פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023, מועד מיוחד , שאלון: 35372

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

אורך החיים של סוללות מתפלג נורמלית
אורך החיים של סוללה נמדד בשעות

א. (1) הפעמון של ההתפלגות הנורמלית הוא סימטרי.

כיוון שבגרף נתון כי 16% **מהסוללות הן בעלות אורך חיים של פחות מ-** 206 **שעות,**

<u>ובדיוק גם</u> 16% **מהסוללות הן בעלות אורך חיים של יותר מ-** 230 **שעות,**

אז אורך החיים הממוצע של סוללה הוא 218 **שעות** $=\frac{436}{2}=\frac{206+230}{2}$ **.**

תשובה: אורך החיים הממוצע של סוללה הוא 218 **שעות.**

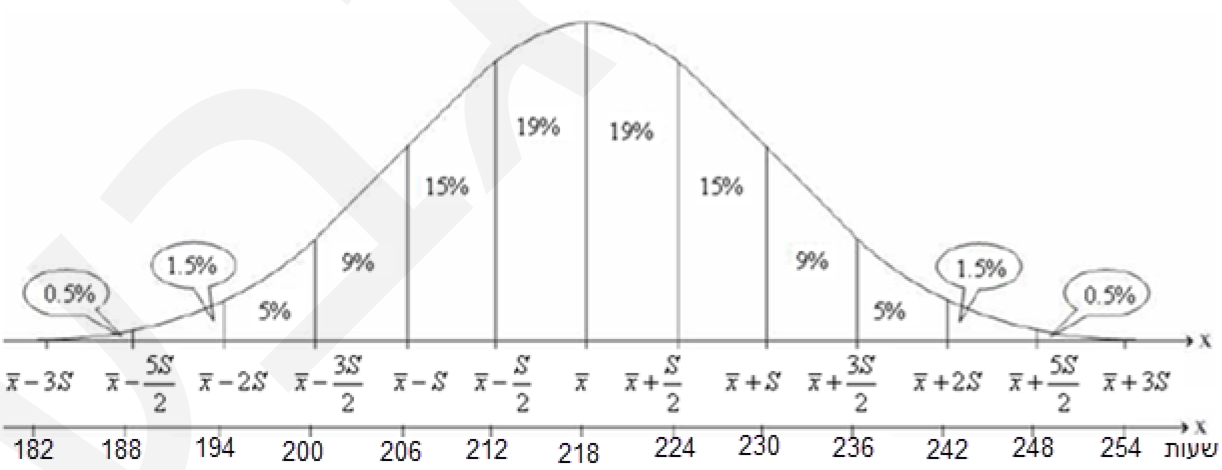
(2) נחשב משמאל לימין את האחוז המצטבר, עד שנקבל $0.5\%+1.5\%+5\%+9\%=16\%$ **.**

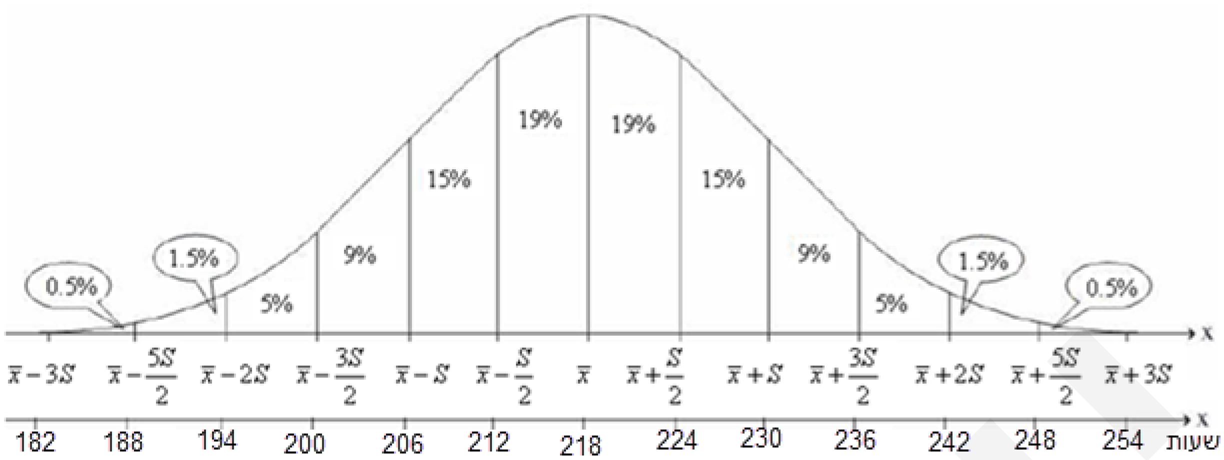
לכן, אורך חיים של 206 **שעות נמצא במרחק של סטיית תקן אחת מתחת לממוצע שהוא** 218 **שעות.**

סטיית תקן אחת שווה ל: 12 **שעות** $=218-206$ **.**

תשובה: סטיית התקן היא 12 **שעות.**

ב. נשלים את הנתונים על גרף ההתפלגות הנורמלית, כאשר חצי סטיית תקן הוא 6 **שעות** $=\frac{12}{2}=\frac{S}{2}$ **.**





ג. המפעל קנה $2,400$ סוללות.

נחשב את האחוזים, מימין לשמאל, עד שנגיע לאורך חיים של 236 שעות.

$5\%+1.5\%+0.5\%=7\%$ **מהסוללות הן בתחום הרצוי**

ל- 7% מהסוללות, יש אורך חיים שגדול מ- 236 שעות, כלומר ל- $7\%=\frac{7}{100}=0.07$ מהסוללות.

מספר הסוללות הוא $0.07\cdot 2,400=168$.

הסבר אחר: אם $2,400$ סוללות מהווים 100% מהסוללות,

אז אחוז אחד הוא 24 סוללות $=2,400:100$, ו- 7% הם 168 סוללות$=7\cdot 24$.

תשובה: ל- 168 סוללות, על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, יש אורך חיים של יותר מ- 236 שעות.

ד. 2% מן הסוללות, אלה שאורך החיים שלהן הוא הקצר היותר, נחשבות פגומות.

נספור משמאל לימין $0.5\%+1.5\%=2\%$, ולכן מספר השעות המתאים הוא 194 .

תשובה: אורך החיים הגדול, ביותר של סוללה פגומה, הוא 194 שעות.

ה. המרחק בסטיות תקן מהממוצע הוא ציון התקן.

לכן ציון תקן של -2.5 , על פי פעמון ההתפלגות הנורמלית, מתאים לסוללת בעלת אורך חיים של 188 שעות.

אפשר גם להציב בנוסחה: $\boxed{x=188} \rightarrow -30=x-218 \rightarrow -2.5=\frac{x-218}{12} \rightarrow z=\frac{x-\bar{x}}{s}$.

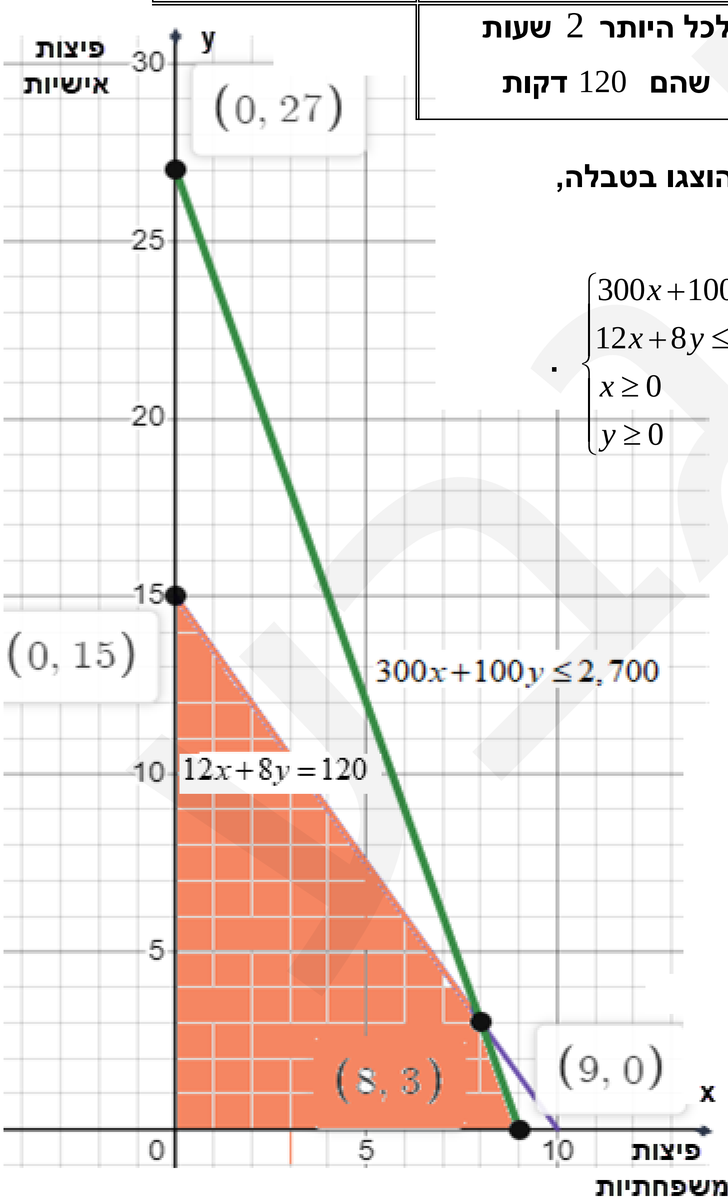
קבלנו שסוללה עם ציון תקן של -2.5 היא בעלת אורך חיים של 188 שעות, פחות מ- 194, ולכן נחשבת פגומה.

תשובה: סוללה, שציון תקן שלה הוא -2.5 , נחשבת פגומה.

נדב עובד בפיצרייה קטנה, ובה הוא אופה פיצות משפחתיות ופיצות אישיות.
הטבלה שלפניכם מציגה את הנתונים של כמות הבצק, זמן האפייה,
ואת הרווח הנקי מן המכירה של שני סוגי הפיצות.

א. נסמן ב- x את מספר הפיצות המשפחתיות, שאפה נדב ביום זה,
וב- y את מספר הפיצות האישיות, שאפה נדב ביום זה.
נבנה טבלה מתאימה, כולל טור מתאים לפונקציית המטרה.

	כמות בצק לפיצה	זמן אפייה	רווח נקי לפיצה
x - פיצות משפחתיות	300 גרם	12 דקות	25 שקלים
y - פיצות אישיות	100 גרם	8 דקות	18 שקלים
אילוץ	לכל היותר 2,700 גרם	לכל היותר 2 שעות שהם 120 דקות	



(1) נרשום את מערכת האילוצים, הנובעת הן מהמגבלות שהוצגו בטבלה,
והן מהעובדה שכמויות הפיצות אינן שליליות.

תשובה: מערכת האילוצים של הבעיה היא:
$$\begin{cases} 300x+100y \le 2,700 \\ 12x+8y \le 120 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} .$$

(2) נסרטט את התחום האפשרי המתאים לבעיה.
כדי לצייר את שני האילוצים הראשונים,
נבנה טבלת ערכים קטנה.

$$300x+100y \le 2,700 \quad /:100$$
$$3x+y \le 27$$

0	27
9	0

$$x=0 \quad \to y=27$$
$$y=0 \quad \to 3x=27 \quad \to x=9$$

$$12x+8y=120$$

0	15
10	0

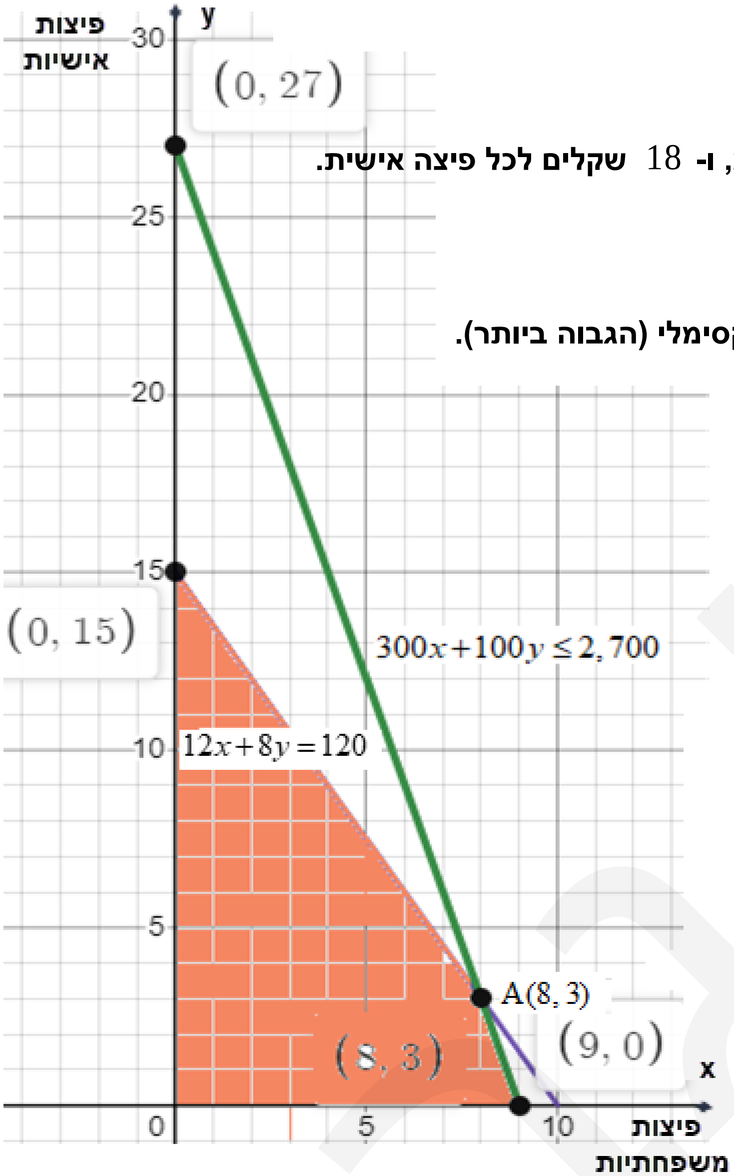
$$x=0 \quad \to 8y=120 \quad \to y=15$$
$$y=0 \quad \to 12x=120 \quad \to x=10$$

נציב $(0,0)$ באילוץ $300x+100y\le 2{,}700$ ונקבל $0\le 2{,}700$, ולכן $(0,0)$ אפשרית, ונצבע מתחת לישר.

נציב $(0,0)$ באילוץ $12x+8y\le 120$ ונקבל $0\le 120$, ולכן $(0,0)$ אפשרית, ונצבע מתחת לישר.

וכמובן, מדובר ברביע הראשון שבו $x\ge 0$, וגם $y\ge 0$.

תשובה: הסרטוט משמאל.



ב. הרווח הנקי של נדב הוא 25 שקלים לכל פיצה משפחתית, ו- 18 שקלים לכל פיצה אישית.

תשובה: פונקציית המטרה היא $f(x,y)=25x+18y$.

ג. נבנה טבלה שתסייע במענה לשאלה – מתי הרווח יהיה מקסימלי (הגבוה ביותר).

נמצא את שיעורי הנקודה A :

$$\begin{cases}3x+y=27 & /\cdot(-4)\\ 12x+8y=120\end{cases}$$

$$+\begin{cases}-12x-4y=-108\\ 12x+8y=120\end{cases}$$

$$4y=12 \quad /:4$$

$$y=3$$

$$3x+3=27$$

$$3x=24 \quad /:3$$

$$x=8 \quad \to \boxed{A(8,3)}$$

	$f(x,y)=25x+18y$
$(0,15)$	$f(0,15)=25\cdot 0+18\cdot 15=270$
$(8,3)$	$f(8,3)=25\cdot 8+18\cdot 3=254$
$(9,0)$	$f(9,0)=25\cdot 9+18\cdot 0=225$
$(0,0)$	$f(0,0)=25\cdot 0+18\cdot 0=0$

הערך המקסימלי של פונקציית המטרה הוא 270 שקלים.

תשובה: הרווח המקסימלי האפשרי ביום זה, ממכירת כל הפיצות, הוא 270 שקלים,

כאשר נדב מוכר 15 פיצות אישיות, ללא פיצות משפחתיות.

א. משוואת הישר AB **היא** $y=\frac{1}{2}x+6$.

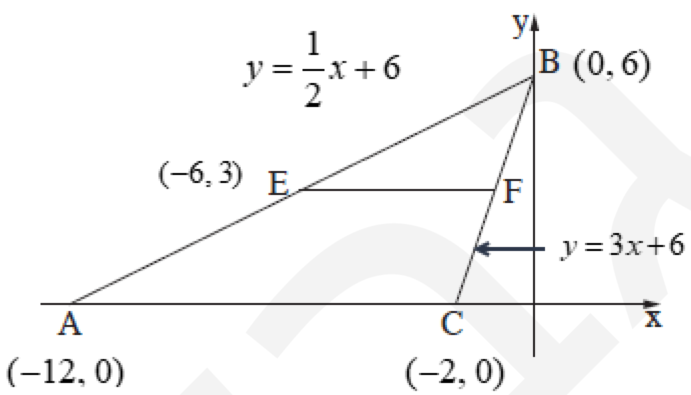
הקודקוד A **נמצא על ציר ה-** x **, ולכן** $y_A=0$.

$$0=\frac{1}{2}x+6$$
$$-\frac{1}{2}x=6 \quad /:(-\frac{1}{2})$$
$$x=-12 \quad \rightarrow \boxed{A(-12,0)}$$

הקודקוד B **נמצא על ציר ה-** y **, ולכן** $x_B=0$ **ו-** $\boxed{B(0,6)}$.

תשובה: $A(-12,0)$, $B(0,6)$.

ב. הנקודה E **היא אמצע הקטע** AB.



$$\left.\begin{aligned} x_E &= \frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-12+0}{2}=\frac{-12}{2}=-6 \\ y_E &= \frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+6}{2}=\frac{6}{2}=3 \end{aligned}\right\} \boxed{E(-6,3)}$$

תשובה: $E(-6,3)$.

ג. נתון: $C(-2,0)$.

נמצא את משוואת הישר CB.

$$m_{CB}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{6-0}{0-(-2)}=\frac{6}{2}=3 .$$

נמצא את משוואת הישר, על-פי $m_{CB}=3$ **, ו-** $B(0,6)$.

$$y-6=3(x-0)$$
$$\boxed{y=3x+6} .$$

תשובה: משוואת הישר CB **היא** $y=3x+6$.

ד. נתון כי EF **מקביל לציר ה-** x **, לכן** $y_F = y_E = 3$.

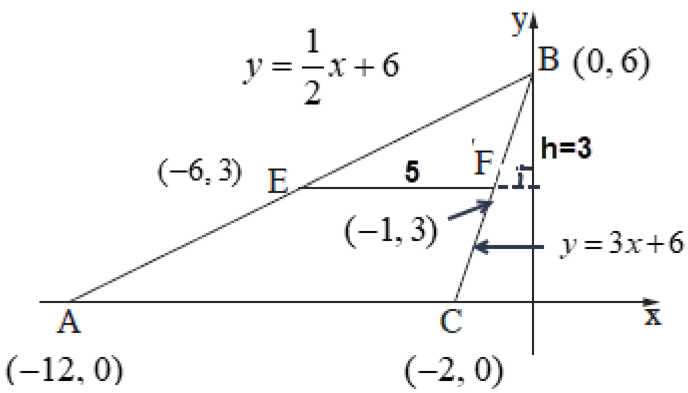
נציב $y = 3$ **במשוואת הישר** $y = 3x + 6$.

$$3 = 3x + 6$$
$$-3 = 3x \quad / : 3$$
$$x = -1 \quad \rightarrow F(-1, 3)$$

EF **מקביל לציר ה-** x ,

לכן $EF = x_F - x_E = -1 - (-6) = 5$.

תשובה: $EF = 5$.



ה. נחשב את שטח המשולש BEF .

לצלע EF **יש גובה חיצוני לקודקוד** B .

$$h = y_B - 3 = 6 - 3 = 3$$

$$S_{\Delta BEF} = \frac{EF \cdot h}{2}$$

$$S_{\Delta BEF} = \frac{5 \cdot 3}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta BEF} = 7.5}$$

תשובה: שטח המשולש BEF **הוא** 7.5 .

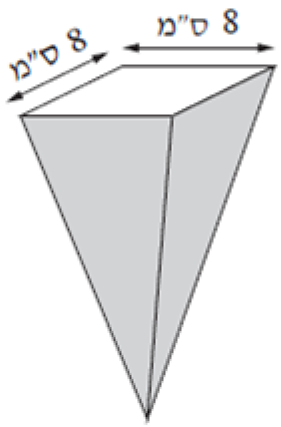
א. נחשב את נפח הקופסה , שצורתה תיבה.

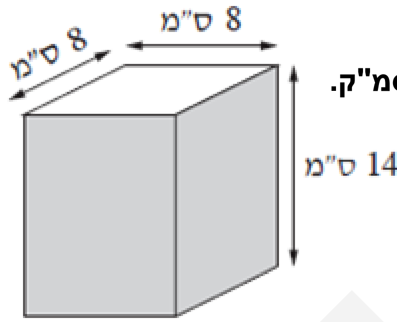
נפח תיבה, שמקצועות הבסיס שלה הם a ו- b, והמקצוע הצדדי הוא c , הוא $V = a \cdot b \cdot c$.

נפח הקופסה הוא 896 סמ"ק $= 8 \cdot 8 \cdot 14 = V$.

תשובה: נפח הקופסה בצורת תיבה הוא 896 סמ"ק.

ב. הנפח של קופסה בצורה תיבה גדול פי שניים מן הנפח של קופסה בצורת פירמידה.





(1) 448 **סמ"ק** $= 896 : 2$.

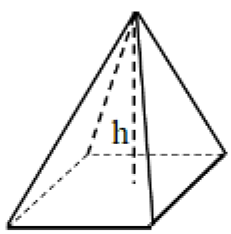
תשובה: נפח הקופסה בצורת פירמידה הוא 448 סמ"ק.

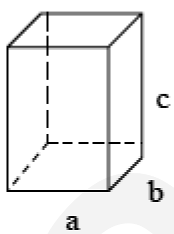
(2) נחשב את גובה הקופסה בצורת פירמידה.

נפח פירמידה שבסיסה ריבוע ששטחו S,

וגובהה h , הוא $V = \dfrac{S \cdot h}{3}$.

שטח בסיס הקופסה הוא: 64 **סמ"ר** $= 8 \cdot 8$.





$$448 = \frac{64 \cdot h}{3} \quad / \cdot 3$$
$$1{,}344 = 64h \quad / : 64$$
$$\boxed{21 = h}$$

תשובה: גובה הקופסה בצורת פירמידה הוא 21 ס"מ.

ג. התלמידים הכינו סך הכול 40 קופסאות משני סוגים:

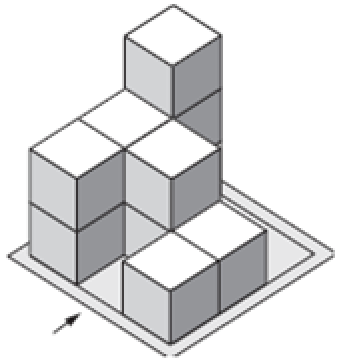
הנפח של כל הקופסאות שהם הכינו היה $28{,}672$ סמ"ק.

נסמן ב- x את מספר הקופסאות בצורת פירמידה, וב- y את מספר הקופסאות בצורת תיבה.

מערכת המשוואות המתאימה היא:

$$\begin{cases} x + y = 40 \quad \rightarrow \boxed{y = 40 - x} \\ 448x + 896y = 28{,}672 \end{cases}$$
$$448x + 896(40 - x) = 28{,}672$$
$$448x + 35{,}840 - 896x = 28{,}672$$
$$-448x = -7{,}168 \quad / : (-448)$$
$$\boxed{x = 16} \quad \rightarrow y = 24$$

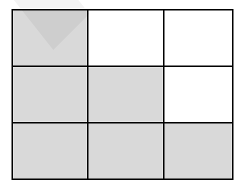
תשובה: התלמידים הכינו 16 קופסאות בצורת פירמידה (ו- 24 קופסאות בצורת תיבה).



לפנינו סרטוט של מבנה קוביות, הניצב על משטח.
החץ בסרטוט שבשאלה מייצג את המבט מלפנים.

א. נסרטט תרשימים שמייצגים מבט מלפנים, ומבט משמאל של המבנה.

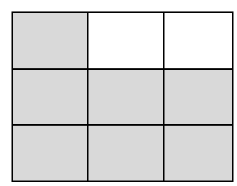
(1) במבט מלפנים, רואים מימין לשמאל גובה של קובייה אחת, שתי קוביות ושלוש קוביות.



מבט מלפנים

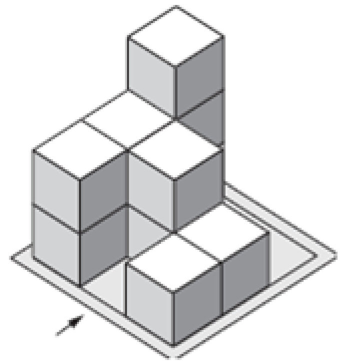
תשובה: סרטוט תרשים שמייצג מבט מלפנים של המבנה.

(2) במבט משמאל, רואים מימין לשמאל גובה של שתי קוביות, שתי קוביות ושלוש קוביות.



מבט משמאל

תשובה: סרטוט תרשים שמייצג מבט משמאל של המבנה.



ב. **תרשים מספרים, מראה כמה קוביות יש בכל משבצת, כאשר מסתכלים ממבט לפנים.**
כאשר, בלוח הנוכחי, יש שתי שורות ושלושה טורים.

3	0	0
2	2	1
2	0	1

תשובה: תרשים המספרים של המבנה, מעל.

ג. **הוסיפו קוביה למבנה, כך שגם המבט מלמעלה וגם המבט מלפנים לא השתנה.**
אם המבט מלפנים לא השתנה, אז לא ניתן להוסיף קוביות מעבר לגובה המירבי בטור.
אם המבט מלמעלה לא השתנה, אז לא ניתן להוסיף קוביות במשבצות שהיו ריקות.

מכאן, שלא ניתן להוסיף קוביות בטור הימני, כי הגובה המקסימלי הוא של קוביה אחת,
ובמשבצת החסרה לא ניתן להוסיף כי יפגע במבט מעל.

כמוכן, לא ניתן להוסיף קוביות בטור האמצעי, כי הגובה המקסימלי הוא של שתי קוביות,
ובמשבצות החסרות לא ניתן להוסיף כי יפגע במבט מעל.

בטור השמאלי, הגובה המירבי הוא של שלוש קוביות,
ואכן ניתן להוסיף קוביה אחת באחת משתי המשבצות הראשונות שבטור השמאלי (סימנו במסגרת את התוספת).

3	0	0
$\boxed{3}$	2	1
2	0	1

3	0	0
2	2	1
$\boxed{3}$	0	1

תשובה: שתי האפשרויות לתרשים מספרים, לאחר הוספת קוביה, מעל.