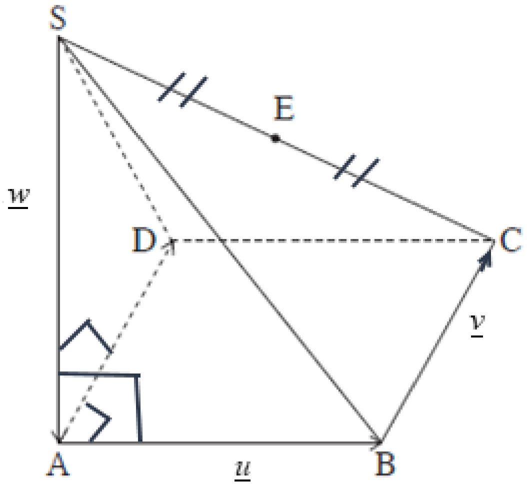
פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023, מועד מיוחד , שאלון: 35472

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. נתונה פירמידה $SABCD$ **, שבסיסה** $ABCD$ **הוא מלבן.**



מכאן שצלעות הבסיס מאונכות זו לזו, ולכן $\underline{v} \perp \underline{u}$.

המקצוע SA **מאונך לבסיס הפירמידה, ולכן** $\underline{w} \perp \underline{u}$ **ו-** $\underline{w} \perp \underline{v}$.

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{u}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AD} = \underline{v}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{SA} = \underline{w}}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{v}$$

$$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$$

מה עוד ניתן ללמוד מהנתונים ?

הפאות SAB **ו-** SAD **הן משולשים ישרי זווית.**

נשים לב שהפירמידה אינה ישרה, כי המקצועות הצדדיים לא שווים זה לזה, למשל $SB > SA$.

הנקודה E **היא אמצע המקצוע** SC**, לכן** $\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{EC}$.

$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \underline{w} + \underline{v} + \underline{u}$$

$$\boxed{\overrightarrow{SC} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}}$$

$$\overrightarrow{SE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{SE} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}}$$

נביע גם את הווקטורים $\overrightarrow{EB}$ **ו-** $\overrightarrow{ED}$ **, באמצעות** $\underline{u}$ **,** $\underline{v}$ **ו-** $\underline{w}$.

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} - \underline{v}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{ED} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} - \underline{u}$$

$$\boxed{\overrightarrow{ED} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{SC} = \underline{u} + \underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\underline{u} - \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$, $\overrightarrow{ED} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$.

ב. נתון $\overrightarrow{EB}$ **מאונך ל-** $\overrightarrow{ED}$ **, ולכן** $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=0$.

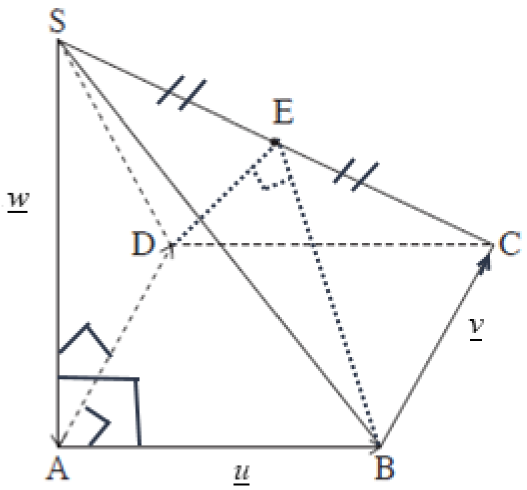
$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$ $\quad |\underline{u}|=4 \quad \underline{u}^2=16$

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}$ $\quad |\underline{v}|=3 \quad \underline{v}^2=9$

$\boxed{\overrightarrow{SA}=\underline{w}}$ $\quad |\underline{w}|=? \quad \underline{w}^2=?$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \quad \underline{u}\cdot\underline{w}=0 \quad \underline{v}\cdot\underline{w}=0$

נמצא את $|\underline{w}|$.



$$\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{ED}=0$$

$$(\frac{1}{2}\underline{u}-\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w})\cdot(-\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w})=0$$

$$-\frac{1}{4}\underline{u}^2-\frac{1}{4}\underline{v}^2+\frac{1}{4}\underline{w}^2=0 \quad /\cdot 4$$

$$-16-9+\underline{w}^2=0$$

$$\underline{w}^2=25$$

$$\boxed{|\underline{w}|=5}$$

תשובה: $|\underline{w}|=5$.

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$ $\quad |\underline{u}|=4 \quad \underline{u}^2=16$

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}$ $\quad |\underline{v}|=3 \quad \underline{v}^2=9$

$\boxed{\overrightarrow{SA}=\underline{w}}$ $\quad |\underline{w}|=5 \quad \underline{w}^2=25$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \quad \underline{u}\cdot\underline{w}=0 \quad \underline{v}\cdot\underline{w}=0$

ג. נתון: $D(0,0,0)$ **, ראשית הצירים.**

$AD=3$ **, כאשר הצלע** AD **מונחת על החלק החיובי של ציר ה-** x **, ולכן** $A(3,0,0)$.

$DC=4$ **, כאשר הצלע** DC **מונחת על החלק החיובי של ציר ה-** y **, ולכן** $C(0,4,0)$.

שיעור ה- z **של הנקודה** S **הוא חיובי, כאשר המקצוע** SA **מאונך לבסיס הפירמידה.**

מישור הבסיס מכיל את ציר ה- x **, ואת ציר ה-** y **, ומשוואתו היא** $z=0$ **(מישור** $[x,y]$**),**

ולכן: $x_S=x_A=3, \quad y_S=y_A=0$ **ו-** $z_S=z_A+|\underline{w}|=0+5=5$ **.**

תשובה: $A(3,0,0)$, $C(0,4,0)$, $S(3,0,5)$.

ד. נחשב את שטח המשולש DEB **ישר הזווית,** $\sphericalangle \text{DEB} = 90°$ **.**

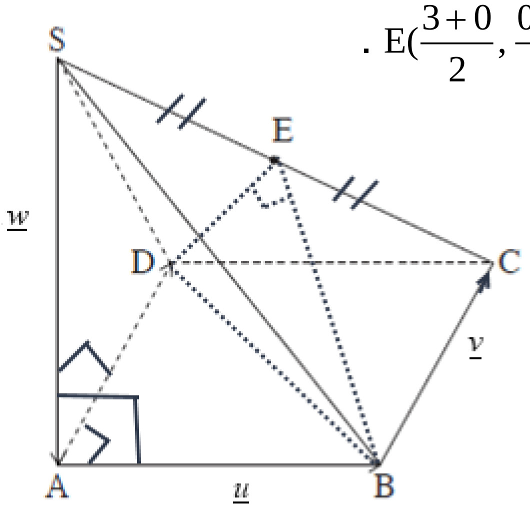
$\text{A}(3, 0, 0)$, $\text{C}(0, 4, 0)$, $\text{S}(3, 0, 5)$.

$\text{DC} = 4$, **כאשר הצלע** DC **מונחת על החלק החיובי של ציר ה-** y ,

מכאן שגם $\text{AB} = 4$ **, וצלע זו מקבילה לציר ה-** y **ולכן** $\text{B}(3, 4, 0)$.

הנקודה E **היא אמצע המקצוע** SC,

ולכן על פי נוסחת אמצע קטע: $\text{E}(1.5, 2, 2.5) \leftarrow \text{E}(\frac{3+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{5+0}{2})$.



$$\text{EB} = \sqrt{(1.5-3)^2 + (2-4)^2 + (2.5-0)^2} \quad \rightarrow \text{EB} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ED} = \sqrt{(1.5-0)^2 + (2-0)^2 + (2.5-0)^2} \quad \rightarrow \text{ED} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

מכאן שמשולש DEB **הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים.**

$$S_{\Delta\text{DEB}} = \frac{\text{EB} \cdot \text{ED}}{2} = \frac{\frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = 6.25$$

תשובה: שטח המשולש DEB **הוא** 6.25.

א. חקלאית בעלת מטע עצי שזיף התעניינה בקשר הליניארי שבין קוטר השזיפים (x), ובין משקלם (y) .

האוכלוסייה שנבדקה היא 4 שזיפים, כאשר הקוטר נתון במילימטרים, והמשקל בגרמים.

נמצא כי $s_y < s_x$, וכי מקדם המתאם הוא $r = 0.8$.

(1) נביע באמצעות s_x ו- s_y את שיפוע קו הרגרסיה.

$$m = r \cdot \frac{s_y}{s_x} \quad \rightarrow m = 0.8 \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

תשובה: שיפוע קו הרגרסיה הוא $0.8 \cdot \frac{s_y}{s_x}$.

(2) כיוון ש- $s_y < s_x$ **, אז** $0 < \frac{s_y}{s_x} < 1$ **(סטיית תקן היא תמיד גודל חיובי).**

מכאן ששיפוע קו הרגרסיה קטן מ- 1 **, ולמעשה** $0 < m < 0.8$.

תשובה: שיפוע קו הרגרסיה קטן מ- 1 .

ב. נתון כי ישר הרגרסיה לניבוי משקל השזיפים לפי קוטרם הוא: $y = \frac{3}{4}x + 15$ **, וכי** $\bar{x} = 80$.

לפנינו טבלה, ובה נתונים על המשקל של שלושה מתוך ארבעת השזיפים שנבחרו.

שזיף	המשקל (y) בגרמים
א	70
ב	70
ג	80
ד	?

(1) ישר הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים $(\bar{x}, \bar{y})$ **, כלומר בנקודה** $(80, \bar{y})$.

נציב $\bar{x} = 80$ **במשוואת ישר הרגרסיה:** $y = \frac{3}{4} \cdot 80 + 15 = 75$ **, ומכאן ש-** $\bar{y} = 75$ **גרם.**

סכום הנתונים שווה למכפלת הממצע במספר הנתונים, ולכן סך כל המשקלים הוא 300 **גרם** $= 75 \cdot 4$.

ומשקל שזיף ד הוא 80 **גרם** $= 300 - 70 - 70 - 80$.

אפשר כמובן גם: $y = 80 \leftarrow 300 = 220 + y \leftarrow 75 = \frac{70+70+80+y}{4}$.

תשובה: המשקל של שזיף ד הוא 80 **גרם.**

המשקל (y) בגרמים	שזיף
70	**א**
70	**ב**
80	**ג**
80	**ד**

(2) נמצא את סטיית התקן של משקל השזיפים.

$$s_y=\sqrt{\frac{(y_1-\bar{y})^2\cdot f_1+(y_2-\bar{y})^2\cdot f_2+....+(y_n-\bar{y})^2\cdot f_n}{n}}$$

$$s_y=\sqrt{\frac{(70-75)^2\cdot 1+(70-75)^2\cdot 1+(80-75)^2\cdot 1+(80-75)^2\cdot 1}{4}}$$

$$s_y=\sqrt{\frac{25+25+25+25}{4}}=\sqrt{\frac{100}{4}}=\sqrt{25}$$

$$\boxed{s_y=5}$$

הערה: נשים לב כי סטיית התקן קטנה או שווה למרחק הממוצע מנתוני הקצה (מעין בדיקה קטנה).

תשובה: סטיית התקן של משקל השזיפים היא 5 גרם.

(3) נמצא את סטיית התקן של קוטר השזיפים.

בתת-סעיף א (1) מצאנו כי $m=0.8\cdot\frac{s_y}{s_x}$.

על-פי ישר הרגרסיה $y=\frac{3}{4}x+15$ **מתקיים** $m=\frac{3}{4}$ **, ובתת סעיף ב(2) מצאנו כי** $s_y=5$.

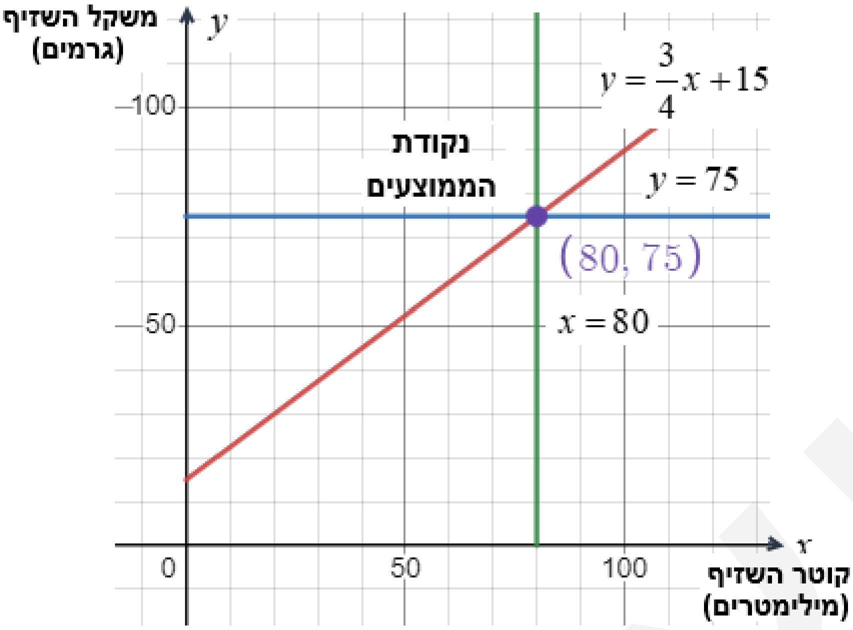
מכאן ש- $\frac{3}{4}=0.8\cdot\frac{5}{s_x}$.

$$\frac{3}{4}=\frac{4}{s_x}$$

$$\boxed{s_x=5\frac{1}{3}}$$

תשובה: סטיית התקן של קוטר השזיפים היא $5\frac{1}{3}$ מילימטר.

העשרה



משקל השזיף
(גרמים)
y
100
50
0
50
100
x
קוטר השזיף
(מילימטרים)
$y = \frac{3}{4}x + 15$
נקודת
הממוצעים
$y = 75$
$(80, 75)$
$x = 80$

נוסחת הגדילה והדעיכה: $A_t = A_0 \cdot q^t$ **, כאשר** A_0 **- הכמות ההתחלתית,**

q **הוא גורם הגדילה/דעיכה,** A_t **הכמות לאחר זמן** t**.**

א. ביישוב א', הפונקציה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום היא $M(t) = 10 \cdot 1.5^t$**.**

מכאן שמספר הנדבקים ההתחלתי הוא 10 **וגורם הגדילה הוא** $q = 1.5$ **(פונקציה עולה).**

ביישוב ב', הפונקציה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום היא $G(t) = 100 \cdot 1.2^t$**.**

מכאן שמספר הנדבקים ההתחלתי הוא 100 **וגורם הגדילה הוא** $q = 1.2$ **(פונקציה עולה).**

לכן, גרף II **מתאים ליישוב ב', שבו מספר הנדבקים ההתחלתי גדול יותר, וקצב הגדילה איטי יותר.**

תשובה: יישוב א' – גרף III **, יישוב ב' – גרף** II**.**

ב. נחשב מה היה מספר הנדבקים ביישוב ב', לאחר 8 **ימים.**

$$G(8) = 100 \cdot 1.2^8 \approx 430$$

תשובה: מספר הנדבקים ביישוב ב', לאחר 8 **ימים, היה בערך** 430**.**

ג. נחשב לאחר כמה ימים מספר הנדבקים בשני היישובים היה שווה.

$$10 \cdot 1.5^t = 100 \cdot 1.2^t \quad / : 10 \cdot 1.2^t$$

$$\frac{1.5^t}{1.2^t} = 10 \quad \rightarrow \left(\frac{1.5}{1.2}\right)^t = 10$$

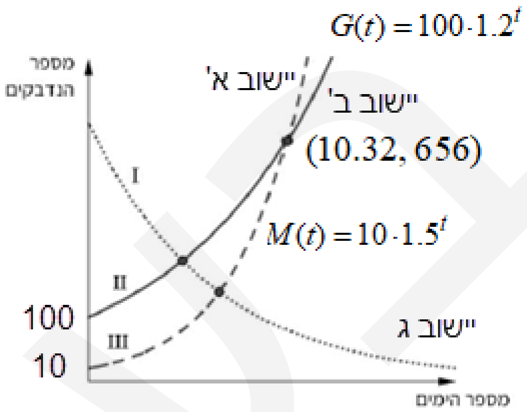
$$1.25^t = 10$$

$$\ell n 1.25^t = \ell n 10$$

$$t \ell n 1.25 = \ell n 10$$

$$t = \frac{\ell n 10}{\ell n 1.25}$$

$$\boxed{t \approx 10.32}$$



(בבדיקה, נקבל שמספר הנדבקים השווה הוא בערך 656 **.)**

תשובה: לאחר 10.32 **ימים בערך (ביום ה-** 11**) , מספר הנדבקים ביישוב א' וביישוב ב' היה שווה .**

ד. בישוב ג' מספר הנדבקים, בזמן הבדיקה הראשונית, היה גדול פי 40 ממספר הנדבקים ביישוב ב'.

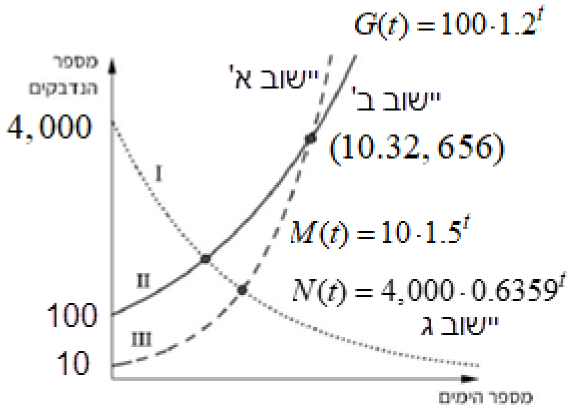
מכאן שמספר הנדבקים, בספירה הראשונית ביישוב ג', היה $100\cdot 40=4000$.

לאחר 8 ימים, ממתן התרופה הניסיונית שניתנה מייד לאחר בדיקה הראשונית,

היה מספר הנדבקים ביישוב ג', 107.

נחשב בכמה אחוזים ירד מספר הנבדקים ביישוב ג', בכל יום, מאז מתן התרופה.

$$107=4000\cdot q^8 \quad /:4000$$
$$0.02675=q^8$$
$$\sqrt[8]{0.02675}=q$$
$$\boxed{q=0.6359}$$



נמצא את אחוז הדעיכה היומי.

$$0.6359=\frac{100-P}{100} \quad /\cdot 100$$
$$63.59=100-P$$
$$\boxed{P=36.41\%}$$

(ביישוב ג', הפונקציה המתארת את מספר הנדבקים בכל יום היא $N(t)=4,000\cdot 0.6359^t$.)

תשובה: מספר הנדבקים ביישוב ג' ירד ב- 36.41% בכל יום.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{a+x}}{x-2}$, a **הוא פרמטר.**

(1) בתחום ההגדרה מכנה שונה מאפס.

$x-2\neq 0 \quad \rightarrow \boxed{x\neq 2}$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq 2$.

(2) $x=2$ **מאפס מכנה ולא מונה , ולכן הישר** $x=2$ **הוא אסימפטוטה אנכית.**

תשובה: $x=2$ **הוא האסימפטוטה המאונכת לציר ה-** x **של הפונקציה** $f(x)$.

ב. נתון כי הנקודה $(4,\frac{e^5}{2})$ **נמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)$.

נציב את שיעורי הנקודה בתבנית הפונקציה $f(x)$

$$\frac{e^5}{2}=\frac{e^{a+4}}{4-2}$$
$$e^5=e^{a+4}$$
$$5=a+4$$
$$\boxed{a=1}$$

תשובה: $a=1$.

ג. נציב $a=1$ **בפונקציה** $f(x)$ **ונקבל** $f(x)=\frac{e^{1+x}}{x-2}$.

(1) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$\boxed{f(x)=\frac{e^{1+x}}{x-2}}$$
$$f'(x)=\frac{e^{1+x}(x-2)-1\cdot e^{1+x}}{(x-2)^2}$$
$$f'(x)=\frac{e^{1+x}(x-2-1)}{(x-2)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{e^{1+x}(x-3)}{(x-2)^2}}$$
$$x-3=0 \quad \rightarrow x=3$$
$$\left.\begin{array}{ll} f'(2.5)<0 & \searrow \\ f'(4)>0 & \nearrow \end{array}\right\} \boxed{(3,e^4),\min}$$
$$f'(1)<0 \quad \searrow$$

תשובה: $(3,e^4)$ **, מינימום.**

(2) נרשום את תחומי הירידה של הפונקציה, בהתאם לפתרון של תת-הסעיף הקודם.

תשובה: תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$ **הם** $2<x<3$ **או** $x<2$.

(3) מונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{1+x}}{x-2}$ **חיובי, בתחום ההגדרה, ולכן אין נקודות חיתוך עם ציר ה-** x **.**

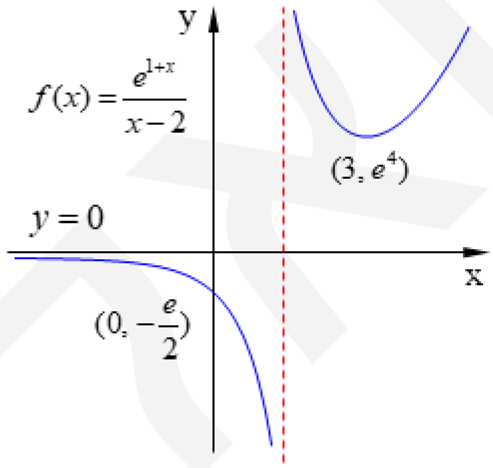
בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$**, ולכן** $f(0)=\frac{e^{1+0}}{0-2}=-\frac{e}{2} \quad \to (0,-\frac{e}{2})$

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך, של הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים, הם** $(0,-\frac{e}{2})$**.**

(4) שתי הצבות, מומלצות, לפני סרטוט גרף הפונקציה:

$x=10 \quad \to f(10)=+7,484 \to +\infty$ **, ולכן אין אסימפטוטה אופקית לימין.**

$x=-10 \quad \to f(-10)=-1.03\cdot 10^{-5} \to 0^{-}$ **, ולכן** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**



תשובה: הסרטוט של הפונקציה $f(x)$ **מעל.**

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-f(x)+13$, שהיא טרנספורמציה כפולה של הפונקציה $f(x)$.

$-f(x)$ סימטרית ל- $f(x)$, ביחס לציר ה- x .

$-f(x)+13$ היא הזזה אנכית 13 יחידות כלפי מעלה של $-f(x)$.

תחומי החיוביות והשליליות של $f(x)$ הם: חיוביות $x>2$ ושליליות $x<2$.

לאחר ההזזה הראשונה של $-f(x)$ נקבל נקודת מקסימום $(3,-e^4)$,

כאשר תחומי החיוביות והשליליות של $-f(x)$ הם: שליליות $x>2$ וחיוביות $x<2$.

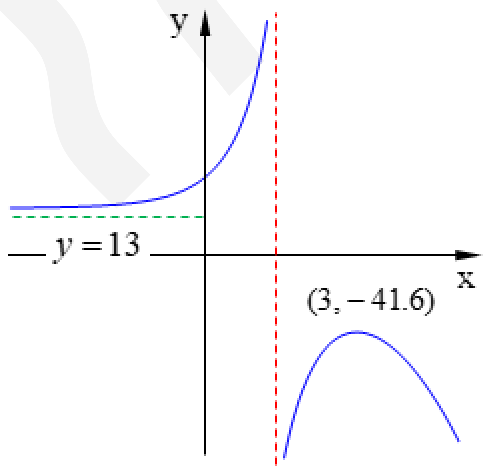
מכיוון ושיעור ה- y בנקודת המקסימום, של $-f(x)$, הוא $-e^4 \approx -54.6$,

אז גם לאחר הזזה אנכית 13 יחידות כלפי מעלה, הגרף בתחום $x>2$ יישאר מתחת לציר ה- x ,

עם נקודת מקסימום $(3,-41.6)$

וכמובן שהגרף בתחום $x<2$ יישאר חיובי (יתרחק 13 יחידות נוספות מציר ה- x),

והאסימפטוטה האופקית תהייה $y=13$.



תשובה: עבור $g(x)=-f(x)+13$ תחום השליליות הוא $x>2$, ותחום החיוביות הוא $x<2$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(2+\ell n\,x)\cdot(-4+\ell n\,x)$.

בתחום ההגדרה הביטוי שבתוך הפונקציה הלוגריתמית צ"ל חיובי.

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x>0$.

ב. בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$(2+\ell n\,x)\cdot(-4+\ell n\,x)=0$$

$$2+\ell n\,x=0 \quad \to \ell n\,x=-2 \quad x=e^{-2} \quad \to (\frac{1}{e^2},0)$$

$$-4+\ell n\,x=0 \quad \to \ell n\,x=4 \quad x=e^{4} \quad \to (e^4,0)$$

לאור תחום ההגדרה, אין נקודת חיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .

תשובה: $(e^4,0)$ **,** $(\frac{1}{e^2},0)$**.**

ג. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$f(x)=(2+\ell n\,x)\cdot(-4+\ell n\,x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot(-4+\ell n\,x)+(2+\ell n\,x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{-4+\ell n\,x+2+\ell n\,x}{x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2\ell n\,x-2}{x}}$$

$$2\ell n\,x-2=0$$

$$2\ell n\,x=2$$

$$\ell n\,x=1$$

$$x=e \quad \to (e,-9)$$

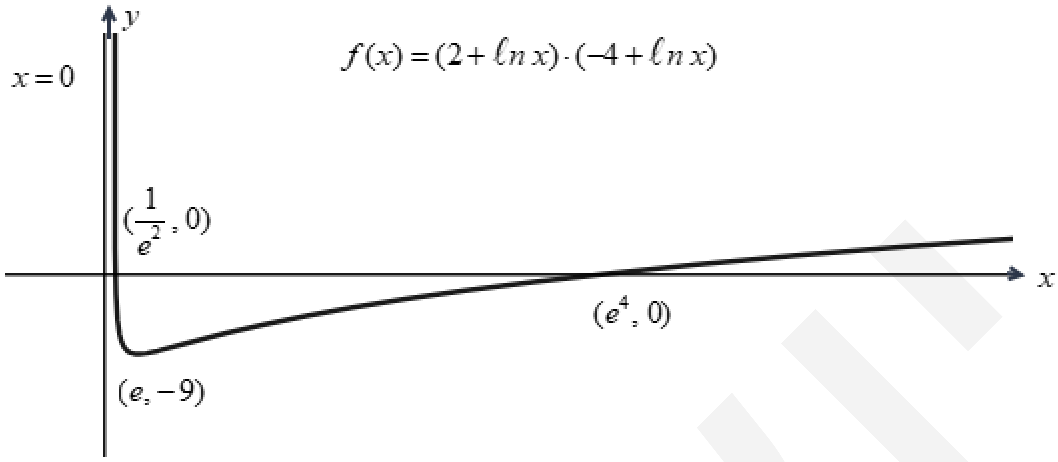
$$\left.\begin{array}{l} f'(3)=\frac{(+)}{(+)}>0 \quad \nearrow \\ f'(2)=\frac{(-)}{(+)}<0 \quad \searrow \end{array}\right\} \underline{(e,-9),\min}$$

תשובה: $(e,-9)$ **, מינימום.**

ד. שתי הצבות, מומלצות, לפני סרטוט גרף הפונקציה:

$x=100,000 \quad \to f(100,000)=+101 \to +\infty$ **, ולכן אין אסימפטוטה אופקית לימין.**

$x=0.000001 \quad \to f(0.000001)=+210 \to +\infty$ **, ולכן** $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

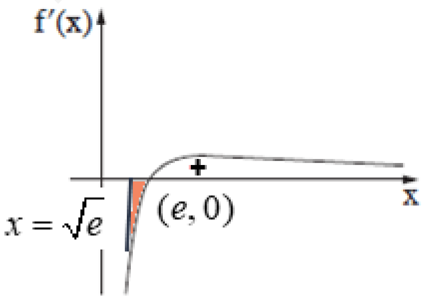


תשובה: הסרטוט של הפונקציה $f(x)$ **מעל.**

ה. (1) גרף III **מתאים לתאר את** $f'(x)=\dfrac{2\ell n\, x-2}{x}$ **,**

כי הוא שלילי, בתחום הירידה של $f(x)$ **(** $0<x<e$ **) וחיובי בתחום העלייה של** $f(x)$ **(** $x>e$ **),**

כאשר הצירים מהווים אסימפטוטות לגרף (מסומן גם השטח לתת-סעיף (2)).



III

תשובה: גרף III **מתאר את פונקציית הנגזרת** $f'(x)$ **.**

(2) נחשב את השטח המבוקש, הצבוע באדום בתת-הסעיף הקודם.

$$S=\int_{\sqrt{e}}^{e}(0-f'(x))\,dx=-f(x)\Big]_{\sqrt{e}}^{e}=$$

$$x=e: \quad -f(e)=-(-9)=9$$

$$x=\sqrt{e}: \quad -f(\sqrt{e})=-(-8.75)=8.75$$

$$S=9-8.75=0.25$$

תשובה: השטח המוגבל, על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ **,**

הישר $x=\sqrt{e}$ **וציר ה-** x **הוא** 0.25 **.**