

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג, 2023, מועד מיוחד 6/6,

שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. a_n היא סדרה חשבונית עולה בת 88 איברים.

שלושת האיברים הראשונים בסדרה הם: $2x + 27$, $2x + 3$, $2x$.

א. (1) מצאו את הפרש הסדרה ואת a_1 .

(2) מצאו כמה איברים חיוביים יש בסדרה.

ב. (1) מצאו את האיבר הראשון ואת האיבר האחרון בסדרה a_n המתחלקים ב-9 ללא שארית.

(2) חשבו את סכום כל האיברים בסדרה a_n המתחלקים ב-9 ללא שארית.

פתרון:

א. (1) נחסיר יא - האיבר הראשון מהשני ונזקק
יא - הפרש הסדרה:

$$d = 3 \Rightarrow 2x + 3 - 2x = 3$$

נגמ נחסיר יא - האיבר השני מהשלישי
ונשווה 3-3:

$$-2 = x \Rightarrow 3 - (2x + 3) = 3$$

כאן $a_1 = 2x = -42$

$d = 3$ $a_1 = -42$	הפרש הסדרה האיבר הראשון	א. כ. כיוק:
------------------------	----------------------------	-------------

(2) נקניק יא - הנידוק של 0 בסדרה,
כאן, 3, קנוס - האיבר היל). נא
30 כה חס קוני - $a_n = 0$!

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$





$$0 = -42 + (n-1) \cdot 3$$

$$0 = -42 + 3n - 3$$

$$3n = 45$$

$$n = 15$$

כלומר, הוסיף הקדום ה-15 קסרה
 הוא ס. קסרה יש 88 איברים,
 מתוכם 15 לא חיוביים, והשאר
 חיוביים ($33 = 88 - 15$ איברים חיוביים)

תשובה: 33 איברים חיוביים

ב. (1) הוא אי-נמצא אף הוסיף האחרון
 קסרה:

$$a_{88} = -42 + 87 \cdot 3 = 219$$

הקסרה היא: $9, 12, 15, \dots, 216, 219, \dots, 36, 39, \dots, 42$

קצרה במשלבון תראה כי האיבר
 הוא שון הממוק ב-17 זלא שארית הוא

$a_3 = -36$, והאיבר האחרון הממוק ב-9
 זלא שארית הוא $a_{87} = 16$.

תשובה: $a_{87} = 16$, $a_3 = -36$



(2) סדרה האיבריה המתחילה ב-9
 עלה לא שאלו היא סדרה שהיבוס
 שלה הוא S_n , כלומר:

$$216, \dots, -18, -27, -36$$

נמצא כמה איברים יש בסדרה:

$$216 = -36 + (n-1) \cdot 9$$

$$216 = -36 + 9n - 9$$

$$9n = 261$$

$$n = 29$$

כעת נחשב את סכום הסדרה
 בעזרת הנוסחה לסכום האיברים
 הראשונים של סדרה חשבונית:

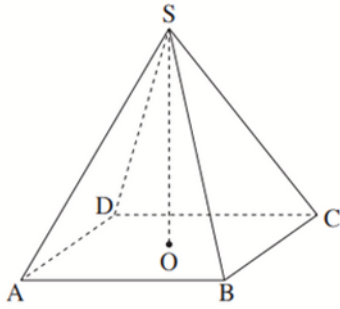
$$S_{29} = \frac{29}{2} [2 \cdot (-36) + (29-1) \cdot 9]$$

$$S_{29} = 2,610$$

תשובה? סכום האיברים בסדרה a_n
 המתחילה ב-9 עלה לא שאלו

הוא 2,610.





2. נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ABCD הוא ריבוע (ראו סרטוט).

גובה הפירמידה, SO, שווה לאלכסון הריבוע.

א. מצאו את הזווית בין מקצוע צדדי של הפירמידה ובין בסיס הפירמידה.

נתון: אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה הוא $6\sqrt{5}$.

ב. מצאו את אורך צלע הבסיס של הפירמידה.

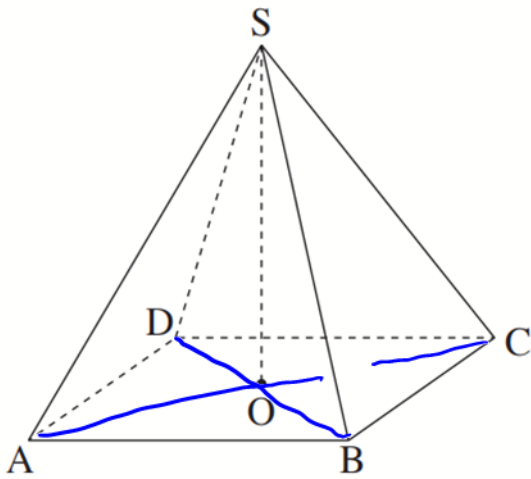
ג. מצאו את שטח המעטפת של הפירמידה.

נקודה E נמצאת על הגובה SO.

חיברו את אמצעי הצלעות של בסיס הפירמידה לנקודה E ויצרו פירמידה חדשה.

נתון: נפח הפירמידה החדשה הוא 84.

ד. מצאו את אורך הקטע EO.



פתרון!

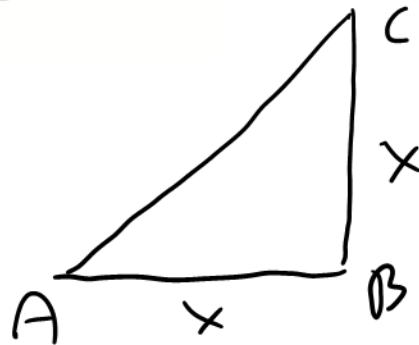
1. נתון, $SO = AO$ - צלע הריבוע
 סכום ABCO - x

נקודה O - אורן האלכסון
 של הריבוע קטל
 לשטח פירמידה?

$$AC^2 = x^2 + x^2$$

$$AC^2 = 2x^2 \quad \sqrt{\quad}$$

$$AC = \sqrt{2} \cdot x$$



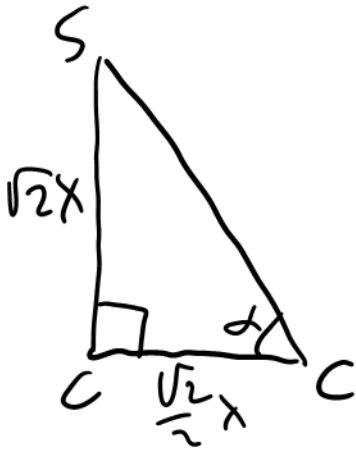
הנקודה O היא מפלט האלכסון של

הריבוע הבסיס.

אלכסונים הריבוע חוצים זה את זה זאכין

$$OC = \frac{\sqrt{2}}{2} x$$





נתן (תיכון במסל) של \cos :

$$\cos \alpha = \frac{SO}{CO} = \frac{\sqrt{2}x}{\frac{\sqrt{2}}{2}x} = 2$$

וזהו $\alpha = 63.435^\circ$

הצווח בין שתי צדדי הקוסינוס

היה $\boxed{63.435^\circ}$

ה. נתון $CS = 6\sqrt{5}$

נשתמש במשפט פיתגורס במשולש \cos ?

$$(\sqrt{2}x)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 = (6\sqrt{5})^2$$

$$2x^2 + \frac{1}{2}x^2 = 180$$

$$2\frac{1}{2}x^2 = 180$$

$$x^2 = 72\sqrt{1}$$

$$x = \sqrt{72} = 8.485..$$

אז $\boxed{\sqrt{72}}$ זה הריבוע

המשפט של פיתגורס הוא סכום הריבועים של שני הצדדים השווה לריבוע הצדק השלישי. זהו המשפט של פיתגורס.





שט משולש אהצ ונדבול ק-4.



מקבולן במשולש BCS ,
נוכח כי זוויה SF ישרים
 BC . האוקה רק תיכון
ולכן $BF = CF = \frac{\sqrt{72}}{2} = \sqrt{18}$

ומתמש במשפט פיתגורס
במשולש SFC :

$$(\sqrt{18})^2 + SF^2 = (6\sqrt{5})^2$$

$$SF^2 = 162 / \sqrt{}$$

$$SF = \sqrt{162} = 12.728$$

כנה BCF משולש שטח BCF

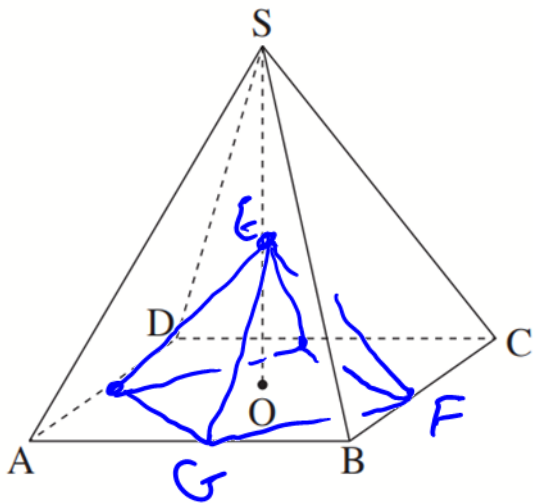
$$S_{BCF} = \frac{BC \cdot SF}{2} = \frac{\sqrt{72} \cdot \sqrt{162}}{2}$$

$$S_{BCF} = 54$$

מכאן ששטח המשולש הוא:

$$M = 4 \cdot 54 = \boxed{216}$$





3. נתון אף זקודה E
ואף זאגף הכירתינה.
הקסים החצט הוא היבון.

ומסק אף אויך הבלג
טלו קהשולט BFG:

$$BG = BF = \frac{1}{2} \times 18 = \sqrt{18}$$

משבט במאורס:

$$GF^2 = (\sqrt{18})^2 + (\sqrt{18})^2 = 36 (\sqrt{2})$$

$$GF = 6$$

מכאן משטח הקסים של הכירתינה

$$G^2 = 36 \quad \text{החצטה הוא}$$

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

קוסמת הנפת של כירתינה היטל

$$84 = \frac{36 \cdot h}{3}$$

3. ב. א. היבון זנו:

$$h = 7$$

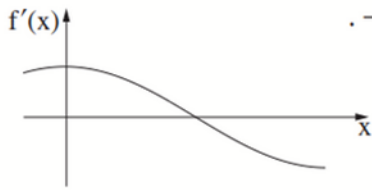
ומהף אף השובה:

קזובה הוא אויך הטל ט, ילכו

$$\boxed{EO = 7}$$

תשובה:





3. נתונה הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ המוגדרות בתחום $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq 2\pi$.

בסרטוט שלפניכם מתואר גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \pi$ בלבד.

א. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי ה- x של כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

העבירו משיק לגרף הפונקצייה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.

ה. מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

פתרון:

א. הכיון קליה בואה נסה הנגזרת חיובית, ויורד נסה הנגזרת שלילית.

נקודת החיתוך עם ציר x בתחום הנתון היא $x = \pi$. ולכן עם פי הזיל הנתון:

$-\frac{\pi}{3} < x < \pi$	תחום עלייה:
$\pi < x < 2\pi$	תחום ירידה:

ב. נקודת הקיצון הפנימית היא $x = \pi$. לפי תחומי העלייה והירידה יש נקודת מקסימום שתי נקודות הקלה הן נקודת מינימום. נסכים:

$x = 2\pi$ מינימום,	$x = \pi$ מקסימום,	$x = -\frac{\pi}{3}$ מינימום
---------------------	--------------------	------------------------------





ד. כגל ונתון: $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x) + 1$

חיתוך עם ציר y: $x=0 \Rightarrow f(0) = \sin 0 + 1 = 1$
(0, 1)

חיתוך עם ציר x: $y=0 \Rightarrow \sin(\frac{1}{2}x) + 1 = 0$

$\sin(\frac{1}{2}x) = -1$

$\frac{1}{2}x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$

$x = -\pi + 4\pi$

אין למשוואה פתרונות בתחום הנתון
ולכן הפונקציה אינה חוצת ציר x
בציר x בתחום הנתון.

לסיכום, יש נקודת חיתוך אחת $(0, 1)$

3. נחשב א-הערך של הפונקציה
בנקודת הקיצון?

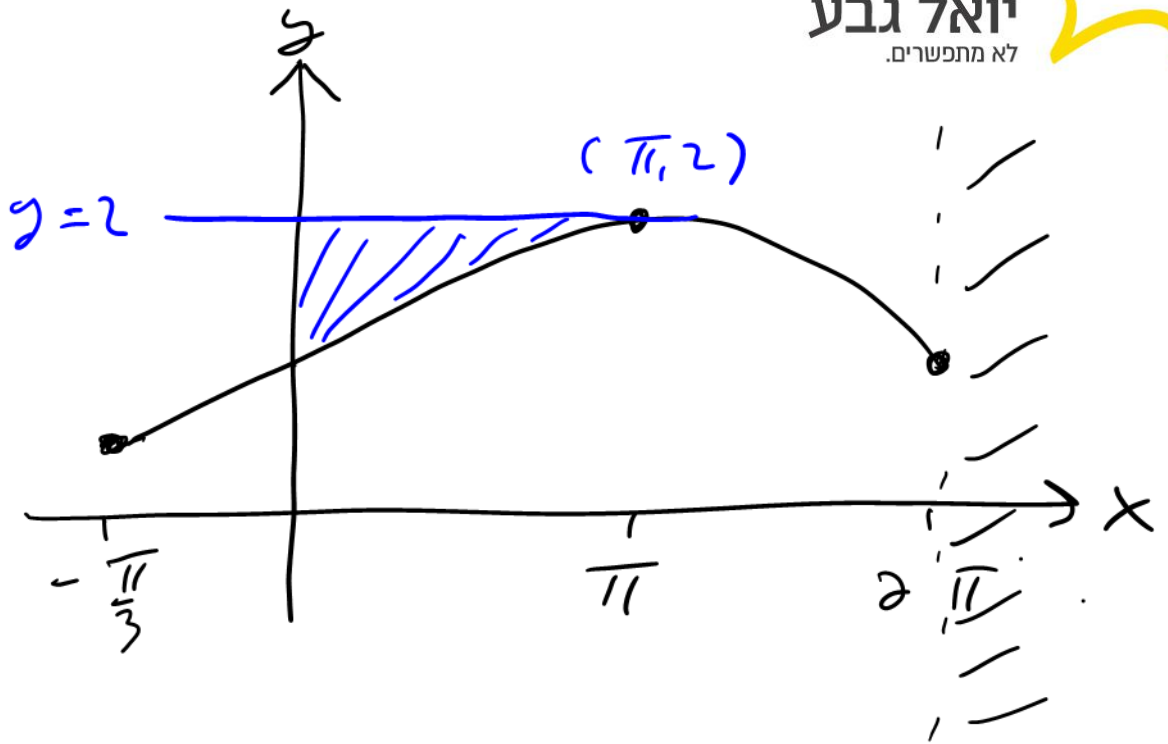
$f(2\pi) = \sin \pi + 1 = 1$

$f(\pi) = \sin(\frac{\pi}{2}) + 1 = 2$

$f(-\frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{1}{6}\pi) + 1 = \frac{1}{2}$

כגל נוכח לסיכום:





ה. נראה יא - הטבה על זרזי הסובוט
בהזדמנות. זהו טבה שסמך בין הנטיה
לפונקציה. זאכנ:

$$S = \int_0^{\pi} 2 - (\sin(\frac{1}{2}x) + 1) dx$$

$$S = \int_0^{\pi} (1 - \sin(\frac{1}{2}x)) dx$$

$$S = \left[x + \frac{\cos(\frac{1}{2}x)}{\frac{1}{2}} \right]_0^{\pi} = \left[x + 2 \cos(\frac{1}{2}x) \right]_0^{\pi}$$

$$S = \left[\pi + 2 \cos(\frac{\pi}{2}) \right] - \left[0 + 2 \cos 0 \right]$$



$$S = \pi - 2 = 1.14$$

למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



4. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{e^{a+x}}{x-3}$, a הוא פרמטר.

א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואת האסימפטוטה של הפונקצייה $f(x)$ המאונכת לציר ה- x .

נתון כי הנקודה $(5, \frac{e^6}{2})$ נמצאת על גרף הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את הפרמטר a .

הציבו בפונקצייה $f(x)$ את הפרמטר a שמצאתם בסעיף ב, וענו על הסעיפים ג-ה.

ג. (1) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(2) מצאו את תחומי הירידה של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = -f(x) + 18$ המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ה. מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$. נמקו את תשובתכם.

כתיבון:

$x \neq 3$

א. (1) מכנה שונה מאפס:

$x = 3$

(2) אם תחום היה צריך?

ב. וצ"ב א- הנקודה יחידה דבורה (יה):

$$\frac{e^6}{2} = \frac{e^{a+5}}{5-3} \Rightarrow e^6 = e^{a+5}$$

$$6 = a+5$$

$a = 1$



$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{x-3}$$

ד.

$$f'(x) = \frac{e^{x+1} \cdot (x-3) - 1 \cdot e^{x+1}}{(x-3)^2}$$

(1) (2) וכו' :

$$f'(x) = \frac{e^{x+1}(x-4)}{(x-3)^2}$$

(שאלה 5-א) וכו' :

$$e^{x+1}(x-4) = 0$$

אין פתרון

$$x = 4$$

נמצא נקודה קיצונית :

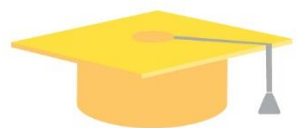
$$f(4) = \frac{e^{4+1}}{4-3} = e^5 \rightarrow (4, e^5)$$

נקודה זו - סוג הקדושה :

x	0	3	3.5	4	5
f'(x)	-	/	-	0	+
f(x)	↘	/	↘		↗

$$(4, e^5) \text{ מנייח}$$

כך? :





2. (2) לפי הטבלה, גחולמי ירידה הק:

$$3 < x < 4 \text{ או } x < 3$$

(3) ביר נ: $f(x) = \frac{e^{x+1}}{x-3} = -\frac{e}{3}$

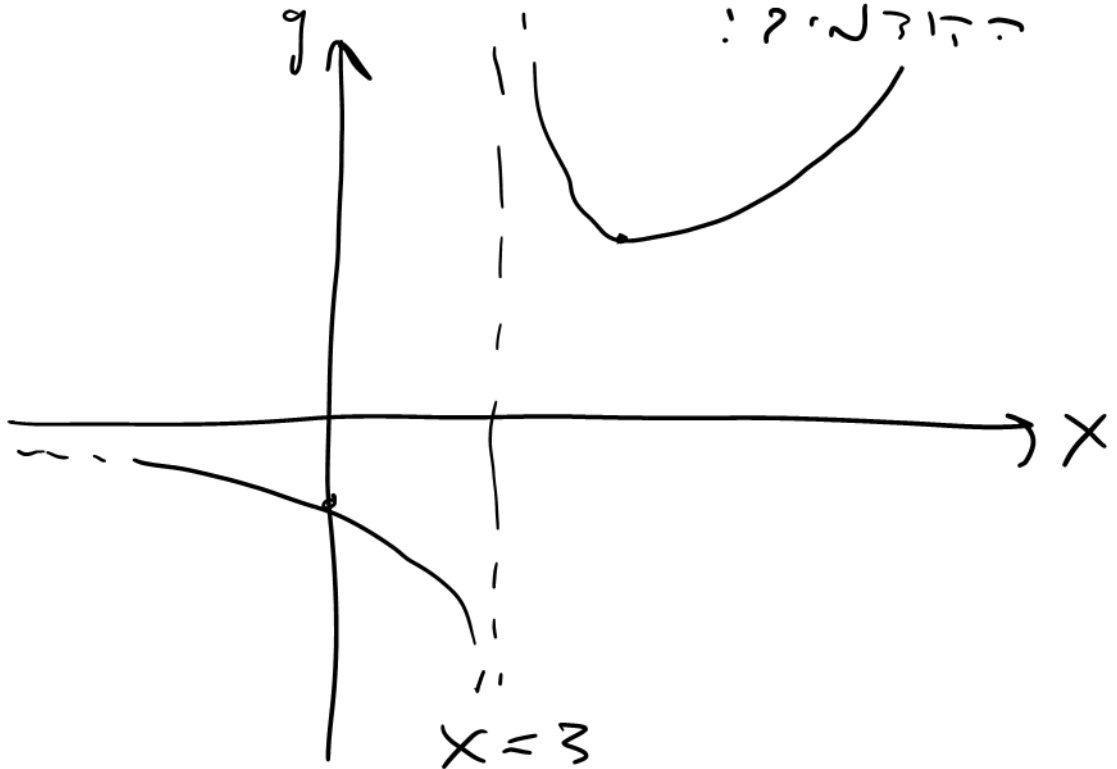
$(0, -\frac{e}{3})$

אז פהרון $\rightarrow \frac{e^{x+1}}{x-3} = 0$ ביר x:

אסיכוקי: $(0, -\frac{e}{3})$

3. (סיט) לפי מה שהזרנו קסגניג

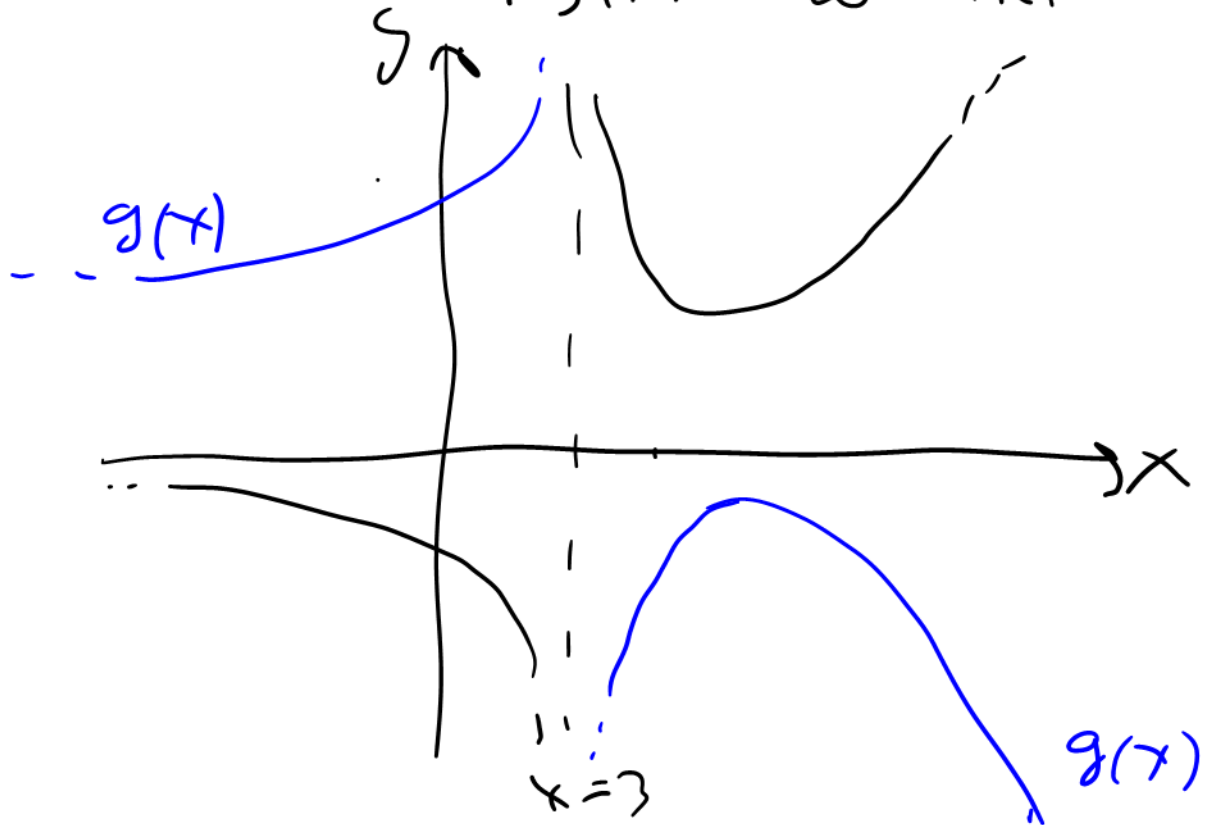
הדוגמיג:



הי. כגה נתון הפונקציה $f(x) = -x + 18$

נוסף על זה הפונקציה $g(x)$

זוהי הפונקציה $f(x)$:



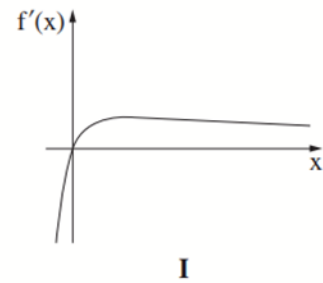
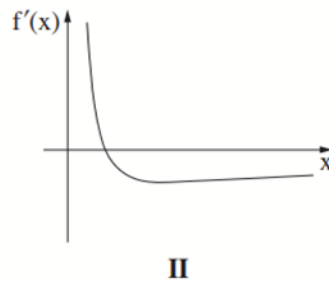
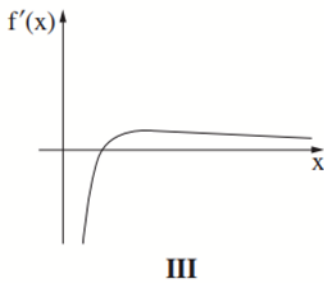
הסקרה: הכפלה בניקוט מקנה שיהיה
של הנוסף ביחס לציר x.

היובב 18 נמצא ו- הנוסף אחריו.
מכיוון ש- $5 \leq 18$, לאו (הק)
חיתנו עם קיר x של הפונקציה $f(x)$

לכך =
חובות: $x < 3$
שפזיות: $3 < x$



5. נתונה הפונקצייה $f(x) = (2 + \ln x) \cdot (-4 + \ln x)$.
- מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 - מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 - מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.
 - סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 - (1) אחד מן הגרפים III-I שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$. קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.
 - (2) חשבו את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי הישר $x = \sqrt{e}$ ועל ידי ציר ה- x .



פתרון:

א. התוכן של \ln מיוקד: $x > 0$

ב. זיכר $y = \ln x$ ($x = e$) קח \ln ההגדרה

$$(2 + \ln x) \cdot (-4 + \ln x) = 0 \quad ? \text{ כ} \cdot \text{א} - \text{ב}$$

$$\begin{aligned} \ln x &= -2 \\ x &= e^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln x &= 4 \\ x &= e^4 \end{aligned}$$

(הזכר \sim התיקור גם הזיכר): $(e^{-2}, 0), (e^4, 0)$

||



ד. נגזרת :

$$f'(x) = \frac{1}{x}(-4 + \ln x) + \frac{1}{x}(2 + \ln x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}(-4 + \ln x + 2 + \ln x)$$

$$f'(x) = \frac{2 \ln x - 2}{x}$$

נשווה לאפס ונפתור :

$$2 \ln x - 2 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e^1 = e$$

נגזרת 1.1 - ע"י ג' - y :

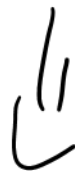
$$f'(e) = (-4 + \ln e) \cdot (2 + \ln e) = (-4 + 1)(2 + 1) = -9$$

נקודת קיצון זו הנקודה :

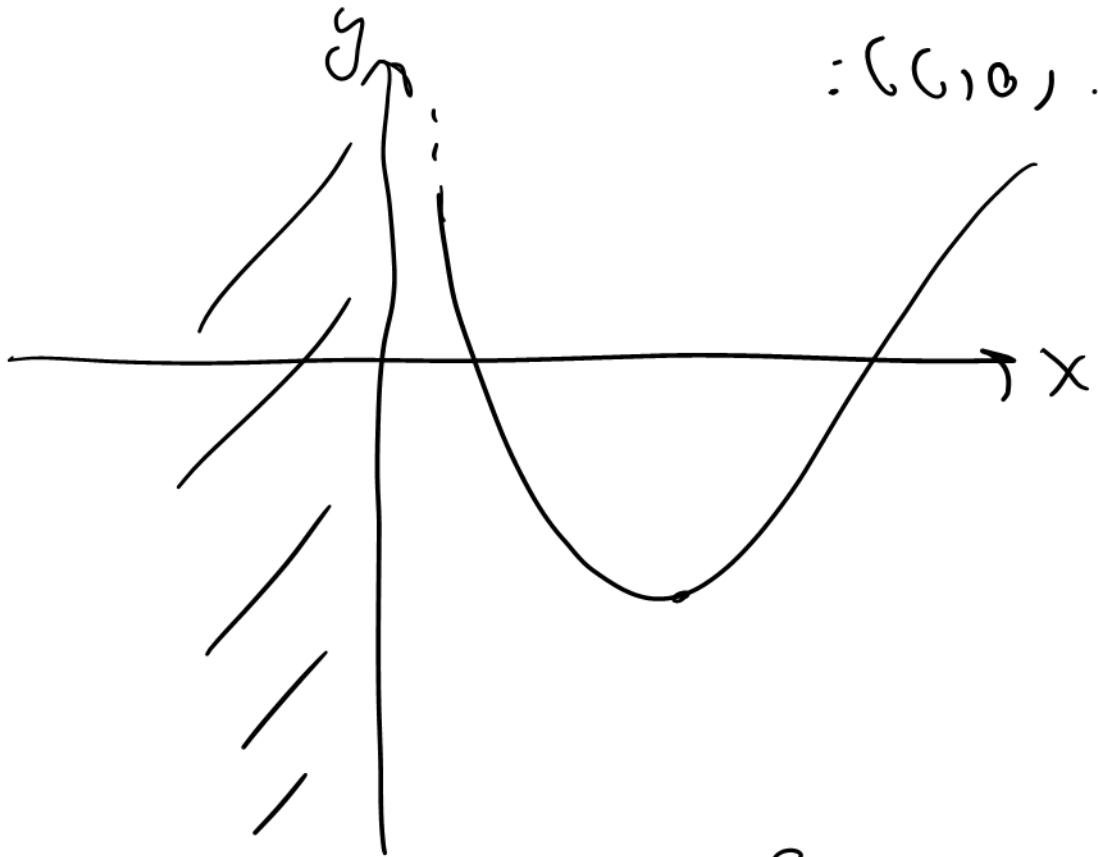
x	0	$e^{\frac{1}{2}}$	e	e^2
$f'(x)$	/	-	0	+
$f(x)$	/	↘	.	↗

לפיכך :

$(e, -9)$



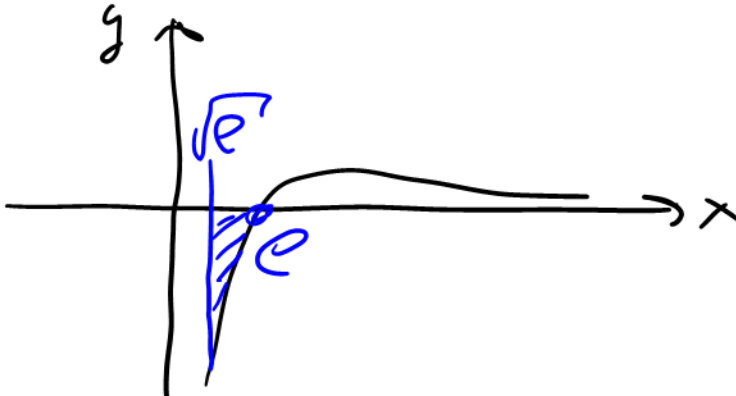
3. (100):



ה. (100) הגוף היחיד שמראה (הולך מינימום
(הנצחה של ציר ה-y) (הולך החיזון
עם ציר x חיובי מינימום) הוא

הרף III

(2) נראה א. - הטור הנבוקט בסרט:



נה $0 > -1$: אטא

$$S = \int_{\sqrt{e}}^e -f'(x) dx = \left[-f(x) \right]_{\sqrt{e}}^e$$

$$S = \left[-(2 + \ln x)(-4 + \ln x) \right]_{\sqrt{e}}^e =$$

$$S = \left\{ -(2 + \ln e)(-4 + \ln e) \right\} - \left\{ -(2 + \ln \sqrt{e})(-4 + \ln \sqrt{e}) \right\}$$

$$S = \{ 9 \} - \{ 8.75 \} = \boxed{0.25}$$

