

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג, 2023, מועד א, שאלון: 35581

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.

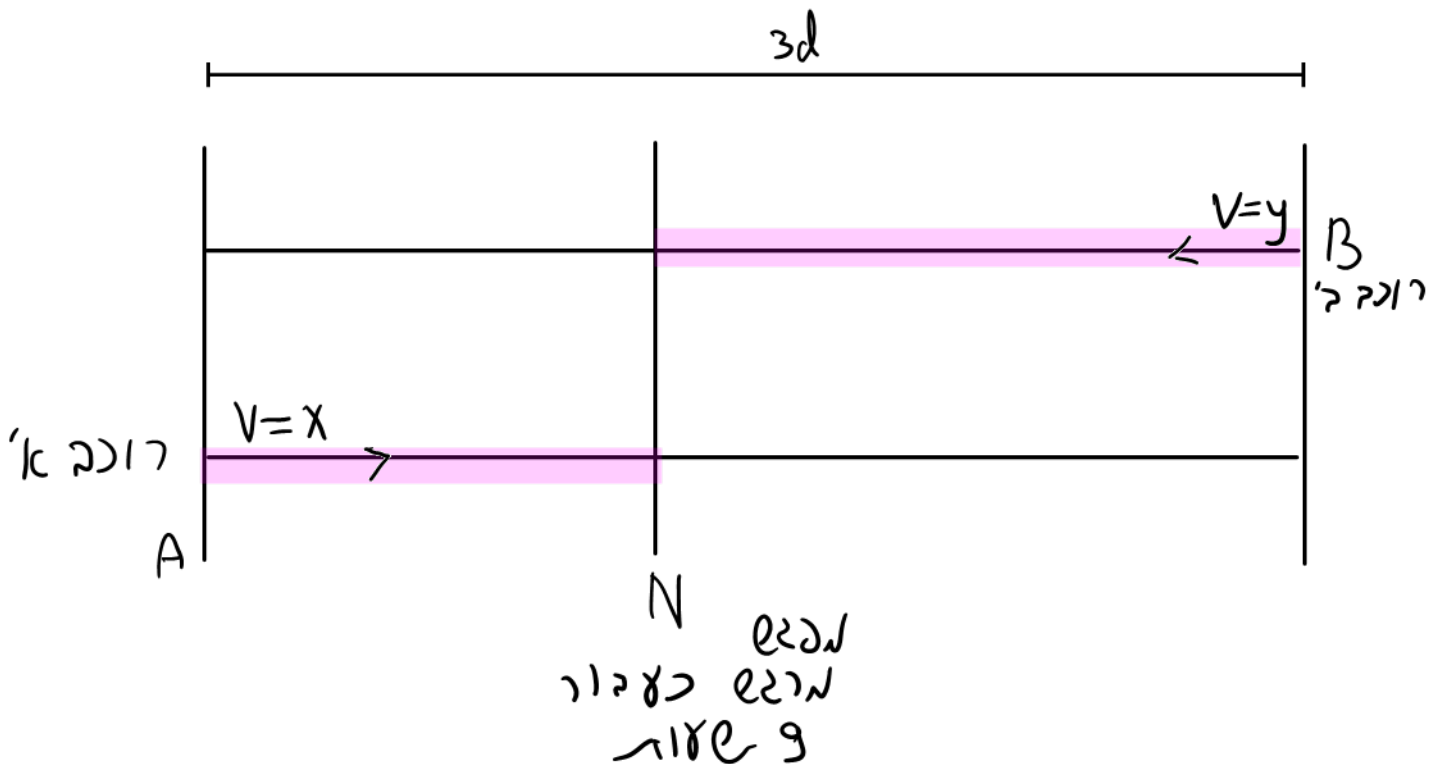


$[v]$ S	$[v]$ T	$[v]$ U	
d	$\frac{d}{x}$	x	רוכב א' A → C
d	$\frac{d}{y}$	y	רוכב ב' B → E

נאמר שרוכב ב' יוצא 2.5 אחרי רוכב א'

לכן: $\frac{d}{y} + 2.5 = \frac{d}{x}$

נבין את נתוני היום השני לרוכב סקילה:



$[\vec{r}]_S$	$[e]_T$	$[\frac{r}{e}]_V$	
$9x$	9	x	רוכב א' $A \rightarrow N$
$9y$	9	y	רוכב ב' $B \rightarrow N$

כיצוד, הרוכבים (נגשו כעבור 9 שעות וזמן סיום היזרכים שווה $3d$.

$$9x + 9y = 3d$$

כעג נטוו. אר לערכו הישוואל:

$$\begin{cases} \text{I} & \frac{d}{y} + 2.5 = \frac{d}{x} \\ \text{II} & 9x + 9y = 3d \quad | :3 \\ & 3x + 3y = d \end{cases}$$

$$\frac{3x+3y}{y} + 2.5 = \frac{3x+3y}{x}$$

$$3 \cdot \frac{x}{y} + 3 + 2.5 = 3 + 3 \cdot \frac{y}{x}$$

$$\frac{x}{y} = t$$



$$3t + 2.5 = \frac{3}{t}$$

$$3t^2 + 2.5t - 3 = 0$$

$$t = \frac{2}{3} \quad t = \frac{-3}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2y}{3}$$

$$3 \cdot \frac{2y}{3} + 3y = d$$

$$\frac{6y}{3} + 3y = d$$

$$5y = d$$

$$y = \frac{d}{5}$$

מהירות
רוכב
ב'

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{5}$$

$$x = \frac{2d}{15}$$

מהירות
רוכב
א'



כשר לבזוק מהו כרך הנמאן שלקה איוכג א'

עג השעה 18^{30} : $\frac{d}{\lambda} = \frac{d}{\frac{2d}{15}} = \frac{15}{2} = 7.5$ סאור

רוכב א' נסע משק 7.5 שאלו עג השעה

$18^{30} \leftarrow$ רוכב א' יזא בשעה 11^{00}

2

$[v]$ S	$[T]$ א	$[v]$ V	
1	$\frac{15}{2d}$	$\frac{2d}{15}$	רוכב א'
1	$\frac{5}{d}$	$\frac{d}{5}$	רוכב ב'

נמאן שלרוכב א' אוקה 1.5 זקור 'אגר מרוכב ב'

אעבנו 1 ק"מ

$$\frac{30}{15} = \frac{60}{5} + \frac{d}{60}$$

$$450 = 300 + 1.5d$$

$d = 100 \rightarrow 3d = 300$ ק"מ



2. נתונות שתי סדרות הנדסיות איך-סופיות מתכנסות, A ו-B, שכל איבריהן שונים מ-0.

האיבר הכללי של הסדרה A הוא a_n ומנתה היא q_A .

האיבר הכללי של הסדרה B הוא b_n ומנתה היא q_B .

משתי הסדרות ההנדסיות A ו-B בונים סדרה הנדסית איך-סופית מתכנסת חדשה, שאיבריה הם:

$$\dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1}{b_1}, \dots$$

כל שלוש הסדרות, הסדרה A, הסדרה B והסדרה החדשה אינן קבועות.

א. הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו- q_B .

הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה.

ב. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1)–(2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.

(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.

המספרים c_1, c_2, c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.

נתון כי c_2 שווה ל- $c_1 - 1$, ומתקיים גם: $\frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{24}$.

ג. מצאו את c_1 .

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל- c_1 ,

ומתקיים גם: $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$.

ד. מצאו את הערך של q_B .

1c הביעו את המנה של הסדרה החדשה באמצעות q_A ו- q_B .

$$q = \frac{\frac{a_2}{b_2}}{\frac{a_1}{b_1}} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{b_1}{b_2} = q_A \cdot \frac{1}{q_B} = \boxed{\frac{q_A}{q_B}}$$



הסדרה A אינה עולה ואינה יורדת, והסדרה B עולה.

2

ג. בנוגע לכל אחד משני ההיגדים (1)–(2) שלפניכם, קבעו אם הוא נכון או לא נכון ונמקו את קביעתכם.

(1) מנת הסדרה החדשה היא חיובית.

(2) כל איברי הסדרה B הם שליליים.

A הנזכרת מתבוננת מחליפת סימנים $\leftarrow -1 < q_A < 0$

B הנזכרת מתבוננת עולה $\leftarrow 0 < q_B < 1$
איברי הסדרה הם שליליים.

ב (1) q_A ! q_B שווים סימן ולכן הם יהיו התוצאה שלילי לא נכון

ב (2) הסדרה b_n עולה ומתבוננת. עצם הזוגיה הנזכרת מתבוננת מעיז על כך שאיברי הסדרה מתבוננים עולה. מאחר והיא גם עולה, איברי הסדרה מתבוננים עולה נכון



ג המספרים c_1, c_2, c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.

$$\cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{24} \text{ , ומתקיים גם: } -c_1 \text{ שווה ל-} c_2$$

ג. מצאו את c_1 .

$$\text{I } c_3 - c_2 = c_2 - c_1$$

$$\text{II } c_2 = -c_1$$

$$\text{III } \frac{c_1 \cdot c_2}{c_3} = -\frac{1}{24}$$

$$\text{II} \rightarrow \text{I } c_3 - (-c_1) = -c_1 - c_1$$

$$\underline{c_3 = -3c_1}$$

כעת נציב $c_3 = -3c_1$ ב-III

$$\text{III } \frac{c_1 \cdot (-c_1)}{-3c_1} = -\frac{1}{24} \rightarrow \frac{-c_1^2}{-3c_1} = -\frac{1}{24} \rightarrow \frac{c_1}{3} = -\frac{1}{24} \rightarrow \boxed{c_1 = -\frac{1}{8}}$$



3

נתון כי המנה של הסדרה A שווה ל- c_1 ,

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$$

ומתקיים גם:

ד. מצאו את הערך של q_B .

נניח: $q_A = -\frac{1}{8}$

שמו \heartsuit - באף שמו ישנו סכמה אינסופית של הסדרה הנכנסת (איברי $\frac{a_1}{b_1} = \frac{q_A}{q_B}$, נניח $\frac{q_A}{q_B}$)

- באונה אף ישנו סכמה אינסופית של סדרה q_A (איברי $a_1 = \frac{q_A}{q_B}$, נניח q_A)

- באונה אף ישנו סכמה אינסופית של סדרה q_B (איברי $b_1 = \frac{q_A}{q_B}$, נניח q_B)

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots}$$

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}}{1 - \frac{q_A}{q_B}} = \frac{\frac{a_1}{1 - q_A}}{1 - q_B}$$

$$\frac{\frac{a_1}{b_1}}{\frac{q_B - q_A}{q_B}} = \frac{\frac{a_1}{1 - q_A}}{1 - q_B}$$

$$\frac{a_1 q_B}{b_1 (q_B - q_A)} = \frac{a_1 (1 - q_B)}{b_1 (1 - q_A)} \quad | : a_1 | \cdot b_1$$

$$\frac{q_B}{q_B - (-\frac{1}{8})} = \frac{1 - q_B}{1 - (-\frac{1}{8})}$$



$$q_B \cdot \frac{9}{8} = (1 - q_B) \left(q_B + \frac{1}{8} \right)$$

$$9q_B = 8(1 - q_B) \left(q_B + \frac{1}{8} \right)$$

$$9q_B = 8 \left(q_B + \frac{1}{8} - q_B^2 - \frac{1}{8}q_B \right)$$

$$9q_B = 8 \left(-q_B^2 + \frac{7}{8}q_B + \frac{1}{8} \right)$$

$$9q_B = -8q_B^2 + 7q_B + 1$$

$$8q_B^2 + 2q_B - 1 = 0$$

$$q_B = \frac{1}{4}$$

$$q_B = -\frac{1}{2} \text{ נסר}$$



3. במכללה גדולה, הועלתה הצעה לקצר את הפסקת הצוהריים כדי לסיים מוקדם יותר את יום הלימודים. בעקבות זאת ערכו משאל ובו השתתפו כל תלמידי שנה א' וכל תלמידי שנה ב'. על פי תוצאות המשאל התברר כי 80% מן המשתתפים שבעד ההצעה הם תלמידי שנה א'. עוד התברר כי מספר תלמידי שנה א' שבעד ההצעה שווה למספר תלמידי שנה ב' שנגד ההצעה. מבין המשתתפים במשאל לא היו נמנעים. נסמן ב- p את ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה מבין כל התלמידים שהשתתפו במשאל.
- בחרו באקראי אחד מתלמידי שנה ב'. מהי ההסתברות שהוא נגד ההצעה? ידוע כי ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה א' הוא בעד ההצעה, גדולה ב- $\frac{13}{35}$ מן ההסתברות שתלמיד שנבחר באקראי מבין תלמידי שנה ב' הוא בעד ההצעה.
 - חשבו את הערך של p .
 - בחרו באקראי אחד מן המשתתפים במשאל. חשבו את ההסתברות שמתקיים לפחות אחד משני התנאים האלה:
 - המשתתף שנבחר הוא תלמיד שנה ב' II. המשתתף שנבחר בעד ההצעה.
 - בחרו באקראי 5 מן המשתתפים במשאל. ידוע כי כל החמישה שנבחרו הם תלמידי שנה ב'. מהי ההסתברות שלפחות שניים מהם בעד ההצעה וגם לפחות שניים מהם נגד ההצעה?

פתרון:

1. (כמה מיליון ~ איון ~ ג.א.ה):
 $A - \text{מיליון } 3 \text{ ג.א.ה} \in A - \text{מיליון } 2 \text{ ג.א.ה}$
 $B - \text{מיליון } 2 \text{ ג.א.ה} \in B - \text{מיליון } 3 \text{ ג.א.ה}$

נתונים:

$$1) P(B|A) = 0.8 = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.8$$

$$2) P(A \cap B) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$3) P(A) = P$$

1.3 ג.א.ה ~ הנתונים ג.א.ה ~ פרופורציה
 13 מיליון ~



ט"ה	\bar{A}	A	
$1-p$	$1-0.8p$	$0.8p$	B
p	$0.8p$	$0.2p$	\bar{B}
1	$1-p$	p	ס"ה

* יא - הטבלה משזינה קב. שורה וגזורים.

כך נראה על הסגף ההולוני:

$$P(A|B) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.8p}{p} = 0.8$$

תשובה לסגף - 0.8



ק. נרכיב שאלאה מהנתון החצב:

$$P(A/B) = P(A/\bar{B}) + \frac{13}{35}$$

↓

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} + \frac{13}{35}$$

(כי א - הנתון מהטבלה):

$$\frac{0.8P}{1-P} = \frac{0.2P}{1-P} + \frac{13}{35} \quad / \cdot 35(1-P)$$

$$28P = 7(1-P) + 13(1-P)$$

$$28P = 7 - 7P + 13 - 13P$$

$$48P = 20$$

$$P = \frac{5}{12}$$





ד. ההסתברות המבוקשת היא
 גיחוס של היואלות A ו- \bar{B}

$$P(A \cup \bar{B}) = 1 - P(\bar{A} \cap B) = 1 - (1 - 1.8P)$$

$$= 1.8P = 1.8 \cdot \frac{5}{12} = 0.75$$

$$P(A \cup \bar{B}) = 0.75$$

3. נסתור קצת נוסח - ברנולי.

הפרמטרים הם: $n=5$

$K=2$ או 3

$$P = P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1}{5}$$

3.2 קנוסחה:

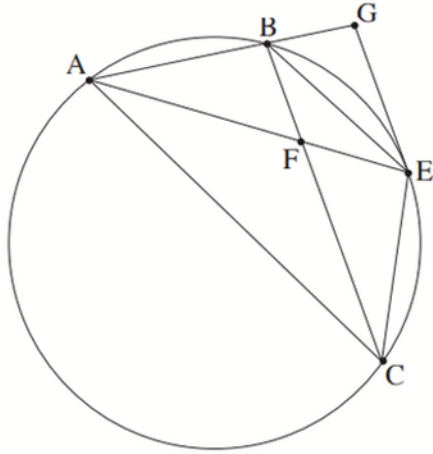
$$P_5(2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{128}{625}$$

$$P_5(3) = \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{32}{625}$$

נחזק ונהכל לניהסתר ה-1/5:

$$P = \frac{128}{625} + \frac{32}{625} = \frac{32}{125}$$





4. הנקודות A, B, C נמצאות על מעגל.
 נקודה E היא אמצע הקשת BC, כמתואר בסרטוט שלפניכם.
 בנקודה E מעבירים משיק למעגל.
 המשיק חותך את המשך המיתר AB בנקודה G.
 המיתרים AE ו-BC נחתכים בנקודה F.
- הוכיחו: $\triangle ACE \sim \triangle AEG$.
 - נתון: $AE = 9\sqrt{6}$, $AG = 18$.
חשבו את אורך המיתר AC.
 - הוכיחו: $BC \parallel GE$.
- נתון: שטח המשולש ABF גדול פי 2 משטח המשולש BFE.
- חשבו את אורך המיתר AB.
 - מהו היחס בין שטח המשולש ABF ובין שטח המשולש AFC? נמקו את תשובתכם.

פתרון:

נימוק

נתון

נתון

מול קשתות שוות כחצי ישר
 כוויות היוזפית שוות. אפי 1
 כוויות קיין משיק למיתר. אפי 2
 כוויות שוות. אפי 3
 כזל המחקר
 מסבב צמיון ז.כ. אפי 4, 6

טענה

$\widehat{BE} = \widehat{CE}$ (1)

$\angle BAE = \angle CAE$ (2)

$\angle BAE = \angle CAE$ (3)

$\angle GEA = \angle ACE$ (4)

$\angle BAE = \angle GAE$ (5)

$\angle GAE = \angle CAE$ (6)

$\triangle ACE \sim \triangle AEG$ (7)



נימוק

ניתון

יהי הצלע הנחמית
במשולש הצולעים לפי 7

הצבה לפי 8, 9

חישוב

כאילו היציאה הנענה
על אותם זוויות שווה.

משולש אחד יותר כולל
5 - משולש במשולשים

$\triangle ACF$ - $\triangle ABF$
לפי 2, 3.

כאן העקבה לפי 13, 4.

אם קיו של יחסים ויטר

שלישי שחיתן אותם יש צב

כאילו משולש שווה, הם יתקבל

טענה

נ.ש.ל.

$AG = 18$ (8)

$AE = 9\sqrt{6}$

$\frac{AC}{AG} = \frac{CE}{EG} = \frac{AE}{AG}$ (9)

$\frac{AC}{9\sqrt{6}} = \frac{9\sqrt{6}}{18}$ (10)

$AC = 27$ (11)

נ.ש.ל. ב'

$\triangle ABF = \triangle AEC$ (12)

$\triangle AFB = \triangle AEC$ (13)

$\triangle AFB = \triangle AEG$ (14)

$BC \parallel GE$ (15)

נ.ש.ל. ג'





ניחוי

נתי 11

נוסח - שטח משולש

נוסח - שטח משולש

חיסוק. לפי 16, 17, 18

חיסוק. לפי 19

משפט תיזוס. לפי 15

חיסוק. לפי 8, 21

משפט חוליה השלישית -
משולש ABC.

לפי 3

טענה

$$S_{ABFE} = 2S_{BFE} \quad (16)$$

$$S_{ABFE} = \frac{AF \cdot h}{2} \quad (17)$$

$$S_{BFE} = \frac{FE \cdot h}{2} \quad (18)$$

$$AF = 2 \cdot FE \quad (19)$$

* אשת. המשולש. או 15
אזכה סיור 3 מתוך 3
B דמיון A E

$$AF = \frac{2}{3} AE \quad (20)$$

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AF}{AE} = \frac{2}{3} \quad (21)$$

$$AB = 12 \quad (22)$$

לפי 3

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{FC} \quad (23)$$



ניל"ד
ח' יס"ב. לב' 11, 22, 23

לב' 24

ט"ו

$$\frac{BF}{FC} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} \quad (24)$$

$$\frac{S_{ABF}}{S_{ACF}} = \frac{4}{9} \quad (25)$$

* למשולש-הואו יש איתו אוקה הי"ר 3
~הקדו"ב A לאיתר < B
לכן יחס הטחים שווה
ליחס הקסיסיק
~ש.ש.ה'



5. דלתון ABCD חסום במעגל שרדיוסו R.

המיתר AC הוא האלכסון הראשי של הדלתון.

הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC (ראו סרטוט).

נסמן: $\angle CAB = \alpha$.

א. (1) מצאו את זוויות המשולש AOC (הביעו באמצעות α במידת הצורך).

(2) הביעו את אורך הקטע AO באמצעות α ו-R.

נתון כי אורך הקטע AO הוא $R\sqrt{2}$.

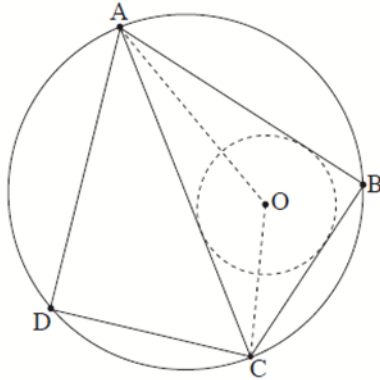
ב. מצאו את גודל הזווית α .

נתון כי שטח הדלתון הוא $16\sqrt{3}$.

ג. מצאו את R.

ד. חשבו את המרחק בין מרכז המעגל החוסם את הדלתון לבין

מרכז המעגל החסום במשולש ABC.



$\angle ABC = \angle AOC = 90^\circ$ (זווית זעזוע קבועה + קבועה = 180°)

חסום במעגל. סכום הזוויות המתאימות = 180°

$AC = 2R$ (זווית היקף ישרה המתאימה לזווית קטרה)

$\angle ACB = 90^\circ - \alpha$ $\angle CAB = \alpha$ (זווית + סכום זוויות $\triangle ACB$)

$\angle CAO = \frac{\alpha}{2}$, $\angle ACO = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$ (מרכז מעגל החוסם במשולש הוא מרכז

חוצי הזוויות)

$\angle AOC = 135^\circ$ (סכום זוויות $\triangle AOC$)

א(2)

$\triangle AOC$:

משפט הסינוסים $\frac{AO}{\sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \frac{2R}{\sin 135^\circ}$

$AO = 2\sqrt{2} R \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})$



7. $2\sqrt{2} R \sin(\alpha - \frac{\alpha}{2}) = R\sqrt{2} \quad | : R\sqrt{2} \neq 0$

$\sin(\alpha - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}$

$\alpha - \frac{\alpha}{2} = 30^\circ \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 15^\circ \rightarrow \alpha = 30^\circ$

$\alpha - \frac{\alpha}{2} = 150^\circ \rightarrow$ *לא תתקד יותר*
תשובה אפשרית

8. $BC = AB$ (המשולש שר כווני יחידה הוא 30)

הוא (מתחזק) הישר

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (כי המשולש תופנה כמו כזה בלבד)

$\neq ACB = 60^\circ$ כי הזווית

גומק את אור המשולש ABC והמשולש 2-2 זה אף אף

את המשולש הולתן.

$S_{ADCB} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot \frac{AC \cdot BC \cdot \sin \neq ACB}{2}$

אם נסתכל
היחסים של
המשולש

$S_{ADCB} = 2R^2 \sin 60^\circ = \sqrt{3} R^2$

$\sqrt{3} R^2 = 16\sqrt{3}$

$R = 4$

9. (כאן את אמצע הקטע AC, E נקודתו כי הוא מרכז

המשולש והוא את הולתן, (חזין המשולש) AEO

אם המשולש הקוטלית:

$OE^2 = AE^2 + AO^2 - 2AE \cdot AO \cos \neq EAO$



$$\sigma E^2 = 4^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos 15^\circ$$

$$\sigma E^2 = 32 - 16\sqrt{3}$$

$$\sigma E = 2.07 \quad \begin{array}{l} \text{(מומין ק"ן לרטי} \\ \text{קמטרים)} \end{array}$$

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2a - x^2}{x}$, המוגדרת עבור $x \neq 0$. a הוא פרמטר חיובי.

א. הביעו את תשובותיכם באמצעות a , אם יש צורך.

(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

(2) הראו שהפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה אי-זוגית.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

(4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$, אם יש כאלה.

(5) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה (\cup) ואת תחום הקעירות כלפי מטה (\cap) של הפונקצייה $f(x)$.

ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה גם הפונקצייה $g(x) = |f(x)| - b$, b הוא פרמטר חיובי.

הפונקצייה $g(x)$ מוגדרת באותו התחום כמו הפונקצייה $f(x)$.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקצייה $g(x)$ היא: $(-8, 3)$.

ד. מצאו את הערכים של a ו- b .

נתונה גם הפונקצייה $s(x) = \int_1^x g(t) dt$, המוגדרת בתחום $1 < x$.

ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.

כ(1) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לצירים, אם יש כאלה.

יש לי אסימטוטיים כי $x=0$
לא קיימת אסימטוטי אונקטור

כ(2) הראו שהפונקצייה $f(x)$ היא פונקצייה אי-זוגית.

$$f(-x) = \frac{2a - (-x)^2}{-x} = -\frac{2a - x^2}{x} = -f(x) \rightarrow f(-x) = -f(x)$$



א (3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים, אם יש כאלה.

$$0 = \frac{2a - x^2}{x} \quad \text{חיתוך עם ציר x :}$$

$$0 = 2a - x^2$$

$$x^2 = 2a$$

$$x = \pm \sqrt{2a}$$

$$\begin{aligned} &(\sqrt{2a}, 0) \\ &(-\sqrt{2a}, 0) \end{aligned}$$

אין חיתוך עם ציר y מאחר ! $x \neq 0$

א (4) מצאו את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$, אם יש כאלה.

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - (2a - x^2)}{x^2}$$

$$u = 2a - x^2 \quad u' = -2x$$

$$v = x \quad v' = 1$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2a}{x^2} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

הערה: $(-x^2)$ הוא ביטוי חיובי (ברוצ'ה) שלילי שלילי
 מאחר ! $x \neq 0$ בנוסף $(-2a)$ שלילי הוא, $a > 0$
 מונוטונית הנשערת שלילי לכל x בתחום הגדרה.





תחום עלייה: $x > 0$
 תחום ירידה: $x < 0$

כ (5) מצאו את תחום הקעירות כלפי מעלה (U) ואת תחום הקעירות כלפי מטה (∩) של הפונקצייה f(x).

$$f''(x) = \frac{-2x^3 - 2x(-x^2 - 2a)}{x^4}$$

$$u = -x^2 - 2a \quad u' = -2x$$

$$v = x^2 \quad v' = 2x$$

$$f''(x) = \frac{4ax}{x^4} = \frac{4a}{x^3}$$

x	x < 0	0	0 < x
f''(x)	-	/ / / /	+
f'(x)	↘	/ / / /	↗
f(x)	∩	/ / / /	U

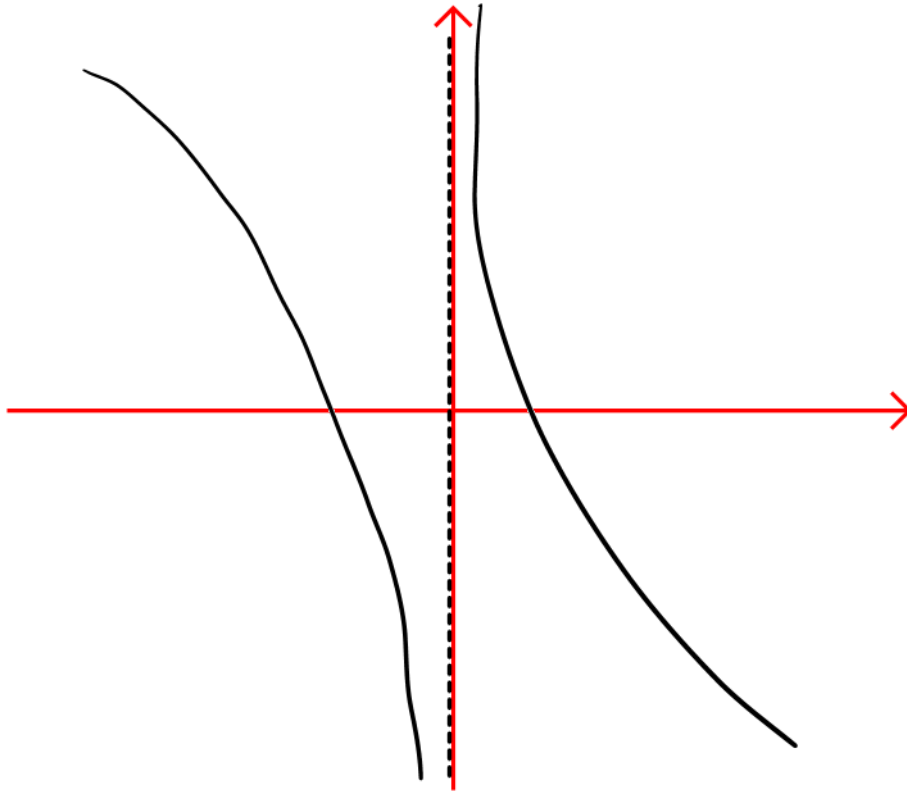
קעירות מעלה: $x > 0$
 קעירות מטה: $x < 0$

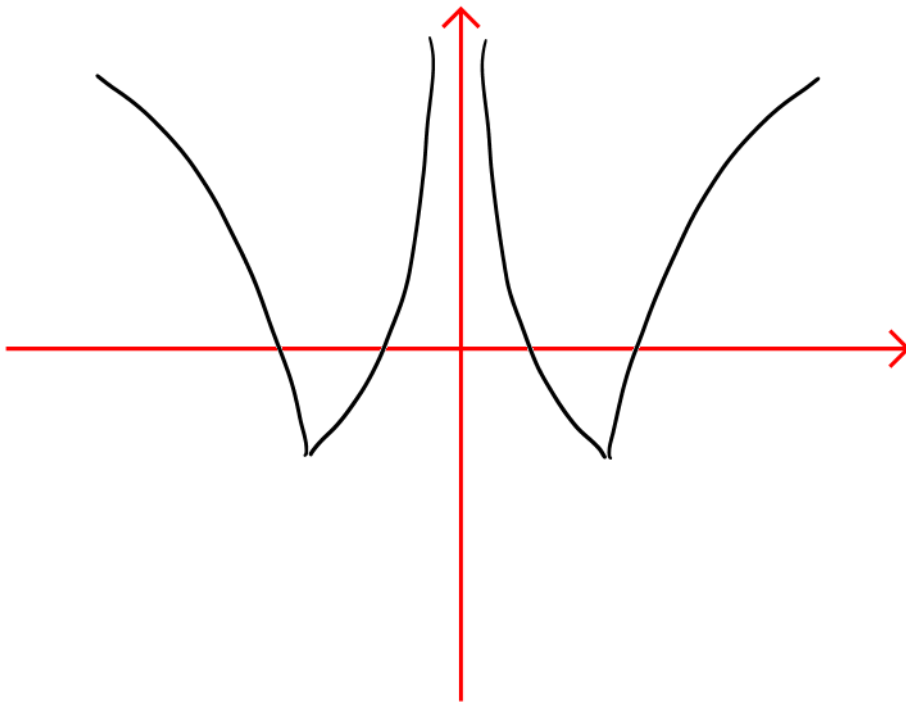
למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
 אל תתפשר עליה.



21 סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.





$g(x) = |f(x)| - b$

3 ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ היא: $(3, -8)$.

ד. מצאו את הערכים של a ו- b .

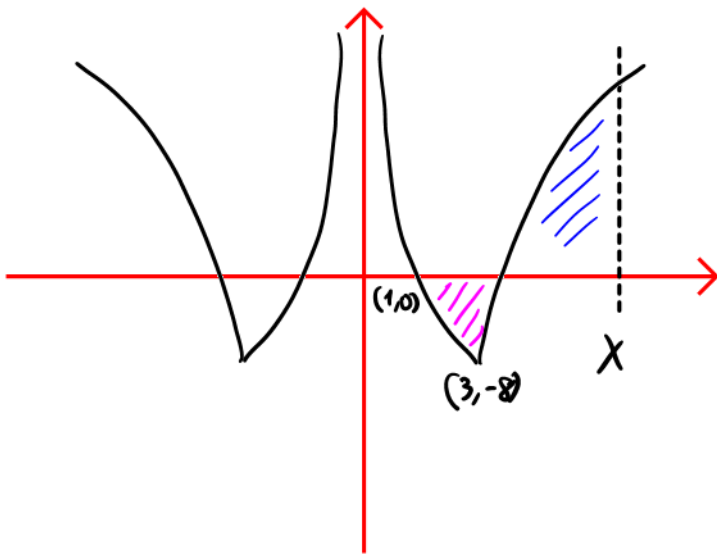
נניח שהנקודה $(3, -8)$ היא נקודת קיצון של $g(x)$.
 מ"כ נ"מ אהסיק שמצוקר הנקודה הננימ"מ שנמצא
 ברמ"ע הרביעי. בנוסף, נקודת הננימ"מ היא
 כציוק של $|f(x)|$ היא ע"כ צ"ר א ולכן נ"מ אהסיק
 ש $b=8$ ושהנקודה $(3,0)$ מקי"מ את הנק" $f(x)$.
 נצ"ב $(3,0)$ כנק" $f(x)$
 $0 = \frac{2a-3^2}{3} \rightarrow a=4.5$



נתונה גם הפונקצייה $s(x) = \int_1^x g(t) dt$, המוגדרת בתחום $1 < x$.

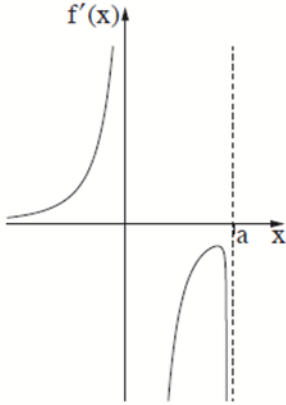
ה. מהו סוג נקודת הקיצון של $s(x)$? נמקו את תשובתכם.

השנייה, כזאת איהבנון ש $s'(x) = g(x)$
 שניה, היא נשארה על פונ' שלא מתחילה מהי הפונ'
 מתחילת עזרי א ומת' הפונ' מהל עזרי א,
 כעצמא מתחילת אה ההיכרס בין הישאר שמה עזרי
 א עשאר מתחילת עזרי א.



המקרה שבה אנו
 צוברים שמה "שלישי" (ורוד)
 שאורק לערך הפונ' (ורוד)
 ארק עשאר מכן מתחילים
 עזרי א שמה "חזיבי" (כחול)
 שאורק לערך הפונ' עשאר.
 עכן עכונ' יש לקרוא הינה





7. נתונה הפונקצייה $f(x)$ המוגדרת בתחום $x \neq 0, x \leq a$. הוא פרמטר חיובי. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ מוגדרת בתחום: $x < a, x \neq 0$. פונקציית הנגזרת $f'(x)$ יש שלוש אסימפטוטות המאונכות לצירים שמשוואותיהן: $x = 0, x = a, y = 0$. בתחום $x < 0$ פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עולה. הישר $x = 0$ הוא אסימפטוטה גם לגרף הפונקצייה $f(x)$. $f(a) = 0$.

- א. (1) מצאו את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקצייה $f(x)$ (הביעו את תשובתכם באמצעות a , אם יש צורך). נמקו.
(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקצייה $f(x)$? נמקו.

נתון כי הישר $y = 0$ הוא אסימפטוטה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
ב. סרטוט סקיצה אפשרית של גרף הפונקצייה $f(x)$, בהתאם לתשובתכם בתת-סעיף א(2).

נתון כי אחד מן הביטויים I-IV שלפניכם מייצג את הפונקצייה $f(x)$.

I. $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$
II. $\frac{\sqrt{x-a}}{x^2}$
III. $\frac{\sqrt{a-x}}{x}$
IV. $\frac{\sqrt{x-a}}{x}$

ג. איזה מן הביטויים I-IV מייצג את הפונקצייה $f(x)$? נמקו.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודה שבה $x = -2$, הוא: $\frac{7}{16}$.

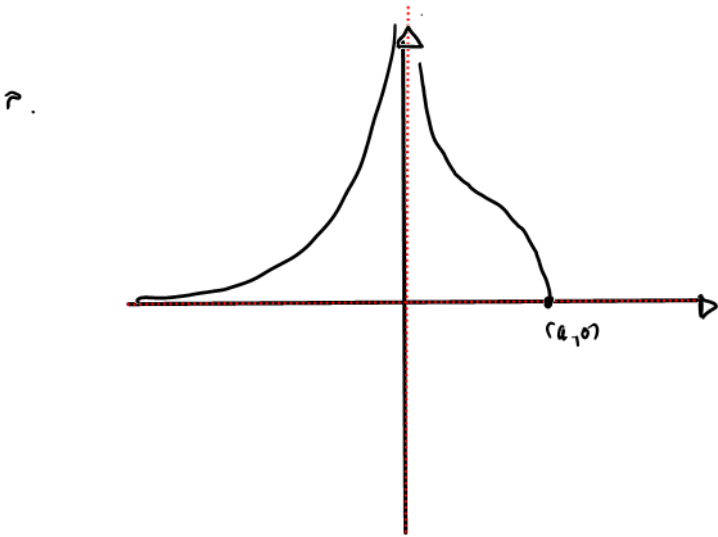
ד. מצאו את הערך של a .

ה. הציבו $a = 2$ וחשבו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $(f(x))^2$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = 1$.

7א(1) כאשר $f'(x) > 0$ או כאשר $f'(x) < 0$ אולי. וכן $f(x)$ יורד, ולכן, $f(x)$ עולה: $x < 0$
 יורד: $0 < x < a$

7א(2) נקודת פיתול היא $f(x)$ תקנה כאשר $f'(x) = 0$ יש נקודת קיצון פנימית וכן $f(x)$ יש נקודת פיתול אחר.





2. מביט על תמונת ההתנהגות של הפונקציה שמהא: $x \leq a$, $x \neq 0$
 יתן ביטויים I! III אפשרות, ומכיוון $e \geq 0$ (כפי שזכרנו)
 קבלת תמונת ההתנהגות, יתן ביטוי I אפשרות מכיוון $\frac{\sqrt{a-x}}{x^2} \geq 0$
 אזיג פ' X בתחום ההתנהגות

3.
$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{a-x}} \cdot x^2 - \sqrt{a-x} \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 4x(a-x)}{2x^4\sqrt{a-x}}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4ax}{2x^4\sqrt{a-x}}$$

$$f'(-2) = \frac{7}{16} : \frac{12 + 8a}{32\sqrt{a+2}} = \frac{7}{16} \rightarrow \frac{6+4a}{\sqrt{a+2}} = 7$$

(על ידי התייחסות אל עיני הניצבים (מכיוון שהתחום יהיה בין 3 בוקר קדקדוקר התחילוף))

$$36 + 48a + 16a^2 = 49(a+2)$$

$$16a^2 - a - 62 = 0$$

$a = 2$ (פשוט)
 $a = -\frac{31}{16}$ (אפשר)



ה. $(F(x))^2$ היא פונקציה אי-שלילית שתחתון את ציר ה-x.

$$(F(x))^2 = 0 \rightarrow F(x) = 0 \rightarrow x = a \rightarrow x = 2 \quad \text{לבטא:}$$

$$\int_1^2 (F(x))^2 dx \rightarrow \int_1^2 \frac{2-x}{x^4} dx \rightarrow \int_1^2 (2x^{-4} - x^{-3}) dx$$

$$\left. \frac{2x^{-3}}{-3} - \frac{x^{-2}}{-2} \right|_1^2 \rightarrow \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{8} \right) - \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{24}$$



8. נתון מעוין ABCD. נקודה E היא אמצע הצלע BC.
 נסמן: $\angle ECD = x$.
 נתון: שטח המשולש ECD הוא 25.
 א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוין.
 ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE.

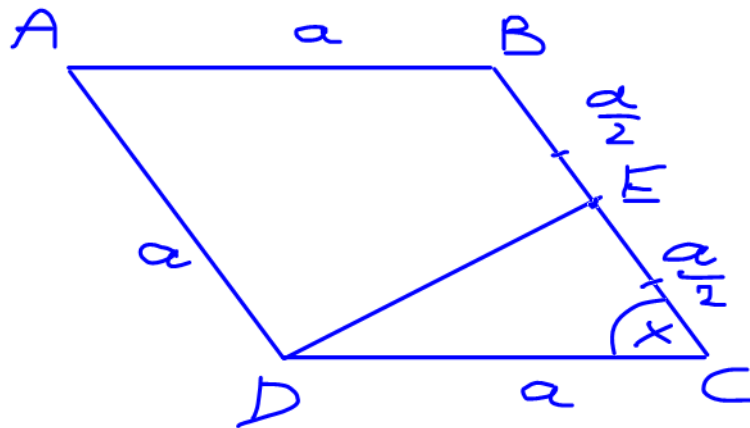
פתרון:

האשית נשאלת זנפס אר הנעלחר והסימון פה לשכאל.
 קנפסל נסמן את אורך צלע המעוין ק- α , משמע:

$$AB = BC = CD = AD = \alpha$$

מילך ומנען כי E אמצע BC: $BE = EC = \frac{\alpha}{2}$

עוד מתקיים לפי תנאי הקציה: $0^\circ < x < 180^\circ$



נתון: שטח המשולש ECD הוא 25.

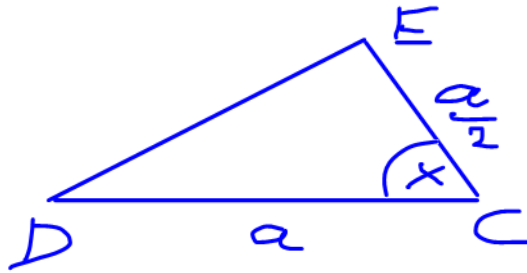
א. הביעו באמצעות x את אורך צלע המעוקן.

- נקודת אורגן שטח המשולש בעציה נכסיה כי גונאליה עתה שטח אחר שטח

$$S_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot DC \cdot \sin x$$

- נקודת אורגן באמצעות α ו- x .

- ארשונה עתה ינתון.



$$S_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \sin x = \frac{a^2}{4} \sin x$$

$$S_{ECD} = 25 \quad \text{נתון:}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a^2}{4} \sin x = 25 \Rightarrow a^2 = \frac{100}{\sin x}$$

$$0 < a = \frac{10}{\sqrt{\sin x}}$$

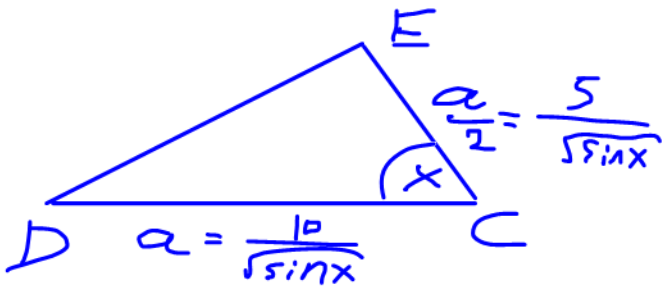
אורך קצה המעוקן מבואר באמצעות x .

$$AB = BC = CD = AD = \frac{10}{\sqrt{\sin x}}$$



ב. חשבו את האורך המינימלי של הקטע DE.

פונקציה המארה: אורך DE (בתלות ב- x , $0 < x < 180^\circ$).



(קישור אורך DE)
תוק שימוש המשפט הקוסנוסים ב- $\triangle CDE$.

$$DE^2 = CE^2 + CD^2 - 2 \cdot CE \cdot CD \cdot \cos x$$

$$DE^2 = \left(\frac{5}{\sin x}\right)^2 + \left(\frac{10}{\sin x}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{\sin x} \cdot \frac{10}{\sin x} \cdot \cos x$$

$$DE^2 = \frac{25}{\sin x} + \frac{100}{\sin x} - \frac{100 \cos x}{\sin x}$$

$$DE^2 = \frac{125}{\sin x} - \frac{100 \cos x}{\sin x}$$

$$DE^2 = \frac{125 - 100 \cos x}{\sin x}$$

$$DE^2 = \frac{5 - 4 \cos x}{\sin x} \cdot 25$$

אבחנה: עבור פונקציה $f < 0$ ולפיכך גם תחום הגדרה.

ובפונקציה $f = g^2$, מתקיים: $f' = 2g \cdot g'$

סימני f כסימן g' . ומכאן תחומי העלייה והירידה צהים זמן מתנהגות נקודות קיצון עבור אותם ערך של המשתנה הקבוע שלנו (x) ואלו צהים.

נקודת אכזבן אמה פונקציה: $f(x) = \left(\frac{5 - 4 \cos x}{\sin x}\right) \cdot 25$: תחום: $0 < x < \pi$.



נגזרי:

$$f'(x) = \frac{(4\sin x) \cdot \sin x - (5 - 4\cos x) \cos x}{\sin^2 x} \cdot 25 = \frac{4\sin^2 x - 5\cos x + 4\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot 25$$

$$\Downarrow 4\sin^2 x + 4\cos^2 x = 4$$

$$f'(x) = \frac{4 - 5\cos x}{\sin^2 x} \cdot 25$$

$$\Downarrow f'(x) = 0$$

$$\frac{4 - 5\cos x}{\sin^2 x} \cdot 25 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$4 - 5\cos x = 0$$

$$5\cos x = 4 \Rightarrow \cos x = 0.8 \Rightarrow x \approx \pm 0.644 + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

וקטור $0 < x < \pi$: $x \approx 0.644$

$$f'(x) = \frac{4 - 5\cos x}{\sin^2 x} \cdot 25$$

נגזרי מוכי נגזרי ראשון נקדיקו טימן הנלצה השנייה בתק יקויטית בנקד:

$$[(4 - 5\cos x) \cdot 25]' = (5 \cdot \sin x) \cdot 25 = 125 \cdot \sin x$$

קתומ $0 < x < \pi$, $\sin x > 0$.

בכוכ עגוי ערק ה- x הקויט. $125 \cdot \sin x > 0$
 זסיק כי מקודר בנקודת הינומוס (נימ עס זהקיד $x \approx 0.644$).

* הארה: כיוון $\cos x = \frac{4}{5}$, $\sin x > 0$ וטק שימוש קתומ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$125 \cdot \frac{3}{5} > 0$$



מכאן עקור אצח ערב א מוקול עוק מינימלי עקור DE^2 .
 ויראינו כי עקור אול עוק א מוקול עוק מינימלי עקור DE .
 עקור עוק א הנל: נסמנו x_{min} : $\cos x_{min} = \frac{4}{5}$, $\sin x_{min} = \frac{3}{5}$

$$DE_{min} = \sqrt{\left(\frac{5 - 4\cos x_{min}}{\sin x_{min}}\right) \cdot 25} = \sqrt{\frac{5 - 4 \cdot \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{\frac{25 - 16}{\frac{3}{5}}} \cdot 5 = 5 \cdot \sqrt{3}$$

האויק הינימלי של הנל DE : $DE_{min} = 5 \cdot \sqrt{3} \approx 8.660$ ק"מ.

