פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023, מועד מיוחד , שאלון:35572

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. נתונים הישרים שמשוואותיהם $\ell_1: -3x+4y-20=0$, ו- $\ell_2: x=-4$.

נסמן $P(s,t)$ נקודה על המקום הגיאומטרי, שנמצאת במרחקים שווים משני הישרים.

מכאן שהנקודה P נמצאת על שני חוצי הזווית שבין הישרים, לרבות בנקודת החיתוך שלהם.

$$|s-(-4)| = \frac{|-3s+4t-20|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}$$

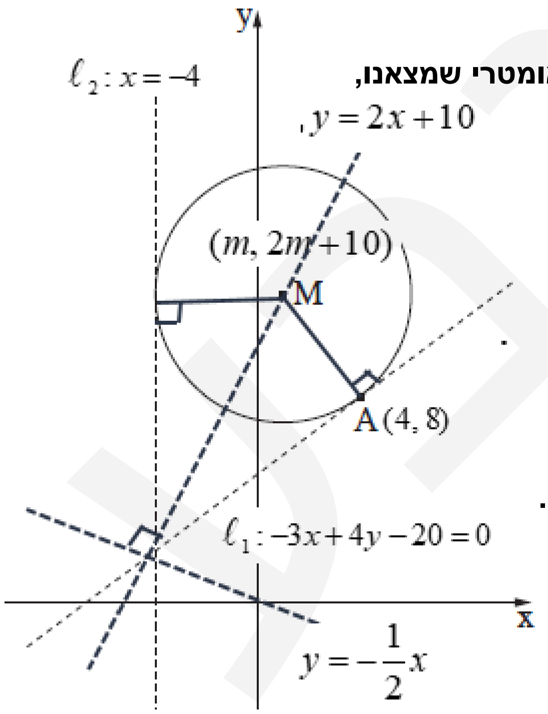
$$5|s+4| = |-3s+4t-20|$$

$$5(s+4) = -3s+4t-20$$
$$5s+20 = -3s+4t-20$$
$$8s-4t+40=0 \quad /:(-4)$$
$$-2s+t-10=0$$
$$\boxed{y=2x+10}$$

$$5(s+4) = -(-3s+4t-20)$$
$$5s+20 = 3s-4t+20$$
$$2s+4t=0 \quad /:2$$
$$s+2t=0$$
$$\boxed{y=-\frac{1}{2}x}$$

נשים לב, ששני חוצי הזוויות מאונכים זה לזה, כדרכם של חוצי זוויות מנקודה שעל זווית שטוחה.

תשובה: $y=2x+10$, $y=-\frac{1}{2}x$.



ב. מעגל שמרכזו M משיק לשני הישרים, ולכן M על המקום הגיאומטרי שמצאנו,
כי היא נמצאת במרחק שווה, אורך הרדיוס, משני הישרים.

מכאן ש- M על הישר $y=2x+10$, כי היא ברביע הראשון,

בעוד ש- $y=-\frac{1}{2}x$ לא עובר ברביע זה.

נסמן $M(m, 2m+10)$.

נציב $x=4$ במשוואה $\ell_1: -3x+4y-20=0$:

ונקודת ההשקה היא $A(4,8)$ $\quad -3\cdot 4+4y-20=0 \quad \to y=8 \quad \to A(4,8)$.

$$m+4 = \sqrt{(m-4)^2+(2m+10-8)^2}$$
$$(m+4)^2 = (m-4)^2+(2m+2)^2$$
$$m^2+8m+16 = m^2-8m+16+4m^2+8m+4$$
$$0 = 4m^2-8m+4$$
$$0 = (2m-2)^2$$
$$m=1 \quad \to \boxed{M(1,12)}$$

תשובה: $M(1,12)$.

ג. $\ell_2 : x=-4$ הוא מדריך של פרבולה קנונית, לכן משוואת הפרבולה היא $y^2=16x \leftarrow \frac{p}{2}=4 \rightarrow p=8$.

משוואת משיק לפרבולה, בנקודה שעל הפרבולה, היא $yy_0=p(x+x_0)$,

והשיפוע בנקודה $\mathrm{A}(4,8)$ הוא $m=\frac{p}{y_0}=\frac{8}{8}=1$.

קיבלנו ששיפוע המשיק לפרבולה בנקודה A

אינו שווה לשיפוע הישר $\ell_1 : -3x+4y-20=0$ ששיפועו הוא $\frac{3}{4}$.

תשובה: הישר ℓ_1 אינו משיק לפרבולה בנקודה A .

ב. הפרבולה $y^2=16x$ סימטרית לציר ה- x (כדרכן של פרבולות קנוניות).

על-מנת שהמעגל ישיק לפרבולה בשתי נקודות, נדרש שמרכזו יהייה גם על ציר ה- x .

נסמן $\mathrm{N}(n,0)$ את מרכז המעגל.

בנקודות ההשקה $\mathrm{A}(4,8)$ עובר משיק משותף, שעל פי סעיף ג שיפועו 1 (משוואתו היא $y=x+4$),

ולכן שיפוע הרדיוס AN , המאונך למשיק בנקודת ההשקה, הוא -1 .

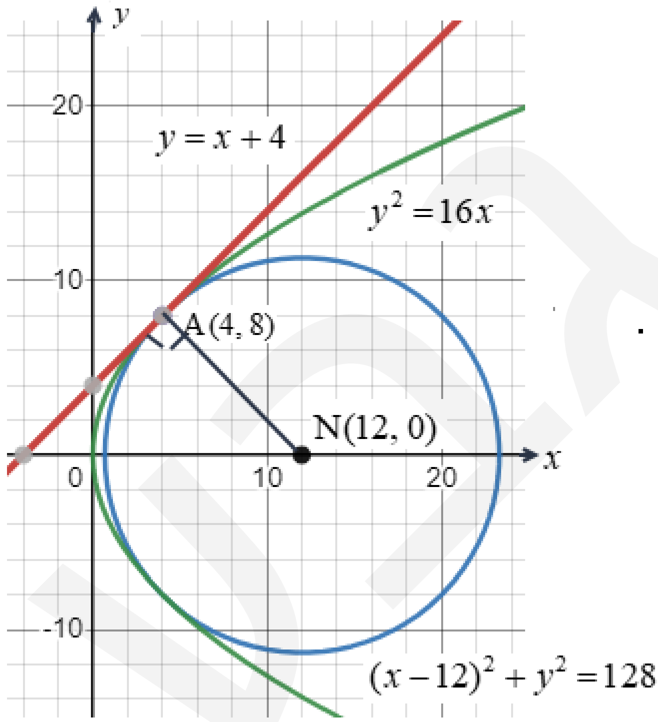
$$-1=\frac{8-0}{4-n}$$

$$n-4=8$$

$$n=12 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{N}(12,0)}$$

$$R=\mathrm{AN}=\sqrt{(4-12)^2+(8-0)^2}=\sqrt{128}$$

תשובה: משוואת המעגל היא $(x-12)^2+y^2=128$.



א. נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ **, שהבסיס שלה** $ABCD$ **הוא מלבן (למעשה, בסיס תיבה הוא תמיד מלבן).**

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$

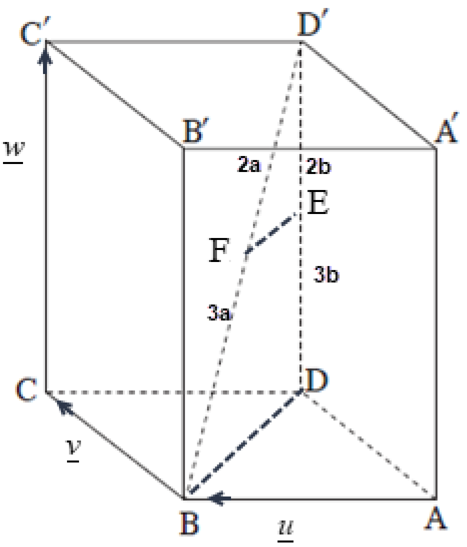
$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}$

$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}}$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{v}$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{w}$

$\underline{v}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{v}\perp\underline{w}$



$DE:ED'=3:2$

$$\boxed{\overrightarrow{DE}=\frac{3}{5}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'D'}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BD'}=-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{BF}=t\cdot\overrightarrow{BD'}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BF}=-t\underline{u}+t\underline{v}+t\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{FE}=(1-t)\cdot\overrightarrow{BD'}-\frac{2}{5}\underline{w}$$

$$\overrightarrow{FE}=(1-t)\cdot(-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w})-\frac{2}{5}\underline{w}$$

$$\boxed{\overrightarrow{FE}=(t-1)\underline{u}+(1-t)\underline{v}+(\frac{3}{5}-t)\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{BD'}=-\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}$ **,** $\overrightarrow{FE}=(t-1)\underline{u}+(1-t)\underline{v}+(\frac{3}{5}-t)\underline{w}$ **.**

ב. נתון כי FE **מקביל למישור הבסיס** $ABCD$**.**

מישור הבסיס $ABCD$ **נפרש על ידי הווקטורים** $\underline{u}$ **ו-** $\underline{v}$**,**

לכן $\overrightarrow{FE}$ **הוא קומבינציה לינארית של שני ווקטורים אלו.**

מכאן ש- $\frac{3}{5}-t=0 \quad \rightarrow t=\frac{3}{5}$ **.**

לחילופין, ניתן לשים לב שעל פי משפט תאלס ב- $\Delta BDD'$ **,**

מתקיים: $\frac{2}{5}=\frac{ED'}{DD'}=\frac{FD'}{BD'}$ **ובהתאם** $t=\frac{3}{5}$.

תשובה: $t=\frac{3}{5}$ **.**

ג. נתון: $C(0,0,0)$ **(ראשית הצירים)** , CB **מונח על הקרן החיובית של ציר ה-** x $(x_B > 0)$,

CD **מונח על הקרן החיובית של ציר ה-** y $(y_D > 0)$ **ושיעורי הנקודה** F **הם** $F(4,9,12)$.

כיוון שהפאה $CDD'C'$ **מאונכת למישור** $ABCD$ **ומכילה את הראשית ואת ציר ה-** x ,

אז משוואת המישור שלה היא $x=0$ **, מישור** $[yz]$.

בהתאם לנתונים ניתן לסמן : $B(x,0,0)$, $D'(0,y,z)$

ולהשתמש בנוסחת חלוקת קטע ביחס נתון, כאשר $BF:FD'=3:2$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3\cdot 0+2\cdot x}{5}=4 \quad \to x=10 \quad \to |\underline{v}|=10 \\ \dfrac{3y+2\cdot 0}{5}=9 \quad \to y=15 \quad \to |\underline{u}|=15 \\ \dfrac{3z+2\cdot 0}{5}=12 \quad \to z=20 \quad \to |\underline{w}|=20 \end{array}\right\} \boxed{D'(0,15,20)}, \boxed{B(10,0,0)}$$

תשובה: $|\underline{u}|=15$, $|\underline{v}|=10$, $|\underline{w}|=20$.

ד. מן הנקודה F **העבירו ישר המאונך למישור** $EFBD$.

נשים לב שמישור זה הוא טרפז ישר זווית ($\measuredangle D=\measuredangle E=90^\circ$ **).**

ישר זה חותך את הפאה $CDD'C'$ **בנקודה** P .

כיוון שמשוואת מישור הפאה היא $x=0$ **אז** $x_P=0$.

הישר שמאונך למישור $EFBD$ **יהייה מקביל למישור הבסיס,**

ולכן $z_P=z_F=12$ **והווקטור** $\underline{x}=(m,n,0)$

הוא וקטור כיוון של הנורמל למישור $EFBD$ **, ווקטור הכיוון של האנך בנקודה** F.

$$\overrightarrow{BF}=\underline{F}-\underline{B}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BF}=(-6,9,12)}$$

$$(m,n,0)\cdot(-6,9,12)=0$$
$$-6m+9n=0$$
$$\boxed{m=1.5n}$$

הצגה פרמטרית של האנך היא $\ell=\underline{x}=(4,9,12)+n(1.5,1,0)$

$x_P=0$ **, לכן :** $4+1.5n=0 \quad \to n=-\dfrac{8}{3}$

$$y_P=9+(-\frac{8}{3})\cdot 1=6\frac{1}{3}$$

תשובה: תשובה: $P(0,6\frac{1}{3},12)$.

ועוד דרך פתרון, לחלק השני של סעיף ד

$P(0, y_P, 12)$

$\overrightarrow{FP} = \underline{P} - \underline{F}$

$\boxed{\overrightarrow{FP} = (-4, y_P - 9, 0)}$

$\overrightarrow{BF} = \underline{F} - \underline{B}$

$\boxed{\overrightarrow{BF} = (-6, 9, 12)}$

כפי שהראינו:

$\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \quad \leftarrow \overrightarrow{FP} \perp \overrightarrow{BF}$

$(-4, y_P - 9, 0) \cdot (-6, 9, 12) = 0$

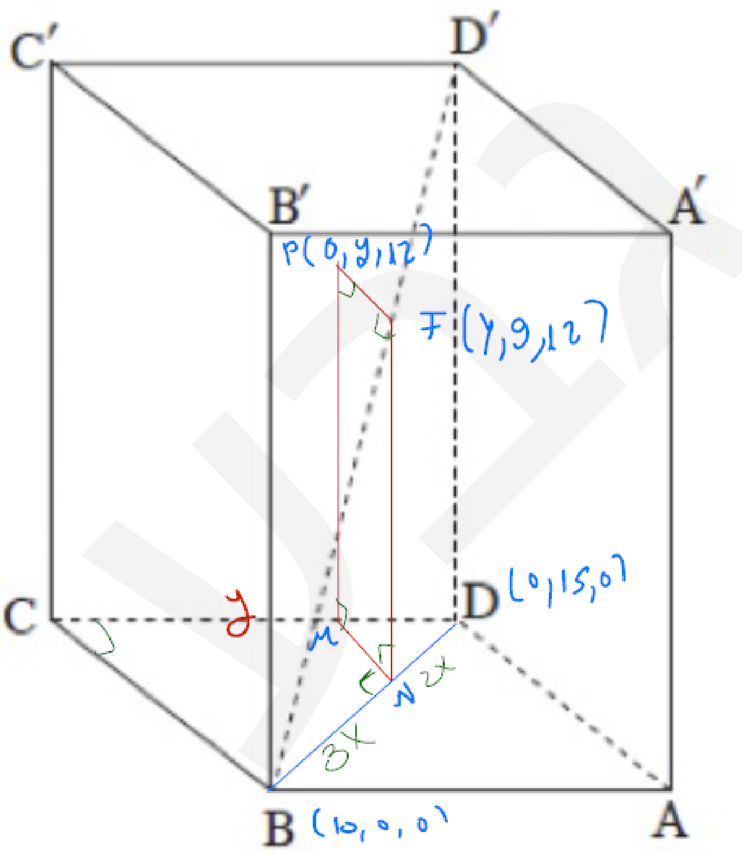
$24 + 9y_P - 81 = 0$

$9y_P = 57$

$y_P = 6\frac{1}{3} \quad \rightarrow P(0, 6\frac{1}{3}, 12)$

תשובה: תשובה: $P(0, 6\frac{1}{3}, 12)$.

הערה – נכתבה על ידי חבר יקר



פיתגורס במשולש BCD $25x^2 = 10^2 + 15^2$

$x^2 = 13$

CMNB מרובע בר חסימה

DB ו-DC חותכים מנק' D.

לכן $2x \cdot 5x = 15(15 - y)$

$10x^2 = 225 - 15y$.

$130 = 225 - 15y$ לכן $y = 6\frac{1}{3}$

$P(0, 6\frac{1}{3}, 12)$.

א. $z=x+yi$ **הוא מספר מרוכב (** x **ו-** y **הם מספרים ממשיים).**

(1) נראה כי המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המקיימות : $|z^2-i|=|z^2+3i|$ **הוא** $y=-\frac{1}{2x}$ **.**

$$|z^2-i|=|z^2+3i|$$
$$|(x+yi)^2-i|=|(x+yi)^2+3i|$$
$$|x^2+2xyi-y^2-i|=|x^2+2xyi-y^2+3i|$$
$$|x^2-y^2+(2xy-1)i|=|x^2-y^2+(2xy+3)i|$$
$$\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy-1)^2}=\sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy+3)^2}$$
$$(x^2-y^2)^2+4x^2y^2-4xy+1=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2+12xy+9$$
$$-16xy=8$$
$$\boxed{y=-\frac{1}{2x},\quad x,y\neq 0}$$

$x,y\neq 0$ **כי אחרת לא מתקיימת המשוואה** $-16xy=8$ **.**

תשובה: הוכחנו כי משוואת המקום הגיאומטרי במישור גאוס היא $y=-\frac{1}{2x}$ **.**

(2) לדוגמה: $z=1-\frac{1}{2}i$ **, או** $z=-1+\frac{1}{2}i$ **.**

ב. נפתור את המשוואה $z^6=1$ **.**

קל לראות ש- $z=1=cis0^\circ$ **הוא אחד מפתרונות המשוואה.**

כל הפתרונות של משוואה מהסוג $z^n=Rcis\vartheta$ **, מהווים סדרה הנדסית שמנתה** $cis\,(\frac{360^\circ}{n})$ **,**

ונמצאים על מעגל קנוני שמשוואתו $x^2+y^2=(\sqrt[n]{R})^2$ **.**

לכן, במקרה שלנו המעגל הוא $x^2+y^2=1$ **, והמנה של הסדרה ההנדסית היא** $cis\,60^\circ$**.**

והפתרונות הם: $cis\,0^\circ, cis\,60^\circ, cis\,120^\circ, cis\,180^\circ, cis\,240^\circ, cis\,300^\circ,$

תשובה: $cis\,0^\circ, cis\,60^\circ, cis\,120^\circ, cis\,180^\circ, cis\,240^\circ, cis\,300^\circ$ **.**

ג. המקום הגיאומטרי $y=-\frac{1}{2x}$ **חותך את המעגל** $x^2+y^2=1$ **בנקודה** A .

$$x^2+(-\frac{1}{2x})^2=1$$

$$x^2+\frac{1}{4x^2}=1$$

$$4x^4-4x^2+1=0$$

$$(2x^2-1)=0$$

$$x^2=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{A}(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})} \quad \leftarrow 4th\ quadrant$$

תשובה: $\mathrm{A}(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

ד. $\mathrm{A}(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ **היא קודקוד של מצולע** I **שהוא משושה משוכלל, שגם חסום באותו מעגל, שרדיוסו** 1 .

לכן, הזווית המרכזית שנשענת על כל צלע של המשושה היא בת $60°$.

נעבור להצגה טריגונומטרית של המספר המרוכב שהנקודה $\mathrm{A}(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ **מייצגת אותה.**

$$\tan\theta=\frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}==-1 \quad \rightarrow \theta=-45° \quad \rightarrow z_{\mathrm{A}}=1\,cis(-45°)$$

ונרשום את ששת הפתרונות, כאשר כל אחד הוא כפולה של הקודם פי $cis\ 60°$.

תשובה: המספרים המרוכבים המייצגים את כל הקודקודים של מצולע II **הם:**

$cis\ (-45°)\ , cis\ 15°, cis\ 75°, cis\ 135°, cis\ 195°, cis\ 255°$.

ה. נסמן: המספר $w=r\cdot cis\ \alpha$ **(** $0°<\alpha<60°$ **)** .

שני המצולעים שקיבלנו הם משושים משוכללים, החסומים במעגל שרדיוסו 1 .

הזווית המרכזית, בכל אחד מהמצולעים, היא בת $60°$.

לכן, נדרש לראות בכמה מעלות יש להזיז קודקוד אחד של מצולע I **, כדי שיתלכד עם קודקוד של מצולע** II .

לדוגמה: $cis\ 0°\cdot 1\,cis\ 15°=cis\ 15°$.

לכן $w=1\,cis\ 15°$ **, או פשוט** $w=cis\ 15°$.

תשובה: $w=cis\ 15°$.

א. נתונה הפונקציה $f'(x)=-2x\cdot e^{-\frac{x^2}{a}}$ **,** a **הוא פרמטר.**

לפונקציה $f(x)$ **יש נקודת פיתול, בנקודה שבה** $x=\sqrt{2}$ **,**

כלומר $f''(\sqrt{2})=0$ **(כי גם** $f'(x)$ **גזירה לכל** x **).**

$$f''(x)=2\left[-e^{-\frac{x^2}{a}}+(-x)\cdot e^{-\frac{x^2}{a}}\cdot(-\frac{2x}{a})\right]$$

$$f''(x)=2e^{-\frac{x^2}{a}}(-1+\frac{2x^2}{a})$$

$$0=-1+\frac{2\sqrt{2}^2}{a} \leftarrow f''(\sqrt{2})=0$$

$$1=\frac{4}{a}$$

$$\boxed{a=4}$$

תשובה: $a=4$.

ב. עבור $a=4$ **מתקיים:** $f'(x)=-2x\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$ **ו-** $f(0)=4$.

נמצא את $f(x)$ **בעזרת אינטגרל עם זיהוי נגזרת פנימית.**

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$f(x)=\int -2x\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx$$

$$f(x)=\int 4\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}\cdot(-\frac{2x}{4})dx$$

$$f(x)=4e^{-\frac{x^2}{4}}+c$$

$$4=4e^{-\frac{0^2}{4}}+c \leftarrow f(0)=4$$

$$4=4+c$$

$$c=0$$

$$\boxed{f(x)=4e^{-\frac{x^2}{4}}}$$

תשובה: $f(x)=4e^{-\frac{x^2}{4}}$.

ג. נחקור את הפונקציה $f(x)=4e^{-\frac{x^2}{4}}$.

(1) נבדוק האם הפונקציה $f(x)$ **היא זוגית או אי-זוגית.**

$$f(-x)=4e^{-\frac{(-x)^2}{4}}$$

$$f(-x)=4e^{-\frac{x^2}{4}}$$

$$\boxed{f(-x)=f(x)}$$

לכן, הפונקציה $f(x)$ **היא זוגית, כאשר הגרף שלה סימטרי לציר ה-** y ,

והנקודה $(0,4)$ **היא נקודת קיצון של** $f(x)$.

ובהקשר של סעיף ד, נציין כבר שהמשמעות היא ש- $f'(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית.**

תשובה: $f(x)$ **היא זוגית.**

(2) נמצא את משוואת האסימפטוטה המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

אין אסימפטוטה המאונכת לציר ה- x **, כי הפונקציה מוגדרת לכל** x .

$e^{-\frac{x^2}{4}}\to 0^+$ **כאשר** $x\to\pm\infty$ **ולכן** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית לשני הכיוונים.**

אפשר להבין גם על ידי הצבה: $f(5)=7.72\cdot 10^{-3}\to 0^+$.

הערה – אין צורך לנמק בבגרות.

תשובה: $y=0$ $(x\to\pm\infty)$ **אסימפטוטה המאונכת לציר ה-** y .

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגן (אם יש כאלה).**

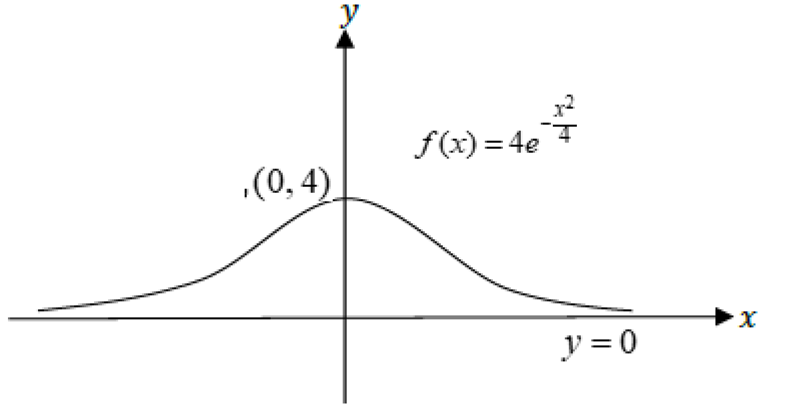
עבור $a=4$ **מתקיים** $f'(x)=-2x\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$ **, המתאפסת רק עבור** $x=0$,

כאשר הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות, ולכן הפונקציה מעלייה לירידה,

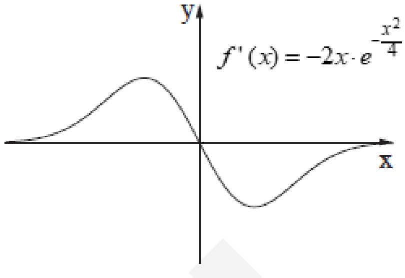
והנקודה $(0,4)$ **היא נקודת מקסימום.**

תשובה: $(0,4)$**, מקסימום.**

(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



ד. נתונות הפונקציות $h(x)=\frac{1}{f'(x)}$ **ו-** $m(x)=e^{h(x)}$.



I

פונקציה אי-זוגית

פיתול בראשית הצירים

$y=0$ $(x\to\pm\infty)$ **א. אופקית.**

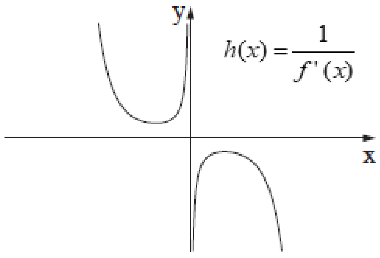
גרף זה היחידי שעובר מחיוביות

לשליליות, עבור $x=0$,

כאשר ל $f(x)$ **יש מקסימום.**

שתי נקודות קיצון $x=\pm\sqrt{2}$,

בהתאם לפיתול של $f(x)$.



II

אסימפטוטה אנכית $x=0$

תחומי עלייה וירידה הופכיים

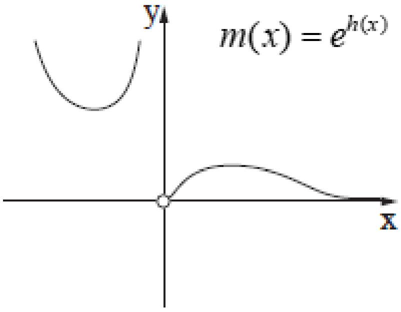
לאלו של $f'(x)$ **, כאשר סוג הקיצון**

משתנה ב- $x=\pm\sqrt{2}$,

וערכי ה- y **הופכיים.**

כאשר $f'(x)\to 0$

אז $\frac{1}{f'(x)}\to\pm\infty$.



III

פונקציה חיובית לכל $x\neq 0$.

כאשר $h(x)\to-\infty$, $e^{h(x)}\to 0$

ו- $y=0$ $(x\to+\infty)$ **א. אופקית**

ובנוסף $(0,0)$ **נקודת חור**

שתי נקודות קיצון עבור $x=\pm\sqrt{2}$

תשובה: גרף I **-** $f'(x)$ **, גרף** II **-** $h(x)$ **, גרף** III **-** $m(x)$.

ה. (1) בהתאם להסבר בסעיף הקודם, והסרטוט במקביל, ניתן לרשום את תחומי הירידה.

תשובה: תחומי הירידה של הפונקציה $m(x)$ **הם** $x>\sqrt{2}$ **או** $x<-\sqrt{2}$.

(2) בתחום $1\le x\le 2$ **מתקיים** $h(x)<0$ **ו-** $m(x)>0$.

מכאן ש- $h(x)\cdot m(x)<0$ **בתחום** $1\le x\le 2$**, והגרף של** $h(x)\cdot m(x)$ **נמצא מתחת לציר ה-** x.

תשובה: $\int_1^2 h(x)\cdot m(x)\,dx$ **שלילי, כי הגרף של** $h(x)\cdot m(x)$ **נמצא מתחת לציר ה-** x.

א. נתונה הפונקציה : $f(x)=\frac{1-\ell n\, x}{\ell n\, x}$.

(1) בתחום הגדרה, הארגומנט – הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית, צריך להיות חיובי.
וגם המכנה צ"ל שונה מאפס.
תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x>0,\, x\neq 1$.

קצת הקדמה של קדם אנליזה

$f(x)=\frac{1}{\ell n\, x}-1 \leftarrow f(x)=\frac{1-\ell n\, x}{\ell n\, x}$ **, עם נקודת חיתוך אחת עם ציר ה-** x **ב-** $(e,0)$.

$\ell n\, x$ **היא פונקציה שעולה בתחום** $x>0$ **, ולכן** $\frac{1}{\ell n\, x}$ **היא פונקציה שיורדת בתחום,**

כאשר $y=0$ $(x\to+\infty)$ **אסימפטוטה אופקית לימין .**

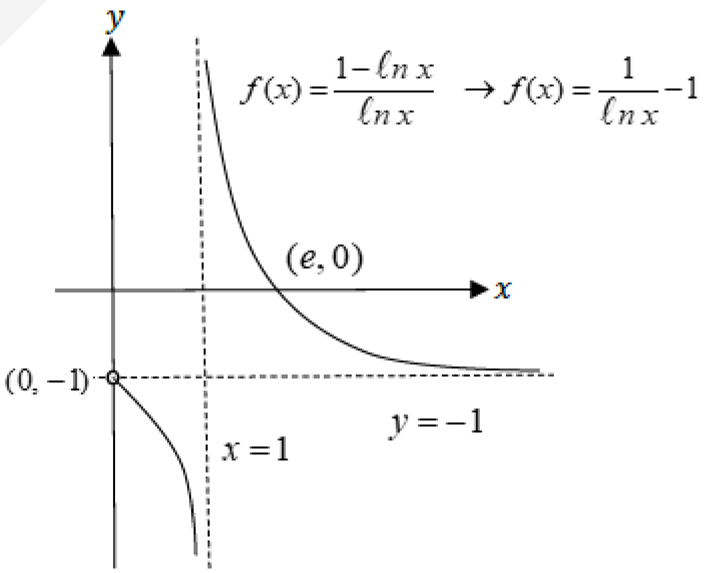
כאשר $x\to 0^{+}$ **מימין,** $\ell n\, x\to-\infty$ **ואז** $\frac{1}{\ell n\, x}\to 0$ **ומקבלים ש-** $(0,0)$ **נקודה ריקה בגרף.**

ההזזה 1 **יחידות אנכית כלפי מטה לא משנה את תחומי הירידה,**
כאשר $y=-1$ $(x\to+\infty)$ **אסימפטוטה אופקית לימין, והנקודה הריקה בגרף היא עכשיו היא** $(0,-1)$.

(2) תשובה: $x=1$ **,** $y=-1$ $(x\to\infty)$.

(3) עבור $f(x)$ **ירידה -** $x>1$ **או** $0<x<1$ **, עלייה אף** x .

(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל .

ב. נתונה הפונקציה : $g(x)=\ell n\,(-f(x))$.

(1) בתחום הגדרה, הארגומנט – הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית, צריך להיות חיובי.

וכמובן כל זה בתוך תחום ההגדרה של $f(x)$ **שהוא** $x>0,\ x\neq 1$.

תחום החיוביות של $-f(x)$ **הוא תחום השליליות של** $f(x)$ **:** $x>e$ **או** $0<x<1$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ **הוא** $x>e$ **או** $0<x<1$.

קצת הקדמה של קדם אנליזה

כאשר $x\to 0$ **מתקיים** $f(x)\to -1$ **ולכן** $-f(x)\to 1$ **ו-** $g(x)=\ell n\,(-f(x))\to 0$ **ו-** $(0,0)$ **נקודה ריקה.**

כאשר $x>e$ **מתקיים** $-1<f(x)<0$ **ולכן** $0<-f(x)<1$ **ובהתאם** $g(x)=\ell n\,(-f(x))<0$.

כאשר $0<x<1$ **מתקיים** $f(x)<-1$ **ולכן** $-f(x)>1$ **ובהתאם** $g(x)=\ell n\,(-f(x))>0$.

עבור $f(x)$ **א. אופקית** $y=-1$ $(x\to\infty)$**, ולכן עבור** $-f(x)$ **א. אופקית** $y=1$ $(x\to\infty)$,

ומכאן שעבור $g(x)=\ell n\,(-f(x))$ **האסימפטוטה האופקית היא** $y=0$ $(x\to\infty)$.

עבור $f(x)$ **ו-** $-f(x)$ **נקודת האפס היא** $(e,0)$,

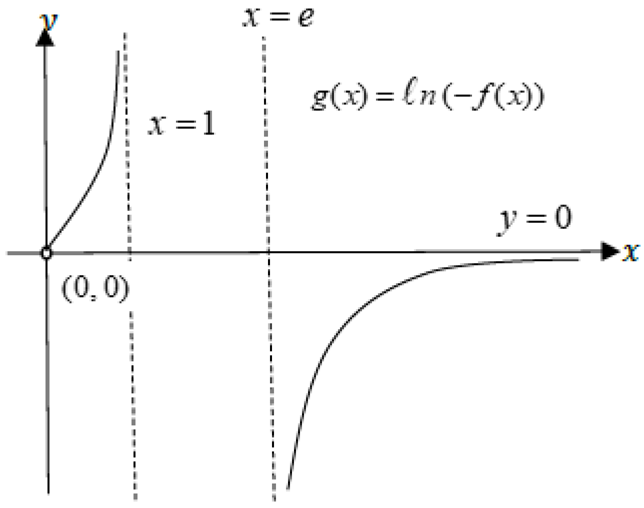
ולכן עבור $g(x)=\ell n\,(-f(x))$ **נקבל ש-** $x=e$ **היא אסימפטוטה אנכית.**

$x=1$ **אסימפטוטה אנכית ללא שינוי, כמובן כאשר** $g(x)$ **שואפת אליה משמאל בלבד.**

(2) תשובה: $x=e$ **,** $x=1$ **,** $y=0$ $(x\to\infty)$.

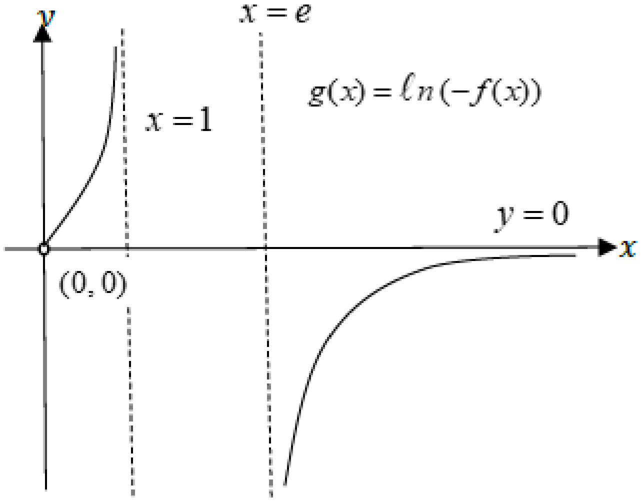
(3) תשובה: עבור $g(x)$ **: חיוביות -** $0<x<1$**, שליליות -** $x>e$.

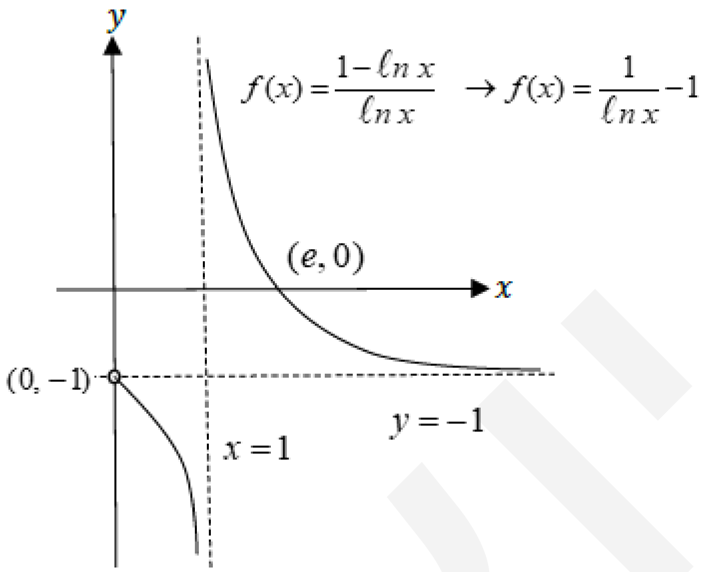
(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל .

ג. נסמן ב- a את שיעור ה- x של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף הפונקציה $g(x)$.





הפונקציות יכולות להיחתך רק בתחום $x>e$ בו שתיהן עם אותם סימנים (שליליים).

בתחום זה $g(x)$ עולה ו- $f(x)$ יורדת ולכן $g(x)>f(x)$,

כאשר $g(x)-f(x)=0$ עבור $x=a$, ולאחר מכן ההפרש הולך וגדל.

מכאן שככל שננוע ימינה יותר ההפרש גדל, והמסקנה: $\int_{a+1}^{a+2}(g(x)-f(x)\,dx > \int_{a+3}^{a+4}(g(x)-f(x)\,dx$.

בכל מקרה, השטח שנוצר ביניהם הוא באורך של $(a+4)-(a+3)=(a+2)-(a+1)=1$

וברוחב שקטן מ- 1 , שהוא ההפרש בין שתי האסימפטוטות האופקיות של שתי הפונקציות.

מכאן ששני האינטגרלים המסוימים האלה חיוביים, אך קטנים מ- 1.

לסיכום $\int_{a+1}^{a+2}(g(x)-f(x))\,dx < \int_{a+3}^{a+4}(g(x)-f(x)\,dx < 1$.

תשובה: הביטוי הגדול ביותר הוא III , והביטוי הקטן ביותר הוא I.

נכתב ע"י עפר ילין