

מתמטיקה 5 יחידות לימוד – שאלון ראשון

הוראות

- א. משך הבחינה: שלוש שעות וחצי.
- ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
- פרק ראשון – אלגברה והסתברות
 - פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור
 - פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
- יש לענות על חמש שאלות, לפחות על שאלה אחת מכל פרק – $20 \times 5 = 100$ נקודות.
- ג. חומר עזר מותר בשימוש:
- (1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
 - (2) דפי נוסחאות (מצורפים).
- ד. הוראות מיוחדות:
- (1) אין להעתיק את השאלה; יש לסמן את מספרה בלבד.
 - (2) יש להתחיל כל שאלה בעמוד חדש. יש לרשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
- יש להסביר את כל הפעולות, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

יש לכתוב במחברת הבחינה בלבד. יש לרשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

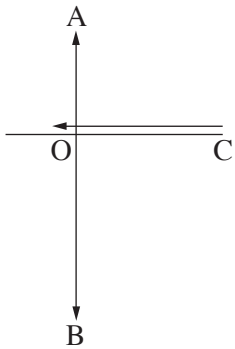
השאלות בשאלון זה מנוסחות בלשון רבים, אף על פי כן על כל תלמידה וכל תלמיד להשיב עליהן באופן אישי.

בהצלחה!

השאלות

יש לענות על חמש מן השאלות 1-8, לפחות על שאלה אחת מכל פרק (לכל שאלה – 20 נקודות).
שימו לב: אם תענו על יותר מחמש שאלות, ייבדקו רק חמש התשובות הראשונות שבמחברתכם.

פרק ראשון – אלגברה והסתברות



1. הנקודה A נמצאת מצפון לנקודה O והנקודה B נמצאת מדרום לנקודה O.
 הנקודה C נמצאת ממזרח לנקודה O, במרחק של 12 ק"מ ממנה, כמתואר בסרטוט.
 ביום ראשון יצא אורי להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה A.
 באותו הזמן יצאה סמדר לריצה מן הנקודה C לכיוון הנקודה O.
 מהירות הריצה של סמדר גדולה פי 3 ממהירות ההליכה של אורי.
 נתון כי ברגע שהגיע אורי לנקודה A, המרחק האווירי בינו לבין סמדר היה $\sqrt{424}$ ק"מ.
 המהירויות של אורי ושל סמדר קבועות.
- א. מצאו את המרחק שהלך אורי ואת המרחק שרצה סמדר ביום ראשון, אם נתון שסמדר חלפה בריצתה על פני הנקודה O.
 באותו יום יצא בועז להליכה מן הנקודה O לכיוון הנקודה B. בועז יצא להליכה 20 דקות לאחר שיצא אורי להליכה.
 מהירות ההליכה של בועז הייתה קבועה וגדולה ב- 50% ממהירות ההליכה של אורי.
 כאשר הגיע אורי לנקודה A, המרחק בינו לבין בועז היה 23 ק"מ, ובאותו רגע שניהם עצרו.
- ב. מצאו את מהירות ההליכה של אורי ואת מהירות ההליכה של בועז.
- ביום שני יצאו אורי ובוועז להליכה באותו הזמן. כל אחד מהם יצא מאותה הנקודה שבה עצר ביום ראשון, והמשיך ללכת באותו הכיוון שהלך ביום ראשון. בועז הקטין את מהירות הליכתו ב- v קמ"ש ואורי הגדיל את מהירות הליכתו ב- v קמ"ש.
 שניהם עצרו כאשר המרחק ביניהם היה 27 ק"מ.
- ג. מצאו כמה דקות הלך אורי ביום שני.

2. נתונה סדרה חשבונית a_1, a_2, \dots, a_{3n} שבה $3n$ איברים, והפרש שלה הוא d .

נסמן ב- S_n^* את הסכום של n האיברים האמצעיים של הסדרה.

א. הוכיחו כי $S_n^* = \frac{1}{3} \cdot S_{3n}$.

נתון כי האיבר הראשון של הסדרה הוא חיובי וכי הסכום של n האיברים האמצעיים שווה ל-0.

ב. האם הפרש הסדרה הוא חיובי או שלילי? נמקו את תשובתכם.

ידוע כי מתקיים $a_1 = 19 \cdot |d|$.

ג. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

מוחקים כמה מן האיברים בסדרה הנתונה, ונוצרת סדרה חשבונית חדשה: $a_2, a_5, a_8, \dots, a_{3n-4}$.

סכום האיברים של הסדרה החדשה הוא 54.

ד. מצאו את d .

3. עיתון יומי המופץ למנויים שגרים בחיפה או בתל אביב בלבד, אמור להישלח אל ביתם בכל יום עד השעה 6:00.

מערכת העיתון ערכה סקר בקרב המנויים, ושאלה בנוגע ליום מסוים אם הם קיבלו את העיתון בזמן.

כל המנויים השתתפו בסקר וכל אחד מהם ענה כן או לא.

מתוצאות הסקר עולה כי ההסתברות לבחור באקראי מנוי שקיבל את העיתון בזמן מבין המנויים שגרים בחיפה היא $\frac{2}{3}$,

וההסתברות לבחור באקראי מנוי שגר בחיפה מבין המנויים שקיבלו את העיתון בזמן היא $\frac{5}{7}$.

נסמן ב- p את ההסתברות שמנוי שנבחר באקראי מבין כל המנויים גר בחיפה.

בוחרים באקראי אחד מן המנויים.

א. הביעו באמצעות p את ההסתברות שהמנוי שנבחר גר בתל אביב וקיבל את העיתון בזמן.

נתון כי מספר המנויים שגרים בתל אביב ולא קיבלו את העיתון בזמן גדול פי 1.5 ממספר המנויים שגרים בתל אביב וקיבלו

את העיתון בזמן.

ב. כמה אחוזים מן המנויים קיבלו את העיתון בזמן?

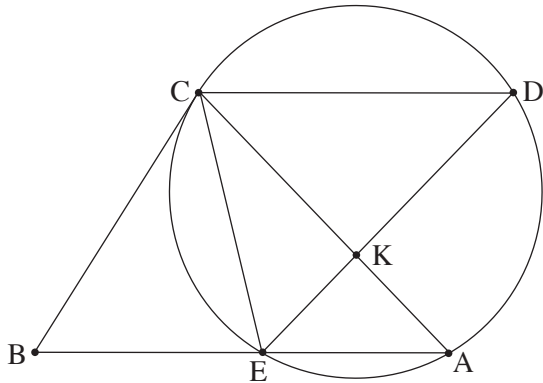
מבין המנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן, בוחרים באקראי שני מנויים.

ג. מהי ההסתברות שהראשון שנבחר גר בתל אביב והשני שנבחר גר בחיפה?

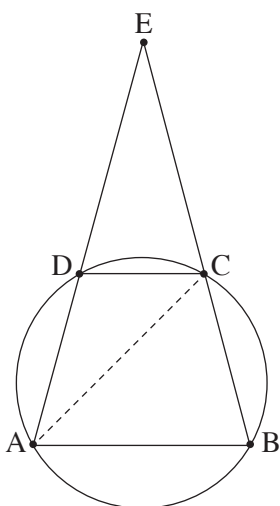
באותו היום התקשרו למערכת העיתון 6 מנויים שלא קיבלו את העיתון בזמן.

ד. מהי ההסתברות שלכל היותר 4 מהם גרים בחיפה?

פרק שני – גאומטרייה וטריגונומטרייה במישור



4. מנקודה B, שמחוץ למעגל, העבירו ישר שמשיק למעגל בנקודה C, וישר אחר שחותך את המעגל בנקודות E ו-A, כמתואר בסרטוט. הנקודה D נמצאת על המעגל כך שהמיתר CD מקביל למיתר EA. המיתרים ED ו-AC נחתכים בנקודה K.
- א. הוכיחו: $\triangle CEB \sim \triangle DCE$.
- נתון: $ED = 7$, $AK = 3$.
- נסמן את שטח המשולש CEK ב-S.
- ב. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CKD.
- נתון: $BC = \frac{35}{\sqrt{32}}$.
- ג. הביעו באמצעות S את שטח המשולש CEB.
- הנקודה O היא מרכז המעגל.
- ד. הוכיחו: $\angle COE = \angle CKE$.
- נתון: $\angle CAE = 45^\circ$.
- ה. הסבירו מדוע הנקודות E, C, O ו-K נמצאות על מעגל אחד.



5. נתון טרפז ABCD ($AB \parallel DC$), החסום במעגל. המשכי הצלעות AD ו-BC נפגשים בנקודה E, כמתואר בסרטוט. נתון: $\angle ACB = 60^\circ$.
- נסמן: $\angle CDE = \alpha$, $AC = k$.
- א. (1) מצאו את זוויות המשולש ACE (הביעו באמצעות α אם יש צורך).
- (2) הביעו באמצעות α ו-k את אורכי הצלעות AB ו-DC.
- נתון כי שטח המשולש ABE גדול פי 3 משטח המשולש DCE.
- ב. מצאו את גודל הזווית α .
- ג. מצאו את הערך של k שבעבורו אורך התיכון לצלע EC במשולש AEC הוא $\sqrt{63}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

6. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{(x - 3)^2}$, $0 < a < 3$ הוא פרמטר.

א. ענו על התת-סעיפים (1)–(5). הביעו את תשובותיכם באמצעות a אם יש צורך.

(1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצאו את שיעור ה- x של נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(5) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = \frac{x^2}{(x - 3)^2}$, המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

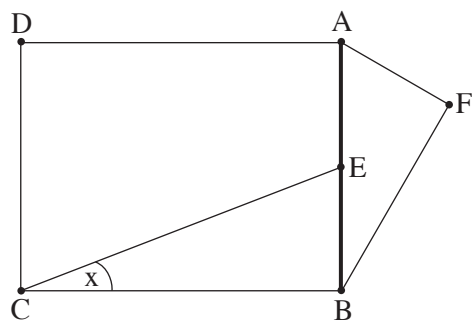
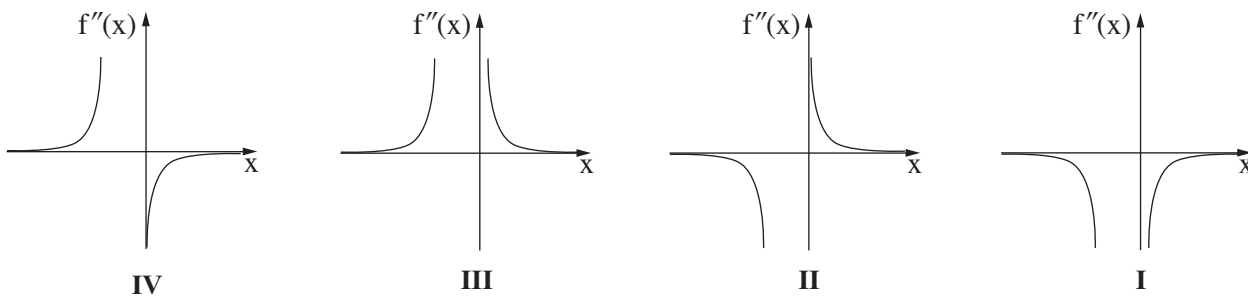
ב. (1) הוכיחו כי גרף הפונקצייה $g(x)$ נמצא כולו מעל גרף הפונקצייה $f(x)$.

(2) הביעו באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי הישר $x = 1$ ועל ידי

ציר ה- y .

7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + x}}$

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) האם גרף הפונקצייה $f(x)$ חותך את הצירים? נמקו את תשובתכם.
 (3) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.
 (4) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$.
- נתון כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
 ב. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.
 ג. היעזרו בגרף הפונקצייה $f(x)$, וקבעו איזה מן הגרפים I-IV שבסוף השאלה מתאר את גרף הנגזרת השנייה $f''(x)$. נמקו את קביעתכם.
 ד. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = 1$ ו- $x = 2$.



8. הנקודה E היא אמצע הקטע AB.
 על הקטע AB בונים מלבן ABCD ומשולש ישר זווית AFB, $\angle AFB = 90^\circ$, כמתואר בסרטוט.
 נתון: $\angle ECB = x$, $\angle FAB = 2x$.
 נסמן את אורך הקטע AB ב- h .
- א. מהו תחום הערכים האפשרי בעבור x ? הסבירו את תשובתכם.
 ב. הביעו באמצעות x ו- h את ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF.
 ג. מצאו את הערך של x שבעבורו ההפרש בין אורך הקטע CE לאורך הקטע AF הוא מינימלי.
 ד. בעבור הערך של x שמצאתם בסעיף ג, מצאו את היחס בין שטח המלבן ABCD לשטח המשולש AFB.

בהצלחה!