פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023, מועד מיוחד , שאלון: 35471

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. הציונים של כל אחד ממבחני המתכונת במתמטיקה, שנערכו בבית ספר מסוים, מתפלגים נורמלית.

$\bar{x} = 65.05$ **,** **וסטיית התקן** $s = 15$ **.**

הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה היה 70 **.**

נמצא מהו האחוז של התלמידים שיקבלו ציון נמוך משירה, כלומר שקיבלו ציון נמוך מ- 70**.**

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ **.**

$z = \frac{70-65.05}{15} = \frac{4.95}{15} = 0.33$ **.**

נמצא את ההסתברות המתאימה בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

$p(x<70) = p(z<0.33) = 0.629 = 0.629 \cdot 100\% = 62.9\%$ **.**

תשובה: 62.9% **מהתלמידים, קיבלו ציון נמוך מן הציון שקיבלה שירה במתכונת הראשונה.**

ב. הציון שקיבלה שירה במתכונת השנייה היה 78 **.**

גם במתכונת זו 62.9% **מהתלמידים, קיבלו ציון נמוך מן הציון שקיבלה שירה.**

לכן ציון התקן של שירה, גם במתכונת השנייה, היה 0.33 **.**

סטיית התקן של המתכונת השנייה הייתה $s = 10$ **.**

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$

$$0.33 = \frac{78-\bar{x}}{10} \quad / \cdot 10$$

$$3.3 = 78 - \bar{x}$$ **.**

$$\boxed{\bar{x} = 74.7}$$

תשובה: הציון הממוצע במתכונת השנייה היה 74.7 **.**

ג. אריאל קיבל ציון זהה בשתי המתכונות.

(1) ידוע כי במתכונת הראשונה קיבלו 29.8% **מן התלמידים ציון גבוה ממנו.**

כלומר $100\%-29.8\%=70.2\%=0.702$ **מן התלמידים, קיבלו ציון נמוך מאריאל.**

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, ציון התקן המתאים עבור $p=0.702$ **הוא** $z=0.53$ **.**

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}$$

$$0.53=\frac{x-65.05}{15} \quad / \cdot 15$$

$$7.95=x-65.05$$

$$\boxed{x=73}$$

תשובה: הציון שקיבל אריאל בשתי המתכונות הוא 73**.**

(2) במתכונת הראשונה אריאל קיבל ציון 73**, שהיה גבוה מהממוצע** 65.05 **.**

במתכונת השנייה אריאל קיבל ציון 73**, שהיה נמוך מהממוצע** 74.7 **.**

מכאן, שהצליח יותר במתכונת הראשונה (שם יותר מ- 50% **מהתלמידים קיבלו ציון נמוך ממנו),**

מאשר המתכונת השנייה (שם יותר מ- 50% **מהתלמידים קיבלו ציון גבוה ממנו).**

<u>אפשר גם</u>

נבדוק את ציון התקן, שקיבל אריאל בשתי המתכונות.

במתכונת הראשונה, ציון התקן היה 0.53 **.**

במתכונת השנייה, ציון התקן היה $z=\frac{73-74.7}{10}=\frac{-1.7}{10}\approx-0.17$ **.**

מכאן שבמתכונת הראשונה אחוז התלמידים שקיבלו ציון <u>נמוך</u> ממנו היה גדול יותר.

<u>אפשר גם</u>

להמשיך ולחשב את ההסתברויות המתאימות, אבל זה כבר הרבה יותר מדי מהנדרש

תשובה: אריאל הצליח יותר, יחסית לכל התלמידים שנבחנו, במתכונת הראשונה.

א. מורה למתמטיקה לתלמידי כיתה י"א רצתה לבדוק את הקשר הליניארי
בין ציוני תלמידיה בבחינת הבגרות במתמטיקה (x) ובין ציוני ההגשה שלהם (y) .
האוכלוסייה שנבדקה, על ידי המורה, היא 5 תלמידים, שנבחנו בשנת 2022.

ציון בחינת הבגרות (x)	ציון ההגשה (y)
59	78
60	81
60	81
60	81
61	**?**

נמצא את ממוצע ציוני הבגרות: $\bar{x} = \frac{59+60+60+60+61}{5} = \frac{300}{5} = 60$

אפשר גם לראות שיש שלושה ציוני 60, והשניים האחרים בקצוות באותו מרחק, ולכן זה הממוצע.

תשובה: ממוצע ציוני בחינת הבגרות של תלמידים אלו הוא 60 .

ב. המורה חישבה את ישר הרגרסיה לניבוי y על פי x .

(1) בעבור $x = 60$ מנובא הערך $y = 80$, כאשר בנוסף נתון כי שיפוע ישר הרגרסיה הוא $m = 0.5$.

נמצא את משוואת קו הרגרסיה.

$$y - 80 = 0.5(x - 60)$$
$$y - 80 = 0.5x - 30$$
$$\boxed{y = 0.5x + 50}$$

תשובה: משוואת ישר הרגרסיה היא $y = 0.5x + 50$.

(2) קו הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים, לכן: $\bar{y} = 0.5 \cdot 60 + 50 = 80$.

אם ממוצע ציוני ההגשה הוא 80 , אז סכום ציוני ההגשה הוא $80 \cdot 5 = 400$.

מכאן שציון ההגשה של התלמיד החמישי הוא : $400-(78+81+81+81) = 79$.

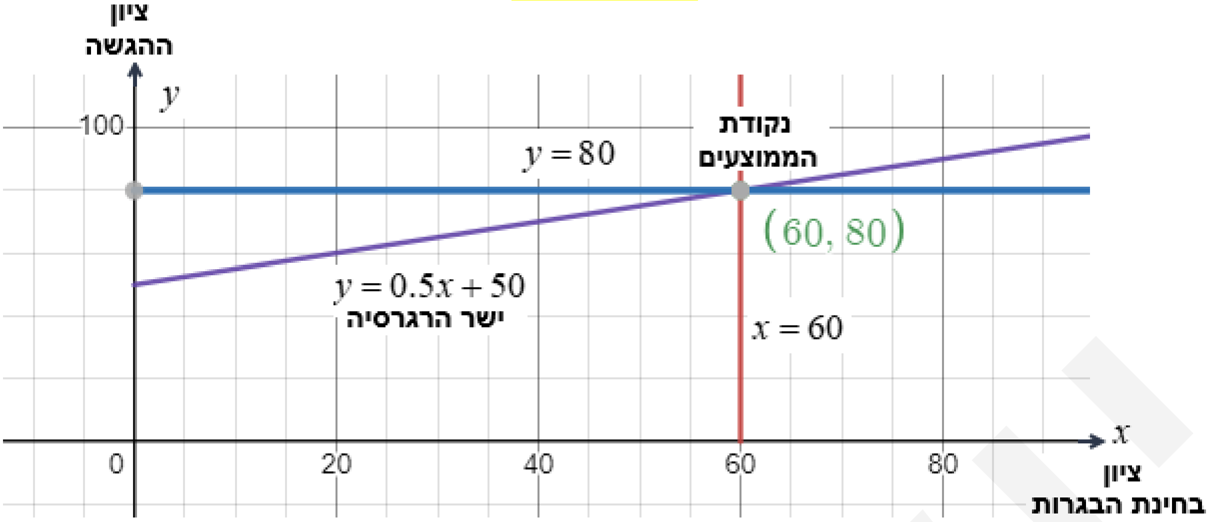
תשובה: ציון ההגשה של התלמיד החמישי הוא 79 .

ג. גם בשנת 2021 בדקה המורה את הקשר הליניארי
בין ציוני תלמידיה בבחינת הבגרות במתמטיקה (x) ובין ציוני ההגשה שלהם (y) .
היא גילתה שציון ההגשה של כל אחד מהתלמידים זהה <u>בדיוק</u> לציון ההגשה המנובא לו באמצעות ישר הרגרסיה.

מכאן שהקשר הוא קשר דטרמיניסטי, חיובי או שלילי,
ומקדם המתאם יכול להיות $r = 1$, או $r = -1$.

תשובה: שתי הטענות האפשריות הן (2) $r = 1$, או (4) $r = -1$.

העשרה

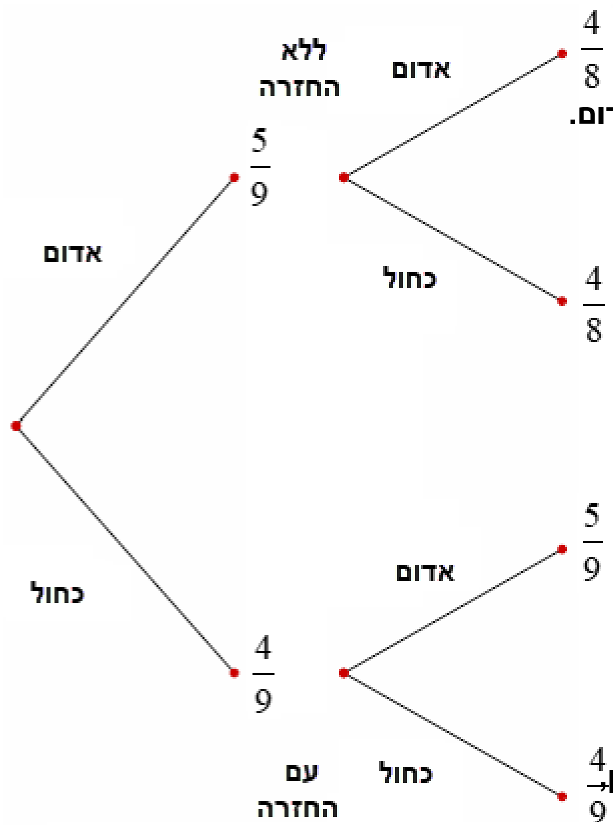


ציון ההגשה
y
100
$y = 80$
נקודת הממוצעים
$(60, 80)$
$y = 0.5x + 50$
ישר הרגרסיה
$x = 60$
0
20
40
60
80
x
ציון בחינת הבגרות

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים, עם החזרה עבור כפתור כחול בלבד.
נחשב את ההסתברות, שדנה הוציאה שני כפתורים בצבעים השונים זה מזה .

$$P(differnt\ colours)=\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{85}{162}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{85}{162}$.



ב. נחשב את ההסתברות שדנה הוציאה לכל היותר כפתור אחד אדום.
המאורע המשלים הוא: הוצא שני כפתורים אדומים.

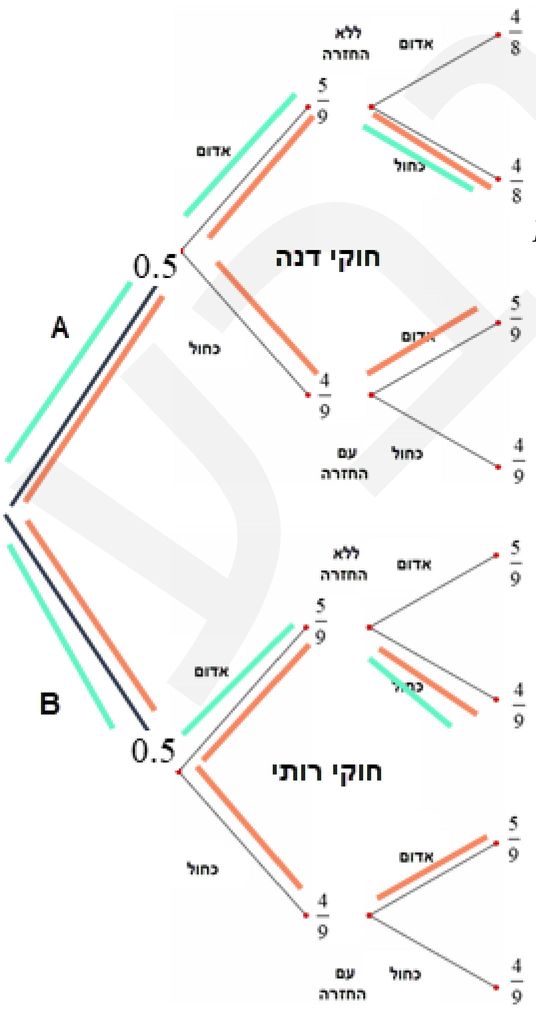
$$P(at\ most\ 1\ red)=1-\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{13}{18}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{13}{18}$.

ג. רותי ודנה משחקות יחד בכפתורים.
הטלת המטבעה המאוזן, אומרת שההסתברות של כל אחת מהן לשחק את המשחק על פי החוקים שלה, היא 0.5 .
נחשב את ההסתברות
ששני הכפתורים שיצאו במשחק הזה היו בצבעים שונים.

$$P(differnt\ colours)=\underbrace{\left(0.5\cdot\frac{85}{162}\right)}_{Dana}+\underbrace{\left(0.5\cdot\left(\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}\right)\right)}_{Ruty}=\frac{55}{108}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{55}{108}$.



ד. נחשב את ההסתברות שהכפתור הראשון שיצא הוא אדום,
אם ידוע ששני הכפתורים היו בצבעים שונים.
אלו המסלולים הירוקים, מבין המסלולים האדומים.

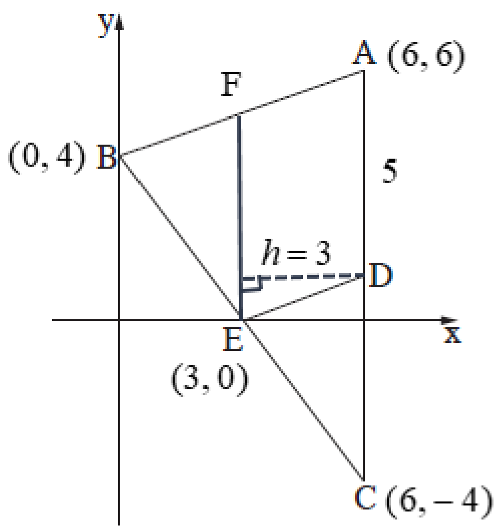
$$P(1st\ is\ red\ /\ different\ colours)=$$

$$=\frac{P(1st\ is\ red\cap different\ colours)}{P(different\ colours)}=$$

$$=\frac{0.5\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}+0.5\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{9}}{55/108}=\frac{\frac{85}{324}}{55/108}=\frac{17}{33}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{17}{33}$.

א. הקודקוד B **על ציר ה-** y **, לכן** $x_B = 0$ **. נסמן** $B(0, y)$.



$AB = \sqrt{40}$.

$$\sqrt{(0-6)^2 + (y-6)^2} = \sqrt{40}$$
$$36 + (y-6)^2 = 40$$
$$(y-6)^2 = 4$$
$$y - 6 = 2 \rightarrow \cancel{y = 8} \leftarrow y_B < 6$$
$$y - 6 = -2 \rightarrow y = 4 \rightarrow \boxed{B(0, 4)}$$

תשובה: $B(0, 4)$.

ב. הנקודה E **היא אמצע הצלע** BC**, ועל ציר ה-** x **, לכן** $y_E = 0$ **. נסמן** $E(x, 0)$.

הצלע AC **מקבילה לציר ה-** y**, לכן** $x_C = x_A = 6$.

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0+6}{2} = 3 \rightarrow \boxed{E(3, 0)}$$
$$y_E = \frac{y_B + y_C}{2} \rightarrow 0 = \frac{4 + y_C}{2} \rightarrow -4 = y_C \rightarrow \boxed{C(6, -4)}$$

תשובה: $E(3, 0)$, $C(6, -4)$.

ג. הנקודה D **היא אמצע הצלע** AC**, ולכן** DE **הוא קטע אמצעים ב-** ΔABC.

מן הנקודה F **העבירו ישר המקביל לציר ה-** y **, וחותך את** AB **בנקודה** F.

(1) $DE \parallel AB$**, כי קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית.**

$EF \parallel AC$**, כי שניהם מקבילים לציר ה-** y .

לכן $FADE$ **מקבילית, כי שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.**

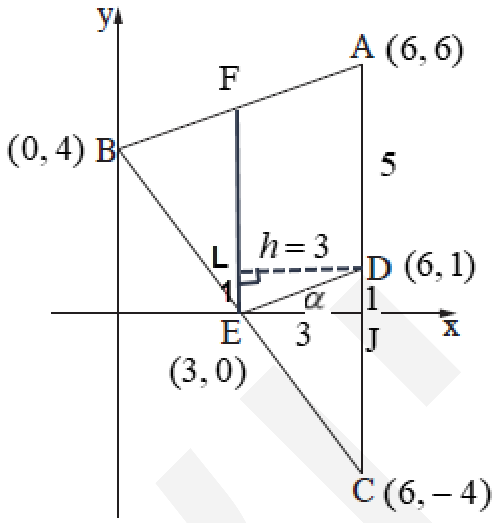
תשובה: הוכחנו כי המרובע $FADE$ **הוא מקבילית.**

(2) שטח מקבילית שווה למכפלת צלע בגובה שלה.

$$AD = \frac{AC}{2} = \frac{y_A - y_C}{2} = \frac{6-(-4)}{2} = \frac{10}{2} = 5 \rightarrow \boxed{AD = 5}$$
$$h = x_D - 3 = 6 - 3 = 3 \rightarrow \boxed{h = 3}$$
$$S_{FADE} = AD \cdot h = 5 \cdot 3 = 15$$

תשובה: שטח המקבילית $FADE$ **הוא** 15.

ד. הנקודה D היא אמצע הצלע AC, לכן $\boxed{\mathrm{D}(6,1)} \rightarrow \quad y_{\mathrm{D}}=\frac{6+(-4)}{2}=\frac{2}{2}$.



$m_{\mathrm{ED}}=\frac{1}{3} \leftarrow \quad m_{\mathrm{ED}}=\frac{y_{\mathrm{D}}-y_{\mathrm{E}}}{x_{\mathrm{D}}-x_{\mathrm{E}}}=\frac{1-0}{6-3}=\frac{1}{3}$.

הזווית בין DE לכיוון החיובי של ציר ה- x חדה, לכן $\tan\alpha=m$.

$$\tan\alpha=\frac{1}{3}$$

$$\alpha=18.43^\circ$$

$\sphericalangle\mathrm{DEF}$ משלימה את α ל- 90°, ולכן $\sphericalangle\mathrm{DEF}=71.57^\circ$.

הערה, מובן שניתן גם $\alpha=18.43^\circ \leftarrow \quad \Delta\mathrm{EDJ}: \quad \tan\alpha=\frac{1}{3}$.

וגם ישירות: $\sphericalangle\mathrm{DEF}=71.57^\circ \leftarrow \quad \Delta\mathrm{DLE}: \quad \tan\sphericalangle\mathrm{DEF}=\frac{3}{1}$

תשובה: $\sphericalangle\mathrm{DEF}=71.57^\circ$.

<u>דרך פתרון חלופית</u>

$\Delta\mathrm{EDF}$ הוא חצי מהמקבילית, ולכן שטחו 7.5 .

$$\mathrm{ED}=\sqrt{(6-3)^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}$$

$$\mathrm{EF}=\mathrm{AD}=5$$

$$7.5=\frac{\sqrt{10}\cdot 5\cdot\sin\sphericalangle\mathrm{EDF}}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{10}}{10}=\sin\sphericalangle\mathrm{EDF}$$

$$\boxed{\sphericalangle\mathrm{EDF}=71.57^\circ}$$

א. המעגל, שמרכזו $M(6,10)$ **, משיק לציר ה-** x **בנקודה** A**, ולכן** $y_A = 0$ **.**

המשיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה, לכן:

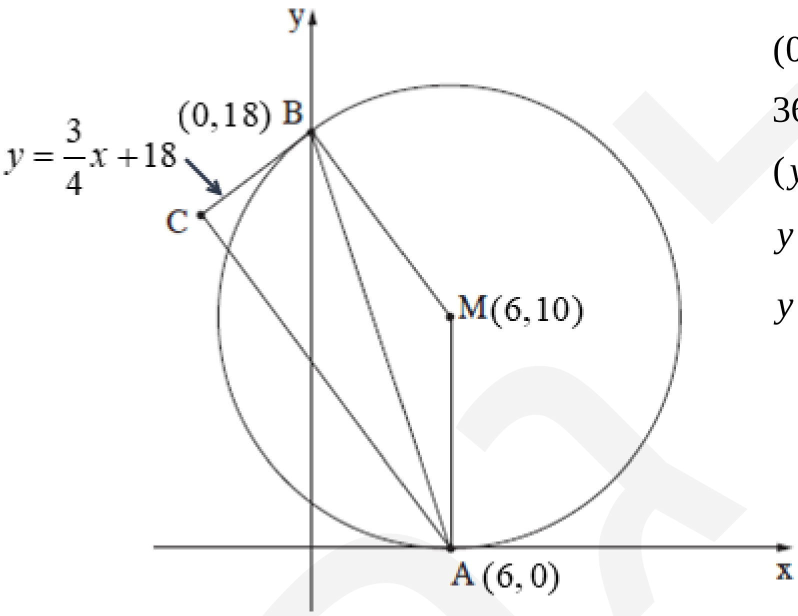
$$x_A = x_M = 6 \quad \rightarrow A(6,0)$$

$$R = y_M - y_A = 10 - 0 \quad \rightarrow R = 10 \ .$$

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-6)^2 + (y-10)^2 = 100$ **.**

ב. הנקודה B **היא נקודת החיתוך של המעגל עם ציר ה-** y**, ולכן** $x_B = 0$ **.**

(1) נציב $x = 0$ **במשוואת המעגל, ובהתאם לסרטוט:** $y_B > 10 \leftarrow y_B > y_M$ **.**



$$(0-6)^2 + (y-10)^2 = 100$$
$$36 + (y-10)^2 = 100$$
$$(y-10)^2 = 64$$
$$y - 10 = 8 \quad \rightarrow y = 18 \quad \rightarrow \boxed{B(0,18)}$$
$$y - 10 = -8 \quad \rightarrow \cancel{y = 2} \quad \leftarrow y_B > 10$$

תשובה: $B(0,18)$ **.**

(2) נמצא את משוואת המשיק למעגל BC **, המאונך לרדיוס** AB **, ולכן השיפועים הפוכים לנגדיים.**

$$m_{BM} = \frac{y_B - y_M}{x_B - x_M} = \frac{18-10}{0-6} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3} \quad \rightarrow m_{BC} = +\frac{3}{4} \ .$$

נמצא את משוואת המשיק למעגל, BC**, בעזרת** $m_{BC} = \frac{3}{4}$ **ו-** $B(0,18)$**.**

$$y - 18 = \frac{3}{4}(x - 0)$$

$$\boxed{y = \frac{3}{4}x + 18}$$

תשובה: משוואת המשיק למעגל, BC**, היא** $y = \frac{3}{4}x + 18$ **.**

ג. נתון $\sphericalangle BCA = 90°$.

(1) ניתן לקבוע ש- $AC \parallel MB$ **(אם שני ישרים מאונכים לישר שלישי** (BC) **, אז הם מקבילים).**

תשובה: הוכחנו כי AC **מקביל ל-** MB.

(2) נוכיח: AB **חוצה את זווית** CAM.

$\sphericalangle MBA = \sphericalangle BAC$ **(זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים)**

$MB = MA = 10$ **(רדיוסים במעגל)**

$\sphericalangle MBA = \sphericalangle MAB$ **(זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים)**

$\sphericalangle MAB = \sphericalangle BAC$ **(כלל מעבר)**

תשובה: הוכחנו ש- AB **חוצה את זווית** CAM.

ד. נחשב את אורך הקטע AC .

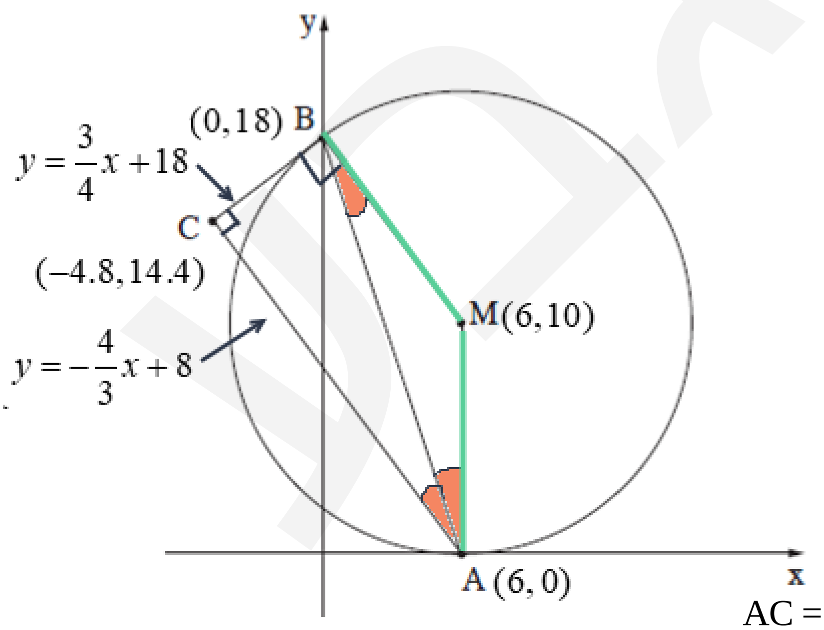
$m_{AC} = m_{BM} = -\frac{4}{3}$ **(לישרים מקבילים שיפועים שווים)** .

נמצא את משוואת AC**, בעזרת** $m_{AC} = -\frac{4}{3}$ **ו-** $A(6,0)$.

$$y - 0 = -\frac{4}{3}(x-6)$$

$$\boxed{y = -\frac{4}{3}x + 8}$$

נמצא את שיעורי הנקודה C**, נקודת החיתוך בין** BC **ל-** AC.



$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + 18 \\ y = -\frac{4}{3}x + 8 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}x + 18 = -\frac{4}{3}x + 8$$

$$\frac{25}{12}x = -10 \quad / : (\frac{25}{12})$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -4.8 \\ y = \frac{3}{4}\cdot(-4.8) + 18 = 14.4 \end{array}\right\} C(-4.8, 14.4)$$

וסוף-סוף: $AC = \sqrt{(-4.8-6)^2 + (14.4-0)^2} = 18$

תשובה: אורך הקטע AC **הוא** 18 .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x}{x^2-a}$ **(** a **הוא פרמטר).**

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ **עובר דרך הנקודה** $(3,1.2)$ **.**

$$1.2=\frac{2\cdot 3}{3^2-a}$$
$$1.2(9-a)=6 \quad /:1.2$$
$$9-a=5$$
$$\boxed{a=4}$$

תשובה: $a=4$ **.**

נציב $a=4$ **בפונקציה** $f(x)$ **ונקבל** $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ **.**

(הערה - ניתן לראות שהפונקציה היא אי-זוגית, והגרף שלה יהייה סימטרי לראשית הצירים.)

ב. בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

$$x^2-4\neq 0 \quad \rightarrow \boxed{x\neq \pm 2}$$

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\neq \pm 2$ **.**

ג. נרשום את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ **.**

תשובה: אסימפטוטות המאונכות לציר ה- x **(אסימפטוטות אנכיות) הן** $x=2$ **ו-** $x=-2$ **.**

אסימפטוטה המאונכת לציר ה- y **(אסימפטוטה אופקית) היא** $y=0$ **(ציר ה-** x **).**

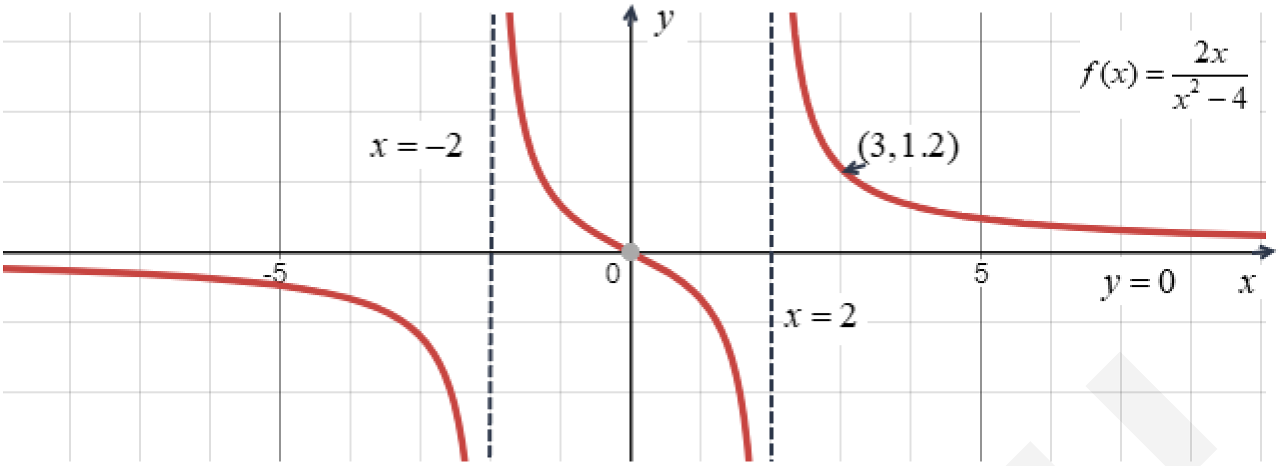
ד. נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ **(אם יש כאלה).**

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x^2-4)-2x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$
$$f'(x)=\frac{2x^2-8-4x^2}{(x^2-4)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{-2x^2-8}{(x^2-4)^2}}$$
$$-2x^2-8=0$$

אין פתרון למשוואה, הביטוי שלילי לכל x **, והפונקציה יורדת בתחומים המתאימים לתחום ההגדרה.**

תשובה: $f(x)$ **יורדת עבור** $x>2$ **, או** $-2<x<2$ **, או** $x<-2$ **.** $f(x)$ **עולה לאף** x **.**

ה. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$, שקל לראות שעוברת בראשית הצירים.



תשובה: הסרטוט מעל.

ו. נתונה הפונקציה $g(x)=-f(x)+1$.

(1) זו הזזה כפולה (טרנספורמציה בשני שלבים) של $f(x)$.

שלב ראשון $-f(x)$, סימטרית לציר ה- x , ללא שינוי בתחום ההגדרה ובאסימפטוטות האנכיות,

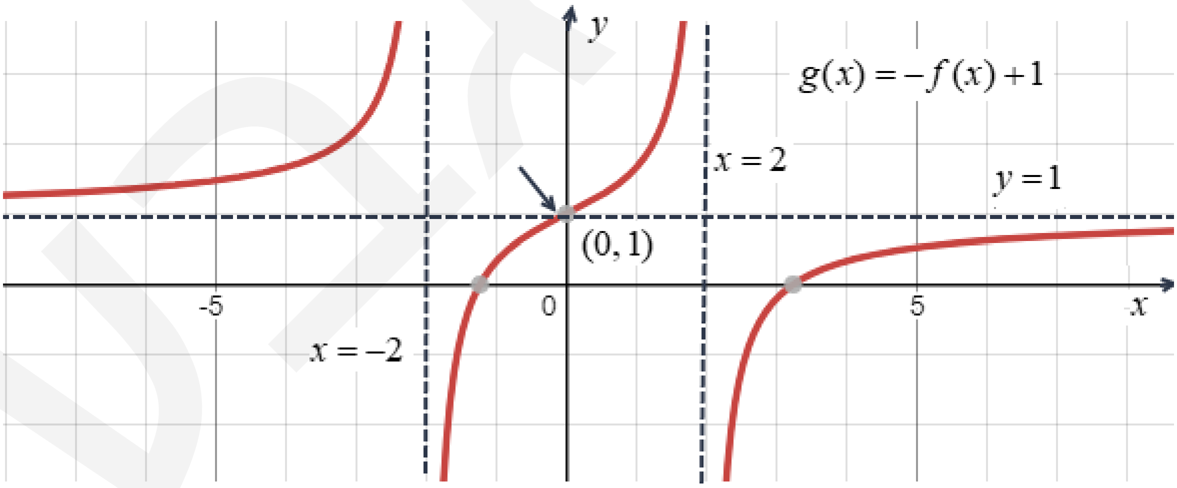
ובמקרה זה גם לא באסימפטוטה האופקית $y=0$, תוך שינוי תחומי החיוביות והשליליות.

תחום העלייה, זהה לתחום הירידה של $f(x)$

שלב שני $-f(x)+1$, תזוזה אנכית 1 יחידה כלפי מעלה, ללא שינוי בתחום ההגדרה

ובאסימפטוטות האנכיות, והאסימפטוטה האופקית היא $y=1$.

נקודת החיתוך עם ציר ה- y $(0,1)$, ומתקבלות שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x .



הערה: ההסבר עבור התלמיד, בשאלה לא התבקשנו לנמק.

תשובה: הסרטוט מעל.

(2) למשוואה $g(x)=1$ יש פתרון אחד, והוא $x=0$, כי הישר $y=1$ חותך את גרף הפונקציה רק פעם אחת.

תשובה: למשוואה $g(x)=1$ יש פתרון אחד.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=6x\cdot(\sqrt{x}-m)$ **(** $m>0$ **הוא פרמטר).**

בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x\geq 0$.

ב. לפונקציה $f(x)$ **יש נקודת קיצון <u>פנימית</u> , בנקודה שבה** $x=4$.

(1) מכאן, ש- $f'(4)=0$.

$$f'(x)=6\cdot(\sqrt{x}-m)+6x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$0=6\cdot(\sqrt{4}-m)+6\cdot 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$0=6(2-m)+6$$

$$0=12-6m+6$$

$$6m=18$$

$$\boxed{m=3}$$

תשובה: $m=3$.

(2) נציב $m=3$ **, והפונקציה היא** $f(x)=6x\cdot(\sqrt{x}-3)$.

$(0,0)$ **היא נקודת החיתוך עם ציר ה-** y **וגם עם ציר ה-** x **, וגם נקודת קצה.**

בנקודות החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **, ונקבל בנוסף**

$$\sqrt{x}-3=0 \quad \rightarrow \sqrt{x}=3 \quad \rightarrow x=9 \quad \rightarrow (9,0)$$

תשובה: שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים הן:** $(9,0)$ **ו-** $(0,0)$.

(3) נתון כי לפונקציה $f(x)$ **יש נקודת קיצון פנימית אחת (בלבד), בנקודה שבה** $x=4$.

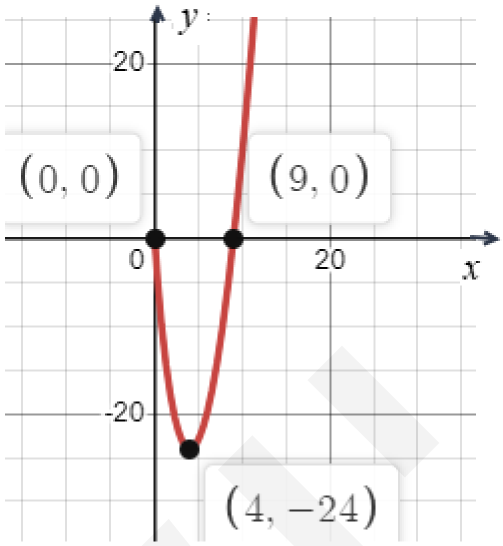
$$f(4)=6\cdot 4\cdot(\sqrt{4}-3)=-24\rightarrow(4,-24)$$

על-פי שתי נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x **, שבהן ערכי ה-** y **גבוהים יותר,**

ניתן לקבוע שזו נקודת מינימום.

תשובה: $y_{\min}=-24$.

ב. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



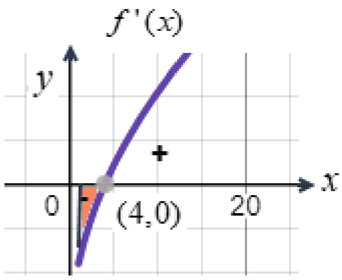
תשובה: הסרטוט מעל.

ד. (1) כאשר מציירים, את גרף הנגזרת $f'(x)$, בתחום $x \ge 1$, נעזרים בשיקולים הבאים:

- תחום הגדרה: $x \ge 1$
- נקודת אפס: $(4,0)$ כי $f'(4)=0$.
- סימני נגזרת, בהתאם לעלייה/ירידה של $f(x)$,

  $f'(x)>0$ כאשר $x>4$.

  $f'(x)<0$ כאשר $1<x<4$.
- אין סיבה למצוא את נקודת הקצה של פונקציית הנגזרת.



תשובה: הגרף משמאל (בסרטוט מופיע כבר השטח עבור תת-סעיף ד(2)).

(2) נחשב את השטח המבוקש (צבוע בכתום):

$$S=\int_1^4 (0-f'(x))\,dx=-f(x)\Big]_1^4$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=4 & -f(4)=-(-24)=24 \\ x=1 & -f(1)=-(-12)=12 \end{array}\right\} S=24-12=12 \rightarrow \boxed{S=12}$$

תשובה: גודל השטח, המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

על ידי הישר $x=1$, ועל ידי ציר ה- x , הוא 12.

א. $f(x)=-x^2+16x$ **היא פונקציה בעלת מקסימום ("בוכה"), כי** $a=-1<0$.

$y=4x$ **הוא ישר עולה כי** $m=4>0$ **, העובר מראשית הצירים.**

נסמן ב- t **את שיעור ה-** x **של הנקודה** A **, הנמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)=-x^2+16x$.

בהתאם שיעורי הנקודה הם $\mathrm{A}(t,-t^2+16t)$.

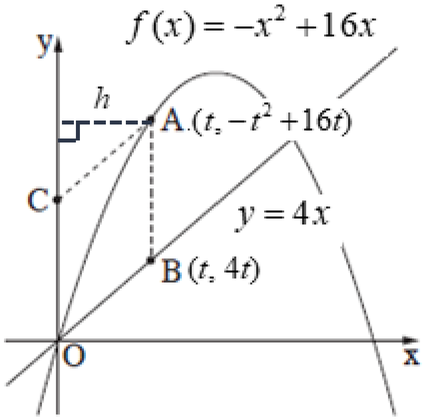
המרובע ABOC **הוא מקבילית, כך ש-** AB **מקביל לציר ה-** y **, לכן** $x_{\mathrm{B}}=x_{\mathrm{A}}=t$.

הנקודה B **נמצאת על גרף הפונקציה** $y=4x$ **, ובהתאם שיעורי הנקודה הם** $\mathrm{B}(t,4t)$.

AB **מקביל לציר ה-** y **, לכן** $\mathrm{AB}=y_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{B}}=-t^2+16t-4t \rightarrow \boxed{\mathrm{AB}=-t^2+12t}$.

בהתאם, הגובה ל- AB **מקביל לציר ה-** x **:** $h=x_{\mathrm{A}}-0=t-0 \rightarrow \boxed{h=t}$

תשובה: אורך הצלע AB **הוא** $-t^2+12t$ **, הגובה לצלע** AB **הוא** t .



ב. הפונקציה שיש להביא ל*מקסימום* היא שטח המקבילית ABOC .

שטח מקבילית שווה למכפלת צלע בגובה שלה.

$$S_{\mathrm{ABOC}}=\mathrm{AB}\cdot h$$
$$S_{\mathrm{ABOC}}=(-t^2+12t)\cdot t$$
$$\boxed{S_{\mathrm{ABOC}}=-t^3+12t^2}$$

$0<t<16$ **- כי הנקודה** A **נמצאת על גרף הפונקציה** $f(x)$ **ברביע הראשון.**

$$\boxed{S(t)=-t^3+12t^2}$$
$$\boxed{S'(t)=-3t^2+24t}$$
$$-3t^2+24t=0 \quad /:t>0$$
$$-3t+24=0$$
$$-3t=-24 \quad /:(-3)$$
$$\boxed{t=8}$$
$$\left.\begin{array}{l} S'(7)=21>0 \\ S'(9)=-27<0 \end{array}\right\} t=8,\max$$

הערה: כאשר שטח המקבילית מקסימלי, הנקודה A **נמצאת בקודקוד הפרבולה.**

תשובה: $t=8$ **, עבורו שטח המקבילית** ABOC **יהיה מקסימלי.**