פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשפ"ג, 2023, מועד מיוחד 6/6 , שאלון: 35582

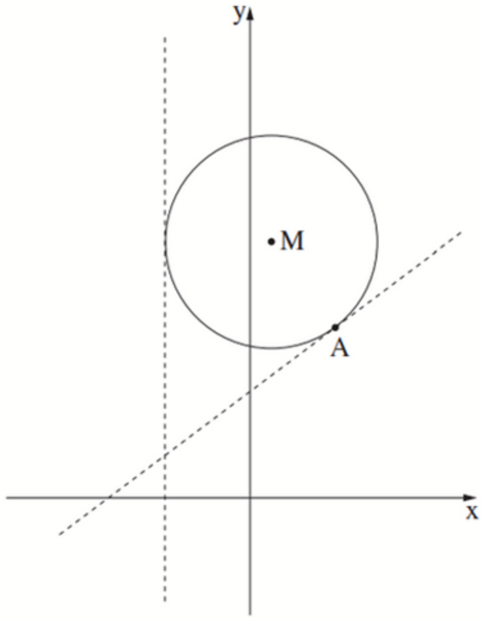
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

1. נתונים הישרים שמשוואותיהם: $\ell_1:\ 4y-3x-20=0$,
$\ell_2:\ x=-4$.

א. מצאו את המשוואות המתארות את המקום הגאומטרי
של כל הנקודות הנמצאות במרחקים שווים מן הישרים ℓ_1 ו־ ℓ_2 .

מעגל שמרכזו M משיק לישרים ℓ_1 ו־ ℓ_2 .
המעגל משיק לישר ℓ_1 בנקודה A שבה $x=4$.
המרכז M נמצא ברביע הראשון (ראו סרטוט).

ב. מצאו את שיעורי הנקודה M .



הישר ℓ_2 הוא מדריך של פרבולה קנונית.

ג. האם הישר ℓ_1 משיק בנקודה A לפרבולה זו? נמקו את תשובתכם.

ד. מצאו את משוואת המעגל המשיק לפרבולה זו בשתי נקודות
שאחת מהן היא הנקודה A .

פתרון:

נסמן נקודה כללית על המקום הגיאומטרי (x,y).

המרחק של הנקודה מהישר ℓ_1 הוא:

$$d=\frac{|-3x+4y-20|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{|-3x+4y-20|}{5}$$

והמרחק שלה מהישר ℓ_2 הוא

$$d=|x-(-4)|=|x+4|$$

נשווה בין המרחקים:

$$|x+4|=\frac{|-3x+4y-20|}{5}$$

$$\Downarrow$$

פתרון ראשון:

$$x+4 = \frac{-3x+4y-20}{5}$$
$$5x+20 = -3x+4y-20$$
$$4y = 8x+40$$
$$y = 2x+10$$

פתרון שני:

$$-x-4 = \frac{-3x+4y-20}{5}$$
$$-5x-20 = -3x+4y-20$$
$$4y = -2x$$
$$y = -\frac{1}{2}x$$

לסיכום, המקום הגיאומטרי הוא שני ישרים שמשוואותיהם:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= 2x+10 \\ y &= -\tfrac{1}{2}x \end{aligned}}$$

ב. הנקודה M נמצאת על המקום הגיאומטרי מסעיף א' מכיוון שהיא במרחק שווה משני הישרים. מכיוון שהיא ברביע הראשון היא נמצאת על הישר $y=2x+10$
נסמן $M(a,2a+10)$.

נמצא את שיעור ה-y של נקודה A:

$$4y-3\cdot4-20=0 \rightarrow y=8 \rightarrow A(4,8)$$

משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

שיפוע הישר l_1 הוא $m=\frac{3}{4}$

שיפוע הרדיוס MA הוא $\frac{2a+10-8}{a-4}=\frac{2a+2}{a-4}$

תנאי ניצבות?

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{2a+2}{a-4}=-1 \rightarrow \frac{6a+6}{4a-16}=-1 \Rightarrow 6a+6=-4a+16$$

$$10a=10 \Rightarrow a=1 \Rightarrow \boxed{M(1,12)}$$

ג. משוואת המדריך, l_2, היא $x=-4$

ולכן משוואת הפרבולה הקנונית היא:

$$y^2=16x$$

השיפוע של משיק לפרבולה בנקודה (x_1,y_1) על הפרבולה הוא $\frac{p}{y_1}$, כלומר, במקרה שלנו השיפוע הוא:

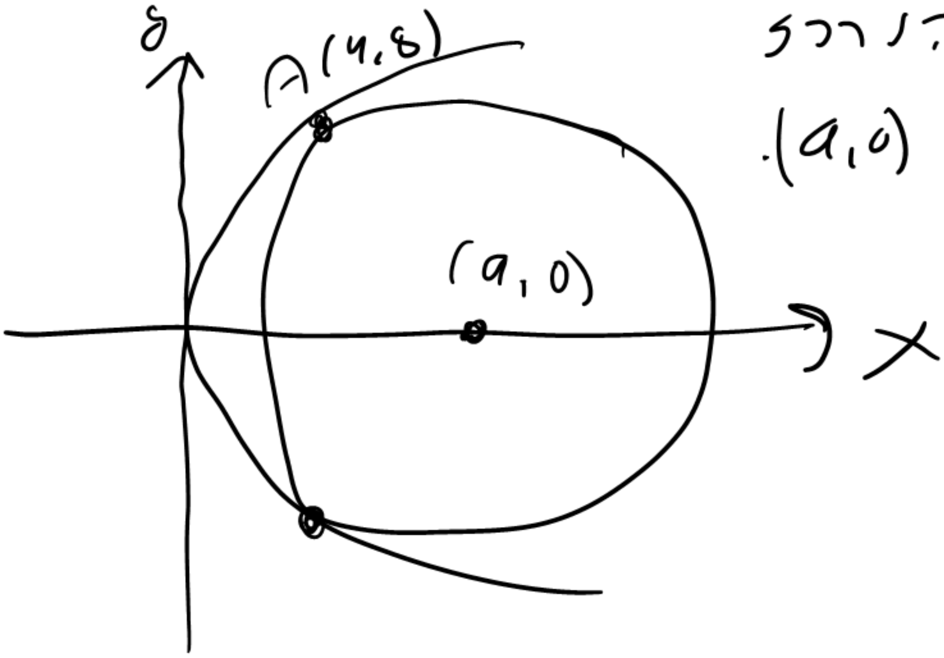
$$m=\frac{8}{8}=1$$

השיפוע של l_1 הוא $m=\frac{3}{4}$, ולכן

$\boxed{\text{$l_1$ אינו משיק לפרבולה בנקודה A}}$

3. גרף של פרבולה הנתונה סימטרי ביחס לציר x, לכן, אם המעגל משיק בשתי נקודות לפרבולה, נקודת ההשקה השניה היא הנקודה הסימטרית $(4,-8)$ ומרכז המעגל נמצא על ציר ה-x:

נסמן את המרכז של המעגל $(a,0)$.



רדיוס אל נקודת ההשקה מאונך למשיק, לכן:

$$\frac{8-0}{4-a}\cdot 1=-1 \rightarrow \frac{8}{4-a}=-1$$

$$8=-4+a \Rightarrow a=12$$

מרכז המעגל בנקודה $(12,0)$

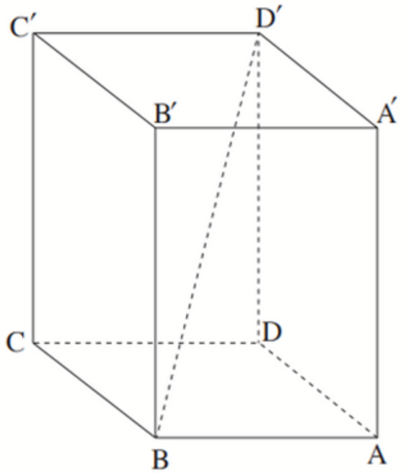
כעת נציב את נקודה $A(4,8)$ במשוואת המעגל, ונמצא את הרדיוס שלו:

$$(4-12)^2+(8-0)^2=R^2 \Rightarrow R^2=128$$

משוואת המעגל היא:

$$\boxed{(x-12)^2+y^2=128}$$

.2 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ שהבסיס שלה, $ABCD$, הוא מלבן (ראו סרטוט).



הנקודה E נמצאת על המקצוע DD' כך ש־ $DE : ED' = 3:2$,

הנקודה F נמצאת על האלכסון BD' ומתקיים: $\overrightarrow{BF} = t \cdot \overrightarrow{BD'}$,

$0 < t < 1$ הוא פרמטר.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. הביעו את הווקטורים $\overrightarrow{BD'}$ ו־ $\overrightarrow{FE}$ באמצעות $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו־ t , אם יש צורך.

נתון כי FE מקביל למישור הבסיס $ABCD$.

ב. מצאו את t .

הנקודה C היא ראשית הצירים.

הנקודה B נמצאת על ציר ה־ x בכיוון החיובי שלו, והנקודה D נמצאת על ציר ה־ y בכיוון החיובי שלו.

נתון: $F(4, 12, 18)$.

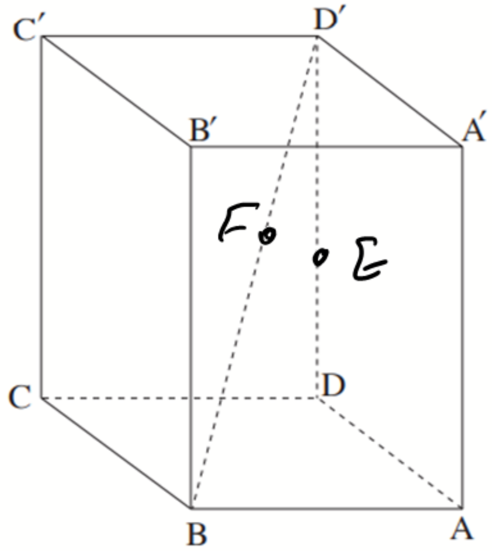
ג. מצאו את $|\underline{u}|$, $|\underline{v}|$ ו־ $|\underline{w}|$.

מן הנקודה F העבירו ישר המאונך למישור $EFBD$.

ישר זה חותך את הפאה $CDD'C'$ בנקודה P .

ד. מצאו את שיעורי הנקודה P .

פתרון:



א. נתון: $DE : ED' = 3:2$

לכן: $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{5}\underline{w}$

נתון: $\overrightarrow{BF} = t \cdot \overrightarrow{BD'}$

לכן: $\overrightarrow{FD'} = (1-t)\overrightarrow{BD'}$

כעת: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \boxed{-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}}$

$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD'} + \overrightarrow{D'E} = (1-t)\overrightarrow{BD'} + \frac{2}{5}\cdot\overrightarrow{D'D}$

$$\overrightarrow{FE}=(1-t)(-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})+\frac{2}{5}(-\underline{w})$$

$$\boxed{\overrightarrow{FE}=(t-1)\underline{u}+(1-t)\underline{v}+\left(\frac{3}{5}-t\right)\underline{w}}$$

ב. נתון כי FE מקביל לבסיס ABCD
כלומר הוקטור $\overrightarrow{FE}$ הוא קומבינציה לינארית של הוקטורים שפורשים את הבסיס $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
מכאן:

$$\frac{3}{5}-t=0 \rightarrow \boxed{t=\frac{3}{5}}$$

ג. מהסעיפים הקודמים נקבל:

$$\overrightarrow{FE}=-\frac{2}{5}\underline{u}+\frac{2}{5}\underline{v}\ ,\ \overrightarrow{BF}=-\frac{3}{5}\underline{u}+\frac{3}{5}\underline{v}+\frac{3}{5}\underline{w}$$

כעת, נמקם את התיבה במערכת צירים כך ש:

$C(0,0,0)$
$B(x,0,0)$
$D(0,y,0)$
$F(4,12,18)$

המקצוע DD' מאונך למישור ABCD
לכן $D'(0,y,z)$

ונקבל: $\overrightarrow{BD'} = D' - B = (-x, y, z)$

$\Downarrow$

$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{5}(-x, y, z) = (-\frac{3}{5}x, \frac{3}{5}y, \frac{3}{5}z)$

מצד שני: $\overrightarrow{BF} = F - B = (4-x, 12, 18)$

נשווה בין שני הביטויים עבור $\overrightarrow{BF}$:

$$(4-x, 12, 18) = (-\frac{3}{5}x, \frac{3}{5}y, \frac{3}{5}z)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 4-x = -\frac{3}{5}x \\ 12 = \frac{3}{5}y \\ 18 = \frac{3}{5}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 30 \end{cases}$$

קדקודי התיבה שמצאנו הם:

$B(10,0,0)$, $D(0,20,0)$, $D'(0,20,30)$

כלומר: $\boxed{|\underline{u}| = 20, |\underline{v}| = 10, |\underline{w}| = 30}$

3. שלב ראשון נמצא הצגה פרמטרי-
לישר שהגדרנו מנקודה F, והוא
מאונך למישור EFBD.

$\Downarrow$

נסמן ב- וקטור הכיוון של הישר: (a,b,c).

מכיוון שהוא מאונך למישור נרשום ש:

לכן, נקבל:

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot\overline{BD}=0\\(a,b,c)\cdot\overline{BF}=0\end{cases}=\begin{cases}(a,b,c)\cdot(-10,20,0)=0\\(a,b,c)\cdot(-6,12,18)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}-10a+20b=0\rightarrow a=2b\\-6a+12b+18c=0\rightarrow a=2b+3c\end{cases}\Rightarrow \boxed{c=0}$$

נבחר $b=1$ ונקבל $a=2$, כלומר וקטור הכיוון הוא $(2,1,0)$

הצגה הפרמטרית של הישר המאונך תהיה:

$$\underline{x}=(4,12,18)+Q(2,1,0)$$

משוואת מישור yOz היא $x=0$

ולכן: $4+2Q=0\rightarrow Q=-2$

נציב בהצגה הפרמטרית של הישר ונקבל $(0,10,18)$ כלומר:

$$\boxed{P(0,10,18)}$$

3. $z = x + iy$ הוא מספר מרוכב (x ו־ y הם מספרים ממשיים).

א. **(1)** הראו כי משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס המקיימות: $|z^2 - 3i| = |z^2 + 5i|$,

היא $y = -\frac{1}{2x}$.

(2) תנו דוגמה למספר מרוכב הנמצא על המקום הגאומטרי הזה.

ב. פתרו את המשוואה: $z^6 = 1$.

פתרונות המשוואה שמצאתם בסעיף **ב** מייצגים את קודקודיו של מצולע I .

המקום הגאומטרי שמצוין בתת־סעיף **א (1)** חותך ברביע הרביעי את המעגל החוסם את מצולע I בנקודה A .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה A .

הנקודה A היא קודקוד של מצולע משוכלל אחר החסום באותו מעגל, מצולע II .

נתון: מספר הקודקודים של מצולע II שווה למספר הקודקודים של מצולע I .

ד. מצאו את המספרים המרוכבים המייצגים את כל הקודקודים של מצולע II .

נסמן: $w = r \cdot cis\,\alpha$, $0 < \alpha < 60^o$.

כופלים את כל המספרים המייצגים את קודקודי מצולע I במספר w , כך שקודקודי מצולע I מתלכדים עם קודקודי מצולע II .

ה. מצאו את w .

פתרון:

א. 1) נציב $z=x+yi$ במשוואה:

$$|(x+yi)^2-3i| = |(x+yi)^2+5i|$$

$$|x^2+2xyi-y^2-3i| = |x^2+2xyi-y^2+5i|$$

$$|(x^2-y^2)+(2xy-3)i| = |(x^2-y^2)+(2xy+5)i|$$

$$\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy-3)^2} = \sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy+5)^2} \quad /()^2$$

$$4x^2y^2-12xy+9 = 4x^2y^2+20xy+25$$

$$-32xy = 16$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2x}}$$

(2) למשל $x=1 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{z = 1 - \frac{1}{2}i}$

ד. $z^6 = 1 \ / \sqrt[6]{\ }$

$$z = \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{1 \cdot cis0^\circ}$$

הפתרונות הם שורשי היחידה מסדר 6:

$$z_k = 1 \cdot cis\left(\frac{360^\circ}{6} \cdot k\right), k=0,1,2,3,4,5$$

נפרט את הפתרונות:

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = cis0^\circ, \ z_2 = cis60^\circ, \ z_3 = cis120^\circ \\ z_4 = cis180^\circ, \ z_5 = cis240^\circ, \ z_6 = cis300^\circ \end{array}}$$

ה. המעגל החוסם את המשושה שקדקודיו הם פתרונות המשוואה מסעיף ד' הוא מעגל היחידה שמשוואתו $x^2+y^2=1$

נציב למשוואה את $y = -\frac{1}{2x}$ ונפתור:

$$x^2 + \left(-\frac{1}{2x}\right)^2 = 1$$

$$x^2+\frac{1}{4y^2}=1 \Rightarrow 4x^4-4x^2+1=0$$

$$(2x^2-1)^2=0 \rightarrow 2x^2-1=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2}$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

והנקודה A ברביע הרביעי, ולכן $x_A=\frac{\sqrt{2}}{2}$

מכאן: $y=-\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\boxed{A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

3. נעבור להצגה קוטבית:

$$A=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \tan\theta=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases}$$

$$\theta=-45^\circ+180^\circ k \Rightarrow \theta=-45^\circ$$

$$A=cis(-45^\circ)$$

מצולע II הינו משושה משוכלל, ולכן

הקודקודים שלו הם:

$$z_k=1\cdot cis(-45^\circ+60^\circ k)\ ;\ k=1,2,3,4,5,6$$

נרשום את 6 הקודקודים:

$$\boxed{\begin{array}{l} cis\,15^\circ,\ cis\,75^\circ,\ cis\,135^\circ \\ cis\,195^\circ,\ cis\,255^\circ,\ cis\,315^\circ \end{array}}$$

ה. $w = r\,cis\,\alpha$; $0^\circ < \alpha < 60^\circ$

כדי שהקודקודים של שני המשושים
יתלכדו צריך להיות α – הארגומנט
של המשושה השני הוא 15°,
ולא לשנות r – המודולים.

לכן, $\boxed{w = 1 \cdot cis\,15^\circ}$

4. $f(x)$ היא פונקצייה המוגדרת לכל x, ו־ $f'(x)$ היא פונקציית הנגזרת שלה, המוגדרת גם היא לכל x.

נתון: $f'(x) = -2x \cdot e^{-\frac{x^2}{a}}$, a הוא פרמטר.

לפונקצייה $f(x)$ יש נקודת פיתול בנקודה שבה $x = \sqrt{2}$.

א. מצאו את a.

נתון: $f(0) = a$.

ב. מצאו את הפונקצייה $f(x)$.

ג. **(1)** האם הפונקצייה $f(x)$ היא זוגית **<u>או</u>** אי־זוגית? נמקו את תשובתכם.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

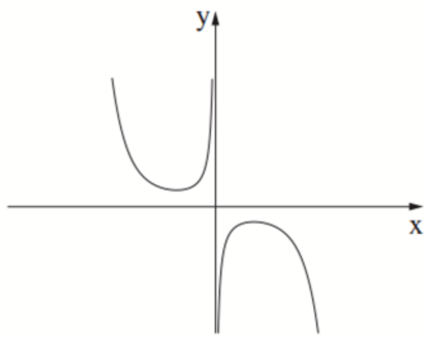
נתונות הפונקציות $h(x) = \frac{1}{f'(x)}$, $m(x) = e^{h(x)}$.

שלושה מבין הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתארים את הפונקציות $f'(x)$, $h(x)$, $m(x)$.

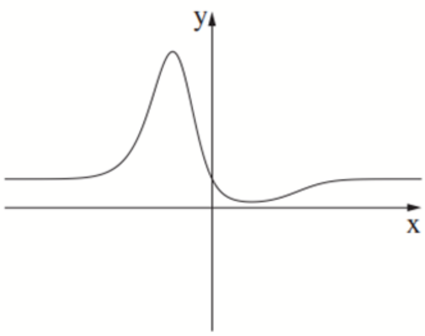
ד. התאימו לכל פונקצייה את הגרף המתאר אותה.

ה. **(1)** מצאו את תחומי הירידה של הפונקצייה $m(x)$.

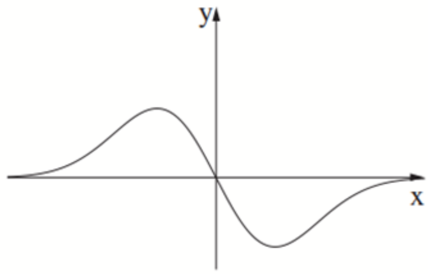
(2) קבעו אם הביטוי $\int_1^2 h(x) \cdot m(x)\,dx$ חיובי או שלילי. נמקו את קביעתכם.



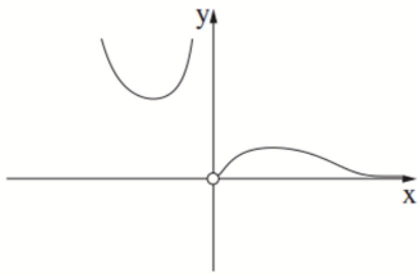
I



II



III



IV

פתרון:

א. לפונקציה יש נקודת פיתול כי $x=\sqrt{2}$

כלומר $f''(\sqrt{2})=0$.

נגזור פעם שנייה את הפונקציה:

$$f''(x) = -2\cdot e^{-\frac{x^2}{a}} - 2x\cdot e^{-\frac{x^2}{a}}\cdot \frac{-2x}{a}$$

$$f''(x) = e^{-\frac{x^2}{a}}\left(-2 + \frac{4x^2}{a}\right)$$

$\Downarrow$ נציב את הנתון:

$$0 = e^{-\frac{2}{a}}\left(-2+\frac{8}{a}\right)$$

$\swarrow \quad \emptyset$

$\searrow \quad -2+\frac{8}{a}=0$

$\Downarrow$

$$\boxed{a=4}$$

ב. כעת נתון $f(0)=a \rightarrow f(0)=4$

נבצע אינטגרל לנגזרת:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int -2x e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx$$

ידועה הנגזרת המורכבת של $e^{f(x)}$:

$$\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x)\cdot e^{f(x)}$$

מכיון שמתקיים האינטגרל המיידי:

$$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = e^{f(x)}+c$$

נשתמש בנוסחה:

$$f(x)=\int -2x\, e^{-\frac{x^2}{4}}dx=\int 4\cdot\left(-\tfrac{1}{2}x\right)e^{-\frac{x^2}{4}}dx$$

$$f(x)=4\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}+c$$

נציב את הנקודה הנתונה בפונקציה:

$$4=4\cdot e^{0}+c \Rightarrow c=0$$

הפונקציה היא: $\boxed{f(x)=4e^{-\frac{x^2}{4}}}$

ג. (1) $f(-x)=4e^{-\frac{(-x)^2}{4}}=4e^{-\frac{x^2}{4}}=f(x)$

הפונקציה זוגית

(2) אסימפטוטה אנכית - אין

אסימפטוטה אופקית - המעריך שואף למינוס אינסוף כאשר ערכי x שואפים לפלוס ולמינוס אינסוף ולכן הפונקציה

שואפת לאפס, רלוונטי אסימפטוטה.

אופקית — $\boxed{y=0}$

(3)

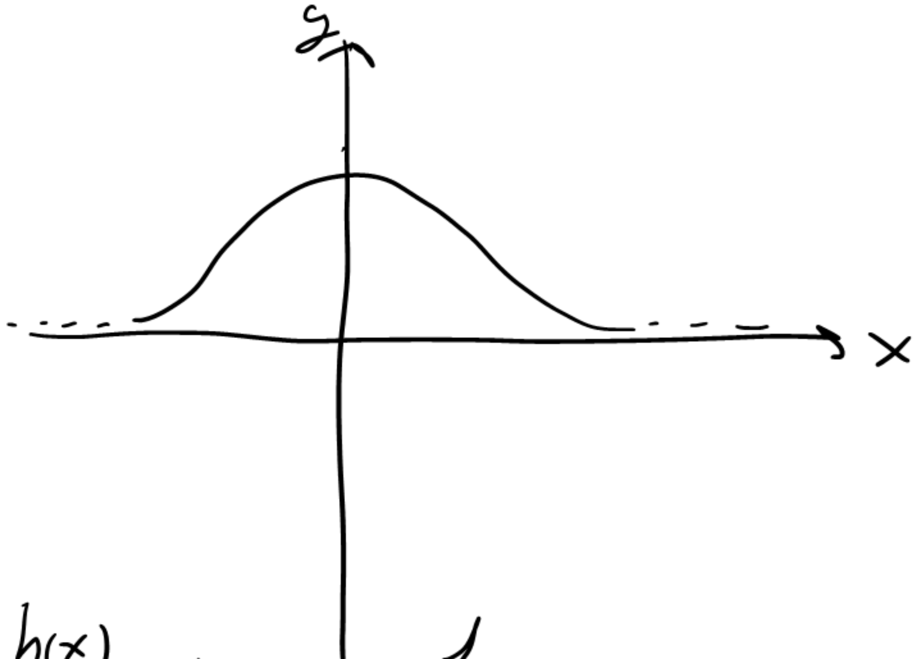
$-2x \cdot e^{-\frac{x^2}{4}} = 0$

$x=0$, ϕ

לפי הסעיפים הקודמים הנקודה

היא $\boxed{(0,4)\ \text{מקסימום}}$

(4)



3. כעת נתון $m(x)=e^{h(x)}$, $h(x)=\frac{1}{f'(x)}$

הגרף השייך לפונקציה $f'(x)$ הוא

גרף III כי הוא היחיד שמראה

נקודת מקסימום ב- $x=0$.

הגרף המתאים לפונקציה $h(x)$ הוא
גרף I משום שהוא היחיד שמראה גרף
של פונקציה אי זוגית שאינה מוגדרת
ב- $x=0$, ואלו שני מאפיינים של
הפונקציה $h(x)$.
הוא גם מראה תחומי עליה וירידה
הפוכים לאלו של הנגזרת עבור $x\neq0$
וזו תכונה שתמיד מתקיימת כשמדובר
בפונקציה $\frac{1}{f'(x)}$.
הגרף המתאים לפונקציה $m(x)$ הוא
גרף IV משום שהוא מראה נקודת
אי הגדרה סליקה עבור $x\to0^+$
ואסימפטוטה אנכית עבור $x\to0^-$
הוא גם מראה אסימפטוטה אופקית
$y=0$ עבור $x\to\infty$, ומראה שאין
אסימפטוטה אופקית עבור $x\to-\infty$

לסיכום:

III	גרף - $f'(x)$
I	גרף - $h(x)$
IV	גרף - $m(x)$

ה. (1) נגזור:

$$m'(x)=h'(x)\cdot e^{h(x)}$$

$$m'(x) = \frac{-f''(x)}{f^2(x)} \cdot e^{\frac{1}{f'(x)}}$$

נשווה לאפס ונפתור:

$$f''(x)=0 \rightarrow e^{-\frac{x^2}{4}} \cdot (-2+x^2)=0$$

$\emptyset$ $\qquad$ $x=\mp\sqrt{2}$

לפי הגרף IV נקבל:

$\boxed{\text{תחומי ירידה: } \sqrt{2}<x \text{ וגם } x<-\sqrt{2}}$

(ב) בתחום שבו $1<x<2$

הפונקציה $h(x)$ שלילית —

והפונקציה $m(x)$ חיובית.

לכן המכפלה $m(x)\cdot h(x)$ תהיה

גם היא שלילית.

מכיוון שהאינטגרל בתחום הזה

יהיה שלילי.

לכן:

$$\boxed{\int_1^2 h(x)\cdot m(x)\,dx<0}$$

5. נתונה הפונקצייה $f(x)=\frac{1-\ell nx}{\ell nx}$.

א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$.

(3) מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x)=\ell n(-f(x))$.

ב. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $g(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $g(x)$.

(3) מצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $g(x)$.

(4) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$.

נסמן ב־ a את שיעור ה־ x של נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ וגרף הפונקצייה $g(x)$.

ג. מבין הביטויים I–III קבעו איזה ביטוי הוא הגדול ביותר ואיזה ביטוי הוא הקטן ביותר (אין צורך למצוא את הערך של a). נמקו את תשובתכם.

I. $\int_{a+1}^{a+2}(g(x)-f(x))\,dx$ II. $\int_{a+3}^{a+4}(g(x)-f(x))\,dx$ III. המספר 1

פתרון:

א. (1) תחום הגדרה:

$$\begin{cases} 0<x \\ \ln x\neq 0 \rightarrow x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{0<x\neq 1}$$

(2) אסימפטוטה אנכית: $\boxed{x=1}$

עבור ערכי x ששואפים לאפס
ערכי הפונקציה שואפים למינוס אחת —
ולכן יש נקודת אי הגדרה סליקה $(0,-1)$

אסימפטוטה אופקית: עבור ערכי x
ששואפים לאינסוף, ערכי הפונקציה

שואפת למינוס אחד ולכן יש
אסימפטוטה אופקית $\boxed{y=-1}$

(ד) לפני שנגזור נפשט את הפונקציה:

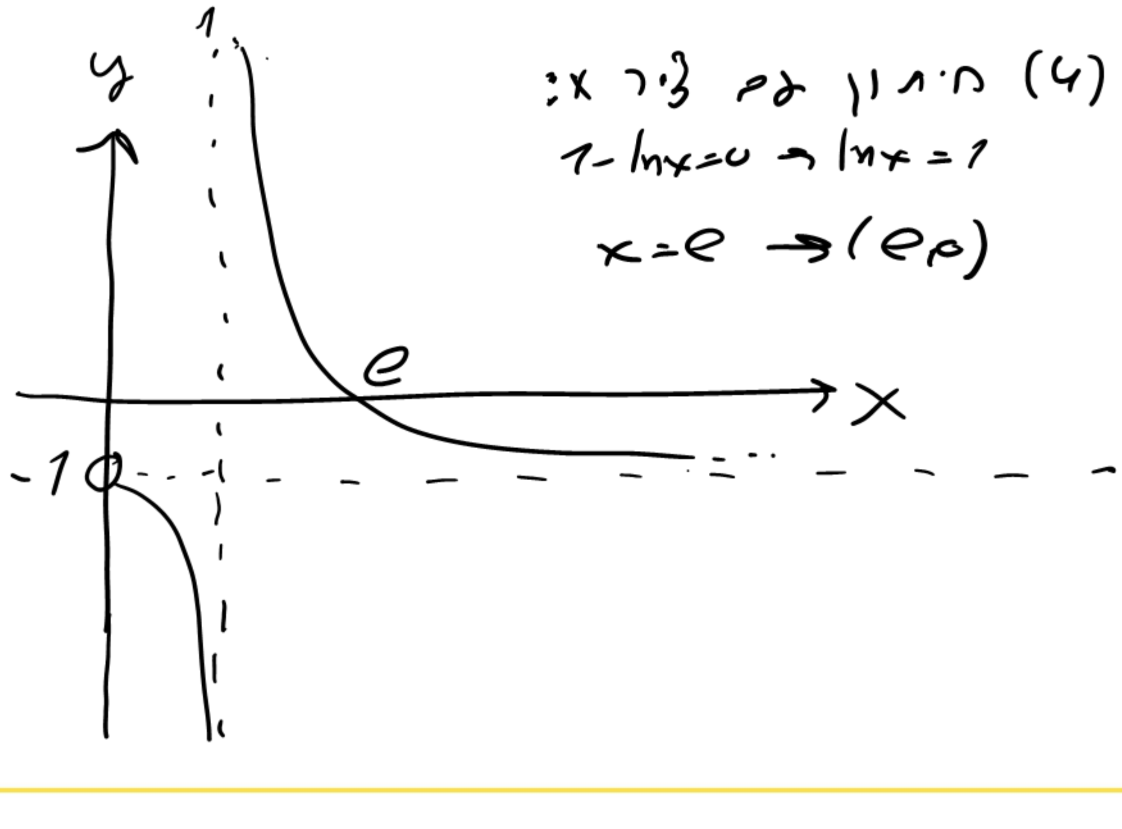
$$f(x)=\frac{1}{\ln x}-\frac{\ln x}{\ln x}=\frac{1}{\ln x}-1$$

כעת נגזור:

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{-1}{x\cdot\ln^2 x}=0\to\phi$$

הנגזרת שלילית בכל תחום ההגדרה של הפונקציה ולכן:

תחומי ירידה: $1<x$ או $0<x<1$
תחומי עלייה: אין



(ה) חיתוך עם ציר x:

$$1-\ln x=0\to\ln x=1$$

$$x=e\to(e,0)$$

ב. $g(x)=\ln(-f(x))$

(1) תחום הגדרה: $0<-f(x)$

$\Downarrow$

$f(x)<0$

לפי סעיף א' נקבל:

$$\boxed{e<x \quad \text{או} \quad 0<x<1}$$

(2) <u>אסימפטוטה אנכית:</u>

$x\to 0$: $f(x)\to -1 \to g(x)\to 0$

כלומר יש נקודת אי הגדרה סליקה $(0,0)$

$x\to 1$: $f(x)\to -\infty \to g(x)\to \infty$

כלומר יש אסימפטוטה אנכית $\boxed{x=1}$

$x\to e$: $f(x)\to 0^- \to g(x)\to -\infty$

כלומר יש אסימפטוטה אנכית $\boxed{x=e}$

<u>אסימפטוטה אופקית:</u>

$x\to\infty$: $f(x)\to -1 \to g(x)\to 0$

יש אסימפטוטה אופקית $\boxed{y=0}$

(3) בתחום $e<x$ מתקיים $-1<f(x)<0$

ולכן $0<-f(x)<1$, כלומר $g(x)$ שלילית.

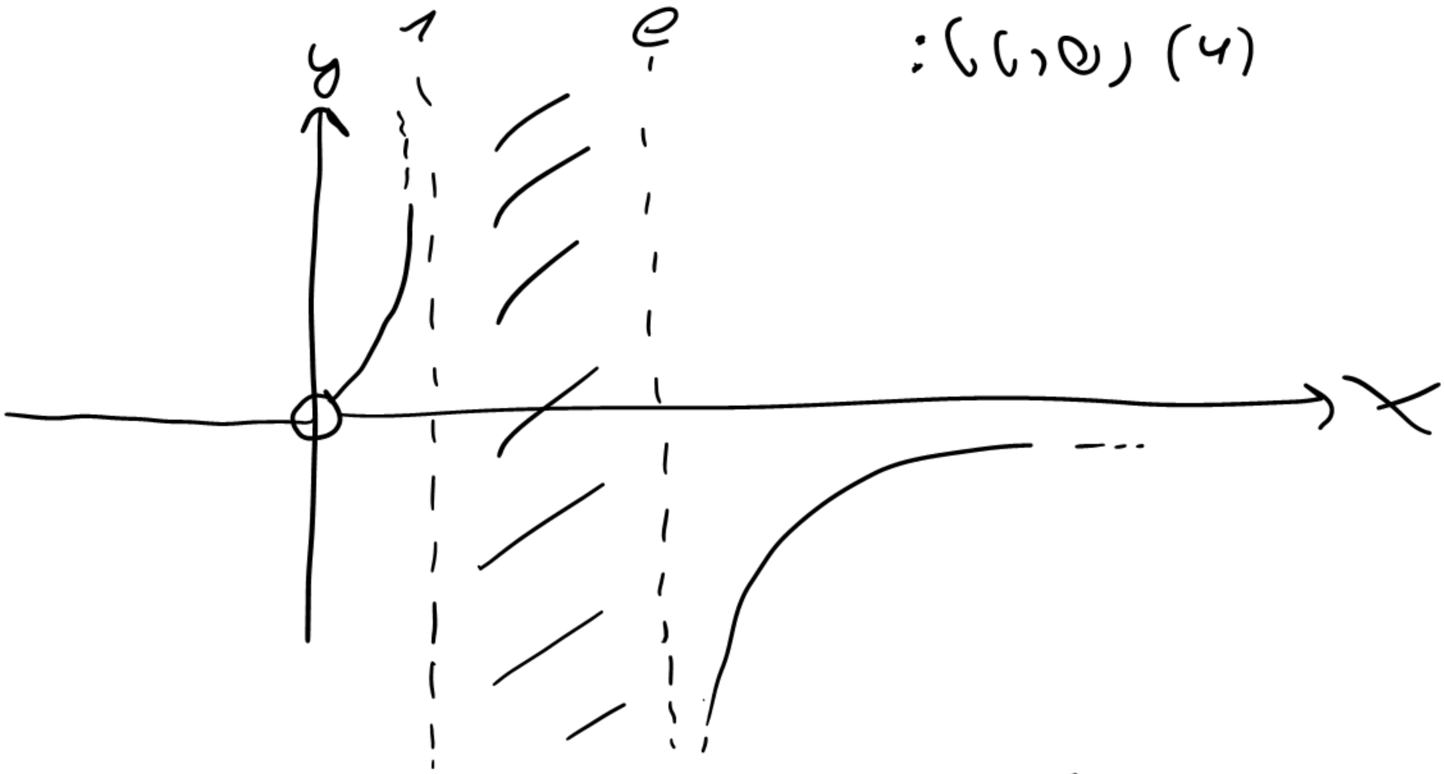
בתחום $0<x<1$ מתקיים $f(x)<-1$

לכן רק $f(x)$ - , כלומר $g(x)$ חיובי.

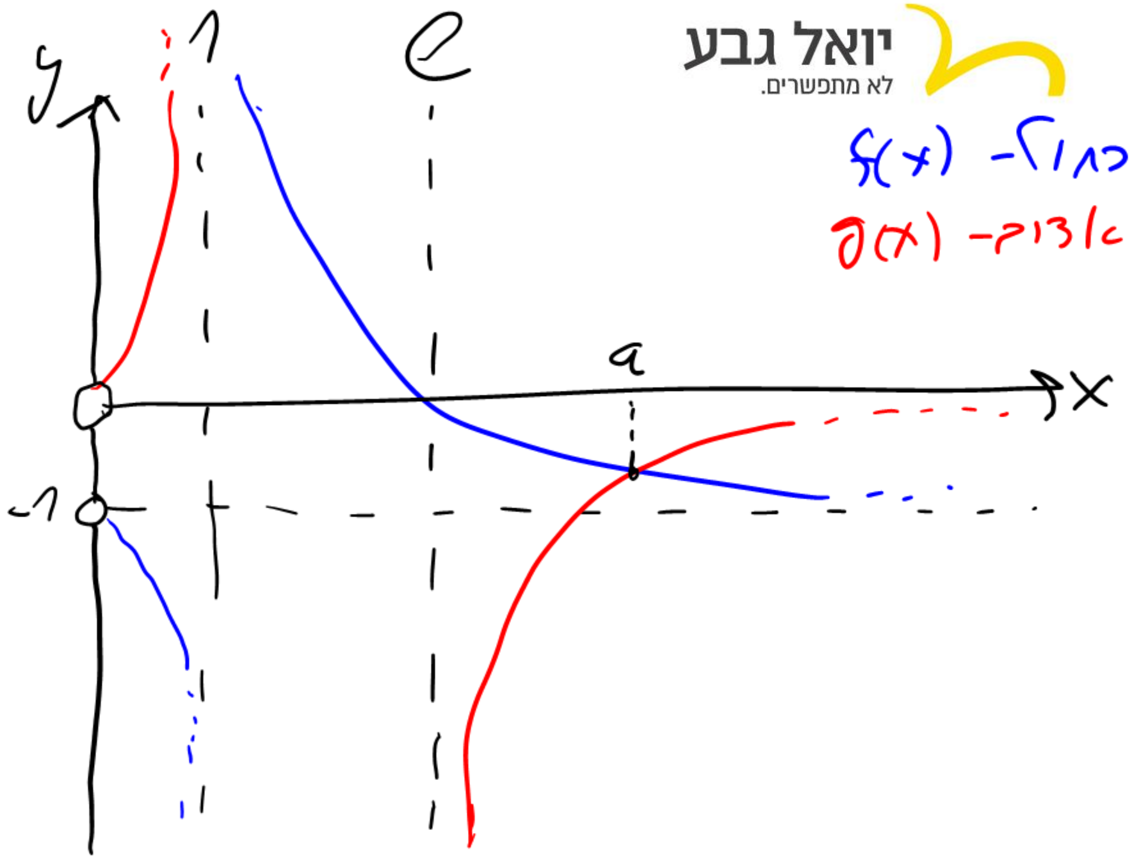
לסיכום:

תחום שליליות:	$e<x$
תחום חיוביות:	$0<x<1$

(ד) נשרטט:



ה. נשרטט את שני הגרפים במערכת צירים אחת?



השטח שאינטגרל I מייצג גדול מהשטח שאינטגרל II מייצג משום שהגבולות של השטח II נמצאים מימין לגבולות של שטח I, והפונקציות מתרחקות זו מזו ככל הגרפים מתרחקים ימינה. מכיוון המרחק בין הגבולות הוא 1 בשני האינטגרלים והפונקציה g(x) מעל לפונקציה f(x) אזי מתקיים $I < II$

שני השטחים הללו כלולים בתוך ריבוע שהשטח שלו הוא 1, ולכן השטח III גדול משניהם.

<u>לסיכום:</u>

הביטוי הגדול ביותר הוא III
הביטוי הקטן ביותר הוא I