

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

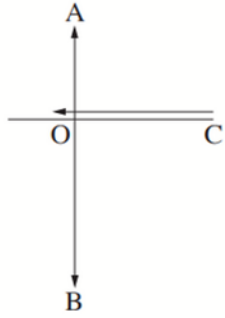
קיץ תשפ"ג, 2023, מועד ב, שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.





1. הנקודה A נמצאת מצפון לנקודה O והנקודה B נמצאת מדרום לנקודה O. הנקודה C נמצאת ממזרח לנקודה O, במרחק של 12 ק"מ ממנה, כמתואר בסרטוט. ביום ראשון יצא אורי להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה A. באותו הזמן יצאה סמדר לריצה מן הנקודה C לכיוון הנקודה O. מהירות הריצה של סמדר גדולה פי 3 ממהירות ההליכה של אורי. נתון כי ברגע שהגיע אורי לנקודה A, המרחק האווירי בינו לבין סמדר היה  $\sqrt{424}$  ק"מ. המהירויות של אורי ושל סמדר קבועות.

- א. מצאו את המרחק שהלך אורי ואת המרחק שרצה סמדר ביום ראשון, אם נתון שסמדר חלפה בריצתה על פני הנקודה O. באותו יום יצא בועז להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה B. בועז יצא להליכה 20 דקות לאחר שיצא אורי להליכה. מהירות ההליכה של בועז הייתה קבועה וגדולה ב-50% ממהירות ההליכה של אורי. כאשר הגיע אורי לנקודה A, המרחק בינו לבין בועז היה 23 ק"מ, ובאותו רגע שניהם עצרו.
- ב. מצאו את מהירות ההליכה של אורי ואת מהירות ההליכה של בועז. ביום שני יצאו אורי ובועז להליכה באותו הזמן. כל אחד מהם יצא מאותה הנקודה שבה עצר ביום ראשון, והמשיך ללכת באותו הכיוון שהלך ביום ראשון. בועז הקטין את מהירות הליכתו ב- $v$  קמ"ש ואורי הגדיל את מהירות הליכתו ב- $v$  קמ"ש. שניהם עצרו כאשר המרחק ביניהם היה 27 ק"מ.
- ג. מצאו כמה דקות הלך אורי ביום שני.

$x =$  מהירות אורי  
 $3x =$  מהירות סמדר  
 $t =$  הזמן/היציאה/ריצה אורי וסמדר

$v$ [קמ"ש]	$t$ [שק"מ]	$s$ [קמ"ש]	
$x$	$t$	$xt$	אורי A → 0
$3x$	$t$	$3xt$	סמדר C → D

משפט毕达哥拉斯 בטרנגון ?  $\Delta AOD$

$$OD^2 + OA^2 = AD^2$$

$$(3xt - 12)^2 + (xt)^2 = 424$$

$$9(xt)^2 - 72(xt) + 144 + (xt)^2 = 424$$

$$10(xt)^2 - 72(xt) - 280 = 0$$

$$xt = 10$$

המרחק שהלך אורי הוא 10 ק"מ והמרחק שהלכה סמדר 30 ק"מ

למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**





S [ק"מ]	T [שק"מ]	V [ק"מ/ש]	
$10 = xt$	$t$	$x$	אורי $0 \rightarrow A$
13	$\frac{13}{1.5x}$	$1.5x$	קובץ

מאתר אבירוק גינים הוא 23 ק"מ ואורי  
הסטיק אצבור 10 ק"מ, נ"מ אסיק  
קובץ עברו 13 ק"מ.  
מאתר וקובץ יצא  $\frac{1}{3}$  שעה מאתרו יורג,  
נוסף עמטן שלו את כער הימני אנשוה  
עמטן אורי.

$$\frac{13}{1.5x} + \frac{1}{3} = t$$

ע"כ עמטן קובץ :  $tx = 10$

$$\frac{13}{1.5x} + \frac{1}{3} = \frac{10}{x} \quad | \cdot 3x$$

$$26 + x = 30$$

$$x = 4 \text{ ק"מ}$$

מתיכור אורי - 4 ק"מ, מתיכור קובץ - 6 ק"מ



ע לאטור ובמרוחק קינים כיום א' היה 23 ק"מ, נמנן ליהסיק  
שיחז הם הבקצנו 4 ק"מ נוספים.

S [ק"מ]	T [שנה]	V [ק"מ]	
$k(4+v)$	$k$	$4+v$	אורי
$k(6-v)$	$k$	$6-v$	קולר

$$k(4+v) + k(6-v) = 4$$

$$kS = k \text{ הגבינה של אורי וקולר}$$

$$k(4+v+6-v) = 4$$

$$10k = 4$$

$$k = \frac{4}{10}$$

$$k = \frac{2}{5}$$

אורי הילק  $\frac{2}{5}$  טעג שינן 24 בקולר





2. נתונה סדרה חשבונית  $a_1, a_2, \dots, a_{3n}$  שבה  $3n$  איברים, וההפרש שלה הוא  $d$ .

נסמן ב-  $S_n^*$  את הסכום של  $n$  האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי  $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$ .

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של  $n$  האיברים האמצעיים שווה ל-0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים  $a_1 = 19 \cdot |d|$ .

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה:  $a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3n-4}$ .

סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 54.

ד. מצאו את  $d$ .

האזר הבטחון של  $n$  האיברים האמצעיים הוא  $a_{n+1}$  ולכן

2א. 
$$S_n^* = \frac{n(2a_{n+1} + (n-1)d)}{2}$$

$$S_n^* = \frac{n(2(a_1 + nd) + (n-1)d)}{2} \rightarrow \frac{n(2a_1 + (3n-1)d)}{2}$$

$$S_{3n} = \frac{3n(2a_1 + (3n-1)d)}{2} \rightarrow S_{3n} = 3 \cdot S_n^* \rightarrow S_n^* = \frac{1}{3} S_{3n}$$

פ. 
$$S_n^* = 0 \rightarrow \frac{n(2a_1 + (3n-1)d)}{2} = 0 \rightarrow n(2a_1 + (3n-1)d) = 0$$

$$2a_1 + (3n-1)d = 0 \rightarrow d = \frac{-2a_1}{3n-1}$$

המספר הילי איננו 0 כי  $a_1$  הנוני שלילי ולכן **הניש הסדרה שלילי**

ז.  $2a_1 + (3n-1)d = 0$  קיבלנו  $d = \frac{-2a_1}{3n-1}$

$2 \cdot 19|d| + (3n-1)d = 0$

$38 \cdot (-d) + (3n-1)d = 0 \quad |d| \neq 0$



$$-38 + 3n - 1 = 0$$

$$3n = 39$$

$$\boxed{39} \quad \text{הוא קצרה האיקרא האוסר}$$

9. נמצאו את אוסר האיקרא סניחין.

$$35 = 2 + (n-1) \cdot 3$$

$$11 = n-1$$

$$n = 12$$

$$S_{12} = \frac{12(2 \cdot a_2 + (12-1) \cdot 3)}{2} \rightarrow$$

$$\frac{12(2(a_1 + b) + 33b)}{2} = S_4$$

$$12(2(-19b + b) + 33b) = 108$$

$$-36b + 33b = 9$$

$$\boxed{b = -3}$$



3. עיתון יומי המופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל ביתם בכל יום עד השעה 6:00.

מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן.

כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא.

מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא  $\frac{2}{3}$ ,

וההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא  $\frac{5}{7}$ .

נסמן ב- $p$  את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה.

בוחרים באקראי אחד מן המנויים.

א. הביעו באמצעות  $p$  את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5 ממספר המנויים שגרים בתל אביב וקיבלו את העיתון בזמן.

את העיתון בזמן.

ב. כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מנויים.

ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מהם גרים בחיפה?

3 ב.  $P(A) =$  מנוי שקיבל את העיתון בזמן

$P(\bar{A}) =$  מנוי שלא קיבל את העיתון בזמן

$P(B) =$  גרים בחיפה

$P(\bar{B}) =$  גרים בתל אביב

$P(A|B) = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3} \quad P(B) = p \quad \rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{2}{3}p$

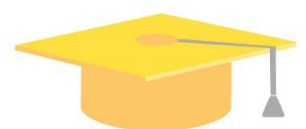
$P(B|A) = \frac{5}{7} \rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{5}{7} \rightarrow \frac{\frac{2}{3}p}{P(A)} = \frac{5}{7} \rightarrow P(A) = \frac{14}{15}p$

$P(A \cap \bar{B}) = \frac{14}{15}p - \frac{2}{3}p = \frac{4}{15}p$

	$P(\bar{A})$	$P(A)$	
$P$		$\frac{2}{3}p$	$P(B)$
		$\frac{4}{15}p$	$P(\bar{B})$
1		$\frac{14}{15}p$	

ג.  $P(\bar{B} \cap \bar{A}) = 1.5 P(\bar{B} \cap A)$

$P(\bar{B} \cap \bar{A}) = 1.5 \cdot \frac{4}{15}p = \frac{2}{5}p$



$$P(\bar{A} \cap B) = P - \frac{2}{3}P = \frac{1}{3}P$$

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{14}{15}P$$

$$P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})$$

$$\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}P = 1 - \frac{14}{15}P$$

$$P = \frac{3}{5}$$

$$P(A) = \frac{14}{15} \cdot \frac{3}{5} = \frac{14}{25} \longrightarrow$$

56% מן המנויים קראו את העיתון במלואו.

$$c. P(B|A) \cdot P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} \cdot \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

$$\frac{\frac{6}{25}}{\frac{11}{25}} \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{25}} = \frac{30}{121}$$

הסתברות שיש עיתון ויש קריאה או אין עיתון ואין קריאה

$$P\left(\begin{matrix} \text{יש עיתון} \\ \text{או אין עיתון} \end{matrix} \mid \begin{matrix} \text{יש קריאה} \\ \text{או אין קריאה} \end{matrix}\right) = \frac{30}{121}$$

	$P(\bar{A})$	$P(A)$	
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$P(B)$
$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$P(\bar{B})$
1	$\frac{11}{25}$	$\frac{14}{25}$	

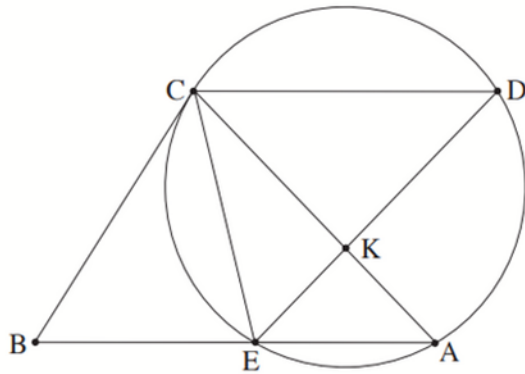
$$3. P(B|\bar{A}) = \frac{5}{11}$$

$$P\left(\begin{matrix} \text{יש קריאה} \\ \text{אם אין עיתון} \\ \text{אז לא} \end{matrix} \mid \begin{matrix} \text{יש קריאה} \\ \text{או אין קריאה} \end{matrix}\right) = 1 - P_6(5) - P_6(6) = 1 - \left(\binom{6}{5} \left(\frac{5}{11}\right)^5 \cdot \frac{6}{11} + \binom{6}{6} \left(\frac{5}{11}\right)^6 \cdot \frac{6}{11}\right)$$

אם היוקר

$$P\left(\begin{matrix} \text{יש קריאה} \\ \text{אם אין עיתון} \\ \text{אז לא} \end{matrix} \mid \begin{matrix} \text{יש קריאה} \\ \text{או אין קריאה} \end{matrix}\right) = 1 - (0.0635 + 0.0088) = 0.927$$





4. מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C, וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו-A, כמתואר בסרטוט. הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA. המיתרים ED ו-AC נחתכים בנקודה K.
- א. הוכיחו:  $\triangle CEB \sim \triangle DCE$ .
- נתון:  $ED = 7$ ,  $AK = 3$ .
- נסמן את שטח המשולש CEK ב-S.
- ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.
- נתון:  $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$ .
- ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.
- הנקודה O היא מרכז המעגל.
- ד. הוכיחו:  $\angle COE = \angle CKE$ .
- נתון:  $\angle CAE = 45^\circ$ .
- ה. הסבירו מדוע הנקודות E, C, O ו-K נמצאות על מעגל אחד.

פתרון:

נימוק	אלצה	מספור
נתון	BC    EA	①
נתון	CD    EA	②
שלוש זוויות קוין שיש להן אהות...	$\angle BCE = \angle CDE$	③
אפי' זוויות מתחלפות קוין	$\angle BEC = \angle DCE$	④
שתיים מהזוויות קוין		
שלוש זוויות קוין		
שלוש זוויות קוין		
שלוש זוויות קוין		





<p style="text-align: center;"><u>ניחוד</u></p> <p>משפט צ'ייון S.S אבי 4, 3</p>	<p style="text-align: center;"><u>טענה</u></p> <p><math>\Delta CEB \sim \Delta DCE</math></p>	<p style="text-align: center;">מספר</p> <p style="text-align: center;">(5)</p> <p style="text-align: center;">מ.ד.א'</p>
<p style="text-align: center;">(תו)</p> <p style="text-align: center;">נ"ו</p> <p style="text-align: center;">נתון</p> <p>זווית בידעית הנשאו - ע' אורה דם שאו - זווית מתחלפת קון ישריק נקבוליק שול זי זאו. אבי 2 כזו המתקרה אפי 9, 10 במשולש הזו זווית שול מונח דאגן שול אבי 7, 11 חיסור האגיק. אבי 128 במשולשיק אגלי אמו זוקה יחט השטחיק שולה איהס הקסיסיק. אבי 12, 13</p>	<p><math>S_{CEK} = S'</math></p> <p><math>AK = 3</math></p> <p><math>ED = 7</math></p> <p><math>\cancel{CAE} = \cancel{CDE}</math></p> <p><math>\cancel{AED} = \cancel{EDC}</math></p> <p><math>\cancel{AEK} = \cancel{KAE}</math></p> <p><math>EK = AK = 3</math></p> <p><math>DK = 7 - 3 = 4</math></p> <p><math>\frac{S_{CKD}}{S_{CEK}} = \frac{DK}{EK}</math></p>	<p style="text-align: center;">(6)</p> <p style="text-align: center;">(7)</p> <p style="text-align: center;">(8)</p> <p style="text-align: center;">(9)</p> <p style="text-align: center;">(10)</p> <p style="text-align: center;">(11)</p> <p style="text-align: center;">(12)</p> <p style="text-align: center;">(13)</p> <p style="text-align: center;">(14)</p>





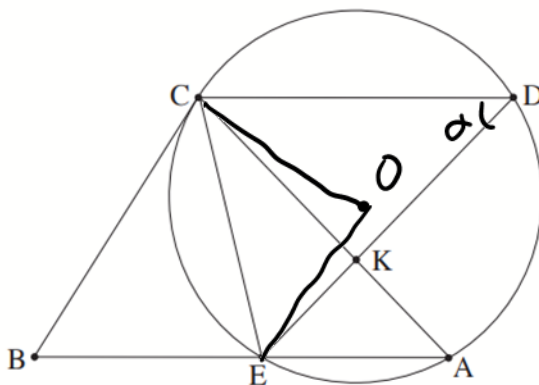


ניחיה	טענה	מספר
<p>נתיב</p> <p>חיקור שלחיים. אבי 6, 15</p> <p>יחס קאנג-מתאילת בשאלות 5, 18</p> <p>יחס הטאחיק של שולשיק קוואיב שואה פיחם הקאנג-הטאילת הריבוי. אבי 5, 18 חישוב. אבי 7, 16, 17, 19</p>	<p><math>S_{CDE} = \frac{4}{3} S</math></p> <p><math>BC = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{32}}</math></p> <p><math>S_{CDE} = \frac{7}{3} S</math></p> <p><math>\frac{CE}{DC} = \frac{EB}{CE} = \frac{CB}{DE}</math></p> <p><math>\frac{S_{CEB}}{S_{DCE}} = \left(\frac{CB}{DE}\right)^2</math></p> <p><math>S_{CEB} = \frac{17\sqrt{2}}{96} S</math></p>	<p>(15) מ.ס.ק'</p> <p>(16)</p> <p>(17)</p> <p>(18)</p> <p>(19)</p> <p>(20) מ.ס.ז'</p>
<p>נתיב</p> <p>סימון</p> <p>אבי 7, 10, 11, 22</p> <p>לוי-מכנס-מצולה פי 2 מכוי-היק-הנשטת ע לא-הקלת. אבי 21, 22</p>	<p>0 מכנס המצול</p> <p><math>\angle CDE = \alpha</math></p> <p><math>\angle CAE = \angle DEA = \alpha</math></p> <p><math>\angle COE = 2\alpha</math></p>	<p>(21)</p> <p>(22)</p> <p>(23)</p> <p>(24)</p>



נימוך	טענה	מספור
<p>צוויי חיצונית במשולש שווה אסכולק שתי הצלעות שאינן נגזרות זה. לפי 23 לפי 25, 24</p>	<p><math>\angle CAE = \alpha</math>  <math>\angle COE \neq \angle CAE</math></p>	<p>(25)  (26) מ.ש.ר 3</p>
<p>מיון חישוק. לפי 27, 26, 25 במשולש שווה הצלעות ישרה ושלשונן - זה הוטר. לפי 28</p>	<p><math>\angle CAE = 45^\circ</math> <math>\angle COE = \angle CAE = 90^\circ</math>  ס, ע, א זה משולש אה 3 ע ע א הוטר שווה</p>	<p>(27) (28) (29) מ.ש.ר ה'</p>

בניית גב תוספת:

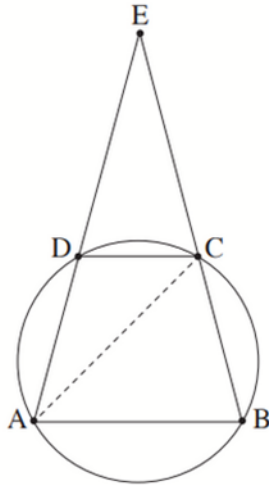


למידע על פסיכומטרי  
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.







5. נתון טרפז  $ABCD$  ( $AB \parallel DC$ ), החסום במעגל.

המשכי הצלעות  $AD$  ו- $BC$  נפגשים בנקודה  $E$ , כמתואר בסרטוט.

נתון:  $\angle ACB = 60^\circ$ .

נסמן:  $\angle CDE = \alpha$ ,  $AC = k$ .

א. מצאו את זווית המשולש  $ACE$  (הביעו באמצעות  $\alpha$  אם יש צורך).

ב. הביעו באמצעות  $\alpha$  ו- $k$  את אורכי הצלעות  $AB$  ו- $DC$ .

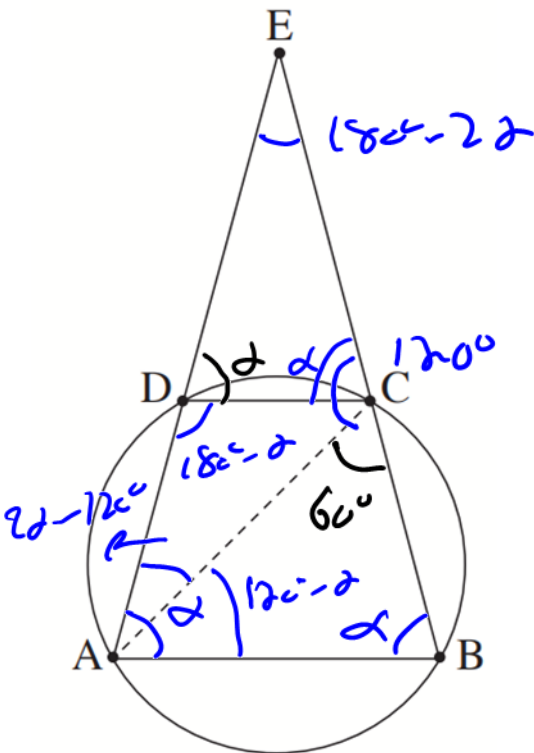
נתון כי שטח המשולש  $ABE$  גדול פי 3 משטח המשולש  $DCE$ .

ג. מצאו את גודל הזווית  $\alpha$ .

ד. מצאו את הערך של  $k$  שבעבורו אורך התיכון  $EC$  במשולש  $AEC$  הוא  $\sqrt{63}$ .

פתרון:

א. נוסים א- הנתונים  
 זשואט, ונסליק א-  
 הצוויל ה נוס בר-  
 הטרפז שווה שוקיים שלוק  
 שהוה הכוונ ב-גזר.  
 זכנו י.



$\angle EAB = \angle EBA = \angle DCB = \alpha$

$\angle ACE = 120^\circ$

$\angle AEC = 180^\circ - 2\alpha$

$\angle EAC = 2\alpha - 120^\circ$

$\angle ADC = 180^\circ - \alpha$

גשוקה (1) שוויל שולש ACE

$(120^\circ, 180^\circ - 2\alpha, 2\alpha - 120^\circ)$



$$\frac{K}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin 60^\circ}$$

:  $\triangle ABC$  (2) .

$$AB = \frac{\sqrt{3}K}{2\sin \alpha}$$

$$\frac{K}{\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{DC}{\sin(2\alpha - 120^\circ)}$$

:  $\triangle ACD$

$$DC = \frac{K \sin(2\alpha - 120^\circ)}{\sin \alpha}$$

$$S_{ABCE} = 3 \cdot S_{DCE} \quad \text{? נתון :}$$

השטח של ABC הוא פי 3 משטח DCE

אם נניח ששטח DCE הוא x אז שטח ABC הוא 3x

$$\left(\frac{AB}{DC}\right)^2 = \frac{S_{ABCE}}{S_{DCE}} = 3$$

$$\frac{AB}{DC} = \sqrt{3}$$

$$AB = \sqrt{3} \cdot DC$$





6. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x - 3)^2}$ ,  $0 < a < 3$  הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות  $a$  אם יש צורך.

- (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .
- (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה  $f(x)$ .
- (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים.
- (4) מצאו את שיעור ה- $x$  של נקודת הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגה.
- (5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .

נתונה הפונקצייה  $g(x) = \frac{x^2}{(x - 3)^2}$ , המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה  $f(x)$ .

- ב. (1) הוכיחו כי גרף הפונקצייה  $g(x)$  נמצא כולו מעל גרף הפונקצייה  $f(x)$ .
- (2) הביעו באמצעות  $a$  את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ , על ידי הישר  $x = 1$  ועל ידי ציר ה- $y$ .

פתרון:

א.1. תחום הגדרה: נבדוק: מטן: שונה מאכס:  $x - 3 \neq 0 \Rightarrow (x - 3)^2 \neq 0$   
 $x \neq 3$

א.2. אסימפטוטה מאונכת לפני ה- $x$ :

מתחום הגדרה  $x = 3$  מאכס את המכנה אך לא את המונה.  
 יסדר: נטן:  $3 < a < 3$  לכן המונה  $x^2 - a^2$  שונה מאכס  
 צדק  $x = 3$ :  $3 < a < 3$

$$3^2 - a^2 = (3 + a)(3 - a) \neq 0$$

לסיכום:  $x = 3$  אסימפטוטה אנכית לציר  $x$  של הפונקציה  $f(x)$   
 (שן  $x = 3$  נק' יחידה על ציר ה- $x$  בנ"ל).

המשק בעמ' הקא...



אסימטוטה אנכית לציר ה-y:  
 יסונקציה f הינה כונקציה רצוניתית עכן יש לו זלול היוט  
 אסימטוטה אנכית לציר ה-y יחידה.

עקור ערכי x ושלטקבים אטונסול:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - a^2}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot (1 - \frac{a^2}{x^2})}{x^2 \cdot (1 - \frac{3}{x})^2} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

עקור ערכי x ושלטקבים אטונסול:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - a^2}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot (1 - \frac{a^2}{x^2})}{x^2 \cdot (1 - \frac{3}{x})^2} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

מסקנה: **y=1** אסימטוטה אנכית לציר ה-y בין עקור  $x \rightarrow \infty$

ובין עקור  $x \rightarrow -\infty$ .

\* הארה: ניתן להיווט קרע לשם עזיטר אקולר ערכי.

א.ב.ז. תיטק גול f ערט צו x:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - a^2}{(x-3)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - a^2 = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \xrightarrow{a > 0} x = \pm a$$

**$(-a, 0), (a, 0)$**

חיתק גול f ערט צו y:

$$f(0) = \frac{0^2 - a^2}{(0-3)^2} = -\frac{a^2}{9} \Rightarrow \text{  **$(0, -\frac{a^2}{9})$**  }$$

\* הארה: מונקן  $a < 3$  עקור  $0 < -a < -3$  וכן  $-1 < -\frac{a^2}{9} < 0$

המשק בעמֵה הקא...



$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x-3)^2}$$

א.4. נקודת קיצון של f: נמצא:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-3)^2 - (x^2 - a^2) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}$$

(כסל את הביטוי האמצעי של הנכדית:

$$f'(x) = \frac{2(x-3) \cdot [x(x-3) - (x^2 - a^2)]}{(x-3)^4} = \frac{2(x-3) \cdot [x^2 - 3x - x^2 + a^2]}{(x-3)^4} = \frac{2(x-3) \cdot [-3x + a^2]}{(x-3)^4}$$

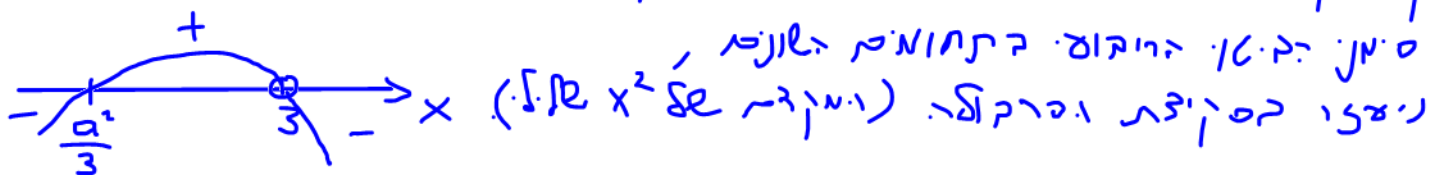
נשוו את הנכדית לאפס עם נמנא נק' קיטיות:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(x-3) \cdot [-3x + a^2]}{(x-3)^4} = 0 \Rightarrow 2(x-3) \cdot [-3x + a^2] = 0$$

$\swarrow$  או  $\searrow$   
 $x = 3$  לא קיטיות הייגורה  
 $3x = a^2$   
 $x = \frac{a^2}{3}$

נשיב לב כי הביטוי  $\frac{2}{(x-3)^4}$  חוקי לכל  $x \neq 3$ .

עכנ סימן הנכדית f קיתחוב זר כסימן הביטוי היקבועי  $(x-3) \cdot [-3x + a^2]$



\* יאוי: נתון  $a < 3$  וכן  $a^2 < 9$  ומכאן  $3 < \frac{a^2}{3} < 3$ .

טביד  $x = \frac{a^2}{3}$  הנכדית מתחפה סימן משליל לסימן חיובי דכך אכס.

עכנ f עוקית מרובת לעליה סביב צדק x זי. מסין: שיצור היא של נק' ימיומח של הרקזיה f:

$$x_{min} = \frac{a^2}{3}$$

המשק בעמ' הקא...

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

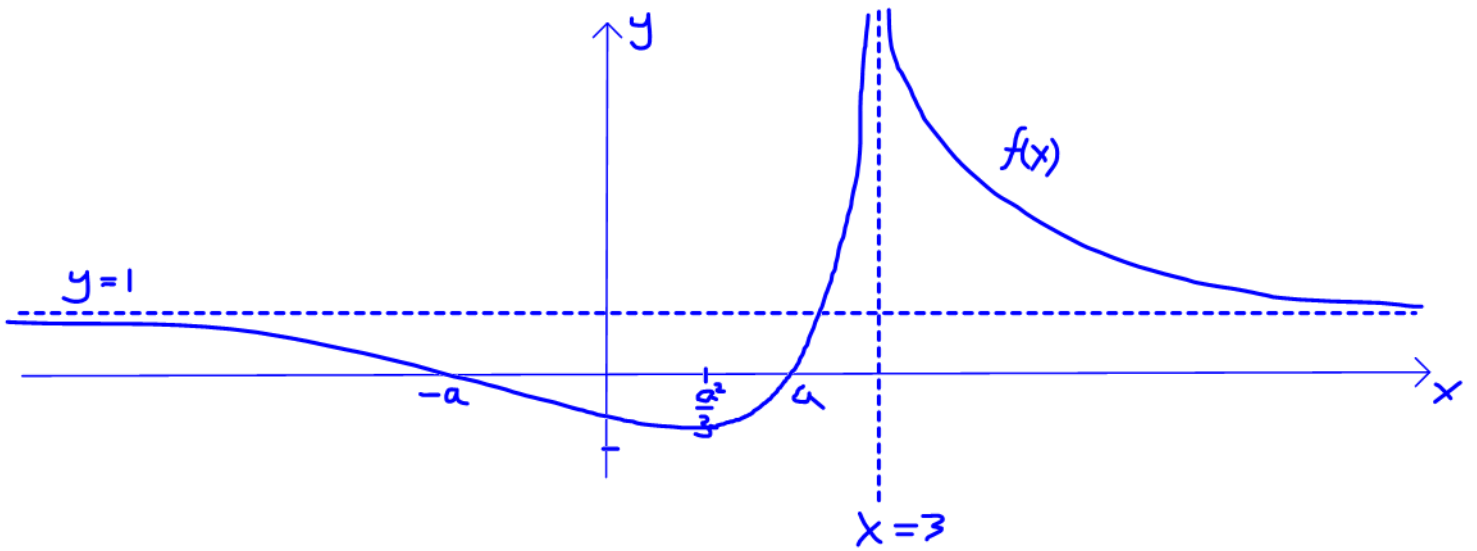
**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**

אל תתפשר עליה.





א.ו.ס. עבד סעיף המקייה עם כור נשרט) סקזיה של גרף הפונקציה f :



נתונה הפונקציה  $g(x) = \frac{x^2}{(x-3)^2}$ , המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקציה  $f(x)$ .

ב. (1) הוכיחו כי גרף הפונקציה  $g(x)$  נמצא כולו מעל גרף הפונקציה  $f(x)$ .

הוכחה: ניאני  $f(x) < g(x)$  לכל  $x \neq 3$ .

$$\frac{x^2 - a^2}{(x-3)^2} < \frac{x^2}{(x-3)^2} \quad / \cdot (x-3)^2 > 0$$

$$x^2 - a^2 < x^2 \quad / -x^2 \quad (מש)$$

$$-a^2 < 0 \quad / +a^2$$

$$0 < a^2$$

סטוק אמת לכל  $x \neq 3$  שכן נאן  $3 < a < 0$  לכל  $0 < a^2$ .

היאנו שאי השוויון מתקיים לכל  $x \neq 3$ .  
מסקנה: גרף  $g(x)$  נמצא כולו מעל גרף  $f(x)$ .  
משלם בסעיף ב.ו.

המשק בעצם הקא...

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
אל תתפשר עליה.



ב. (2) הביעו באמצעות  $a$  את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ , על ידי הישר  $x=1$  ועל ידי ציר ה- $y$ .

$$S = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 \left( \frac{x^2}{(x-3)^2} - \frac{x^2 - a^2}{(x-3)^2} \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{a^2}{(x-3)^2} \right) dx =$$

$$= a^2 \int_0^1 (x-3)^{-2} dx = a^2 \cdot \left[ \frac{(x-3)^{-1}}{-1 \cdot 1} \right]_0^1 = a^2 \cdot \left[ -\frac{1}{x-3} \right]_0^1 =$$

$$= a^2 \cdot \left[ -\frac{1}{1-3} + \frac{1}{0-3} \right] = a^2 \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right] = a^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$\boxed{S = \frac{1}{6} \cdot a^2}$$

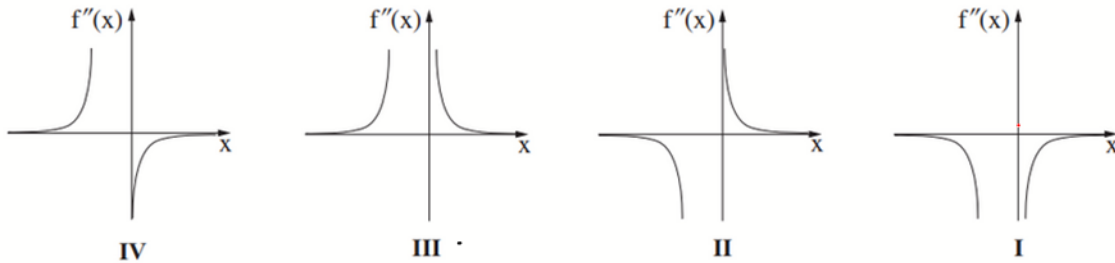
השטח הנדרש:





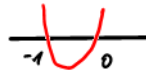
7. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+x}}$

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .
  - (2) האם גרף הפונקצייה  $f(x)$  חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.
  - (3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה  $f(x)$ .
  - (4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה  $f(x)$ .
- נתון כי לפונקצייה  $f(x)$  אין נקודות פיתול.
- ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .
  - ג. היעזרו בגרף הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו איזה מן הגרפים IV-I שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה  $f''(x)$ . נמקו את קביעתכם.
  - ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה  $f''(x)$ , על ידי ציר ה- $x$  ועל ידי הישרים  $x=1$  ו- $x=2$ .



7א(1)  $x^2 + x > 0$

$x(x+1) = 0$   
 $x = 0$     $x = -1$



$-1 < x$    **או**    $x > 0$

14(2) אין חיתוך עם ציר  $x$  כי אין חיתוך עם ציר  $x=0$  או  $x=-1$  הנקודות היחידות

$\frac{4x}{\sqrt{x^2+x}} = 0 \rightarrow x = 0$    **אין חיתוך עם ציר  $x$**   
אם  $x=0$  הנקודה

**זהו הפתרון היחיד**

14(3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}}} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{4}{\sqrt{1}} = 4$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{-\sqrt{x^2}}} = \frac{4}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{4}{-\sqrt{1}} = -4$$

$x = -1$  אולם הנקודה איננה גורם מכריע אלא נקודה שבה  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$  ו- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -4$ .  
 במקרה כזה, נקודה זו איננה נקודה של קפיצה אלא נקודה של קפיצה בלתי-רציפה.

$$f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x(x+1)}} \rightarrow f(x) = \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}\sqrt{x+1}} \rightarrow f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \rightarrow \frac{0}{2}$$

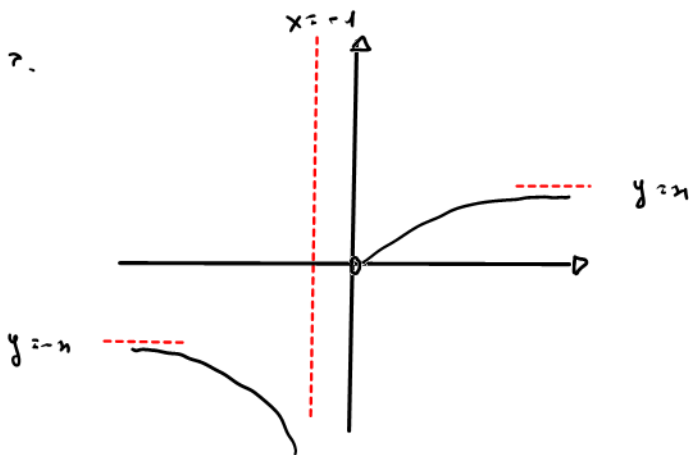
$x = -1$   $y = 2$   $y = -4$ , יש אסימטות אנכית ב- $(-1, 0)$  ו- $(0, 0)$ .

$$f'(x) = \frac{4\sqrt{x^2+x} - 4x \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}}{x^2+x} \rightarrow \frac{4(x^2+x) - 2x(2x+1)}{\sqrt{x^2+x} \cdot (x^2+x)} \rightarrow \frac{2x}{\sqrt{(x^2+x)^3}}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$   
(נקודה של מקסימום)

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x > 0$
$f'(x)$	-	///	+
$f(x)$	↘	///	↗

$x > 0$ : עולה  
 $x < -1$ : יורד



לפיכך, אנו רואים כי הפונקציה היא פונקציה זוגית. נקודה זו היא נקודה של מקסימום. נקודה זו היא נקודה של מקסימום. נקודה זו היא נקודה של מקסימום.  
 נקודה זו היא נקודה של מקסימום. נקודה זו היא נקודה של מקסימום. נקודה זו היא נקודה של מקסימום.

למידע על פסיכומטרי  
 ביואל גבע ←

**הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.**  
**אל תתפשר עליה.**



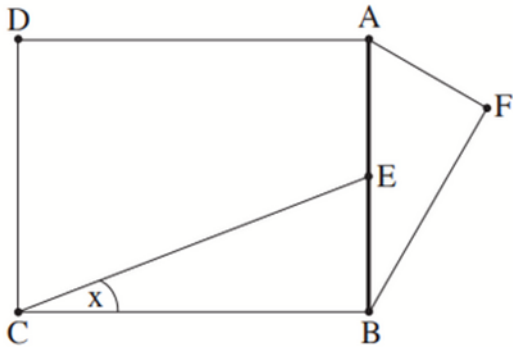
$$3. \int_1^2 -f'(x) dx \rightarrow -f'(x) \Big|_1^2 \rightarrow f'(1) - f'(2) \rightarrow \frac{2}{\sqrt{2^3}} - \frac{4}{\sqrt{6^3}}$$

$$S = 0.4319$$

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.





8. הנקודה E היא אמצע הקטע AB.

על הקטע AB בונים מלבן ABCD

ומשולש ישר זווית AFB,  $\angle AFB = 90^\circ$ , כמתואר בסרטוט.

נתון:  $\angle ECB = x$ ,  $\angle FAB = 2x$ .

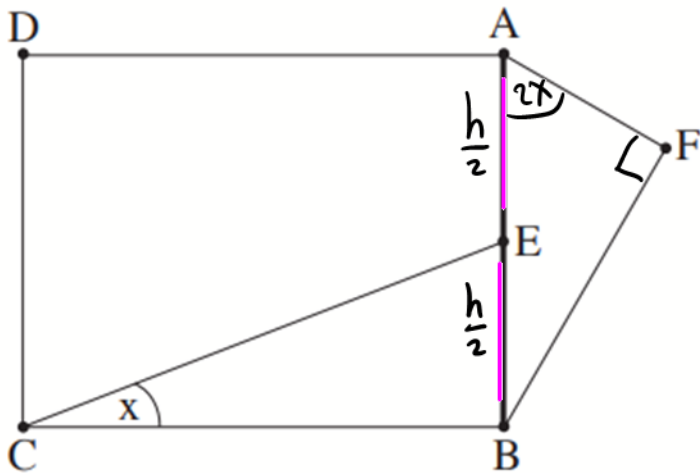
נסמן את אורך הקטע AB ב- $h$ .

א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור  $x$ ? הסבירו את תשובתכם.

ב. הביעו באמצעות  $x$  ו- $h$  את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF.

ג. מצאו את הערך של  $x$  שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.

ד. בעבור הערך של  $x$  שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB.



כ.  $\angle FAB = 2x$  חזק מאחר והיא

נמצאת בנישולש ישר זווית

$$0 < 2x < 90$$

$$0^\circ < x < 45^\circ$$

$\triangle CEB$

$$\sin(x) = \frac{\frac{h}{2}}{CE}$$

$$CE = \frac{h}{2\sin x}$$

$\triangle AFB$

$$\cos(2x) = \frac{AF}{h}$$

$$AF = h \cos(2x)$$

ג.

$$CE - AF = \frac{h}{2\sin x} - h \cos(2x)$$



עכשיו נבדוק את פונקציית ההכנסה בסוף קורס.

כעת נחקור אותה ונמצא

את הנקודות האפשריות.

$$D(x) = \frac{h}{2\sin x} - h\cos(2x)$$

$$D'(x) = \frac{0 - 2h\cos x}{4\sin^2 x} + 2h\sin(2x)$$

$$D'(x) = 2h\sin 2x - \frac{h\cos x}{2\sin^2 x}$$

$$D'(x) = \frac{4h\sin^2 x \sin 2x - h\cos x}{2\sin^2 x}$$

$$D'(x) = \frac{8h\sin^3 x \cos x - h\cos x}{2\sin^2 x}$$

$$D'(x) = \frac{h\cos x (8\sin^3 x - 1)}{2\sin^2 x} = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = 90 + 180k$$

(כאן)

$$8\sin^3 x - 1 = 0$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{8}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = 30 + 360k$$

$$x = 150 + 360k$$

(כאן)

$$x = 30^\circ$$

x	0	29°	30°	31°	45
f'(x)		-	0	+	
f(x)		↘	min	↗	



$$\frac{S_{ABCD}}{S_{\Delta AFB}} = \frac{AB \cdot BC}{\frac{AB \cdot AF \cdot \sin(2x)}{2}} = \frac{\frac{h}{2 \tan(x)}}{\frac{h \cos(2x) \sin(2x)}{2}} = \frac{1}{\tan x \cos 2x \sin 2x} = \frac{1}{\tan(30) \sin 60 \cos 60} = 4$$

\*

ΔCBE

$$\tan(x) = \frac{\frac{h}{2}}{BC}$$

$$BC = \frac{h}{2 \tan(x)}$$

יחס גובהים הוא 4

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.

