יואל גבע
לא מתפשרים.

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023 , מועד ב', שאלון: 35572

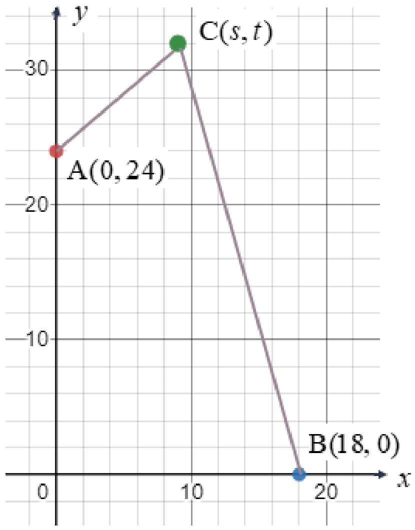
תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. נתונות הנקודות $B(18,0)$ **ו-** $A(0,24)$.

נסמן $C(s,t)$ **נקודה על המקום הגיאומטרי, המקיימת** $AC^2+BC^2=1,250$.

נשתמש בנוסחת ריבוע המרחק בין שתי נקודות:

$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$.



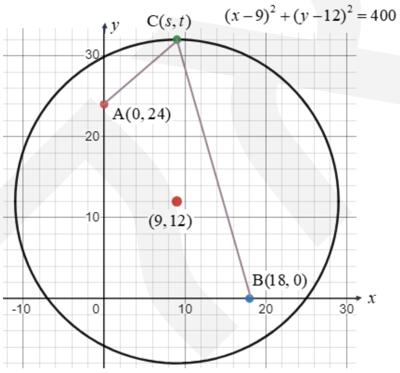
$$(s-0)^2+(t-24)^2+(s-18)^2+(t-0)^2=1,250$$

$$2s^2-36s+2t^2-48t=350 \quad /:2$$

$$s^2-18s+t^2-24t=175$$

$$(s-9)^2+(t-12)^2=400$$

$$(x-9)^2+(y-12)^2=400$$



תשובה: המעגל $(x-9)^2+(y-12)^2=400$ **, שמרכזו** $(9,12)$ **ורדיוס** 20 .

ב. את המעגל $(x-9)^2+(y-12)^2=400$ **, מזיזים** 9 **יחידות שמאלה ו-** 12 **יחידות למטה,**

כך שמתקבל המעגל הקנוני $x^2+y^2=400$.

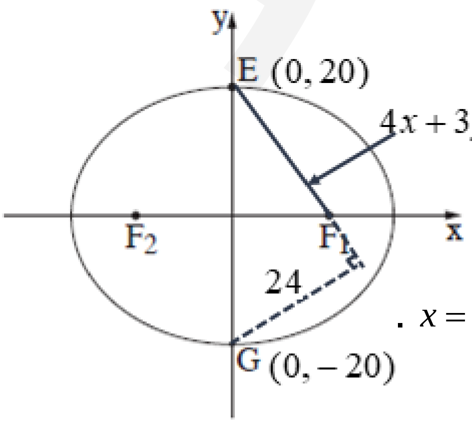
(1) נקודות החיתוך עם ציר ה- y **הן:** $E(0,20)$ **ו-** $G(0,-20)$.

הנקודות $F_1(c,0)$ **ו-** $F_2(-c,0)$ **הן מוקדי אליפסה קנונית, שעוברת דרך** $E(0,20)$ **ו-** $G(0,-20)$.

המרחק בין הישרים המקבילים (עקב הסימטריה לצירים) EF_1 **ו-** GF_2 **הוא** 24 .

שהוא שווה למרחקה של הנקודה $G(0,-20)$ **מהישר** EF_1 .

משוואת EF_1 **היא** $y=mx+20$ **, ראשית הצירים מתחת לישר זה, והמרחק "שלילי" כאשר** $B>0$.



$$24=-\frac{-m\cdot 0-20-20}{\sqrt{m^2+1}} \quad \rightarrow \sqrt{m^2+1}=\frac{5}{3}$$

$$m^2+1=\frac{25}{9} \quad \rightarrow m^2=\frac{16}{9} \quad \rightarrow m=-\frac{4}{3}\,(m<0)$$

$$y=-\frac{4}{3}x+20 \quad \rightarrow \boxed{EF_1\equiv 4x+3y-60=0}$$

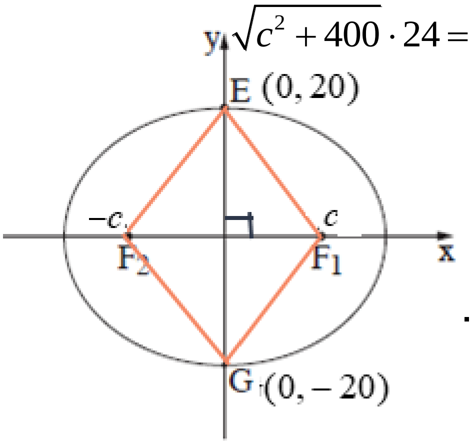
נציב $y=0$ **במשוואת הישר** $EF_1\equiv 4x+3y-60=0$ **, ונקבל** $x=15$.

דרך נוספת: EF_1GF_2 הוא מעוין, כי האלכסונים חוצים זה את זה ומאונכים זה לזה.

שטח מעוין שווה למחצית מכפלת האלכסונים, ולכן $S=\frac{2c\cdot 40}{2}=40c$.

שטח מעוין, כמו מקבילית, הוא גם מכפלת צלע בגובה שלה, ולכן $S=\sqrt{c^2+400}\cdot 24$

לכן $\sqrt{c^2+400}\cdot 24=40c \quad \to c^2+400=\frac{25}{9}c^2 \quad \to c^2=225 \quad \to c=15$



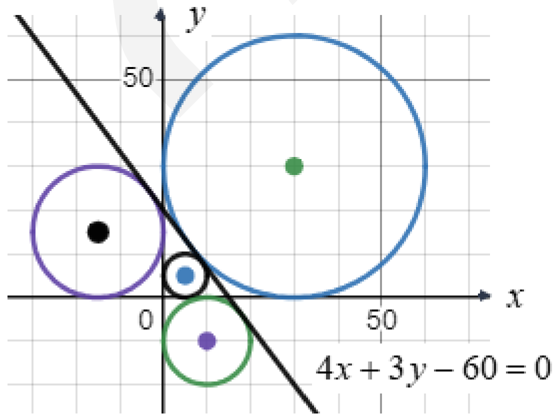
תשובה: $F_1(15,0)$.

(2) באליפסה מתקיים $c^2=a^2-b^2$ **, ולכן** $a^2=20^2+15^2=625$.

תשובה: משוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{625}+\frac{y^2}{400}=1$.

ג. העבירו מעגלים המשיקים לישר $EF_1\equiv 4x+3y-60=0$ **, לציר ה-** x **ולציר ה-** y .

כיוון שהמעגלים משיקים לשני הצירים, אז מרכזי המעגלים שהרדיוס שלהם r **הוא** $(|r|,|r|)$.



אלו ארבע האפשרויות הקיימות.

נשתמש בנוסחת מרחק נקודה מישר, כאשר המרכזים שנבחר יהיו מתחת לישר,

וכך נקבל מעגלים שנמצאים בהכרח ברביעים שונים.

ברביע הראשון מרכז המעגל הוא (r,r)

$r=-\frac{4r+3r-60}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$-5r=7r-60$

$-5r=7r-60 \quad \to 12r=60 \quad \to r=5$

$\boxed{(x-5)^2+(y-5)^2=25 \quad 1st\ quadrant}$

ברביע הרביעי מרכז המעגל הוא $(r,-r)$

$r=-\frac{4r-3r-60}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$-5r=r-60$

$-6r=-60 \quad \to \quad \to r=10$

$\boxed{(x-10)^2+(y+10)^2=100 \quad 4th\ quadrant}$

תשובה: $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ **ברביע הראשון,** $(x-10)^2+(y+10)^2=100$ **ברביע הרביעי.**

א. בפירמידה $ABCD$ **, המקצוע** DC **מאונך למישור** ABC **, ולכן לכל וקטור המוכל במישור זה.**

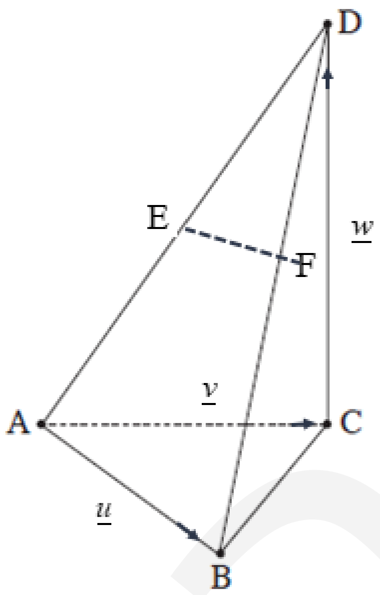
$$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$$
$$\boxed{\overrightarrow{AC}=\underline{v}}$$
$$\boxed{\overrightarrow{CD}=\underline{w}}$$
$$\underline{u}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{w}$$
$$\underline{v}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{v}\perp\underline{w}$$

הנקודה E **היא אמצע המקצוע** AD **.**

הנקודה F **מקיימת** $\overrightarrow{DF}=\frac{k}{2}\cdot\overrightarrow{DB}+k\cdot\overrightarrow{DC}$ **,**

כלומר, F **נמצאת על מישור הפאה** DBC **, ואם** $0\le k\le\frac{2}{3} \leftarrow 0\le\frac{k}{2}+k\le 1$ **על הפאה עצמה.**

$$\overrightarrow{DF}=\frac{k}{2}\cdot\overrightarrow{DB}+k\cdot\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{DF}=\frac{k}{2}\cdot(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+k\cdot\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{DF}=\frac{k}{2}\cdot(-\underline{w}-\underline{v}+\underline{u})-k\cdot\underline{w}$$
$$\boxed{\overrightarrow{DF}=\frac{k}{2}\underline{u}-\frac{k}{2}\underline{v}-\frac{3k}{2}\underline{w}}$$



נביע את $\overrightarrow{EF}$ **באמצעות** $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ **ו-** k.

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\underline{v}+\underline{w})+\frac{k}{2}\underline{u}-\frac{k}{2}\underline{v}-\frac{3k}{2}\underline{w}$$
$$\boxed{\overrightarrow{EF}=\frac{k}{2}\underline{u}+(\frac{1}{2}-\frac{k}{2})\underline{v}+(\frac{1}{2}-\frac{3k}{2})\underline{w}}$$

תשובה: $\overrightarrow{EF}=\frac{k}{2}\underline{u}+(\frac{1}{2}-\frac{k}{2})\underline{v}+(\frac{1}{2}-\frac{3k}{2})\underline{w}$.

ב. נתון כי FE **מקביל למישור הבסיס** ABC.

מישור הבסיס ABC **נפרש על ידי הווקטורים** $\underline{u}$ **ו-** $\underline{v}$,

לכן $\overrightarrow{FE}$ **הוא קומבינציה לינארית של שני ווקטורים אלו.**

מכאן ש- $\boxed{k=\frac{1}{3}} \leftarrow \frac{1}{2}-\frac{3k}{2}=0$.

תשובה: $k=\frac{1}{3}$.

ג. . נתון: $A(0,0,0)$ (ראשית הצירים),

$C(0,n,0)$ ($n>0$), לכן C על הקרן החיובית של ציר ה- y.

כיוון שהמקצוע DC מאונך למישור ABC, הרי שהפאה ADC מונחת על המישור $[y,z]$, שמשוואתו $x=0$.

$B(p,3,0)$ ($p>0$). $z_A=z_B=z_C=0$, והבסיס ABC מונחת על המישור $[x,y]$, שמשוואתו $z=0$.

$\underline{u}\cdot\underline{v}=24$, ולכן

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=24$$
$$(p,3,0)\cdot(0,n,0)=24$$
$$3n=24 \ \rightarrow \boxed{n=8} \ \rightarrow \boxed{C(0,8,0)}$$

המקצוע DC מאונך למישור $[x,y]$, ובפרט לציר ה- y, ולכן $y_C=y_D=8$.

$\overrightarrow{BD}=(-4,5,12)$, $z_B=0$, ולכן $z_D=12$ ומכאן ש- $D(0,8,12)$.

$\overrightarrow{BD}=(-4,5,12)$, $x_D=0$, ולכן $x_B=4$ ומכאן ש- $B(4,3,0)$.

תשובה: $C(0,8,0)$, $D(0,8,12)$, $B(4,3,0)$.

ד. נחשב את נפח הפירמידה ABCD, שבסיסה הוא משולש ABC, המונח על מישור $[x,y]$.

הגובה מקודקוד B לצלע AC, שעל ציר ה- y, הוא $x_B-0=4-0=4$,

ולכן $S_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot h}{2}=\frac{8\cdot 4}{2}=16$.

או בדרך הבאה:

$$\cos\sphericalangle CAB=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}=\frac{24}{\sqrt{4^2+3^2+0^2}\cdot 8}=\frac{3}{5}$$

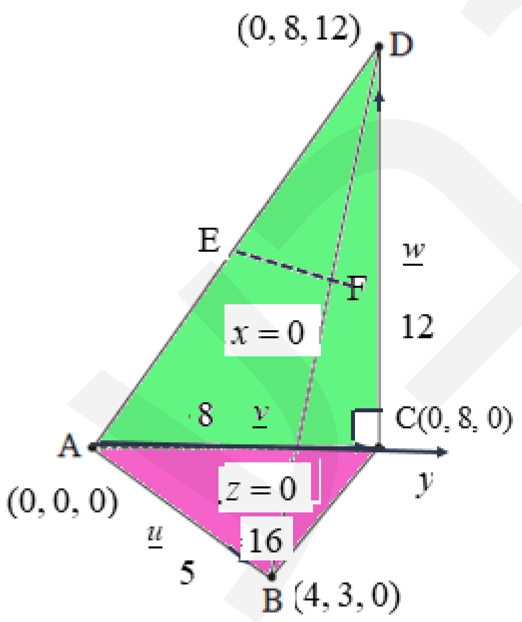
$$\sin\sphericalangle CAB=+\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin\sphericalangle CAB}{2}=\frac{5\cdot 8\cdot\frac{4}{5}}{2}=16$$

DC, שאורכו 12, הוא הגובה לבסיס ABC.

$$V_{ABCD}=\frac{S_{\Delta ABC}\cdot DC}{3}=\frac{16\cdot 12}{3}=64$$

תשובה: נפח הפירמידה ABCD הוא 64.



ה. EF מקביל למישור ABC ולכן אינו באותו מישור עם AB, ומכאן שהם מקבילים או מצטלבים.

עבור $k=\frac{1}{3}$ נקבל ש- $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{6}\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$, בעוד ש- $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, ולכן הווקטורים לא תלויים זה בזה.

מתקבל ש- EF אינו מקביל ל- AB.

תשובה: הישרים EF ו- AB מצטלבים.

א. נתונה סדרה הנדסית z_1, z_2, z_3 , שאיבריה הם מספרים מרוכבים ומנתה היא q .

נתון: z_1 ברביע הראשון, $(z_1)^3 = z_3$, $-2z_1 = \overline{z_3}$.

נסמן $z_1 = rcis\,\theta$.

כיוון שהסדרה הנדסית, הרי ש- $z_n \neq 0$ ו- $q \neq 0$.

$$(z_1)^3 = z_3$$
$$(z_1)^3 = z_1 q^2 \quad / : z_1 \neq 0$$
$$(z_1)^2 = q^2$$
$$\boxed{z_1 = q} \quad \boxed{z_1 = -q}$$

תשובה: הוכחנו כי $q = -z_1$ או $q = z_1$.

ב. נמצא את z_1 שברביע הראשון $(0° < \theta < 90°)$.

$$-2z_1 = \overline{z_3}$$
$$-2rcis\,\theta = \overline{z_1 \cdot q^2}$$
$$2rcis\,(180°) \cdot cis\,\theta = \overline{z_1^{\,3}} \quad \leftarrow q^2 = z_1^{\,2}$$
$$2rcis\,(180° + \theta) = r^3 cis\,(-3\theta)$$
$$\left.\begin{array}{l} 2r = r^3 \quad \to 2 = r^2 \quad \to r = \sqrt{2} \quad \leftarrow r > 0 \\ 180° + \theta = -3\theta + 360°k \quad \to \theta = -45° + 90°k \end{array}\right\} \boxed{z_1 = \sqrt{2}\,cis45°}$$

תשובה: $z_1 = \sqrt{2}\,cis45°$.

עבור סעיפים ג-ד: $q = z_1$.

ג. z_{4n} , ו- z_{4n-2} הם שני איברים בסדרה ההנדסית הנתונה, שאיברה הראשון ומנתה הם $\sqrt{2}\,cis45°$.

$z_{4n} = z_1 \cdot q^{4n-1} = z_1 \cdot z_1^{4n-1} = \frac{z_1 \cdot z_1^{4n}}{z_1} = \left((\sqrt{2}cis\,45°)^4\right)^n = (4cis\,180°)^n = (-4)^n$ **, ולכן הוא ממשי.**

$z_{4n-2} = \frac{z_{4n}}{q^2} = \frac{(-4)^n}{(\sqrt{2}cis\,45°)^2} = \frac{(-4)^n}{2cis\,90°} = \frac{(-4)^n}{2} \cdot cis\,(-90°) = \frac{-(-4)^n}{2} i$ **, ולכן הוא מדומה.**

תשובה: z_{4n} ממשי, z_{4n-2} מדומה.

ד. הסכום של $\frac{z_1}{\sqrt{2}} + \frac{z_2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{z_3}{(\sqrt{2})3^2} + ... + \frac{z_{64}}{(\sqrt{2})^{64}}$ הוא סכום של סדרה הנדסית,

שאיברה הראשון ומנתה הם $\frac{z_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot cis45°}{\sqrt{2}} = cis45°$, ובה 64 איברים.

נוסחת הסכום היא $S_{64} = \frac{a_1(q^{64} - 1)}{q - 1}$, נראה שערכו של הביטוי $(q^{64} - 1)$ הו אפס, ולכן זה ערך הסכום כולו.

$q^{64} - 1 = (cis\,45°)^{64} - 1 = cis\,2,880° - 1 = cis\,0° - 1 = 1 - 1 = 0$ **, ולכן זה גם סכום הסדרה.**

תשובה: ערך הסכום הוא 0.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\ell n\, x+\ell n\, a}{\ell n\, x-\ell n\, a}$ **(** $a>1$ **הוא פרמטר).**

(1) פונקציית ה- ℓn **מקבלת רק ביטויים חיוביים, ולכן** $x>0$ **.**

המכנה צ"ל שונה מאפס, ולכן $\ell n\, x\neq \ell n\, a \quad \to x\neq a$

תשובה: הפונקציה $f(x)$ **מוגדרת עבור** $x>0\,,\, x\neq a$ **.**

(2) $x=a$ **אסימפטוטה אנכית, כי** $x=a$ **מאפס מכנה ולא מונה.**

כאשר $x\to\infty$ **, הפונקציה שואפת ל-** $f(x)=\frac{\ell n\, x\to+\infty}{\ell n\, x\to+\infty}=1$ **ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

גם כאשר $x\to 0$ **, הפונקציה שואפת ל-** $f(x)=\frac{\ell n\, x\to-\infty}{\ell n\, x\to-\infty}=1$ **ו-** $(0,1)$ **נקודה ריקה בגרף הפונקציה.**

תשובה: משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ **הן** $x=a$ **,** $y=1$ $(x\to\infty)$ **.**

(3) אין נקודת חיתוך עם ציר ה- y **כי** $x>0\,,\, x\neq a$ **בתחום ההגדרה.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ $\quad \ell n\, x=-\ell n\, a \quad \to \ell n\, x=\ell n\, a^{-1} \quad \to x=\frac{1}{a} \quad \to (\frac{1}{a},0)$

תשובה: שיעור נקודת החיתוך של הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים הם** $(\frac{1}{a},0)$**.**

(4) נמצא את תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$ **.**

$$\boxed{f(x)=\frac{\ell n\, x+\ell n\, a}{\ell n\, x-\ell n\, a}}$$

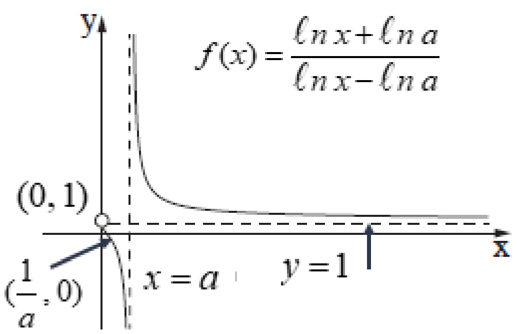
$$f'(x)=\frac{\frac{\ell n\, x-\ell n\, a}{x}-\frac{\ell n\, x+\ell n\, a}{x}}{(\ell n\, x-\ell n\, a)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-2\ell n\, a}{x(\ell n\, x-\ell n\, a)^2}}$$

נתון כי $a>1$ **ולכן** $\ell n\, a>0$ **, והמכנה חיובי (ת.ה.** $x>0\,,\, x\neq a$ **) ומכאן שהנגזרת שלילית.**

תשובה: ירידה - $x>a$ **או** $0<x<a$**.**

(5) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל.

ב. בתחום $x>a$ $f(x)$ חיובית ויורדת, ולכן $f'(x)<0$ ושתי הפונקציות אינן נפגשות.

תשובה: הטענה שלמשוואה $f(x)=f'(x)$ קיים פתרון אחד בדיוק בתחום $x>a$, אינה נכונה.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=\ell n\left(f(x)\right)$.

(1) פונקציית ה- ℓn מקבלת רק ביטויים חיוביים, בהתאם לחיוביות $f(x)$ על פי תת-סעיף א(5).

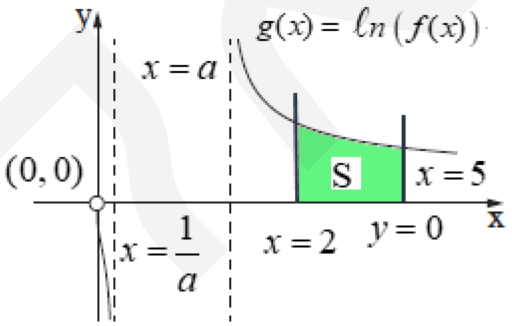
תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ הוא $x>a$ או $0<x<\frac{1}{a}$.

(2) כאשר $f(x)\to 1$ אז $\ell n\left(f(x)\right)\to 0$

ונקבל $y=0$ $(x\to\infty)$ אסימפטוטה אופקית, ו- $(0,0)$ נקודה ריקה בגרף הפונקציה.

כאשר $f(x)\to+\infty$ אז $\ell n\left(f(x)\right)\to+\infty$ ונקבל $x=a$ אסימפטוטה אנכית.

כאשר $f(x)\to 0$ אז $\ell n\left(f(x)\right)\to-\infty$ ונקבל $x=\frac{1}{a}$ אסימפטוטה אנכית.



תשובה: הסרטוט מעל (כולל סימון השטח עבור סעיף ד).

ד. S הוא השטח הצבוע בירוק, מימין לישר $x=a$, כי $1<a<2$.

$$\int_2^5 \ell n\,(2\cdot f(x))\,dx=\int_2^5\left(\ell n\,2+\ell n\;f(x)\right)dx=\int_2^5 \ell n\,2\,dx+\int_2^5 \ell n\;f(x)\,dx$$

$$\int_2^5 \ell n\,(2\cdot f(x))\,dx=x\ell n\,2\Big]_2^5+S=5\ell n\,2-2\ell n\,2+S=\boxed{3\ell n\,2+S}$$

הערה: הגרף של $\ell n\,(2\cdot f(x))$ הוא הזזה אנכית $\ell n\,2$ יחידות כלפי מעלה של $g(x)=\ell n\;f(x)$.

תשובה: $\int_2^5 \ell n\,(2\cdot f(x))\,dx=3\ell n\,2+S$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^x}{e^x-4}$.

(1) בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס, ולכן $e^x \neq 4 \quad \rightarrow x \neq \ell n\,4$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x \neq \ell n\,4$.

(2) $x=\ell n\,4$ **אסימפטוטה אנכית, כי** $x=\ell n\,4$ **מאפס מכנה ולא מונה.**

כאשר $x \rightarrow \infty$ **, הפונקציה שואפת ל-** $\frac{e^\infty}{e^\infty}=1$ **ו-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית.**

כאשר $x \rightarrow -\infty$ **, הפונקציה שואפת ל-** $\frac{0}{0-4}=0$ **ו-** $y=0$ **אסימפטוטה אופקית.**

תשובה: משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$
הן: $x=\ell n\,4$, $y=1$ $(x \rightarrow \infty)$, $y=0$ $(x \rightarrow -\infty)$.

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ **(אם יש כאלה).**

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x-4}$$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-4)-e^x\cdot e^x}{(e^x-4)^2}$$

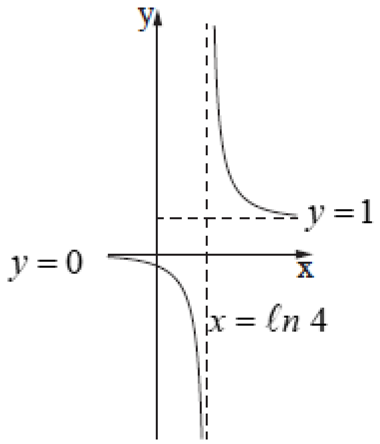
$$f'(x)=\frac{e^{2x}-4e^x-e^{2x}}{(e^x-4)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-4e^x}{(e^x-4)^2}}$$

הנגזרת שלילית בתחום ההגדרה, ולכן אין תחומי עלייה.

תשובה: $f(x)$ **יורדת בתחומים** $x>\ell n\,4$ **או** $x<\ell n\,4$.

(4) הסקיצה המתאימה של $f(x)=\frac{e^x}{e^x-4}$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ **, המוגדרת גם בתחום** $x \neq \ell n\,4$ **כמו של** $f(x)$ **כי** $f(x) \neq 0$ **.**

קדם אנליזה: תחומי חיוביות ושליליות לא משתנים, תחומי עלייה וירידה מתהפכים.

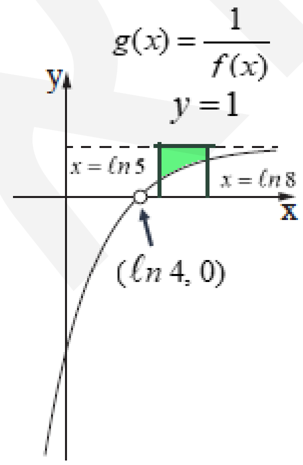
כאשר $x \to \infty$ **,** $f(x) \to 1$ **ולכן גם** $g(x) \to 1$ **-** $y=1$ **אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x \to -\infty$ **,** $f(x) \to 0^-$ **ומכאן ש-** $g(x) \to -\infty$ **ואין אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

כאשר $x \to \ell n\,4$ **,** $f(x) \to \pm\infty$ **ולכן** $g(x) \to \pm 0$ **ו-** $(\ell n\,4, 0)$ **נקודה ריקה בגרף הפונקציה.**

(1) תשובה: משוואת האסימפטוטה המאונכת לצירים של הפונקציה $g(x)$ **היא** $y=1$ $(x \to \infty)$**.**

(2) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$**.**



תשובה: הסרטוט מעל (כולל סימון השטח עבור תת-סעיף (3)).

(3) $g(x)=\frac{1}{f(x)} \quad \to g(x)=\frac{e^x-4}{e^x} \quad \to g(x)=1-4e^{-x}$ **.**

$$\int_{\ell n5}^{\ell n8} 1-(1-4e^{-x})\,dx=\int_{\ell n5}^{\ell n8} 4e^{-x}\,dx=-4e^{-x}\Big]_{\ell n5}^{\ell n8}=-\frac{4}{e^x}\Big]_{\ell n5}^{\ell n8}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\ell n\,8: \quad -\frac{4}{e^{\ell n8}}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2} \\ x=\ell n\,5: \quad -\frac{4}{e^{\ell n5}}=-\frac{4}{5} \end{array}\right\} S=-\frac{1}{2}-(-\frac{4}{5}) \quad \to \boxed{S=\frac{3}{10}}$$

תשובה: השטח המוגבל, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ **, על ידי האסימפטוטה האופקית שלה**

ועל ידי הישרים $x=\ell n\,5$ **ו-** $x=\ell n\,8$ **, הוא** $\frac{3}{10}$ **.**

ג. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ ו- $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

שתי פונקציות שכאלו, $f(x)$ ו- $\dfrac{1}{f(x)}$, יכולות להיפגש רק עבור $y=1$ ו- $y=-1$.

על פי שרטוט שני הגרפים, אין פתרון עבור $y=1$.

עבור $y=-1$: $\boxed{(\ell n2,-1)} \leftarrow x=\ell n2 \leftarrow e^x=2 \leftarrow 2e^x=4 \leftarrow e^x=4-e^x \leftarrow \dfrac{e^x}{e^x-4}=-1$.

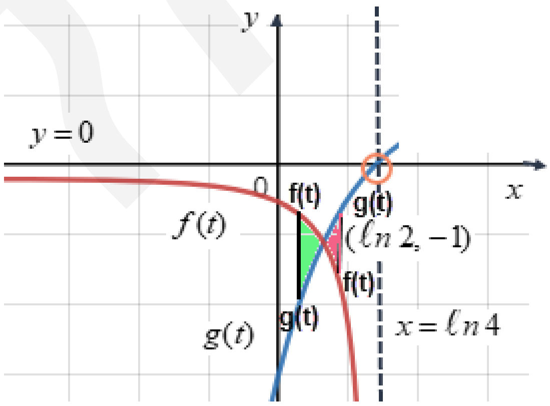
תשובה: שיעורי נקודת החיתוך, של גרף הפונקציה $f(x)$

עם גרף הפונקציה $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, הם $(\ell n2,-1)$.

ד. נתונה הפונקציה: , המוגדרת בתחום $x<\ell n3$.

זו פונקציית שטח, שבין שתי הפונקציות, התלויה בערכו של x .

נשרטט את הגרפים של שתי הפונקציות באותה מערכת צירים, ונתרכז בתחום $x<\ell n3$.



$s(x)=\int_x^{\ell n3}(f(t)-g(t))\,dt$, אינטגרל שמייצג שטח, כאשר x הוא <u>הגבול התחתון</u>.

כאשר $x\to\ell n3$, משמאל, ערך האינטגרל שואף ל- 0 .

כאשר זזים <u>שמאלה</u> צוברים שטחים שליליים (ההולכים וקטנים), כי $f(t)<g(t)$ בתחום $\ell n2<x<\ell n3$.

במבט הפוך, כאשר זזים ימינה בתחום זה, פונקציית השטח עולה וקעורה כלפי מעלה $\cup$,

כאשר פונקציית השטח שואפת לנקודה $(\ell n3,0)$.

למעשה מדובר בשטחים שליליים שהולכים וקטנים ככל ש- x גדל ואז נקבל פונקציה עולה.

כאשר זזים <u>שמאלה</u> בתחום $x<\ell n2$ צוברים שטחים חיוביים (ההולכים וגדלים), כי $f(t)>g(t)$.

במבט הפוך, כאשר זזים ימינה בתחום זה, פונקציית השטח יורדת וקעורה כלפי מעלה $\cup$.

למעשה מדובר בשטחים חיוביים שהולכים וקטנים ככל ש- x גדל ואז נקבל פונקציה יורדת.

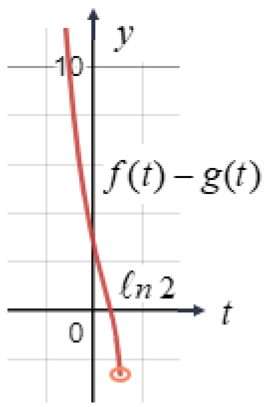
מכאן ש- $s(x)$ יורדת בתחום $x<\ell n2$ ועולה בתחום $\ell n2<x<\ell n3$, ו- $x=\ell n2$ מינימום מוחלט.

תשובה: $x=\ell n2$, מינימום.

<u>הערה כללית</u>

כאן מגדילים את הגבול התחתון הגורם להקטנת השטח,
בשונה משאלות אחרות שבהן הנעלם הוא הגבול העליון,
שבו הסכום הולך וגדל עם הגדלת הנעלם.

<u>הסברים נוספים</u>



אם נביט על הגרף של $f(t)-g(t)$,

אז נראה בבירור שהשטחים החיוביים הולכים וקטנים,

והופכים לשליליים לאחר $x=\ell n\,2$.

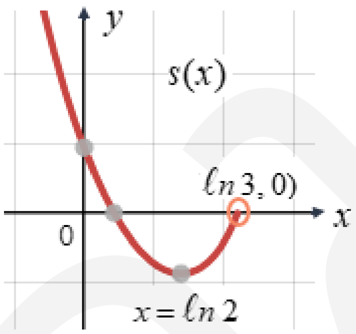
כיוון ש- $\ell n\,3$ הוא הגבול העליון

ו- x הוא הגבול התחתון,

הרי שהשטח המינימלי מתקבל כאשר $x=\ell n\,2$

קל יחסית למצוא את פונקציית השטח $s(x)$,

ולשרטט אותה באמצעות המחשב, להמחשה.



$$f(t)-g(t)=\frac{e^t}{e^t-4}-\frac{e^t-4}{e^t}=\frac{e^t}{e^t-4}-1+4e^{-t}$$

$$s(x)=\int_x^{\ln 3}\left(\frac{e^t}{e^t-4}-1+4e^{-t}\right)dt$$

$$s(x)=\ln\left|e^t-4\right|-t-\frac{4}{e^t}\Big]_x^{\ell n\,3}$$

$$t=\ell n\,3:\quad -\ell n\,3-\frac{4}{3}$$

$$t=x:\quad \ln\left|e^x-4\right|-x-\frac{4}{e^x}$$

$$\boxed{s(x)=-\ln\left|e^x-4\right|+x+\frac{4}{e^x}-\ell n\,3-\frac{4}{3}}$$

נשים לב

$$s'(x)=f(x)-g(x)$$

ופונקציית הנגזרת עוברת מחיוביות לשליליות

ולכן מינימום.

פתרון נוסף של המורה *אוריאל שקד*

$$s(x)=\int_{x}^{\ln 3}(f(t)-g(t))\,dt=\mathrm{F}(t)-\mathrm{G}(t)\Big]_{x}^{\ell n\,3}$$

$$s(x)=\mathrm{F}(\ell n\,3)-\mathrm{G}(\ell n\,3)-\left(\mathrm{F}(x)-\mathrm{G}(x)\right)$$

נשים לב ששני המחוברים הראשונים קבועים

$$\boxed{s'(x)=g(x)-f(x)}$$

$$0=g(x)-f(x)\quad\rightarrow f(x)-g(x)\quad\rightarrow x=\ell n\,2$$

$$\boxed{s''(x)=g'(x)-f'(x)}$$

בתחום $x<\ell n\,3$:

$$s''(x)>0\quad\leftarrow(+)-(-)>0$$

$g(x)$ **עולה, ולכן** $g'(t)>0$

$f(x)$ **יורדת, ולכן** $f'(t)<0$

$$\boxed{x=\ell n\,2\,,\min}$$

או: עבור $x<\ell n\,2$ $f(t)>g(t)$ **מתקיים** $s'(x)<0$ **ולכן** $s(x)$ **יורדת**

עבור $\ell n\,2<x<\ell n\,3$ $f(t)<g(t)$ **מתקיים** $s'(x)>0$ **ולכן** $s(x)$ **עולה**

והמסקנה: $x=\ell n\,2$ **מינימום מוחלט.**

פתרון נוסף של המורה *שי חנני*

בתחום $x<\ell n\,2$ **האינטגרלים חיוביים כי** $f(t)>g(t)$,

וכאשר x **גדל לכיוון המפגש בין שתי הפונקציות ב-** $x=\ell n\,2$ **השטחים הולכים וקטנים ולכן** $s(x)$ **יורדת.**

בתחום $\ell n\,2<x<\ell n\,3$ **האינטגרלים שליליים כי** $f(t)<g(t)$,

וכאשר x **גדל לכיוון** $x=\ell n\,3$ **השטחים הולכים וקטנים בערכם המוחלט,**

כלומר גדלים (כי הם שליליים), ולכן $s(x)$ **עולה.**

מכאן ש- $s(x)$ **יורדת בתחום** $x<\ell n\,2$ **ועולה בתחום** $\ell n\,2<x<\ell n\,3$**, ו-** $x=\ell n\,2$ **מינימום מוחלט.**