לא מתפשרים.

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023 , מועד ב', שאלון: 35571

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

נוכיח שהטענה $\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+...+\frac{A}{2^n}=A(1-\frac{1}{2^n})$ **, נכונה לכל** n **טבעי.**

1. נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=1$ **.**

אגף ימין: $A\cdot(1-\frac{1}{2^1})=A\cdot(\frac{1}{2})=\frac{A}{2}$ **אגף שמאל:** $\frac{A}{2}$

קבלנו שאגף שמאל שווה לאגף ימין.

2. נניח את נכונות הטענה עבור $n=k$ **טבעי כלשהו (הנחת האינדוקציה),**

כלומר: $\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+...+\frac{A}{2^k}=A(1-\frac{1}{2^k})$ **,**

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n=k+1$ **:** $\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+...+\frac{A}{2^k}+\frac{A}{2^{k+1}}=A(1-\frac{1}{2^{k+1}})$ **.**

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+...+\frac{A}{2^k}}_{\downarrow}+\frac{A}{2^{k+1}}=A(1-\frac{1}{2^{k+1}})$$

$$\Leftrightarrow \quad A(1-\frac{1}{2^k}) \quad + \quad \frac{A}{2^{k+1}}=A(1-\frac{1}{2^{k+1}})$$

החלפנו, על-פי הנחת האינדוקציה, ביטוי בביטוי השווה לו,

לכן, די אם נוכיח את השוויון שהתקבל.

$$\Leftrightarrow \quad A(1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}})=A(1-\frac{1}{2^{k+1}})$$

$$\Leftrightarrow \quad A(1-\frac{2-1}{2^{k+1}})=A(1-\frac{1}{2^{k+1}})$$

$$\Leftrightarrow \quad A(1-\frac{1}{2^{k+1}})=A(1-\frac{1}{2^{k+1}})$$

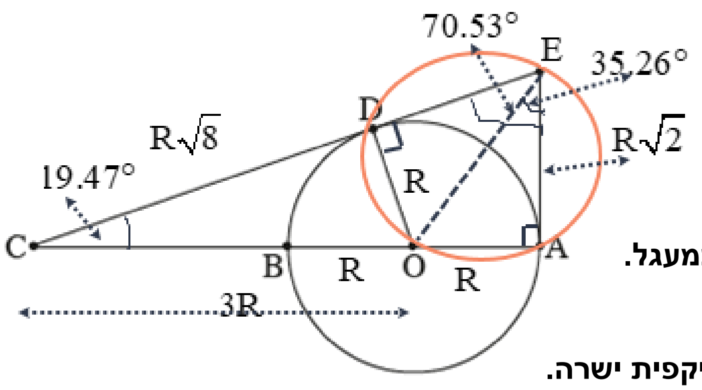
מתקבל שאגף שמאל שווה לאגף ימין

3. לכן, על פי אקסיומת האינדוקציה, הטענה נכונה לכל n **טבעי.**

תשובה: הוכחנו שהטענה $\frac{A}{2}+\frac{A}{2^2}+...+\frac{A}{2^n}=A(1-\frac{1}{2^n})$ **, נכונה לכל** n **טבעי.**

<u>הוכחה בדרך אחרת</u> , על ידי נוסחת סכום של סדרה הנדסית, שבה $q=\frac{1}{2}$, $a_1=\frac{A}{2}$ **.**

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \quad \rightarrow S_n=\frac{A}{2}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^n-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{A}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2^n}-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{A}{2}\cdot(1-\frac{1}{2^n})$$



(1) רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

לכן $\sphericalangle ODE = \sphericalangle OAE = 90^\circ$.

מכאן שסכום זוויות נגדיות שווה 180° ,

ומרובע $AODE$ בר חסימה.

תשובה: הוכחנו כי המרובע $AODE$ הוא בר חסימה במעגל.

(2) קצת גיאומטריה כהכנה לחישוב רדיוס המעגל החדש.

EO הוא קוטר במעגל החדש, כי הוא נשען על זווית היקפית ישרה.

אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל,

אז הקטע המחבר את הנקודה למרכז המעגל הוא חוצה זווית, לכן $\sphericalangle OEA = \sphericalangle OED$.

$$\left.\begin{array}{l} OB = OD = OA = R \\ CB = BA = 2R \end{array}\right\} AC = 4R, CO = 3R$$

פתרון טריגונומטרי

$\Delta COD \ (\sphericalangle COD = 90^\circ)$

$$\sin\sphericalangle C = \frac{OD}{CO} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\sphericalangle C = 19.47^\circ}$ $\quad \sphericalangle C < 90^\circ$

$\boxed{\sphericalangle CEA = 70.53^\circ}$

$\boxed{\sphericalangle OEA = 35.26^\circ}$

$\Delta OAE \ (\sphericalangle OAE = 90^\circ)$

$$\sin 35.26^\circ = \frac{AO}{OE}$$

$$OE = \frac{R}{\sin 35.26^\circ} = 1.732R$$

$\boxed{R_{new} = 0.866R}$

פתרון גיאומטרי

$\Delta COD \sim \Delta CEA$ משפט דמיון זווית זווית

ΔCOD משפט פיתגורס $CD = R\sqrt{8}$

$$\Delta COD \sim \Delta CEA$$

$$\frac{CO}{CE} = \frac{CD}{CA} = \frac{OD}{EA}$$

$$\frac{3R}{CE} = \frac{R\sqrt{8}}{4R} = \frac{R}{EA}$$

$\boxed{EA = R\sqrt{2}}$

ΔEOA משפט פיתגורס $EO = R\sqrt{3}$

$$R_{new} = R\frac{\sqrt{3}}{2}$$

אפשר גם, במקום דמיון משולשים, להשתמש במשפט חוצה זווית ΔACE :

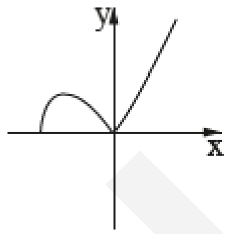
וגם במשפט: אם מנקודה יוצאים שני משיקים למעגל אז הם שווים זה לזה.

$$\frac{EA}{EC} = \frac{OA}{CO} = \frac{1}{3} \quad \to EC = 3EA \quad \to EC = 3ED \quad \to CD = 2ED \quad \to ED = R\sqrt{2} \quad \to EA = R\sqrt{2}$$

תשובה: רדיוס המעגל החוסם את המרובע $AODE$ הוא $R\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866R$.

(1) נזהה את הגרף המתאים לכל פונקציה.

$f(x)=\sqrt{x^2(x+2)}$



גרף ד

פונקציה אי-שלילית,

בתחום הגדרה $x\ge -2$,

עם נקודות מינימום על ציר x

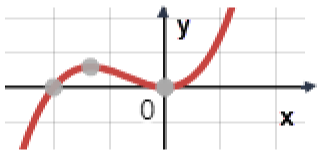
$(0,0)$ **ו-** $(-2,0)$

ונקודת מקסימום ביניהן.

זו למעשה טרנספורמציה של

שורש, בתחום אי-שליליות

של הפונקציה $y=x^3+2x^2$

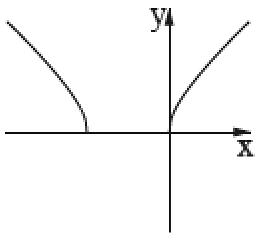


שנראית בצורה זו

כמו פונקציה ממעלה שלישית,

עם מקדם חיובי ל- x^3 .

$h(x)=\sqrt{x(x+2)}$



גרף ג

פונקציה אי-שלילית,

בתחום הגדרה $x\ge 0$ **או** $x\le -2$,

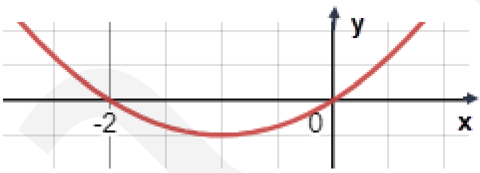
עם נקודות מינימום על ציר x

$(0,0)$ **ו-** $(-2,0)$.

זו למעשה טרנספורמציה של שורש

בתחום אי-שליליות

על הפרבולה $y=x^2+2x$

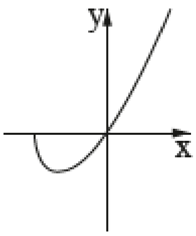


כאשר בנקודות האפסה,

הנגזרת של $h(x)$ **אינה מוגדרת,**

ולכן הגרף יוצא "אנכית".

$k(x)=x\sqrt{x+2}$



גרף א

פונקציה חיובית בתחום $x>0$

ושלילית בתחום $-2<x<0$,

עם מקסימום קצה $(-2,0)$,

ונקודת מינימום בדרך לראשית.

למעשה $f(x)=\sqrt{(k(x))^2}$

גם בתחום ההגדרה של $k(x)$

שהוא $x\ge -2$.

או

$$k(x)=\begin{cases} f(x) & x\ge 0 \\ -f(x) & x<0 \end{cases}$$

תשובה: $f(x)$ **- גרף ד,** $h(x)$ **גרף ג,** $k(x)$ **גרף א.**

(2) נתונה הפונקציה $g(x)=x^n\sqrt{x+2}$ **המוגדרת בתחום** $x\ge -2$.

כאשר n **טבעי וזוגי, הפונקציה היא אי-שלילית.**

כאשר n **טבעי ואי-זוגי,**

הפונקציה תהייה שלילית בתחום $-2<x<0$ **, וחיוביות בתחום** $x>0$,

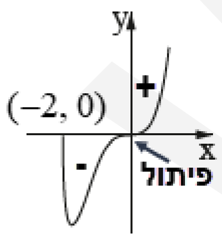
ובנוסף: בפונקציית הנגזרת $g'(x)$ **יופיע הגורם** x^{n-1} ,

שמתאפס עבור $x=0$ **אולם לא מחליף סימן –**

ולכן נקבל פיתול בראשית הצירים, כאשר ציר ה- x **הוא המשיק .**

מכאן שהגרף מתאים עבור n **טבעי ואי-זוגי.**

תשובה: עבור $n\ge 3$ **טבעי ואי-זוגי, הגרף הנותר מתאר את הפונקציה** $g(x)$.



גרף ב

(1) $f(x)$ מוגדרת לכל $x \neq 0$, ועל פי הגרף הנתון גזירה לכל $x \neq 0$.

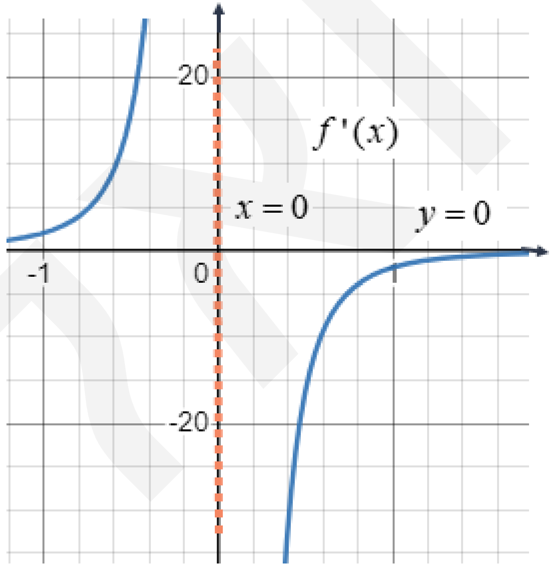
$f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור $x > 0$ או $x < 0$, ולכן $f'(x)$ עולה בתחום זה.

$f(x)$ שואפת לאסימפטוטה האופקית $y = 2$ לימין ולשמאל, ולכן שיפועיה שואפים לאפס.

מכאן של- $f'(x)$ אסימפטוטה אופקית $y = 0$ עבור $x = +\infty$ או $x = -\infty$.

כאשר $x \to 0$ אז $f(x) \to +\infty$,

והשיפועים שלה שואפים ל- $-\infty$ מימין ו- $+\infty$ משמאל, ונקבל $x = 0$ אסימפטוטה אנכית של $f'(x)$.



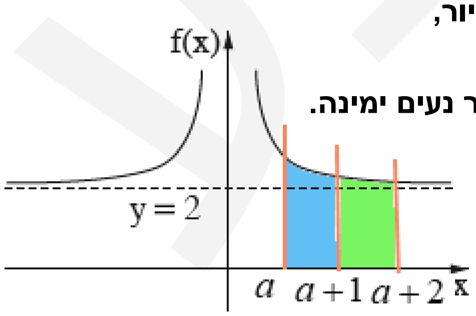
תשובה: הסרטוט מעל.

(2) תשובה: עבור $f'(x)$ עלייה $x > 0$ או $x < 0$, ירידה אף x .

(3) נתון $a > 0$, ושלושה אינטגרלים מסוימים עם הפרש 1 בין גבול תחתון לעליון.

שני האינטגרלים הראשונים הם של הפונקציה $f(x)$ בתחומים שמימין לראשית.

כיוון שהפונקציה חיובית, אז הם מייצגים את השטחים, כמסומן בציור,



ולכן $\int_{a}^{a+1} f(x)dx > \int_{a+1}^{a+2} f(x)dx$, כי השטחים הולכים וקטנים כאשר נעים ימינה.

כל אחד מהשטחים שבציור גדול ממלבן ששטחו $1 \cdot 2 = 2$,

ולכן שני האינטגרלים גדולים מהמספר 2 .

אחרון וחביב הוא $\int_{a}^{a+1} f'(x)dx$ שהוא בכלל שלילי (ולכן קטן מכולם),

כי הנגזרת בתחום הזה שלילית (ראו גרף הנגזרת, או שימו לב ש $f(x)$ בירידה בתחום).

תשובה: (1) , (2) , (4) , (3) .

א. נתונה סדרה חשבונית $A: a_1, a_2, ..., a_{3n}$ **ובה** $3n$ **איברים, שהפרשה הוא** d **.**

נסמן ב- S_n^* **את הסכום של** n **האיברים האמצעיים בסדרה .**

צריך להוכיח: $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$

	A	B
A_1	a_1	$a_{n+1} = a_1 + d(n+1-1) = a_1 + dn$
D	d	d
N	$3n$	n

$$S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n(2(a_1+dn)+d(n-1))}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3n \cdot (2a_1 + d(3n-1))}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 2dn + dn - d = 2a_1 + d(3n-1)$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + d(3n-1) = 2a_1 + d(3n-1)$$

הראינו שאגף שמאל שווה לאגף ימין,
ולכן הוכחנו את המתבקש.

עוד דרך פתרון

$S_1(n)\ S_2(n)\ S_3(n)$

$a_1 \quad a_{n+1} \quad a_{2n+1}$

ההפרש בין איבר "קבוצה" לאיבר מתאים בקבוצה שלפניה הוא nd **,**

ולכן הפרש הסכומים הוא n^2d **.**

בסדרה חשבונית $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$

$$\left.\begin{array}{l} 2S_2 = S_1 + S_3 \\ S_{3n} = S_1 + S_2 + S_3 \end{array}\right\} S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$$

$$S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n(2(a_1+dn)+d(n-1))}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3n \cdot (2a_1 + d(3n-1))}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 2dn + dn - d = 2a_1 + d(3n-1)$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + d(3n-1) = 2a_1 + d(3n-1)$$

הראינו שאגף שמאל שווה לאגף ימין, ולכן הוכחנו את המתבקש.

תשובה: הוכחנו ש- $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

ב. נתון: $a_1 > 0$ **ו-** $S_n^* = 0$ **.**

אם $S_n^* = 0$ **אז** $2a_1 + d(3n-1) = 0$.

מכיוון ש- $a_1 > 0$ **וגם** $3n-1 > 0$ **אז** $d < 0$ **.**

תשובה: הפרש הסדרה הוא שלילי.

או, הוכחה בדרך השלילה (תודה ל*שי חנני*).

אם $a_1 > 0$ **ו-** $d \geq 0$**, אז כל איברי הסדרה חיוביים, וסכומם לא יכול להיות אפס.**

ג. נתון: $a_1 = 19 \cdot |d|$ **ובגלל ש-** $d < 0$ **הרי ש-** $a_1 = -19d$.

$$2a_1 + d(3n-1) = 0$$
$$-38d + d(3n-1) = 0 \quad / : d < 0$$
$$-38 + 3n - 1 = 0$$
$$\boxed{3n = 39}$$

תשובה: מספר האיברים בסדרה הוא 39.

ד. מוחקים כמה איברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה <u>חשבונית</u> חדשה $B: a_2, a_5, a_8, ..., a_{35}$

	A	B
A_1	a_1	$a_2 = a_1 + d = -19d + d = -18d$
D	d	$b_{n+1} - b_n = a_{n+3} - a_n = 3d$
N	39	12

$$S_{12}^{B} = 36$$
$$\frac{12 \cdot [2 \cdot (-18d) + 3d \cdot 11]}{2} = 36$$
$$-3d = 6$$
$$\boxed{d = -2}$$

תשובה: $d = -2$.

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- מנויים שגרים בחיפה** $\overline{A}$ **- מנויים שגרים בתל אביב**

B **- מקבלים עיתונים בזמן** $\overline{B}$ **- לא מקבלים עיתונים בזמן**

נתונים ומשמעויות מידיות

נסמן p **- ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה** $(P(A)=p)$ **.**

(1) $P(B/A)=\frac{3}{4} \quad \rightarrow P(\overline{B}/A)=\frac{1}{4}$

(2) $P(A/B)=\frac{5}{9} \quad \rightarrow P(\overline{A}/B)=\frac{4}{9}$

אפשר להשתמש בנוסחת בייס

$$P(A/B)=\frac{P(B/A)\cdot P(A)}{P(B)}$$
$$\frac{5}{9}=\frac{\frac{3}{4}\cdot p}{P(B)}$$
$$P(B)=\frac{3}{4}\cdot p\cdot\frac{9}{5}$$
$$\boxed{P(B)=1.35p}$$

ואז

$$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}$$
$$\frac{4}{9}=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{1.35p}$$
$$P(\overline{A}\cap B)=0.6p$$

או...

פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$
$$\frac{3}{4}=\frac{P(B\cap A)}{p}$$
$$P(B\cap A)=0.75p$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$\frac{5}{9}=\frac{0.75p}{P(B)}$$
$$P(B)=1.35p$$

נשלים את הטבלה:

	חיפה A	**תל אביב** $\overline{A}$	
B **- מקבלים בזמן**	$0.75p$	$0.6p$	$1.35p$
$\overline{B}$ **- לא מקבלים בזמן**	$0.25p$	$1-1.6p$	$1-1.35p$
	p	$1-p$	1

תשובה: ההסתברות, שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן , היא $0.6p$ **.**

ב. נתון: $N(\bar{A}\cap\bar{B})=1.5N(\bar{A}\cap B) \quad \to P(\bar{A}\cap\bar{B})=1.5P(\bar{A}\cap B)$

$$1-1.6p=1.5\cdot 0.6p$$
$$1-1.6p=0.9p$$
$$1=2.5p$$
$$\boxed{0.4=p}$$
$$\boxed{1.35p=0.54}$$

תשובה: 54% **מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן.**

ג. נעדכן את הטבלה.

	$\bar{A}$ **תל אביב**	A **חיפה**	
B **- מקבלים בזמן**	0.24	0.3	0.54
$\bar{B}$ **- לא מקבלים בזמן**	0.36	0.1	0.46
	0.6	0.4	1

מבין 46% **המנויים שלא קיבלו את המנוי בזמן , בוחרים באקראי שני מנויים.**

נחשב את ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב $\left(P(\bar{A}/\bar{B})\right)$ **והשני שנבחר גר בחיפה**$\left(P(A/\bar{B})\right)$.

$$P(\bar{A}/\bar{B})\cdot P(A/\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}\cdot\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.36}{0.46}\cdot\frac{0.1}{0.46}=\frac{90}{529}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{90}{529}$.

ד. מדובר בהתפלגות בינומית, כאשר $n=6$, , $k=0,1,2,3,4$, $p=P(\bar{A}/\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.1}{0.46}=\frac{5}{23}$.

נעזר ההסתברות של המאורע המשלים " 5 **או** 6 **מנויים גרים בחיפה".**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$1-\left(P_6(5)+P_6(6)\right)=1-\binom{6}{5}\cdot(\frac{5}{23})^5\cdot(1-\frac{5}{23})^{6-5}-(\frac{5}{23})^6=1-6\cdot(\frac{5}{23})^5\cdot\frac{18}{23}-(\frac{5}{23})^6=0.9976$$

תשובה: ההסתברות שמבין 6 **המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן,**

לכל היותר 4 **מהם גרים בחיפה, היא** 0.9976 .

4

נתונים

1. BC משיק ב- C. 2. $CD \parallel EA$.

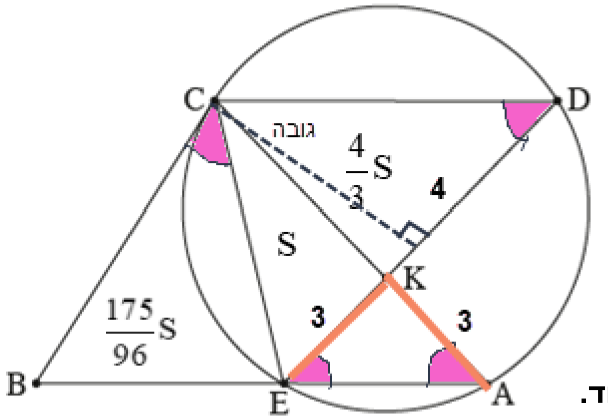
עבור ב: 3. $AK = 3$. 4. $ED = 7$. 5. $S_{\Delta CEK} = S$

עבור ג: 6. $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$. עבור ד: 7. O מרכז המעגל

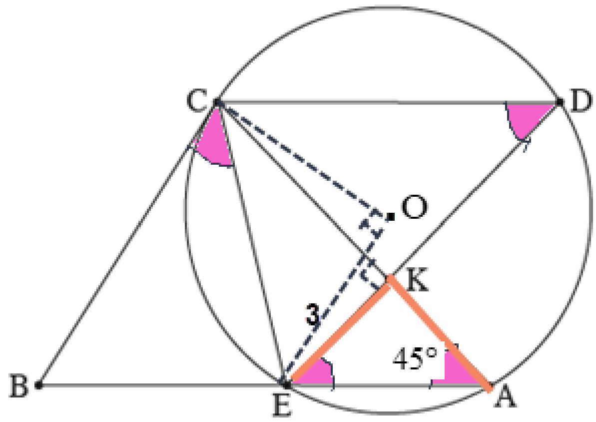
עבור ה: 8. $\sphericalangle CAE = 45°$

צ"ל: א. $\Delta CEB \sim \Delta DCE$ ב. $S_{\Delta CKD}$ ג. $S_{\Delta CEB}$

ד. $\sphericalangle COE = \sphericalangle CKE$ ה. O, C, E ו- K על מעגל אחד.



הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	9	$\sphericalangle D = \sphericalangle A = \sphericalangle BCE$ (ז)	זווית בין משיק למיתר
2	10	$\sphericalangle BEC = \sphericalangle DCE$ (ז)	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
9, 10	11	$\Delta CEB \sim \Delta DCE$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א	
2	12	$\sphericalangle DEA = \sphericalangle D$ (ז)	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
9, 12	13	$\sphericalangle DEA = \sphericalangle A$	
3, 13	14	$EK = AK = 3$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔAEK
4, 14	15	$KD = 4$	
5, 14, 15	16	$S_{\Delta CKD} = \frac{4}{3}S$	לצלעות ביחס $DK : EK = 4:3$ גובה משותף, היורד מקודקוד C
		מ.ש.ל. ב	
11	17	$S_{\Delta DCE} = \frac{7}{3}S$	
11	18	$\frac{CE}{DC} = \frac{EB}{CE} = \frac{CB}{DE}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
4, 6	19	$\frac{CB}{DE} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$	
11, 19	20	$\frac{S_{\Delta CEB}}{S_{\Delta DCE}} = \frac{25}{32}$	יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון
17, 20	21	$S_{\Delta CEB} = \frac{175}{96}S$	
		מ.ש.ל ג	



הסבר למיקום מרכז המעגל בסרטוט

כיוון ש- ΔAEK הוא שווה שוקיים, שהבסיס שלו הוא המיתר AE ,

אז מרכז המעגל O נמצא על האנך האמצעי למיתר, שהוא גובה ותיכון לבסיס במשולש.

הסבר	מס'	טענה	נימוק
13	23	$\sphericalangle CKE = 2\sphericalangle A$	זווית חיצונית ל- ΔAEK שווה לסכום שתי זוויות פנימיות שלא צמודות לה
7	24	$\sphericalangle COE = 2\sphericalangle A$	זווית מרכזית כפולה מהזווית ההיקפית הנשענת על אותה קשת EC
24 ,23	25	$\sphericalangle COE = \sphericalangle CKE$	
מ.ש.ל. ד			
25 ,24 ,8	26	$\sphericalangle CKE = \sphericalangle COE = 90°$	
26	27	CE הוא קוטר במעגלים ש- $\sphericalangle CKE, \sphericalangle COE$ זוויות היקפיות בו	הקוטר נשען על זווית היקפית ישרה
27	28	O , C, E ו- K על מעגל אחד	דרך קטע (CE), כקוטר, עובר רק מעגל אחד
מ.ש.ל. ה			

א. (1) $ABCD$ **טרפז** $(AB \parallel DC)$ **החסום במעגל, ולכן הוא שווה שוקיים** $(AD = BC)$.

$\sphericalangle ACB = 60°$

$\sphericalangle CDE = \alpha$

$\sphericalangle EAB = \sphericalangle CDE = \alpha$ **(זווית מתאימות שוות בין ישרים מקבילים) .**

$\sphericalangle B = \sphericalangle EAB = \alpha$ **(זוויות בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים).**

$\sphericalangle ECD = \sphericalangle B = \alpha$ **(זווית מתאימות שוות בין ישרים מקבילים) .**

$\sphericalangle BAC = 120° - \alpha$ **(סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔABC**)**

$\sphericalangle DCA = 120° - \alpha$ **(זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים)**

$\sphericalangle ECA = 120°$ **(סכום זוויות) .**

$\sphericalangle EAB = \alpha$ **(זווית בסיס שוות בטרפז שווה שוקיים)**

$\sphericalangle EAC = 2\alpha - 120°$ **(הפרש זוויות)**

$\sphericalangle E = 180° - 2\alpha$ **(סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔABE**)**

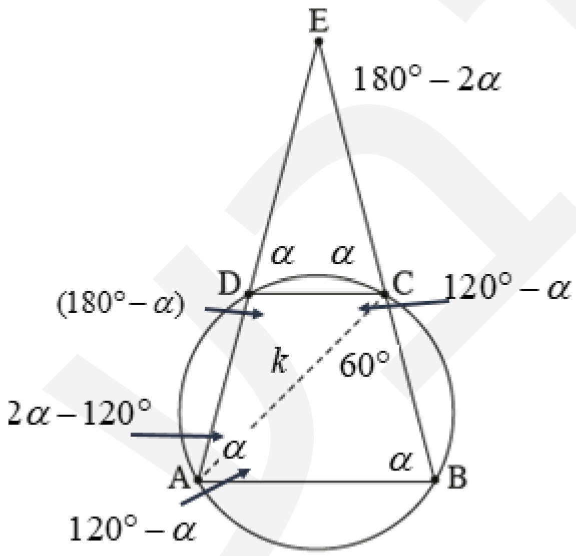
תשובה: $\sphericalangle ECA = 120°$ **,** $\sphericalangle E = 180° - 2\alpha$ **,** $\sphericalangle EAC = 2\alpha - 120°$.

(2) נביע את אורך הצלעות AB **ו-** DC **באמצעות** k **ו-** α **.**

<u>ΔABC</u> **לפי משפט הסינוסים.**

$$\frac{AB}{\sin 60°} = \frac{AC}{\sin \alpha}$$

$$\boxed{AB = \frac{k\sqrt{3}}{2\sin \alpha}}$$



<u>ΔADC</u> **לפי משפט הסינוסים.**

$$\frac{DC}{\sin (2\alpha - 120°)} = \frac{AC}{\sin (180° - \alpha)}$$

$$\boxed{DC = \frac{k \sin (2\alpha - 120°)}{\sin \alpha}}$$

תשובה: $AB = \frac{k\sqrt{3}}{2\sin \alpha}$ **,** $DC = \frac{k \sin (2\alpha - 120°)}{\sin \alpha}$ **.**

ב. נתון כי $\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta DCE}}=3$. נמצא את α .

$\frac{DC}{AB}=\frac{EC}{EB}=\frac{ED}{EA}$ (משפט תאלס הרחבה 1)

$\Delta EDC \sim \Delta EAB$ (משפט דמיון צלע צלע צלע)

$\frac{DC}{AB}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון)

$$\frac{k\sin(2\alpha-120^\circ)}{\sin\alpha}\cdot\frac{2\sin\alpha}{k\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(2\alpha-120^\circ)=0.5=\sin 30^\circ$$

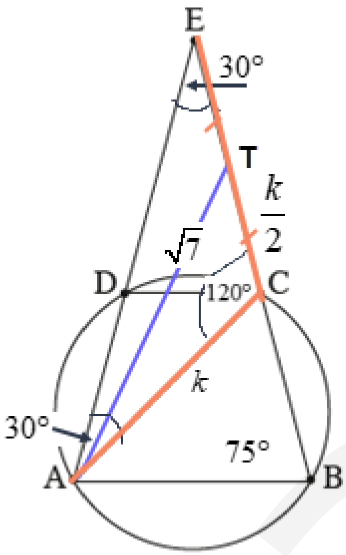
$$2\alpha-120^\circ=30^\circ+360^\circ k \quad\rightarrow \alpha=75^\circ+180^\circ k \quad\rightarrow \boxed{\alpha=75^\circ}$$

$$2\alpha-120^\circ=150^\circ+360^\circ k \quad\rightarrow \alpha=135^\circ+180^\circ k \quad\rightarrow \quad \leftarrow 0^\circ<\alpha<90^\circ$$

תשובה: $\alpha=75^\circ$.

ג. נציב $\alpha=75^\circ$, ונגלה כי ΔAEC הוא שווה שוקיים, ולכן $EC=AC=k$.

נעביר את AT התיכון לצלע EC ב- ΔAEC.



$$TC=\frac{EC}{2}=\frac{k}{2}$$

$\underline{\Delta ATC}$ משפט הקוסינוסים

$$(AT)^2=(AC)^2+(TC)^2-2AC\cdot TC\cdot\cos\sphericalangle ECA$$

$$(\sqrt{7})^2=k^2+(\frac{k}{2})^2-2\cdot k\cdot\frac{k}{2}\cdot\cos 120^\circ$$

$$7=\frac{7}{4}k^2$$

$$4=k^2$$

$$\boxed{k=2} \quad \leftarrow k>0$$

תשובה: $k=2$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{(x-4)^2}$ ($0<a<4$ **פרמטר).**

(1) הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה אינו מתאפס.

$$(x-4)^2\neq 0 \quad \rightarrow x\neq 4$$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq 4$**.**

(2) חזקת המונה (2) **שווה לחזקת המכנה** (2) **ולכן אסימפטוטה אופקית** $y=\dfrac{x^2}{x^2}=1$.

$x=4$ **מאפס מכנה ולא מונה, כי** $0<a<4$**, ולכן הישר** $x=4$ **אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ **הן** $y=1$ **,** $x=4$**.**

(3) בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ונקודת החיתוך היא** $(a,0)$ **ו-** $(-a,0)$.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ונקודת החיתוך היא** $(0,-\dfrac{a^2}{16})$.

תשובה: שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים הם** $(a,0)$ **,** $(-a,0)$**,** $(0,-\dfrac{a^2}{16})$**.**

(4) נמצא את שיעור ה- x **של נקודת הקיצון של הפונקציה** $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$\boxed{f(x)=\frac{x^2-a^2}{(x-4)^2}}$$

$$f'(x)=\frac{2x(x-4)^2-2(x-4)\cdot 1\cdot (x^2-a^2)}{(x-4)^4}$$

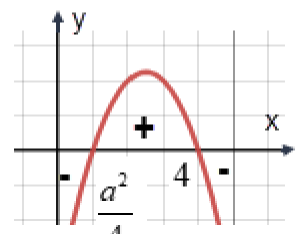
$$f'(x)=\frac{2(x-4)\left[x(x-4)-(x^2-a^2)\right]}{(x-4)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x-4)(x^2-4x-x^2+a^2)}{(x-4)^4}$$

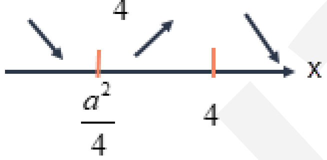
$$\boxed{f'(x)=\frac{2(x-4)(-4x+a^2)}{(x-4)^4}}$$

$$-4x+a^2=0 \quad \rightarrow \boxed{x=\frac{a^2}{4}}$$

גרף סימני נגזרת



טבלת עלייה / ירידה



הפתרון השני שמאפס את המונה נפסל, כי $x\neq 4$ **, בתחום ההגדרה.**

סימני הנגזרת נקבעים על פי סימני הפרבולה ההפוכה ("בוכה") שבמונה.

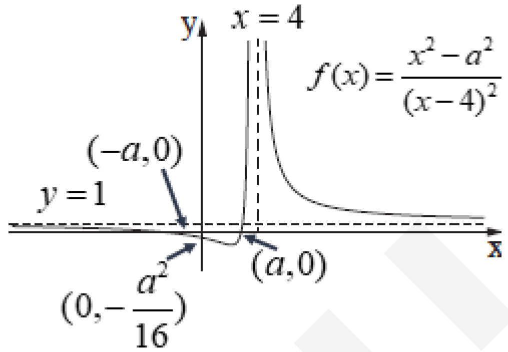
כיוון ש- $0<a<4$ **אז** $0<\dfrac{a^2}{4}<4$.

תשובה: $x=\dfrac{a^2}{4}$ **, מינימום.**

(5) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נשים לב למיקום נקודות החיתוך עם ציר ה- x , בהתאם לנתון ש- $0<a<4$.

נשים לב שנקודת המינימום ברביע הרביעי, בשל נקודת החיתוך עם ציר ה- y שבה $y<0$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{x^2}{(x-4)^2}$, המוגדרת גם בתחום $x \neq 4$.

(1) $$f(x)=\frac{x^2-a^2}{(x-4)^2}=\frac{x^2}{(x-4)^2}-\frac{a^2}{(x-4)^2}=g(x)-\frac{a^2}{(x-4)^2}$$

כיוון שהמחסר חיובי לכל $x \neq 4$, אז $f(x)<g(x)$ לכל $x \neq 4$, וגרף $f(x)$ מתחת לגרף $g(x)$.

תשובה: הוכחנו כי גרף הפונקציה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) $$g(x)-f(x)=\frac{a^2}{(x-4)^2}=a^2\cdot(x-4)^{-2}$$

$$S=\int_0^1(a^2\cdot(x-4)^{-2})\,dx$$

$$S=\frac{a^2\cdot(x-4)^{-1}}{-1}\Bigg]_0^1$$

$$S=-\frac{a^2}{x-4}\Bigg]_0^1$$

$$\left.\begin{array}{l} x=1: \quad -\frac{a^2}{-3}=\frac{a^2}{3} \\ x=0: \quad -\frac{a^2}{-4}=\frac{a^2}{4} \end{array}\right\} S=\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{4}=\boxed{\frac{a^2}{12}}$$

תשובה: השטח המוגבל, על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$,

על ידי הישר $x=1$ ועל ידי ציר ה- y, הוא $\frac{a^2}{12}$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}}$ **. נשים לב: אומנם** $x=0$ **מאפס מכנה וגם מונה,**

אולם צמצום הפונקציה ל- $f(x)=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$ **ישנה את תחום ההגדרה, ואינו מותר.**

יחד עם זאת הוא מראה שהנקודה $(0,0)$ **תהייה ריקה בגרף הפונקציה, כי כאשר** $x\to 0$ **אז** $f(x)\to 0$ **.**

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי והמכנה שונה מ- 0 **.**

$x^2+x>0$ **, נקבל פרבולה בעלת מינימום שמתאפסת עבור** $x=-1,0$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x>0$ **או** $x<-1$.

(2) גרף הפונקציה $f(x)$ **אינו חותך את הצירים, כי רק** $x=0$ **, שאינו בתחום ההגדרה, מאפס את המונה.**

תשובה: גרף הפונקציה $f(x)$ **אינו חותך את הצירים.**

(3) נמצא אסימפטוטות המקבילות לצירים.

(ניתן למצוא גם על ידי הצבות, או נימוקים. אין חובה לרשום בעזרת גבולות !, ואין צורך לנמק !!!)

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}=\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}\to 1}}=2\ \to\ \boxed{y=2}\qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}\to 1}}=-2\ \to\ \boxed{y=-2}$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to-1^-}\frac{-1}{0^+}=-\infty\ \to\ \boxed{x=-1}\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{0}{0^+}=0\ \to\ \boxed{(0,0),\mathit{discontinunity\ point}}$$

$(0,0)$ **תסומן בגרף כנקודה ריקה.**

תשובה: אסימפטוטות מאונכות לציר ה- y **:** $y=2\ (x\to+\infty)$ **,** $y=-2\ (x\to-\infty)$ **,**

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- x **:** $x=-1$ **.**

(3) נמצא תחומי עלייה וירידה

$$\boxed{f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}}}$$

$$f'(x)=2\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}-\frac{x\cdot(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}}{(\sqrt{x^2+x})^2}=2\cdot\frac{\frac{2(x^2+x)-2x^2-x}{2\sqrt{x^2+x}}}{x^2+x}$$

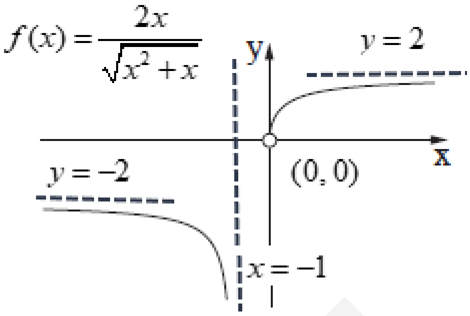
$$\boxed{f'(x)=\frac{x}{(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}=\frac{x}{\sqrt{(x^2+x)^3}}}$$

$$f'(1)=\frac{(+)}{(+)}>0\ \nearrow$$

$$f'(-2)=\frac{(-)}{(+)}<0\ \searrow$$

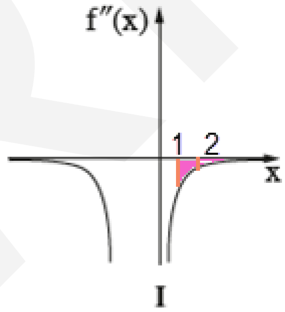
תשובה: $f(x)$ **עולה בתחום** $x>0$ **, ויורדת בתחום** $x<-1$**.**

ב. נתון כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. נעלה את הגרף המתאים ל $f''(x)$, כולל סימון השטח עבור סעיף ד, ונסביר (במרקך ההסבר המרכזי).



- תחום ההגדרה נשמר $x>0$ או $x<-1$.
- אין ל- $f(x)$ נקודות פיתול, והגרף אינו חותך את ציר ה- x .
- על פי הסקיצה של $f(x)$, היא קעורה כלפי מטה $(\cap)$ ולכן הנגזרת השנייה שלילית.
- $f''(x)$ שואפת לאפס עבור $x\to\pm\infty$, ואומנם ל- $f'(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $(y=0)$.

תשובה: גרף I מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$.

ד. נחשב את השטח המבוקש, צבוע בוורוד בסעיף ג.

$$S=\int_1^2\left((0-f''(x)\right)dx=-f'(x)\Big]_1^2$$

$$f'(x)=\frac{x}{(x^2+x)\sqrt{x^2+x}}=\frac{x}{\sqrt{(x^2+x)^3}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2: \quad -f'(2)=-\frac{\sqrt{6}}{18} \\ x=1: \quad -f'(1)=-\frac{\sqrt{2}}{4} \end{array}\right\} S=-\frac{\sqrt{6}}{18}-(-\frac{\sqrt{2}}{4})=0.217$$

תשובה: השטח המוגבל, על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$,

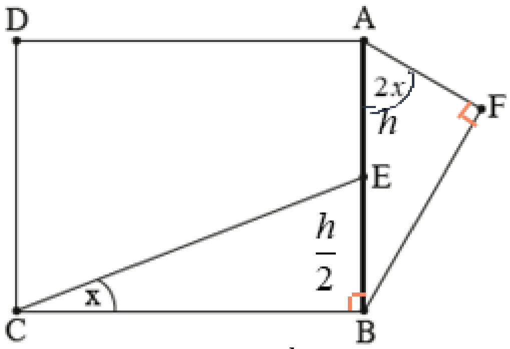
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=2$, הוא 0.217 .

א. ΔAFB **הוא ישר זווית** $(\sphericalangle AFB = 90^\circ)$**, ולכן שתי הזווית האחרות הן חדות.**

מכאן ש- $0^\circ < 2x < 90^\circ$

תשובה: $0^\circ < x < 45^\circ$ **(**$0 < x < \frac{\pi}{4}$**).**

ב. נביע באמצעות h **(פרמטר) ו-** x **(משתנה) את ההפרש בין אורך הקטע** CE **לאורך הקטע** AF **.**



הנקודה E **היא אמצע הקטע** AB**, ולכן** $EB = \frac{h}{2}$ **.**

ΔAFB

$$\cos 2x = \frac{AF}{AB}$$

$$\boxed{h\cos 2x = AF}$$

ΔECB

$$\sin x = \frac{EB}{CE}$$

$$\boxed{CE = \frac{h}{2\sin x}}$$

תשובה: ההפרש, בין אורך הקטע CE **לאורך הקטע** AF**, הוא** $\frac{h}{2\sin x} - h\cos 2x$**.**

ב. הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא $\frac{h}{2\sin x} - h\cos 2x$**.**

$$f(x) = \frac{h}{2\sin x} - h\cos 2x \quad \to \quad \boxed{f(x) = \frac{h}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sin x} - 2\cos 2x\right)}$$

$$f'(x) = \frac{h}{2}\cdot\left(\frac{-\cos x}{\sin^2 x} + 4\sin 2x\right) = \frac{h}{2}\cdot\left(\frac{-\cos x + 4\sin 2x\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)$$

$$0 = -\cos x + 4\sin 2x\sin^2 x = \cos x + 8\cos x\sin^3 x$$

$$0 = \cos x(-1 + 8\sin^3 x)$$

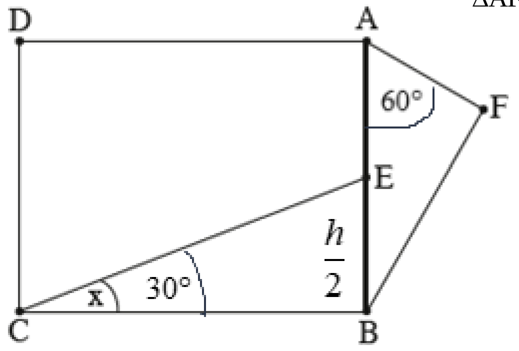
$$\left.\begin{array}{l} \cos x = 0 \quad \to x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \to \varnothing \\ \sin^3 x = \frac{1}{8} \quad \to \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \to x = \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad \to \varnothing \end{array}\right\} \leftarrow 0 < x < \frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = (+)\cdot\left(\frac{-0.51}{(+)}\right) < 0 \\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = (+)\cdot\left(\frac{2.1}{(+)}\right) > 0 \end{array}\right\} \boxed{x = \frac{\pi}{6}, \min}$$

תשובה: $x = \frac{\pi}{6}$ **(או** $x = 30^\circ$**), שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע** CE **לאורך הקטע** AF **הוא מינימלי.**

ד. עבור $x=30^\circ$ **נמצא את היחס** $S_{\text{ABCD}}:S_{\Delta\text{AFB}}$.

$$\frac{S_{\text{ABCD}}}{S_{\Delta\text{AFB}}}=\frac{\cancel{\text{AB}}\cdot\text{BC}}{0.5\cdot\cancel{\text{AB}}\cdot h\cos 2x\cdot\sin\sphericalangle\text{FAB}}=\frac{\text{BC}}{0.5\cdot h\cos 60^\circ\cdot\sin 60^\circ}=\frac{8\text{BC}}{h\sqrt{3}}$$



ΔECB

$$\tan 30^\circ=\frac{\text{EB}}{\text{BC}}$$

$$\boxed{\text{BC}=\frac{h\sqrt{3}}{2}}$$

$$\frac{S_{\text{ABCD}}}{S_{\Delta\text{AFB}}}=\frac{8}{h\sqrt{3}}\cdot\frac{h\sqrt{3}}{2}=4$$

תשובה: היחס בין שטח המלבן ABCD **לשטח המשולש** AFB **הוא** 4.

הסבר בדרך גיאומטרית

$\Delta\text{CBE}\cong\Delta\text{BFA}$ **(ז.צ.ז.) ולכן שטחיהם שווים.**

$$S_{\Delta\text{CBE}}=\frac{\text{CB}\cdot\frac{h}{2}}{2}=\frac{\text{CB}\cdot h}{4}=\frac{S_{\text{ABCD}}}{4}$$

ולכן: $\frac{S_{\text{ABCD}}}{S_{\Delta\text{AFB}}}=4$