פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023 , מועד א', שאלון: 35572

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. נתונה האליפסה $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{144-4k^2}=1$ **, כאשר** $0<k<6$ **פרמטר.**

$144>144-4k^2$**, ולכן זוהי אליפסה קנונית, שבה** $a>b$.

הנקודה $F_1(c,0)$ **היא המוקד הימני של האליפסה , והנקודה** $F_2(-c,0)$ **היא המוקד השמאלי שלה.**

באליפסה מתקיים $a^2-b^2=c^2$ **, ומכאן ש:** $c^2=144-(144-4k^2)=4k^2 \quad \rightarrow c=2k$.

תשובה: $F_1(2k,0)$, $F_2(-2k,0)$.

ב. הנקודה A **נמצאת הרביע הראשון על פרבולה, שמשוואתה קנונית** $y^2=2px$.

(1) מוקד הפרבולה נמצא בנקודה $F_1(2k,0)$**, ולכן המדריך שמשוואתו היא** $x=-\frac{p}{2}$ **הוא הפעם** $x=-2k$.

תשובה: משוואת מדריך הפרבולה היא $x=-2k$.

(2) מתקיים $AF_1=10k$.

$x=-2k$ **הוא המדריך, ולכן** $x_A=-2k+10k \quad \rightarrow x_A=8k$.

$\frac{p}{2}=2k$ **, ומכאן ש-** $p=4k$ **ומשוואת הפרבולה היא** $y^2=8kx$.

נציב $x=8k$ **:** $y^2=8k\cdot 8k=64k^2$ **ו-** $y_A=8k$**, כי נתון שהנקודה** A **נמצאת ברביע הראשון.**

תשובה: $A(8k,8k)$.

ג. AF_1 **הוא קוטר במעגל, שהישר שמשוואתו** $5x+12y=138$ **משיק למעגל זה.**

מרכז המעגל הוא אמצע הקוטר: $\boxed{M(5k,4k)} \leftarrow M(\frac{8k+2k}{2},\frac{8k+0}{2}) \leftarrow M(\frac{x_A+x_{F_1}}{2},\frac{y_A+y_{F_1}}{2})$.

רדיוס המעגל, הוא למשל, MF_1 **:** $\boxed{R=5k} \leftarrow AF_1=10k$

מרחק המרכז מהמשיק $5x+12y-138=0$ **שווה לאורך הרדיוס.**

$$5k=\frac{|5\cdot 5k+12\cdot 4k-138|}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

$$65k=|73k-138|$$

$$\left.\begin{aligned}65k=73k-138 &\quad \rightarrow \cancel{k=17.25}\\ 65k=-73k+138 &\quad \rightarrow \boxed{k=1}\end{aligned}\right\} \leftarrow 0<k<6$$

תשובה: $k=1$.

ד. משוואת האליפסה, עבור $k=1$ **היא** $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{140}=1$ **, כאשר** $a=12$ **ו-** $F_1(2,0)$ **,** $F_2(-2,0)$**.**

עבור $k=1$ **נקבל** $A(8,8)$**.**

אם נציב את שיעורי הנקודה A **במשוואת האליפסה, נקבל:** $\frac{8^2}{144}+\frac{8^2}{140}=0.91<1$**,**

ולכן הנקודה A **היא בתוך האליפסה.**

מכאן שסכום המרחקים שלה משני המוקדים קטן מסכום המרחקים של הנקודה D **שעל האליפסה,**

ומכיוון והצלע השלישית בשני המשולשים משותפת (המרחק בין המוקדים),

הרי שהיקף ΔF_1AF_2 **קטן מהיקף** ΔF_1DF_2 **.**

לחילופין, ניתן כמובן לחשב את צלעות המשולשים:

D **היא נקודה על האליפסה, כך שסכום המרחקים שלה מהמוקדים הוא** $2a=2\cdot 12=24$ **.**

אורך הצלע שבין המוקדים היא $2c=4$ **, והיקף** ΔF_1DF_2 **הוא** 28 **.**

סכום המרחקים של $A(8,8)$ **מהמוקדים הוא:**

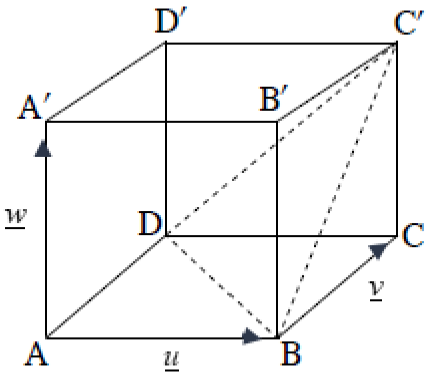
$AF_1=10k=10\cdot 1=10$

$AF_2=\sqrt{(8+2)^2+(8-0)^2}=2\sqrt{41}\approx 12.81$ **.**

אורך הצלע שבין המוקדים היא $2c=4$ **, והיקף** ΔF_1DF_2 **הוא** 26.81 **.**

תשובה: היקף ΔF_1AF_2 **קטן מהיקף** ΔF_1DF_2 **.**

בשרטוט מתוארת הקובייה $ABCDA'B'C'D'$.



$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{u}}$ $\quad |\underline{u}| = a \quad \underline{u}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{AD} = \underline{v}}$ $\quad |\underline{v}| = a \quad \underline{v}^2 = a^2$

$\boxed{\overrightarrow{AA'} = \underline{w}}$ $\quad |\underline{w}| = a \quad \underline{w}^2 = a^2$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{v}$

$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$

נוכיח כי האלכסון CA' **מאונך למישור** $BC'D$.

נעשה זאת, על ידי כך שנראה שהוא מאונך לשני וקטורים במישור $BC'D$**, שאינם תלויים זה בזה.**

$$\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CA'} = -\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}}$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BD} = -\underline{u} + \underline{v}}$$

$$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BC} = \underline{v} + \underline{w}}$$

$$\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{BD} = (-\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}) \cdot (-\underline{u} + \underline{v}) = \underline{u}^2 - \underline{v}^2 = a^2 - a^2 = 0 \quad \to \boxed{CA' \perp BD}$$

$$\overrightarrow{CA'} \cdot \overrightarrow{BC} = (-\underline{u} - \underline{v} + \underline{w}) \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = -\underline{v}^2 + \underline{w}^2 = -a^2 + a^2 = 0 \quad \to \boxed{CA' \perp BC}$$

$$\left.\begin{array}{l} CA' \perp BD \\ CA' \perp BC \end{array}\right\} \boxed{CA' \perp \pi_{BC'D}}$$

תשובה: הוכחנו כי האלכסון CA' **מאונך למישור** $BC'D$.

ב. נקודה E **היא מפגש התיכונים ב-** $\Delta BC'D$.

(1) נביע את הווקטור $\overrightarrow{CE}$ **באמצעות** $\underline{u}$, $\underline{v}$ **ו-** $\underline{w}$.

$$\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC'})$$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3} \cdot (-\underline{u} + \underline{v} + \underline{v} + \underline{w})$$

$$\boxed{\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$$

$$\overrightarrow{CE} = -\underline{v} - \frac{1}{3}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{3}\underline{u} - \frac{1}{3}\underline{v} + \frac{1}{3}\underline{w}$.

(2) נוכיח כי הנקודות C **,** E **ו-** A' **נמצאות על ישר אחד .**

$$\overrightarrow{CA'}=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'})$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{\overrightarrow{CA'}=-\underline{u}-\underline{v}+\underline{w}}\\ \boxed{\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{3}\underline{u}-\frac{1}{3}\underline{v}+\frac{1}{3}\underline{w}}\end{array}\right\}CE=\frac{1}{3}CA'$$

נקודות המוצא משותפת, וכיווני הווקטורים שווים, ולכן שלוש הנקודות נמצאות על ישר אחד.

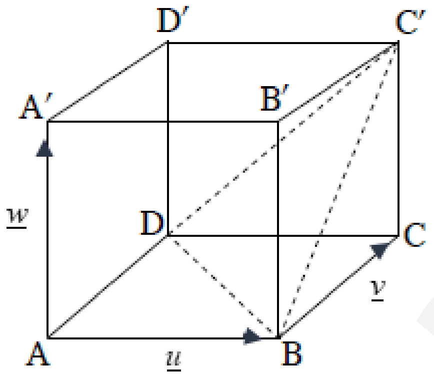
תשובה: הוכחנו כי הנקודות C **,** E **ו-** A' **נמצאות על ישר אחד (כאשר** $CE:EA'=1:2$ **) .**

ג. נתון: $D(0,0,0)$ **(ראשית הצירים) ,** $C(3,4,0)$ **,** $A(4,n,p)$ **,** $z_{C'}>0$ **.**

(1) נמצא את שיעורי הנקודה A **, ונוכיח כי** $ABCD$ **נמצא במישור** $z=0$ **.**

$CD=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5$ **, ולכן גם** $AD=5$ **כי מקצועות הקובייה שווים זה לזה.**

$\overrightarrow{CD}=(3,4,0)$ **,** $\overrightarrow{AD}=(4,n,p)$ **, כאשר** $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ **כי מקצועות הקובייה מאונכים זה לזה.**



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ (4,n,p)\cdot(3,4,0)=0\\ 12+4n=0\\ \boxed{n=-3}\\ |(4,-3,p)|=5 \leftarrow AD=5\\ 16+9+p^2=25\\ \boxed{p=0}\end{array}\right\}\boxed{A(4,-3,0)}$$

קבלנו שלשלוש נקודות במישור $ABCD$ **יש שיעור** $z=0$ **, ולכן** $ABCD$ **במישור** $z=0$ **, מישור** $[x,y]$ **.**

תשובה: $A(4,-3,0)$ **, והוכחנו כי** $ABCD$ **נמצא במישור** $z=0$ **.**

(2) C' **נמצאת על המישור** $A'B'C'D'$ **, שמשוואתו** $z=5$ **(**$z_{C'}>0$**),**

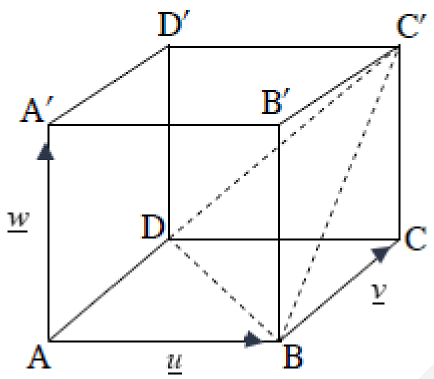
כי הוא מקביל למישור $ABCD$ **ונמצא במרחק של** 5 **יחידות ממנו, כאורכי מקצועות הקובייה.**

אפשר גם $\underline{w}=(0,0,5)$ **, כי הוא מאונך למישור** $[x,y]$ **ואורכו כמקצוע הקובייה.**

$$C'=C+\underline{w}=(3,4,0)+\underline{(0,0,5)}\quad\rightarrow\boxed{C'(3,4,5)}$$

תשובה: $C'(3,4,5)$ **.**

ד. ℓ **הוא ישר החיתוך בין המישור** $BC'D$ **ובין המישור** $BCC'B'$.



ניתן לראות בסרטוט ש- BC' **אלכסון הפאה** $BCC'B'$**, מונח על ישר החיתוך של שני המישורים.**

$D(0,0,0)$, $C(3,4,0)$, $A(4,-3,0)$, $C'(3,4,5)$.

נמצא את שיעורי הנקודה B **, בהתבסס על כך שצלעות נגדיות בריבוע** $ABCD$ **שוות ומקבילות.**

$$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$$
$$\underline{A} - \underline{D} = \underline{B} - \underline{C}$$
$$\underline{A} - \underline{D} + \underline{C} = \underline{B}$$
$$\boxed{B(7,1,0)}$$

נמצא את וקטור הכיוון.

$$\overrightarrow{BC'} = \underline{C'} - \underline{B}$$
$$\boxed{\overrightarrow{BC'} = (-4,3,5)}$$

תשובה: למשל $\ell = \underline{x} = (7,1,0) + m(-4,3,5)$.

ה. נמצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל את הישר, ואינו חותך את ציר ה- x **.**

$\ell = \underline{x} = (7,1,0) + m(-4,3,5)$ **הוא כמובן, חלק מההצגה הפרמטרית של המישור המבוקש.**

כאשר מישור מכיל את ציר ה- x **, או מקביל לציר זה,**

הרי שיש בו ווקטור כיוון, כמו וקטור היחידה $\underline{x} = (1,0,0)$ **.**

לכן, הצגה פרמטרית אפשרית היא : $\underline{x} = (7,1,0) + m(-4,3,5) + n(1,0,0)$

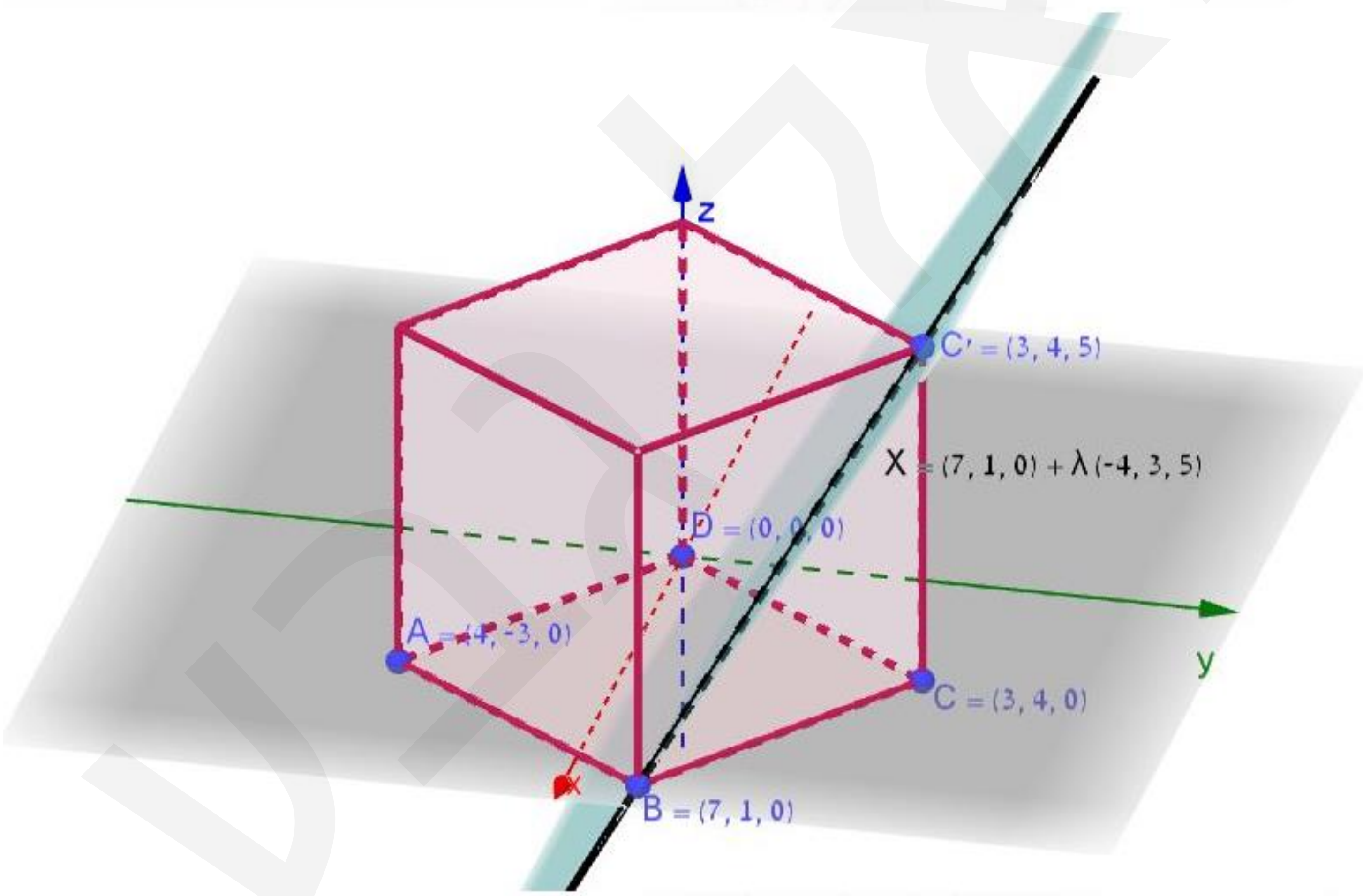
נבדוק שאין באמת חיתוך עם ציר ה- x **, שבו מתקיים** $y = z = 0$ **.**

נקודה אופיינית על המישור היא: $(7-4m+n, 1+3m, 5m)$**.**

עבור $z=0$ **נקבל ש-** $m=0$ **, אולם במקרה זה שיעור ה-** y **יהייה** 1 **, לא מתאים.**

לכן, המישור המבוקש אינו חותך את ציר ה- x **.**

תשובה: $\underline{x} = (7,1,0) + m(-4,3,5) + n(1,0,0)$**.**



תודה לידידי דוד צחור, על האיור המרשים המובא כאן

בכחול, המישור שאת ההצגה הפרמטרית שלו מצאנו בסעיף ה.

א. נפתור את המשוואה $z^3 = \frac{1}{z^3}$ **, כאשר** z **הוא מספר מרוכב, וברור ש-** $z \neq 0$.

z_0 **הוא אחד מפתרונות המשוואה,**

ומיוצג על ידי נקודה הנמצאת ברביע הרביעי במישור של גאוס, כלומר $270° < \arg z_0 < 360°$.

$z^3 = \frac{1}{z^3}$ **, ולכן** $z^6 = 1$ **וקל לראות ש-** $z = 1 = cis 0°$ **הוא אחד מפתרונות המשוואה.**

כל הפתרונות של משוואה מהסוג $z^n = Rcis\vartheta$ **, מהווים סדרה הנדסית שמנתה** $cis\,(\frac{360°}{n})$,

ונמצאים על מעגל קנוני שמשוואתו $x^2 + y^2 = (\sqrt[n]{R})^2$.

לכן, במקרה שלנו המעגל הוא $x^2 + y^2 = 1$,

והפתרונות הם: $cis\,0°, cis\,60°, cis\,120°, cis\,180°, cis\,240°, cis\,300°$,

מתוכם $z_0 = cis\,300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **, הוא הפתרון שברביע הרביעי.**

תשובה: $z_0 = cis\,300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

ב. $A = d \cdot z_0$, $B = di \cdot z_0$, $C = d \cdot (z_0)^4$ **, ובהתאם כולם על המעגל** $x^2 + y^2 = d^2$.

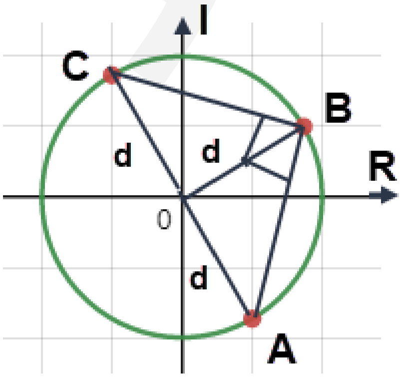
$\boxed{A = d\ cis\,300°}$, $\boxed{B = d\ cis\,30°} \leftarrow B = di \cdot z_0 = d\ cis\,90°\ cis\,300° = d\ cis\,390°$.

$\boxed{C = d\ cis\,120°} \leftarrow C = d \cdot (z_0)^4 = d \cdot (cis\,300°)^4 = d\ cis\,1200°$

אפשר לראות ש- $A = C \cdot cis\,180°$ **, ולכן** AC **הוא קוטר במעגל הקנוני** $x^2 + y^2 = d^2$.

כמו כן: $B = A \cdot cis\,90°$ **, ולכן** OB **הוא גובה שמתלכד עם התיכון, ו-** ΔABC **הוא ישר זווית ושווה שוקיים.**

שטח ΔABC **הוא** $5d + 6$ **, כאשר** $OB = d$ **הוא הגובה לבסיס** AC **שאורכו** $2d$.



$$\frac{2d \cdot d}{2} = 5d + 6$$

$$d^2 - 5d - 6 = 0$$

$$(d - 6)(d + 1) = 0$$

$$\boxed{d = 6} \leftarrow d > 0$$

תשובה: $d = 6$.

ג. נגדיר $w=\left((z_0)^2-\frac{1}{(z_0)^2}\right)(1+i)$.

$$w=\left((cis\,300°)^2-\frac{1}{(cis\,300°)^2}\right)(1+i)$$
$$w=\left(cis\,600°-cis\,(-600°)\right)(1+i)$$
$$w=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\right)(1+i)$$
$$w=\frac{1}{2}(-2\sqrt{3}i)(1+i)$$
$$w=-\sqrt{3}i(1+i)$$
$$\boxed{w=\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i}$$

$$|w|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2}\quad\rightarrow\boxed{|w|=\sqrt{6}}$$

$$\tan\vartheta=\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=-1\quad\rightarrow\vartheta=-45°+180°k\quad\rightarrow\boxed{\arg(w)=-45°}\quad\leftarrow 4th\ quadrant$$

תשובה: $|w|=\sqrt{6}$, $\arg(w)=-45°$.

ד. נתון: המספר w^n **(** n **הוא מספר טבעי) הוא מספר מדומה טהור, הנמצא מחוץ למעגל החוסם את** ΔABC.

$$w^n=(\sqrt{6}\cdot cis\,(-45°))^n$$
$$w^n=(\sqrt{6})^n\cdot cis(-45°n)$$

w^n **מחוץ למעגל החוסם את** ΔABC **, שרדיוסו** $d=6$ **, ולכן:** $n>2\leftarrow (\sqrt{6})^n>6$.

w^n **הוא מספר מדומה טהור, ולכן**

$$-45°n=90°+180°k$$
$$-45°n=-45°(-2+4k)$$
$$n=-2+4k$$
$$\left.\begin{array}{l}k=1\quad\rightarrow n=2\\ k=2\quad\rightarrow \boxed{n=6}\end{array}\right\}\leftarrow n>2$$

תשובה: $n=6$ **הוא הערך המינימלי האפשרי של** n .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(e^x-1)^n-4$ **, המוגדרת לכל** x **, כאשר** $n\geq 2$ **מספר טבעי.**

במבט על ניתן לראות כי עבור n **זוגי – הביטוי** $(e^x-1)^n$ **יהייה חיובי לכל** $x\neq 0$ **, וערכו המינימלי יהיה** 0 **,**

ולכן לפונקציה $f(x)=(e^x-1)^n-4$ **יהיה מינימום בנקודה** $(0,-4)$ **.**

כמו כן, עבור n **אי-זוגי - בהמשך נראה כי לפונקציה** $f(x)=(e^x-1)^n-4$ **יהייה פיתול בנקודה** $(0,-4)$ **.**

(1) נמצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$ **.**

עבור n **זוגי כאשר** $x\to-\infty$ **אז** $(e^x-1)^n\to 1$ **ובהתאם** $f(x)\to 1-4\to -3$

ו- $y=-3$ **אסימפטוטה אופקית.**

עבור n **אי-זוגי כאשר** $x\to-\infty$ **אז** $(e^x-1)^n\to -1$ **ובהתאם** $f(x)\to -1-4\to -5$

ו- $y=-5$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: עבור n **זוגי:** $y=-3$ **אסימפטוטה אופקית , עבור** $x\to-\infty$ **(אסימפטוטה אופקית לשמאל).**

עבור n **אי- זוגי:** $y=-5$ **אסימפטוטה אופקית , עבור** $x\to-\infty$ **(אסימפטוטה אופקית לשמאל).**

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגן (אם יש כאלה).**

$$\boxed{f(x)=(e^x-1)^n-4}$$

$$f'(x)=n\cdot(e^x-1)^{n-1}\cdot e^x$$

$$\boxed{f'(x)=ne^x\cdot(e^x-1)^{n-1}}$$

$$0=e^x-1$$

$$x=0 \quad \to \boxed{(0,-4)}$$

ניתן גם לראות שעבור n **זוגי, הביטוי** $(e^x-1)^{n-1}$ **מחליף סימן,**

והנגזרת עוברת משליליות לחיוביות ומתקבל מינימום,

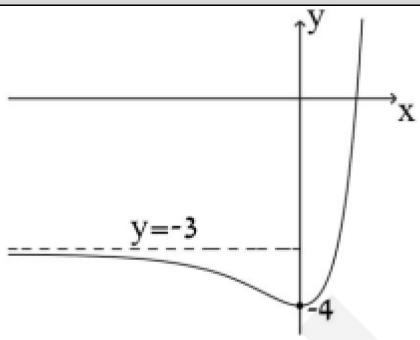
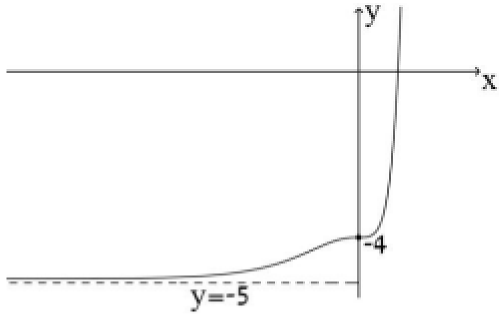
ועבור n **אי-זוגי,** $(e^x-1)^{n-1}$ **אינו מחליף סימן, ואין קיצון, אלא פיתול עם משיק שמקביל לציר ה-** x **.**

ולסיכום: עבור n **זוגי** $(0,-4)$ **מינימום, ועבור** n **אי-זוגי** $(0,-4)$ **נקודת פיתול.**

תשובה: עבור n **זוגי** $(0,-4)$ **מינימום, ועבור** n **אי-זוגי אין נקודת קיצון.**

.

(3) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

עבור n זוגי	**עבור n אי-זוגי**
	

ב. עבור $n=2$ **זוגי:** $f(x)=(e^x-1)^2-4$

, ו- $(0,-4)$ **נקודת מינימום, ו-** $y=-3$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

נתונה הפונקציה $g(x)=3e^x-7$ **, המוגדרת לכל** x.

(1) נמצא את שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין גרף הפונקציה $g(x)$.

$$(e^x-1)^2-4=3e^x-7$$
$$e^{2x}-2e^x+1+3=3e^x$$
$$e^{2x}-5e^x+4=0$$
$$(e^x-1)(e^x-4)=0$$
$$e^x=1 \quad \rightarrow \boxed{(0,-4)}$$
$$e^x=4 \quad \rightarrow \boxed{(\ell n\, 4,5)}$$

תשובה: שיעורי נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה $f(x)$ לבין גרף הפונקציה $g(x)$

הם $(\ell n\, 4,5)$ **,** $(0,-4)$ **.**

(2) נחשב את השטח המבוקש, כאשר נבדוק לפני כן איזו פונקציה מעל לפונקציה, בין נקודות החיתוך.

$$\left.\begin{matrix} f(\ell n\, 2)=-3 \\ g(\ell n\, 2)=-1 \end{matrix}\right\} \boxed{g(x)>f(x) \quad : \quad 0<x<\ell n\, 4}$$

$$S=\int_0^{\ell n 4}(3e^x-7-((e^x-1)^2-4))\,dx$$

$$S=\int_0^{\ell n 4}(-e^{2x}+5e^x-4)\,dx$$

$$S=\left(-\frac{e^{2x}}{2}+5e^x-4x\right)\Big]_0^{\ell n\, 4}$$

$$\left.\begin{matrix} x=\ell n\, 4: \quad 6.4548 \\ x=0: \quad 4.5 \end{matrix}\right\} S=6.4548-4.5$$

$$\boxed{S=1.955}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא 1.955 **.**

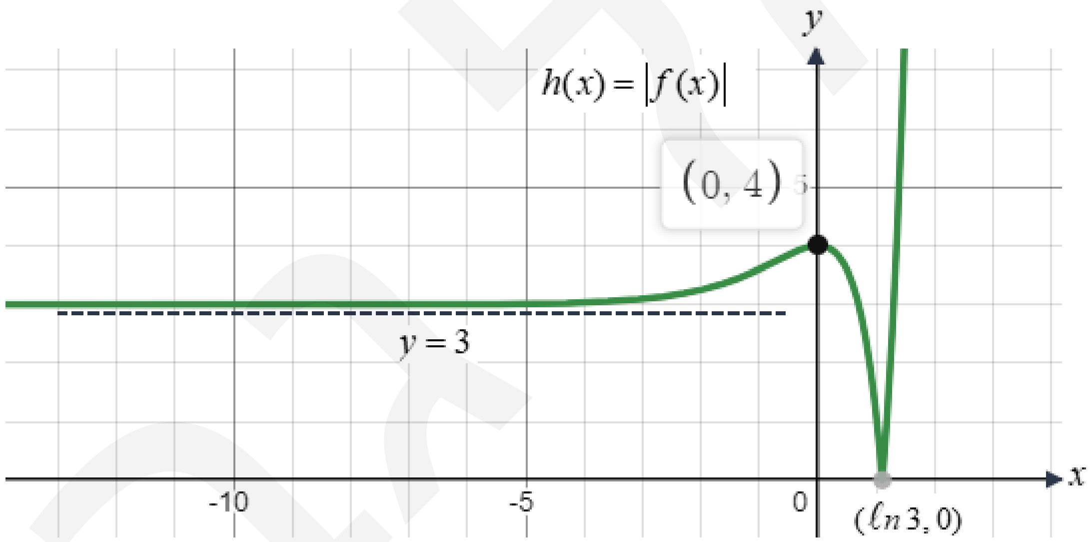
ג. נתונה הפונקציה $h(x)=\left|f(x)\right|$.

(1) טרנספורמציה של ערך מוחלט, מקפלת את הגרף שנמצא מתחת לציר ה- x (בתחום השליליות),
אל מעל לציר ה- x , תוך שינוי החלפת תחומי עלייה וירידה וסוג הקיצון בתחום ששונה.
בנוסף, בנקודות האפס (שלא היו נקודות קיצון), מתקבל "שפיץ" (כי הנגזרת אינה מוגדרת),
ונקודת מינימום.

נמצא את נקודת המינימום:

$$(e^x-1)^2-4=0$$
$$(e^x-1)^2=4$$
$$e^x-1=2 \quad \to e^x=3 \quad \to \boxed{(\ell n\,3,0)}$$
$$e^x-1=-2 \quad \to e^x=-1 \quad \to \varnothing$$

אין חובה לסרטט, כי לא ביקשו, אבל לשיפור ההבנה מצורף הגרף המתאים,
עם $(0,4)$ מקסימום, ועם $(\ell n\,3,0)$ מינימום,
וכולל אסימפטוטה אופקית לשמאל, שהיא כעת $y=3$.



תשובה: שתי נקודות קיצון, $(\ell n\,3,0)$ מינימום, $(0,4)$ מקסימום .

(2) הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ ב- 3 נקודות,
בתחום שמעל לאסימפטוטה האופקית, ומתחת לנקודת המקסימום.
תשובה: הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ ב- 3 נקודות, $3<k<4$.

א. נתונה הפונקציה : $f(x)=\ell n\, x+\frac{1}{x}$.

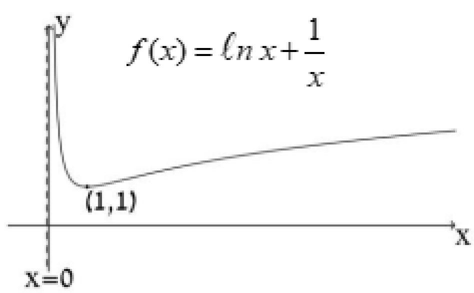
(1) בתחום הגדרה, הארגומנט – הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית, צריך להיות חיובי.
וגם המכנה צ"ל שונה מאפס.
תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ ***הוא*** $x>0$.

(2) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$\boxed{f(x)=\ell n\, x+\frac{1}{x}}$$
$$f\,'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$$
$$\boxed{f\,'(x)=\frac{x-1}{x^2}}$$
$$x-1=0$$
$$x=1\quad\rightarrow(1,1)$$
$$\left.\begin{array}{l} f\,'(0.9)=\frac{(-)}{(+)}<0 \\ f\,'(1.1)=\frac{(+)}{(+)}>0 \end{array}\right\}\rightarrow\boxed{(1,1),\min}$$

תשובה: $(1,1)$ **מינימום.**

(3) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ **, כולל האסימפטוטה האנכית** $x=0$.



תשובה: הסרטוט מעל .

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=(x+1)(1-\ell n\,x)$, המוגדרת גם בתחום $x>0$.

(1) בנקודות החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$.

עבור $x+1=0$ נקבל $x=-1$ שלא בתחום ההגדרה, ועבור $1-\ell n\,x=0$ נקבל $x=e$.

תשובה: $(e,0)$.

(2) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$, אם יש כאלה.

$$\boxed{g(x)=(x+1)(1-\ell n\,x)}$$

$$g'(x)=1-\ell n\,x+(x+1)(-\frac{1}{x})$$

$$g'(x)=1-\ell n\,x-1-\frac{1}{x}$$

$$\boxed{g'(x)=-\ell n\,x-\frac{1}{x}}$$

נשים לב: קבלנו ש- $g'(x)=-f(x)$, ומכיון ו- $f(x)>0$ בתחום ההגדרה $x>0$,

אז $g'(x)<0$ והפונקציה יורדת.

תשובה: עבור $g(x)$ ירידה $x>0$, עלייה אף x .

(3) נמצא את תחומי הקעירויות של הפונקציה $g(x)$.

$$g'(x)=-f(x)$$
$$g''(x)=-f'(x)$$

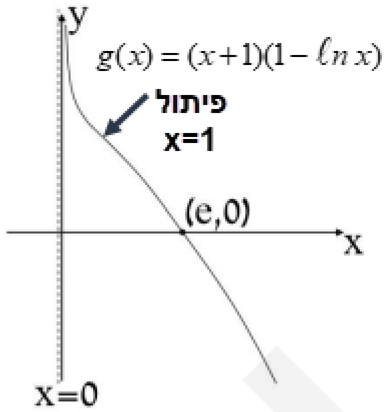
לכן, ניתן לקבוע את תחומי הקעירויות של $g(x)$, בהתאם לסימנים הנגדיים של $f'(x)$.

כאשר $f(x)$ יורדת בתחום $0<x<1$ מתקיים $g''(x)>0$, ו- $g(x)$ קעורה כלפי מעלה ($\cup$) בתחום .

כאשר $f(x)$ עולה בתחום $x>1$ מתקיים $g''(x)<0$ ו- $g(x)$ קעירות כלפי מטה ($\cap$) בתחום.

תשובה: עבור $g(x)$ קעירות כלפי מטה ($\cap$) בתחום $x>1$, קעירות כלפי מעלה ($\cup$) בתחום $0<x<1$.

(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, כולל האסימפטוטה האנכית $x=0$.



תשובה: הסרטוט מעל .

ג. נתונה הפונקציה $h(x)=\frac{1}{x}\cdot g'(x)$, המוגדרת גם בתחום $x>0$.

$x>0$ בתחום ההגדרה, ו- $g'(x)<0$ בתחום זה, ולכן $h(x)$ שלילית, והגרף שלה מתחת לציר ה- x .

נחשב את השטח המבוקש , בעזרת זיהוי הנגזרת הפנימית.

$$S=\int_1^e -\frac{1}{x}\cdot(-\ell n\,x-\frac{1}{x})\,dx$$

$$S=\int_1^e \ell n\,x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})\,dx$$

$$S=\int_1^e \ell n\,x\cdot\frac{1}{x}+x^{-2})\,dx$$

$$S=\frac{(\ell n\,x)^2}{2}+\frac{x^{-1}}{-1}\Big]_1^e$$

$$S=\frac{(\ell n\,x)^2}{2}-\frac{1}{x}\Big]_1^e$$

$$\left.\begin{matrix} x=e: & \frac{1}{2}-\frac{1}{e} \\ x=1: & -1 \end{matrix}\right\} S=\frac{1}{2}-\frac{1}{e}-(-1)$$

$$\boxed{S=1.5-\frac{1}{e}\approx 1.132}$$

תשובה: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$, על ידי ציר ה- x ,

ועל ידי הישרים $x=e$ ו- $x=1$, הוא $1.5-\frac{1}{e}\approx 1.132$.