יואל גבע
לא מתפשרים.

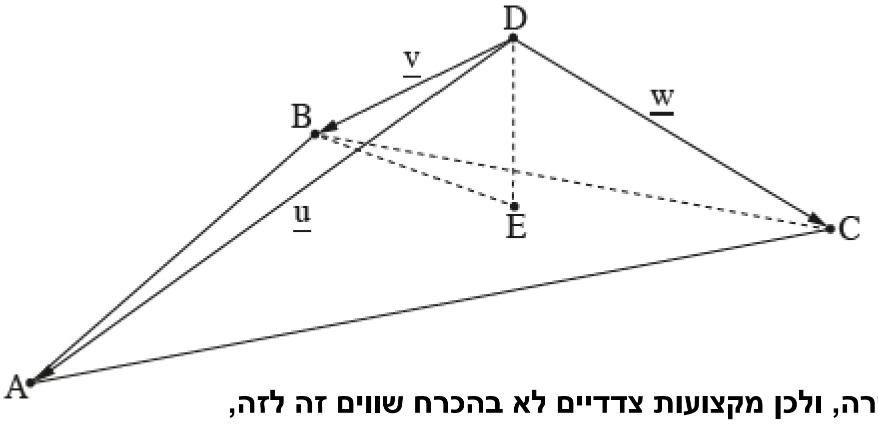
פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023 , מועד א', שאלון: 35472

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. בפירמידה המשולשת $ABCD$ המקצועות הצדדיים AD , BD ו- CD מאונכים זה לזה.



$$\boxed{\overrightarrow{DA} = \underline{u}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{DB} = \underline{v}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{DC} = \underline{w}}$$

$$\underline{u}\cdot\underline{v} = 0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{v}$$

$$\underline{u}\cdot\underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{w}$$

$$\underline{v}\cdot\underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v}\perp\underline{w}$$

מה עוד ניתן ללמוד מהנתונים ?

כל פאה היא משולש ישר זווית.

נשים לב שלא נאמר שהפירמידה ישרה, ולכן מקצועות צדדיים לא בהכרח שווים זה לזה,

והגובה אינו יורד למרכז המעגל החוסם.

נביע את הווקטורים $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{DE}$, באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$.

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA} = -\underline{v} + \underline{u}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BA} = \underline{u} - \underline{v}}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = -\underline{v} + \underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = -\underline{v} + \underline{w}}$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{9}\overrightarrow{BA} + \frac{4}{9}\overrightarrow{BC}$$

ומכאן ניתן ללמוד שהנקודה E נמצאת על מישור המשולש ABC .

(למעשה בתוך המשולש, אם כי מסקנה זו לא בתוכנית הלימודים של ארבע יחידות.)

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{9}(\underline{u} - \underline{v}) + \frac{4}{9}(-\underline{v} + \underline{w})$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{9}\underline{u} - \frac{1}{9}\underline{v} - \frac{4}{9}\underline{v} + \frac{4}{9}\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BE} = \frac{1}{9}\underline{u} - \frac{5}{9}\underline{v} + \frac{4}{9}\underline{w}}$$

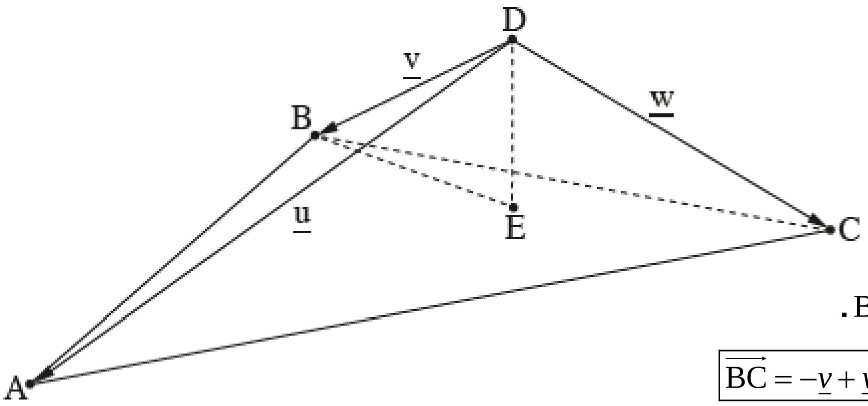
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{DE} = \underline{v} + \frac{1}{9}\underline{u} - \frac{5}{9}\underline{v} + \frac{4}{9}\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{DE} = \frac{1}{9}\underline{u} + \frac{4}{9}\underline{v} + \frac{4}{9}\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{BA} = \underline{u} - \underline{v}$, $\overrightarrow{BC} = -\underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{9}\underline{u} + \frac{4}{9}\underline{v} + \frac{4}{9}\underline{w}$.

ב. נחשב את שטח המשולש ABC **.**



$\boxed{\overrightarrow{DA}=\underline{u}}$ $|\underline{u}|=2$ $\underline{u}^2=4$

$\boxed{\overrightarrow{DB}=\underline{v}}$ $|\underline{v}|=1$ $\underline{v}^2=1$

$\boxed{\overrightarrow{DC}=\underline{w}}$ $|\underline{w}|=1$ $\underline{w}^2=1$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=0$ $\underline{u}\cdot\underline{w}=0$ $\underline{v}\cdot\underline{w}=0$

(1) נחשב את אורכי המקצועות BA **ו-** BC **.**

$$\boxed{\overrightarrow{BA}=\underline{u}-\underline{v}}$$
$$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{(\underline{u}-\underline{v})^2}$$
$$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{\underline{u}^2-2\underline{u}\underline{v}+\underline{v}^2}$$
$$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{4-2\cdot 0+1}$$
$$\boxed{|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BC}=-\underline{v}+\underline{w}}$$
$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-\underline{v}+\underline{w})^2}$$
$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\underline{v}^2-2\underline{v}\underline{w}+\underline{w}^2}$$
$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1-2\cdot 0+1}$$
$$\boxed{|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}}$$

ניתן, כמובן, גם למצוא את אורכי המקצועות האלו,

באמצעות משפט פיתגורס ב- ΔBDA **ו-** ΔBDC**, ישרי הזווית.**

תשובה: $BA=\sqrt{5}$ **,** $BC=\sqrt{2}$ **.**

(2) נחשב את $\sphericalangle ABC$ **.**

תכנון: $$\cos\sphericalangle ABC=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\underline{u}-\underline{v})\cdot(-\underline{v}+\underline{w})$$
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\underline{v}^2$$
$$\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1}$$
$$\cos\sphericalangle ABC=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$
$$\boxed{\sphericalangle ABC=71.565^\circ}$$

תשובה: $\sphericalangle ABC=71.565^\circ$ **.**

(3) נחשב את שטח המשולש ABC **.**

$$S_{\Delta ABC}=\frac{BA\cdot BC\cdot\sin\sphericalangle ABC}{2}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 71.565^\circ}{2}=1.5$$

תשובה: שטח המשולש ABC **הוא** 1.5**.**

$\boxed{\overrightarrow{DA}=\underline{u}}$ $\quad |\underline{u}|=2 \quad \underline{u}^2=4$

$\boxed{\overrightarrow{DB}=\underline{v}}$ $\quad |\underline{v}|=1 \quad \underline{v}^2=1$

$\boxed{\overrightarrow{DC}=\underline{w}}$ $\quad |\underline{w}|=1 \quad \underline{w}^2=1$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \quad \underline{u}\cdot\underline{w}=0 \quad \underline{v}\cdot\underline{w}=0$

ג. נוכיח כי הווקטור $\overrightarrow{DE}$ מאונך למישור ABC .

נעשה זאת, על ידי כך שנראה שהוא מאונך לשני וקטורים במישור $ABCD$, שאינם תלויים זה בזה.

$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BA}=(\frac{1}{9}\underline{u}+\frac{4}{9}\underline{v}+\frac{4}{9}\underline{w})\cdot(\underline{u}-\underline{v})=\frac{1}{9}\underline{u}^2-\frac{4}{9}\underline{v}^2=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}=0 \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BA}}$$

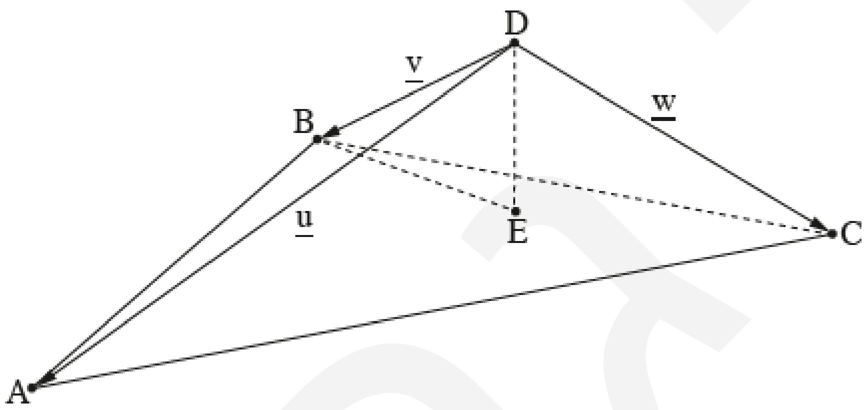
$$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}=(\frac{1}{9}\underline{u}+\frac{4}{9}\underline{v}+\frac{4}{9}\underline{w})\cdot(-\underline{v}+\underline{w})=-\frac{4}{9}\underline{v}^2+\frac{4}{9}\underline{w}^2=\frac{4}{9}-\frac{4}{9}=0 \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BC}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BA}\\ \overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{BC}\end{array}\right\}\boxed{\overrightarrow{DE}\perp\pi_{ABC}}$$

תשובה: הוכחנו כי הווקטור $\overrightarrow{DE}$ מאונך למישור ABC .

ד. נחשב את נפח הפירמידה $ABCD$, שבסיסה הוא משולש ABC , וגובהה הוא DE.

(הסבר - גובה בפירמידה הוא אנך היורד מקודקוד לבסיס, ולכן DE הוא הגובה לבסיס שהוא ΔABC .)



$$\boxed{\overrightarrow{DE}=\frac{1}{9}\underline{u}+\frac{4}{9}\underline{v}+\frac{4}{9}\underline{w}}$$

$$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{(\frac{1}{9}\underline{u}+\frac{4}{9}\underline{v}+\frac{4}{9}\underline{w})^2}$$

$$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\frac{1}{81}\underline{u}^2+\frac{16}{81}\underline{v}^2+\frac{16}{81}\underline{w}^2}$$

$$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\frac{1}{81}\cdot 4+\frac{16}{81}\cdot 1+\frac{16}{81}\cdot 1}$$

$$\boxed{|\overrightarrow{DE}|=\frac{2}{3}} \quad \rightarrow \boxed{DE=\frac{2}{3}}$$

הערה: בחישובים נעשה שימוש בנוסחת כפל מקוצר: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

אם לא למדתם את הנוסחה, וזה ממש סבבה בארבע יחידות, אז מומלץ להשתמש בחוק הפילוג המורחב.

$$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{(\frac{1}{9}\underline{u}+\frac{4}{9}\underline{v}+\frac{4}{9}\underline{w})(\frac{1}{9}\underline{u}+\frac{4}{9}\underline{v}+\frac{4}{9}\underline{w})} \quad \rightarrow |\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\frac{1}{81}\underline{u}^2+\frac{16}{81}\underline{v}^2+\frac{16}{81}\underline{w}^2}$$

התוצאה נראית ממש זהה, כי במקרה זה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$,

ואין טעם לרשום את המכפלות המתאפסות.

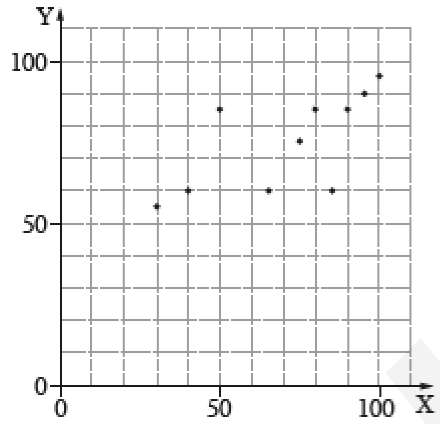
$$V_{ABCD}=\frac{S_{\Delta ABC}\cdot DE}{3}=\frac{1.5\cdot\frac{2}{3}}{3}$$

$$\boxed{V_{ABCD}=\frac{1}{3}}$$

תשובה: נפח הפירמידה $ABCD$ הוא $\frac{1}{3}$.

א. המורה רצתה לבדוק את הקשר בין הציון על העבודה (x), ובין הציון הסופי (y) .

האוכלוסייה שנבדקה היא 10 תלמידי כיתה י"ב.



ניתן לראות שישנם שלושה תלמידים שקיבלו ציון סופי של 60 ,

למרות שקיבלו ציונים שונים על העבודה שהגישו.

תשובה: לא ניתן להסיק מן הדיאגרמה הנתונה שכל תלמיד, שקיבל על העבודה ציון גבוה יותר מתלמיד אחר,

קיבל בהכרח <u>ציון סופי</u> גבוה יותר מן התלמיד האחר.

ב. ניתן לראות שקיימת מגמה של עלייה, ולכן נצפה לראות מקדם מתאם חיובי.

הנקודות מפוזרות בצורה די מהודקת סביב קשר לינארי עולה,

ולכן מקדם המתאם צפוי להיות חיובי חזק (מעל חצי).

ניתן גם לראות שאין קו ישר, שעליו תהיינה כל הנקודות, כפי שהסברנו בסעיף א,

ולכן מקדם המתאם אינו דטרמיניסטי $(r=1)$ או קרוב אליו.

לכן, מקדם מתאם $r=0.675$ נראה מתאים ביותר, כי הנקודות מסודרות די יפה סביב קשר ליניארי עולה.

תשובה: $r=0.675$ הוא מקדם מתאם, המתאים לקשר בין המשתנים.

ג. נמצא את משוואת קו הרגרסיה לניבוי הציון הסופי (y), על פי הציון הסופי של העבודה (x),

נתונים הממוצעים וסטיות התקן: $\bar{x}=71$, $S_x=23$, $\bar{y}=75$, $S_y=14$,

כאשר מקדם המתאם הוא $r=0.675$.

נמצא תחילה את שיפוע קו הרגרסיה: $m=r\cdot\frac{s_y}{s_x}=0.675\cdot\frac{14}{23}\approx 0.41$.

נמצא את משוואת קו הרגרסיה, שעובר בנקודת הממוצעים $(71, 75)$:

$$y-\bar{y}=m(x-\bar{x})$$
$$y-75=0.41(x-71)$$
$$y-75=0.41x-29.11$$
$$\boxed{y=0.41x+45.89}$$

תשובה: משוואת קו הרגרסיה, לניבוי הציון הסופי על פי הציון הסופי של העבודה, היא $y=0.41x+45.89$.

ד. הוחלט להעלות את הציון הסופי של כל תלמיד ב- 5 נקודות, ובעקבות העלאה זו התקבל ישר רגרסיה חדש.

(1) בעקבות העלאה בקבוע של כל אחד מהציונים הסופיים (y),

לא משתנה הפיזור של הציונים הסופיים, ולכן לא משתנה סטיית התקן S_y של משתנה זה.

תשובה: סטיית התקן S_y לא השתנתה, לאחר העלאת הציונים.

(2) מקדם המתאם הוא ממוצע של מכפלות ציוני התקן.

ההעלאה בקבוע של הציון הסופי, תעלה באותו קבוע גם את הממוצע של משתנה זה, ל- $\bar{y}=80$,

ולכן לא תשתנה הסטייה $y-\bar{y}$, וגם לא ישתנה ציון התקן, ומכאן שמקדם המתאם לא ישתנה.

(לסיכום, מקדם המתאם לא משתנה בהוספת קבוע, או כל שינוי ליניארי אחר.)

כתוצאה מכך, גם $m=r\cdot\frac{s_y}{s_x}$ לא ישתנה, ולמעשה נקבל תזוזה אנכית 5 יחידות מעלה של קו הרגרסיה,

ונקבל קו רגרסיה המקביל לקו המקורי.

תשובה: גרף II מייצג את הישר הישן (מסורטט בקו מלא) ואת הישר החדש (מסורטט בקו מקווקו).

ה. משוואת קו הרגרסיה, לאחר העלאת הציון הסופי של כל העבודות, היא $y=0.41x+50.89$.

נבדוק מה צריך להיות הציון הסופי של תלמיד בכיתה זו, שהציון שלו על העבודה הוא 71 .

נשים לב שציון זה הוא בתחום של הנתונים שנמדדו, ולכן ניתן להעריך את הציון הסופי שלו.

כיוון שציון שלו על העבודה שווה לממוצע $\bar{x}=71$, אז הציון הסופי יהייה שווה ל- $\bar{y}=80$ החדש,

והנקודה המתאימה תהייה נקודת הממוצעים החדשה $(71, 80)$.

<u>דרך פתרון נוספת</u>

נציב $x=71$, במשוואת קו הרגרסיה החדש: $y=0.41\cdot71+50.89=80$,

או נציב $x=71$, במשוואת קו הרגרסיה הישן: $y=0.41\cdot71+45.89=75$, ונוסיף 5 נקודות עכשיו.

<u>דרך פתרון נוספת</u> , גם היא ללא חישוב משוואת קו הרגרסיה החדש.

ציון התקן של הציון שלו על העבודה הוא 0 , מתאים לנתון שבממוצע.

בהתאם גם ציון התקן של הציון הסופי הוא 0.

נציב מחדש במשוואה של ציון התקן: $z=\frac{y-\bar{y}}{s_y} \quad \to 0=\frac{y-80}{14} \quad \to y=80$.

תשובה: הציון הסופי של התלמיד צריך להיות 80,

כדי שהנקודה המייצגת את שני הציונים שלו תהיה על ישר הרגרסיה החדש.

א. כאשר הבנק חייב כסף ללקוח, הוא משלם ללקוח ריבית בגובה של 1.5% מן החוב בכל שנה.

בתחילת שנת 2023 הפקיד דני בבנק $10{,}000$ שקל, לכן $M_0 = 10{,}000$ שקל.

נמצא את גורם הגדילה, את q: $\boxed{q = 1.015} \leftarrow \quad q = \frac{100+1.5}{100}$.

מכאן ש- $M_t = 10{,}000 \cdot 1.015^t$.

תשובה: (1) $f(t) = 10{,}000 \cdot 1.015^t$ **מתארת את גובה החוב של הבנק לדני לפי השנים** (t).

ב. נחשב כמה כסף יהייה הבנק חייב לדני לאחר 20 שנה, כלומר $t = 20$.

$$f(20) = 10{,}000 \cdot 1.015^{20} \approx 13{,}468.55$$

תשובה: הבנק יהיה חייב לדני, כעבור 20 שנה מן היום שבו הפקיד דני את הכסף, $13{,}468.55$ ₪ .

ג. כאשר הבנק זה מלווה כסף ללקוח, הוא גובה ממנו ריבית של 15% מגובה החוב כל שנה.

בתחילת שנת 2023 לוותה יעל $1{,}000$ ₪ מן הבנק, לכן $M_0 = 1{,}000$ שקל.

נמצא את גורם הגדילה, את q: $\boxed{q = 1.15} \leftarrow \quad q = \frac{100+15}{100}$.

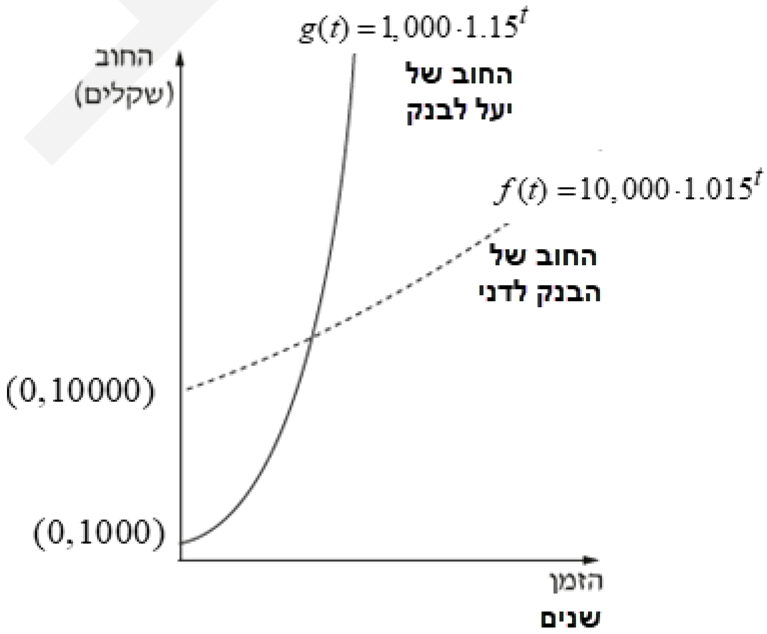
מכאן ש- $M_t = 1{,}000 \cdot 1.15^t$.

תשובה: הפונקציה $g(t) = 1{,}000 \cdot 1.15^t$ **מתארת את גובה החוב של יעל לבנק לפי השנים** (t).

ד. ניתן לראות בסרטוט שהקו המקווקו מתחיל גבוה יותר בציר ה- y , ומתאים לנקודה $(0, 10000)$,

וכמו כן עולה בקצב מתון יותר, מתאים לשיעור גדילה של 0.015 (להבדיל מזה של 0.15).

תשובה: הקו המקווקו מתאר את הפונקציה $f(t) = 10{,}000 \cdot 1.015^t$.



ה. נחשב בתחילתה של איזו שנה יגלה הבנק שהחוב שלו לדני קטן מן החוב של יעל לבנק.

נמצא את השנה שבה שני החובות ישתוו, שמצוינת בגרף כנקודת החיתוך בין שני הגרפים.

$$1,000\cdot 1.15^t = 10,000\cdot 1.015^t \quad / :(1,000\cdot 1.015^t)$$

$$\frac{1.15^t}{1.015^t} = 10$$

$$(\frac{1.15}{1.015})^t = 10$$

$$1.133^t = 10$$

$$\ell n 1.33^t = \ell n 10$$

$$t \ell n 1.33 = \ell n 10$$

$$t = \frac{\ell n 10}{\ell n 1.33}$$

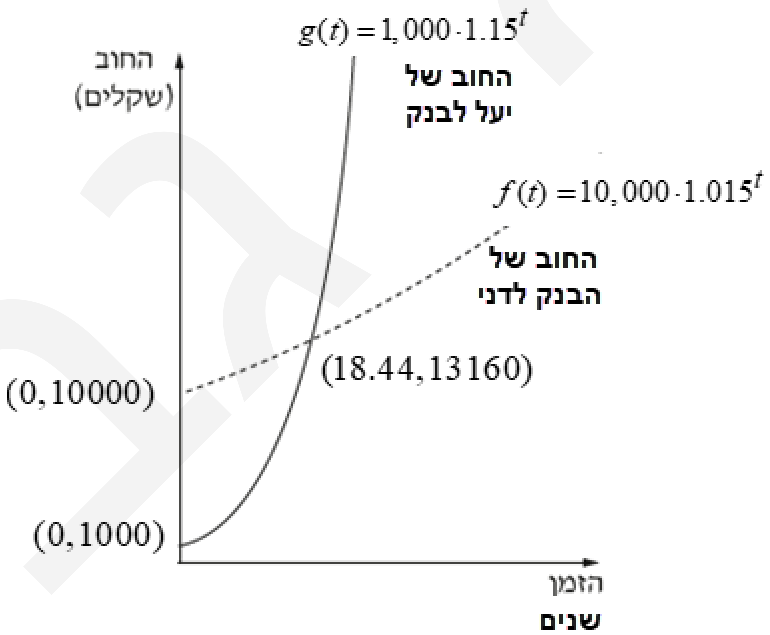
$$\boxed{t \approx 18.44}$$

(בבדיקה, נקבל שהחוב השווה הוא בערך $13,160$ **₪) .**

לאחר 18.44 **שנים יהיו החובות זהים, לכן בתחילתה של השנה הבאה** $2,023+19=2,042$ **,**

החוב לשני יהייה קטן מן החוב של יעל.

תשובה: בתחילתה של שנת $2,042$ **יגלה הבנק שהחוב שלו לדני קטן מן החוב של יעל לבנק .**



א. נתונה הפונקציה $f(x)=e^x\cdot(e^x-6)^2$ **, המוגדרת לכל** x .

בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

e^x **חיובי לכל** x . $\boxed{(\ell n\,6,0)}\leftarrow$ $x=\ell n\,6\leftarrow$ $e^x=6\leftarrow$ $e^x-6=0$.

בנקודת חיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $f(0)=e^0\cdot(e^0-6)^2=25\ \rightarrow\ \boxed{(0,25)}$

תשובה: שיעורי נקודות החיתוך, של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים, הם:** , $(\ell n\,6,0)$ **,** $(0,25)$.

ב. נראה כי $f(x)=e^{3x}-12e^{2x}+36e^x$.

$$f(x)=e^x\cdot(e^x-6)^2$$
$$f(x)=e^x\cdot(e^{2x}-12e^x+36)$$
$$\boxed{f(x)=e^{3x}-12e^{2x}+36e^x}$$

תשובה: הראינו כי $f(x)=e^{3x}-12e^{2x}+36e^x$.

ג. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגן.**

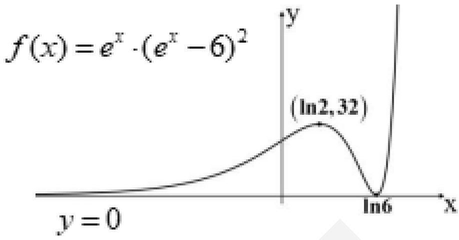
$$\boxed{f'(x)=3e^{3x}-24e^{2x}+36e^x}$$
$$3e^{3x}-24e^{2x}+36e^x=0$$
$$3e^x(e^{2x}-8e^x+12)=0$$
$$e^{2x}-8e^x+12=0$$
$$t^2-8t+12=0\ \leftarrow\ \boxed{e^x=t}$$
$$t=2,\ t=6$$
$$e^x=2\ \rightarrow x=\ell n\,2\ \rightarrow \boxed{(\ell n\,2,32)}$$
$$e^x=6\ \rightarrow x=\ell n\,6\ \rightarrow \boxed{(\ell n\,6,0)}$$
$$\left.\begin{matrix} f'(0)>0 \\ f'(\ell n\,3)<0\end{matrix}\right\}\boxed{(\ell n\,2,32),\quad \max}$$
$$\left.\begin{matrix} f'(\ell n\,3)<0 \\ f'(\ell n\,7)>0\end{matrix}\right\}\boxed{(\ell n\,6,0),\quad \min}$$

תשובה: שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **הם** $(\ell n\,6,0)$ **מינימום,** $(\ell n\,2,32)$ **מקסימום.**

ד. שתי הצבות, מימין ומשמאל, למציאת אסימפטוטות אופקיות, אם ישנן.

כאשר $x \to +\infty$ **, למשל** $f(10) = +1.06 \cdot 10^{+13} \to +\infty$ **, ואין אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x \to -\infty$ **, למשל** $f(-10) = +1.63 \cdot 10^{-3} \to 0^{+}$ **, והישר** $y = 0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**



תשובה: הסקיצה מעל.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = e^{3x}$ **, העולה לכל** x **.**

(1) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות.

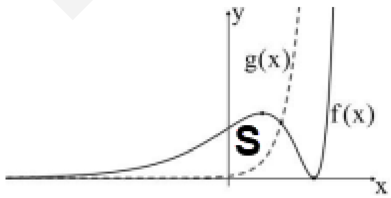
$$e^{3x} = e^{3x} - 12e^{2x} + 36e^{x}$$

$$12e^{2x} = 36e^{x} \quad / : (12e^{x} > 0)$$

$$e^{x} = 3 \quad \to x = \ell n\, 3 \quad \to \boxed{(\ell n\, 3, 27)}$$

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם גרף הפונקציה** $g(x)$ **הם** $(\ell n\, 3, 27)$ **.**

(2) נשרטט את הגרפים של שתי הפונקציות, באותה מערכת צירים.



תשובה: השרטוט מעל (כולל סימון השטח עבור תת-סעיף ה(3).

(3) נחשב את השטח המבוקש.

$$S = \int_{0}^{\ell n 3} (e^{3x} - 12e^{2x} + 36e^{x} - e^{3x})\, dx$$

$$S = \int_{0}^{\ell n 3} (-12e^{2x} + 36e^{x})\, dx$$

$$S = \frac{-12e^{2x}}{2} + 36e^{x} \Big]_{0}^{\ell n 3}$$

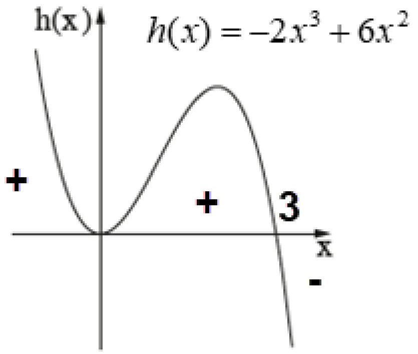
$$\left.\begin{array}{l} x = \ell n\, 3: \quad 54 \\ x = 0: \quad 30 \end{array}\right\}$$

$$S = 54 - 30 \to \boxed{S = 24}$$

תשובה: השטח המוגבל, על ידי הגרפים של שתי הפונקציות ועל ידי ציר ה- y **, הוא** 24 **.**

א. בסרטוט מתואר גרף הפונקציה $h(x)=-2x^3+6x^2$.

(1) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $h(x)$ **עם ציר ה-** x.



בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$:

$$0=-2x^3+6x^2$$
$$0=2x^2(-x+3)$$
$$2x^2 \quad \to x=0 \quad \to \boxed{(0,0)}$$
$$-x+3=0 \quad \to x=3 \quad \to \boxed{(3,0)}$$

תשובה: $(0,0)$ **,** $(3,0)$.

(2) הפונקציה חיובית כאשר הגרף שלה נמצא מעל ציר ה- x **, ושלילית כאשר הגרף מתחת לציר ה-** x .

תשובה: $h(x)$ **חיובית כאשר** $x<3\,, x\neq 0$ **, ושלילית כאשר** $x>3$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=\ell n\,(-2x^3+6x^2)$.

בתחום ההגדרה הביטוי שבתוך הפונקציה הלוגריתמית צ"ל חיובי, ואת התשובה לכך מצאנו בתת-סעיף א(2).

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x<3\,, x\neq 0$.

ג. תשובה: האסימפטוטות המאונכות לציר ה- x **של הפונקציה** $f(x)$ **הן** $x=3$ **ו-** $x=0$.

ד. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$\boxed{f(x)=\ell n\,(-2x^3+6x^2)}$$
$$\boxed{f\,'(x)=\frac{-6x^2+12x}{-2x^3+6x^2}}$$
$$0=-6x^2+12x$$
$$0=6x(-x+2)$$
$$\cancel{x=0} \quad \leftarrow x<3\,, x\neq 0$$
$$x=2 \quad \to f(2)=\ell n\,8 \quad \to (2,\ell n\,8)$$
$$\left.\begin{array}{l} f\,'(1)=\frac{+}{+}>0 \quad \nearrow \\ f\,'(2.5)=\frac{-}{+}<0 \quad \searrow \end{array}\right\} \boxed{(2,\ell n\,8),\max}$$

תשובה: $(2,\ell n\,8)$ **, מקסימום.**

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-f(x)+4$.

בטרנספורמציה הראשונה $-f(x)$ **היא שיקוף של גרף הפונקציה סביב ציר ה-** x **, ולכן** $(2,-\ell n\,8)$ **, מינימום.**

בטרנספורמציה השנייה $-f(x)+4$ **היא תזוזה אנכית** 4 **יחידות כלפי מעלה , ולכן** $(2,-\ell n\,8+4)$ **, מינימום.**

תשובה: $(2,-\ell n\,8+4)$ **, היא נקודת מינימום של הפונקציה** $g(x)$.