frac{\alpha}{2} = 105^\circ + 360^\circ k$$

$$\alpha = 30^\circ + 720^\circ k \quad \alpha = -210^\circ + 720^\circ k$$

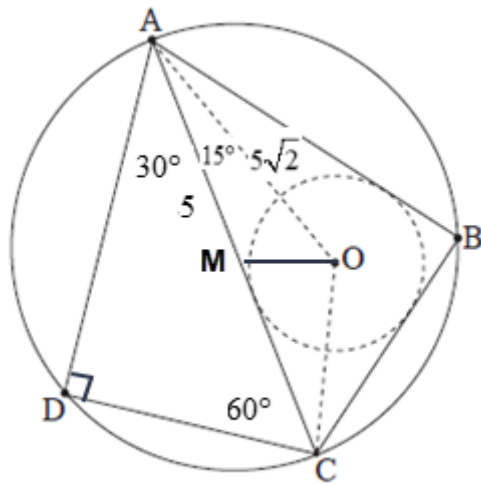
$$\boxed{\alpha = 30^\circ} \leftarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

תשובה: $\alpha = 30^\circ$.



ג. נתון כי שטח הדלתון הוא $25\sqrt{3}$.

האלכסון הראשי בדלתון מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח.



$$\frac{(2R)^2 \sin 30^\circ \sin 60^\circ}{2 \sin 90^\circ} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$4R^2 \sin 30^\circ \sin 60^\circ = 25\sqrt{3}$$

$$R^2 = 25$$

$$\boxed{R = 5} \leftarrow R > 0$$

תשובה: $R = 5$.

ד. נמצא את המרחק בין שני מרכזי המעגלים, את OM.

$\triangle AOM$ משפט הקוסינוסים

$$(OM)^2 = (AM)^2 + (AO)^2 - 2AM \cdot AO \cdot \cos \angle OAM$$

$$(OM)^2 = 5^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 15^\circ$$

$$(OM)^2 = 50 - 25\sqrt{3}$$

$$\boxed{OM = 2.588}$$

תשובה: המרחק בין מרכז המעגל החוסם את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום ב- $\triangle ABC$, הוא 2.588.

א. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2a-x^2}{x}$, $a > 0$, פרמטר, המוגדרת עבור $x \neq 0$.

נעבד את הפונקציה ונקבל: $f(x) = \frac{2a}{x} - x$, הנוחה יותר לתתי סעיפים (4) ו-(5).

(1) תשובה: $x = 0$ אסימפטוטה אנכית.

(2) נראה שהפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

$$f(-x) = \frac{2a}{-x} - (-x)$$

$$f(-x) = -\left(\frac{2a}{x} - x\right)$$

$$\boxed{f(-x) = -f(x)}$$

ולכן הפונקציה אי-זוגית, והגרף שלה סימטרי לראשית הצירים.

תשובה: הראינו שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

(3) יש רק נקודת חיתוך עם ציר ה- x , כי $x \neq 0$ בתחום ההגדרה.

$$0 = 2a - x^2$$

$$x^2 = 2a \rightarrow x = \pm\sqrt{2a}$$

תשובה: $(\sqrt{2a}, 0)$, $(-\sqrt{2a}, 0)$.

(4) נמצא תחומי עלייה וירידה (אם יש כאלה).

$$\boxed{f'(x) = -\frac{2a}{x^2} - 1}$$

$a > 0$, ולכן הנגזרת היא הפרש בין ביטוי שלילי לביטוי חיובי, והיא שלילית עבור $x \neq 0$.

תשובה: עלייה – אף x , ירידה – $x > 0$ או $x < 0$.

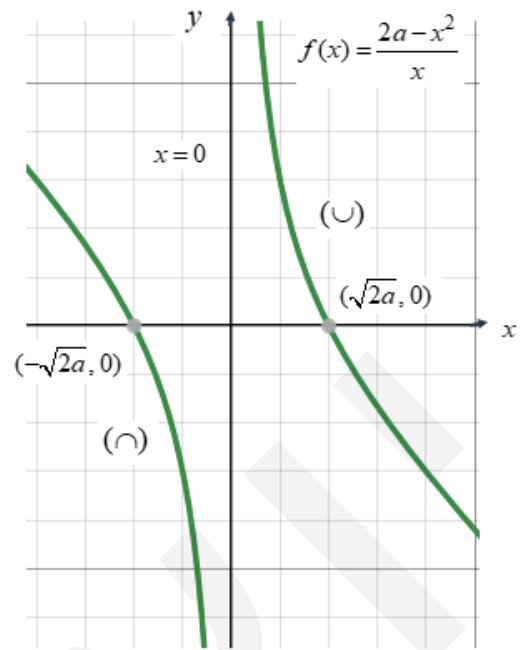
(5) נמצא את תחומי הקעירות של הפונקציה..

$$\boxed{f''(x) = \frac{4ax}{x^4}}$$

$a > 0$, ולכן סימני הנגזרת השנייה, זהים לסימני של המשתנה x .

תשובה: קעירות כלפי מעלה ($\cup$) עבור $x > 0$, קעירות כלפי מטה ($\cap$) עבור $x < 0$.

ב. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



תשובה: הסרטוט מעל.

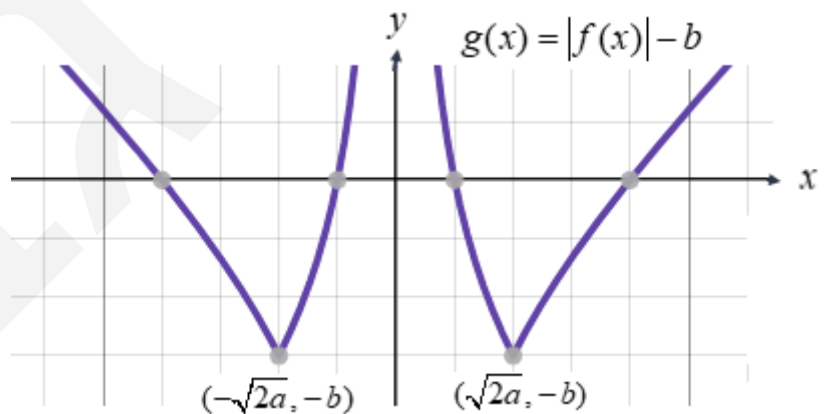
ג. נתונה הפונקציה $g(x) = |f(x)| - b$ ($b > 0$, פרמטר).

זוהי טרנספורמציה של ערך מוחלט, שבו מתקפל החלק של הגרף שמתחת לציר ה- x ,

סביב ציר ה- x , והנקודות $(\sqrt{2a}, 0)$, $(-\sqrt{2a}, 0)$ הופכות להיות נקודות מינימום, עם "שפיץ",

כי הנגזרת אינה מוגדרת בנקודות אלו.

לאחר מכן הורדה אנכית b יחידות, כך שהנקודות $(\sqrt{2a}, -b)$, $(-\sqrt{2a}, -b)$ הן נקודות המינימום של $g(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ד. $(2, -3)$ היא אחת מנקודות הקיצון (מינימום) של $g(x)$.

מכאן ש- $b = 3$, כי ההזה האנכית היא 3 יחידות כלי מטה.

$$\sqrt{2a} = 2 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2$$

תשובה: $b = 3$, $a = 2$.

$$ה. f(x) = \frac{4-x^2}{x}, \quad g(x) = \left| \frac{4-x^2}{x} \right| - 3$$

נתונה גם הפונקציה $s(x) = \int_1^x g(t) dt$, המוגדרת עבור $x > 1$.

מכאן שפונקציה זו צוברת שטח (אינטגרל כפונקציית הצטברות), שהוא חיובי כאשר הפונקציה $g(x)$ מעל ציר ה- x ואז הפונקציה $s(x)$ עולה, או שלילי כאשר הפונקציה $g(x)$ מתחת לציר ה- x ואז הפונקציה $s(x)$ יורדת. השאלה היא מהן נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה- x .

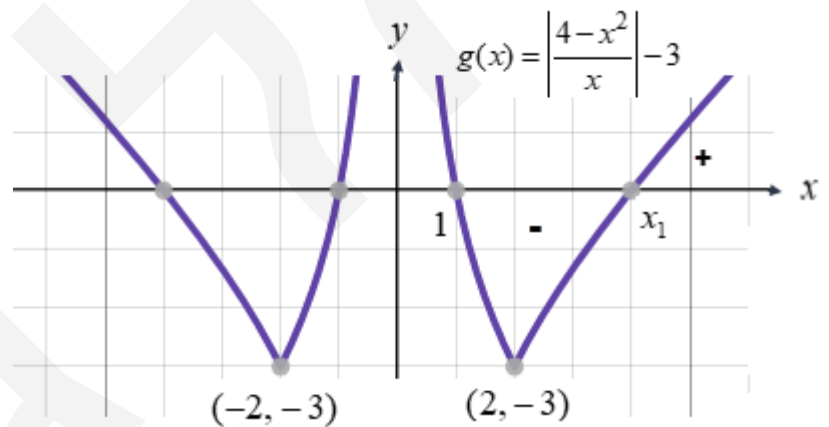
$$\left| \frac{4-x^2}{x} \right| - 3 = 0 \rightarrow \left| \frac{4-x^2}{x} \right| = 3 \rightarrow \frac{4-x^2}{x} = 3 \cup \frac{4-x^2}{x} = -3$$

ניתן לפתור את המשוואה:

אבל תחילה שווה לבדוק את $g(1)$ בגלל תחום ההגדרה של $s(x)$.

$$g(1) = \left| \frac{4-1^2}{1} \right| - 3 = |3| - 3 = 0$$

ולכן יש רק נקודת אפס אחת רלוונטית, מסומנת בציור כ- x_1 .



עקב תחום ההגדרה של $s(x)$ שהוא $x > 1$, השטח הנצבר ראשון הוא שלילי, ולאחר מכן חיובי. מכאן ש- $s(x)$ עוברת מירידה לעלייה, ולכן x_1 מינימום.

אפשרי גם על ידי הקשר בין פונקציה לנגזרת.

בתחום $x > 1$ הגרף של $g(x)$ הוא למעשה הנגזרת של $s(x)$, וכאשר הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות, יש לפונקציה המקורית נקודת מינימום.

תשובה: סוג נקודת הקיצון של $s(x)$ הוא מינימום.

א. (1) בתחום $x < 0$ מתקיים $f'(x)$ חיובית ולכן $f(x)$ עולה.

בתחום $0 < x < a$ מתקיים $f'(x)$ שלילית ולכן $f(x)$ יורדת.

תשובה: עבור $f(x)$ - עלייה $x < 0$, ירידה $0 < x < a$.

(2) בתחום $x < 0$ מתקיים $f'(x)$ עולה, ולכן $f''(x)$ חיובית ו- $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (U).

בתחום $x > 0$ יש ל- $f'(x)$ קיצון מקסימום,

ולכן בתחום $0 < x < x_{MAX}$ $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (U),

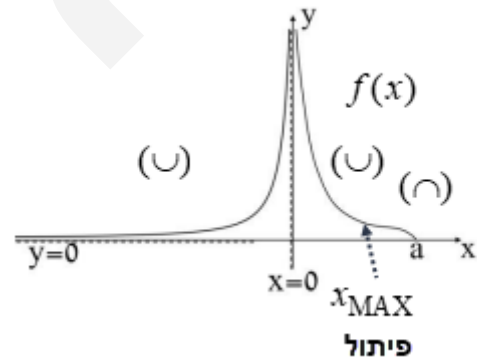
ובתחום $x_{MAX} < x < a$ $f(x)$ קעורה כלפי מטה (∩), ומתקבלת נקודת פיתול אחת.

תשובה: לפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת.

ב. נתון כי הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ניתן לראות שעבור $x \rightarrow -\infty$ מתקיים $f'(x) \rightarrow 0$ ולכן האסימפטוטה האופקית של $f(x)$ עבור $x \rightarrow -\infty$.

כמו כן, הנקודה $(a, 0)$ היא נקודת מינימום, לאור תחומי העלייה והירידה, והנתון $f(a) = 0$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. הביטוי I. מייצג את הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$.

נימוקים: הביטוי שבתוך השורש אי-שלילי עבור $x \leq a$, והמכנה מתאפס עבור $x = 0$,

בהתאם לתחום ההגדרה של $f(x)$: $x \neq 0, x \leq a$.

הביטוי $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ הוא אי-שלילי, דבר הבא לידי ביטוי בגרף הפונקציה שאינו מתחת לציר ה- x .

שתי האסימפטוטות הן $x = 0$ ו- $y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$).

תשובה: הביטוי I. מייצג את הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$.

ד. $f(x) = \frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$, ונתון $f'(-2) = \frac{7}{16}$ (שיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת בנקודה).

$$f'(x) = \frac{\frac{-x^2}{2\sqrt{a-x}} - 2x\sqrt{a-x}}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x(a-x)}{2x^4\sqrt{a-x}}$$

$$\frac{7}{16} = \frac{-4+8(a+2)}{2 \cdot 16\sqrt{a+2}} \leftarrow f'(-2) = \frac{7}{16}$$

$$14t = -4 + 8t^2 \leftarrow \boxed{\sqrt{a+2} = t}$$

$$0 = 8t^2 - 14t - 4$$

$$t = 2 \rightarrow \sqrt{a+2} = 2 \rightarrow \boxed{a=2}$$

$$t = -0.25 \rightarrow \sqrt{a+2} = -0.25 \rightarrow \emptyset$$

תשובה: $a = 2$.

ה. נציב $a = 2$, ונקבל $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x^2}$.

נחשב את השטח המוגבל על ידי $(f(x))^2$ שהיא פונקציה אי-שלילית, והגרף שלה מעל ציר ה- x ,

עם נקודת אפס $(2, 0)$ (נקודות האפס לא משתנות לאחר העלאה בריבוע של הפונקציה),

ועל ידי הישר $x = 1$

$$S = \int_1^2 ((f(x))^2 - 0) dx$$

$$S = \int_1^2 \frac{2-x}{x^4} dx$$

$$S = \int_1^2 (2x^{-4} - x^{-3}) dx$$

$$S = \left[\frac{2x^{-3}}{-3} - \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^2$$

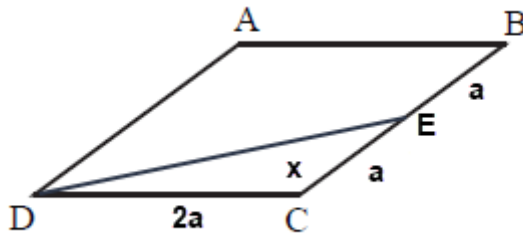
$$S = \left[-\frac{2}{3x^3} + \frac{1}{2x^2} \right]_1^2$$

$$\left. \begin{array}{l} x=2: \frac{1}{24} \\ x=1: -\frac{1}{6} \end{array} \right\} S = \frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{24}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $\frac{5}{24}$.

א. נסמן את אורך צלע המעוין ב- $2a$ ($a > 0$).

תחום ההגדרה הוא $0 < x < \pi$, כי לא ידוע האם זווית C חדה או קהה.



$$S_{\triangle ECD} = 18$$

$$\frac{a \cdot 2a \cdot \sin x}{2} = 18$$

$$a^2 = \frac{18}{\sin x}$$

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}$$

$$2a = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}$$

תשובה: אורך צלע המעוין הוא $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}$.

ב. הפונקציה שיש להביא לאינמינמום היא אורך הקטע DE.

$\triangle ECD$ משפט הקוסינוסים

$$(DE)^2 = (DC)^2 + (EC)^2 - 2DC \cdot EC \cdot \cos x$$

$$(DE)^2 = \left(\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}\right)^2 - 2 \cdot \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x$$

$$(DE)^2 = \frac{72}{\sin x} + \frac{18}{\sin x} - \frac{72 \cos x}{\sin x}$$

$$(DE)^2 = \frac{90}{\sin x} - \frac{72 \cos x}{\sin x}$$

$$DE = \sqrt{\frac{90}{\sin x} - \frac{72 \cos x}{\sin x}}$$

נשים לב, הביטוי שבתוך השורש הוא חיובי, שכן מייצג אורך קטע, ולכן ניתן למצוא מינימום ל- $(DE)^2$.

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} \text{ אז, כאשר } g(x) > 0, f(x) = \sqrt{g(x)} \text{ ניתן לראות שאם}$$

וסימני הנגזרת שווים, וגם תחומי העלייה והירידה.

$$(DE)^2 = \frac{90}{\sin x} - \frac{72 \cos x}{\sin x}$$

$$(DE)^2 = 18 \cdot \left(\frac{5}{\sin x} - \frac{4 \cos x}{\sin x} \right)$$

נמצא נקודת מינימום:

$$\left((DE)^2 \right)'(x) = 18 \cdot \left(5 \cdot \frac{-\cos x}{(\sin x)^2} - 4 \cdot \frac{-(\sin x)^2 - (\cos x)^2}{(\sin x)^2} \right)$$

$$\left((DE)^2 \right)'(x) = 18 \cdot \left(5 \cdot \frac{-\cos x}{(\sin x)^2} + 4 \cdot \frac{(\sin x)^2 + (\cos x)^2}{(\sin x)^2} \right)$$

$$\left((DE)^2 \right)'(x) = 18 \cdot \left(\frac{-5 \cos x + 4}{(\sin x)^2} \right) \leftarrow (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

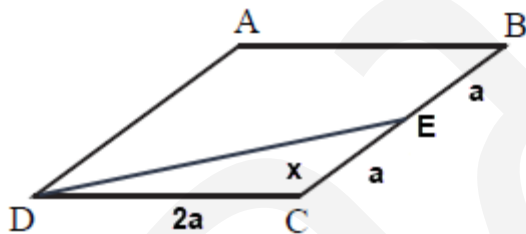
$$-5 \cos x + 4 = 0$$

$$\cos x = \frac{4}{5}$$

קיבלנו ש-זווית C חדה, אבל כאמור גודלה של הזווית לא השפיע על אופן פתירת התרגיל.

בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$ הפונקציה $\cos x$ יורדת, ולכן הפונקציה $-5 \cos x + 4$ עולה,

ועוברת משליליות לחיוביות, ולכן כאשר $\cos x = \frac{4}{5}$ מתקבל מינימום.



$$\cos x = \frac{4}{5} \rightarrow \sin x = +\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$DE = \sqrt{\frac{90}{\sin x} - \frac{72 \cos x}{\sin x}}$$

$$DE = \sqrt{\frac{90}{\frac{3}{5}} - \frac{72 \cdot \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}}$$

$$DE = 3\sqrt{6}$$

תשובה: האורך המינימלי של הקטע DE הוא $3\sqrt{6}$.