פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023 , מועד א', שאלון: 35571

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. נתונות שתי סדרות המוגדרות לכל n טבעי: $a_n = 2n-1$ **,** $b_n = 2^n$**.**

נסמן: $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$

(1) נוכיח כי: אם בעבור k טבעי כלשהו מתקיים: $T_k = (2k-3)\cdot 2^{k+1}$**,**

אז מתקיים $T_{k+1} = (2k-1)\cdot 2^{k+2}$ **.**

$$T_{k+1} = T_k + a_{k+1}b_{k+1}$$
$$T_{k+1} = (2k-3)\cdot 2^{k+1} + (2(k+1)-1)\cdot 2^{k+1}$$
$$T_{k+1} = 2^{k+1}(2k-3+2k+2-1)$$
$$T_{k+1} = 2^{k+1}(4k-2)$$
$$T_{k+1} = 2^{k+1}\cdot 2(2k-1)$$
$$\boxed{T_{k+1} = (2k-1)2^{k+2}}$$

הוכחנו כי אם בעבור k טבעי כלשהו מתקיים: $T_k = (2k-3)\cdot 2^{k+1}$**,**

אז מתקיים $T_{k+1} = (2k-1)\cdot 2^{k+2}$ **.**

(2) אומנם: $T_{k+1} = (2(k+1)-3)\cdot 2^{k+1+1} \rightarrow T_{k+1} = (2k-1)\cdot 2^{k+2}$

אך לא ניתן להסיק, מהתשובה לסעיף (1) כי לכל n טבעי, מתקיים $T_n = (2n-3)\cdot 2^{n+1}$,

כי לא עשינו את השלב הראשון והחשוב באינדוקציה, והוא בדיקה עבור $n=1$ **.**

כדי להסביר שהטענה <u>אינה</u> נכונה, נבדוק עבור $n=1$**.**

על-פי הגדרת T_n **:** $T_1 = 2 \leftarrow T_1 = (2\cdot 1-1)\cdot 2^1 \leftarrow T_1 = a_1b_1$

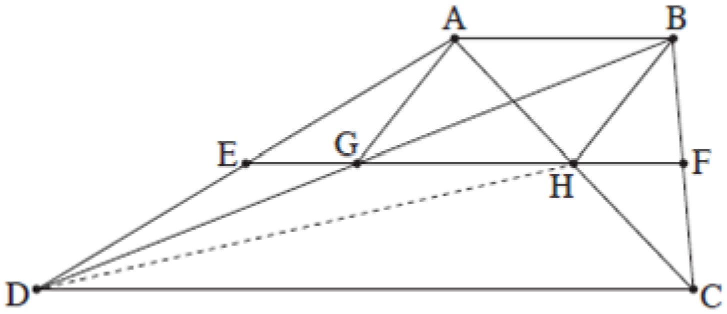
על-פי הטענה: $T_1 = -4 \leftarrow T_1 = (2\cdot 1-3)\cdot 2^{1+1} \leftarrow T_n = (2n-3)\cdot 2^{n+1}$

ולא קיים שוויון מספרי.

תשובה: הסברנו מדוע הטענה <u>אינה</u> נכונה.

הערה לתת-סעיף (1): אין להציב ישירות $(k+1)$ בביטוי $T_k = (2k-3)\cdot 2^{k+1}$**,**

שכן $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$ **הוגדר כאן, ורק מכאן ניתן למצוא את האיבר הבא בסדרה..**

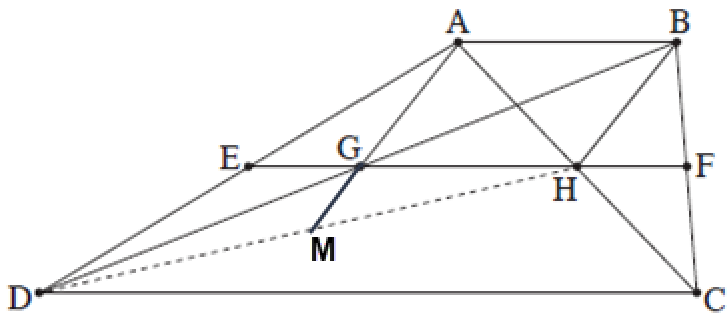


נתונים

1. $ABCD$ **טרפז . 2.** $AB \parallel CD$ **. 3.** EF **הוא קטע אמצעים בטרפז. 4.** $ABHG$ **מקבילית**

צ"ל: (1) $GH = 2EG$ **(2) הקטע** AM **חוצה את הקטע** DH

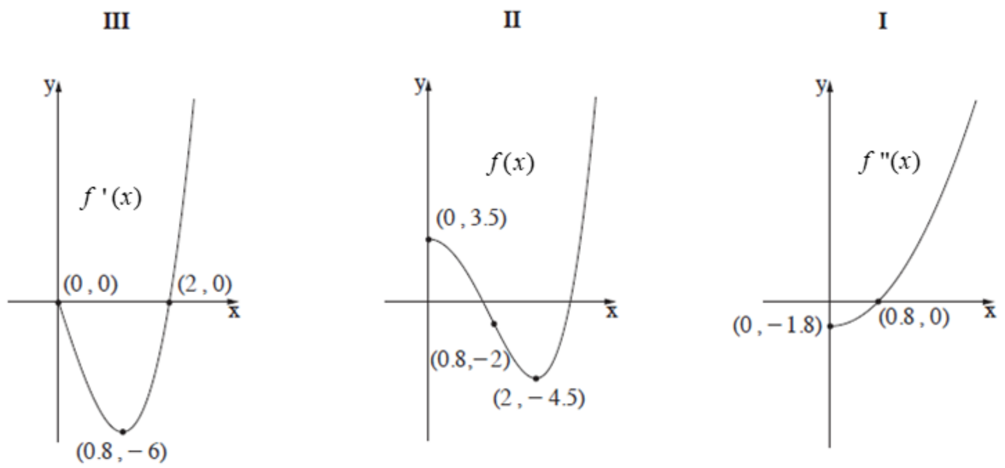
הסבר	מס'	טענה	נימוק
3	5	$EF \parallel AB$	קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים
3	6	$AE = ED$	קטע אמצעים בטרפז חוצה את השוקיים
6 ,5	7	EG קטע אמצעים ב- ΔABD	יוצא מאמצע צלע ומקביל לצלע שממול
7	8	$AB = 2EG$	קטע אמצעים במשולש שווה למחצית הצלע שממול
4	9	$GH = AB$	צלעות נגדיות שוות במקבילית
9 ,8	10	$GH = 2EG$	
מ.ש.ל. (1)			



6	11	EH תיכון ב- ΔAHD	יוצא מקודקוד וחוצה את הצלע
11 ,10	12	G מפגש תיכונים ב- ΔAHD	נמצאת על תיכון ומחלקת אותו ביחס $2:1$ מקודקוד
12	13	AM תיכון ב- ΔAHD	יוצא מקודקוד ועובר בנקודת מפגש תיכונים
13	14	AM חוצה את הקטע DH	
מ.ש.ל. (2)			

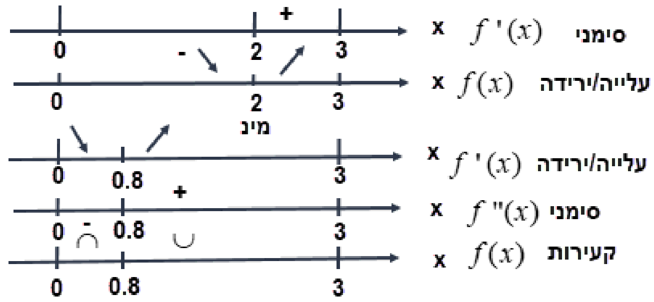
או: DK **תיכון ב-** ΔAHD **(** K **מפגש אלכסוני המקבילית)כי אלכסונים חוצים זה את זה במקבילית,**

ו- AM **תיכון ב-** ΔAHD **כי יוצא מקודקוד ועובר במפגש תיכונים** G.



הפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ מוגדרות עבור $0 \le x \le 3$.

(1) נתאים את הגרפים לפונקציות, באמצעות חמישה קווים שעוזרים תמיד, וחוסכים דיבורים.



תשובה: גרף I מתאים ל- $f''(x)$, גרף II מתאים ל- $f(x)$, גרף III מתאים ל- $f'(x)$.

(2) בנקודת הפיתול $f''(x)$ מחליפה סימן, לכן $x = 0.8$, ונקודת הפיתול על פי גרף $f(x)$ היא $(0.8,-2)$.

השיפוע על פי גרף $f'(x)$ הוא $m = -6$

$$y-(-2) = -6(x-0.8)$$
$$y+2 = -6x+4.8$$
$$\boxed{y = -6x+2.8}$$

הערה: שיפוע (-6) , שאומר שהזווית בין המשיק לציר ה- x היא בערך $100°$,
אינה בדיוק מתאימה לגרף II של $f(x)$. (כלומר הגרף לא ממש מדויק.)

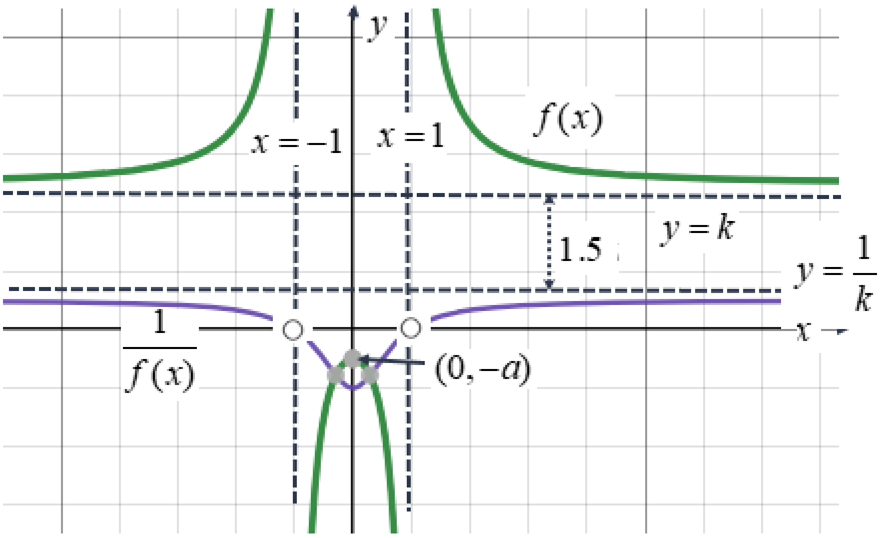
תשובה: משוואת המשיק, לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת הפיתול שלה, היא $y = -6x+2.8$.

(3) נמצא את הערך של האינטגרל המסוים $\int_0^{0.8} f''(x)\,dx$.

$$\int_0^{0.8} f''(x)\,dx = f'(x)\Big]_0^{0.8} = f'(0.8) - f'(0) = -6 - 0 = -6$$

תשובה: $\int_0^{0.8} f''(x)\,dx = -6$.

הערה: שטח 6 , שאמור להיות הגודל של השטח שבין גרף I של $f''(x)$ לציר ה- x ברביע הרביעי,
אינו בדיוק מתאים לשיעורי נקודות החיתוך עם הצירים של גרף זה. (העיקר שפתרנו נכון.)



הקדמה

תחום ההגדרה של טרנספורמציה של $\frac{1}{f(x)}$

הוא תחום ההגדרה של $f(x)$, למעט ה- x-ים של נקודות האפס של $f(x)$.

אסימפטוטות אנכיות הופכות לחורים על ציר ה- x , ואופקיות הופכיות כמובן.

תחומי חיוביות ושליליות נשארים ללא שינוי.

תחומי עלייה וירידה מתהפכים, וסוג קיצון משתנה גם.

(1) הגרפים של $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ נחתכים כאשר $f(x)=1$ או $f(x)=-1$.

כיוון ש- $k>1$ אז לא יהייה מפגש מעל ציר ה- x .

אם $0<a<1$ אז נקבל שתי נקודות חיתוך, כי אז $\frac{1}{f(x)}<-1$, כפי שניתן לראות בסרטוט.

תשובה: עבור $0<a<1$ יש לגרפים של $f(x)$ ו- $\frac{1}{f(x)}$ שתי נקודות חיתוך.

(2) המרחק בין שתי האסימפטוטות האופקיות $y=k$ ו- $y=\frac{1}{k}$ הוא 1.5 .

$$k-\frac{1}{k}=1.5$$

$$k^2-1.5k-1=0$$

$$\boxed{k=2},\ \cancel{k=-0.5} \quad \leftarrow k>1$$

תשובה: $k=2$.

א. נתונה סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת A , שהאיבר הכללי שלה הוא a_n, ומנתה q_{A}.

נתונה סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת B , שהאיבר הכללי שלה הוא b_n, ומנתה q_{B}.

בונים סדרה חדשה P , שגם היא הנדסית אין-סופית מתכנסת , שהאיבר הכללי שלה הוא $p_n = \frac{a_n}{b_n}$.

נמצא את מנת הסדרה החדשה:

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} : \frac{a_n}{b_n}$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \cdot \frac{b_n}{a_n}$$

$$\boxed{\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{q_{\mathrm{A}}}{q_{\mathrm{B}}}}$$

תשובה: מנת הסדרה ההנדסית החדשה היא $\frac{q_{\mathrm{A}}}{q_{\mathrm{B}}}$.

ב. נבדוק את שני ההיגדים, על בסיס <u>המידע החדש</u>.

(1) "מנת הסדרה החדשה היא חיובית."

<u>הסידרה</u> A <u>אינה עולה ואינה יורדת</u>, מכאן ש- $-1 < q_{\mathrm{A}} < 0$, ואיברי הסדרה מחליפים סימנים.

<u>הסידרה</u> B <u>עולה</u>, ומכיוון והיא מתכנסת, כלומר $b_n \to 0$, אז $0 < q_{\mathrm{B}} < 1$.

לכן מנת הסדרה ההנדסית החדשה $\frac{q_{\mathrm{A}}}{q_{\mathrm{B}}} = \frac{(-)}{(+)} < 0$

תשובה: ההיגד לא נכון.

(2) "כל איברי הסדרה B הם שליליים."

<u>הסידרה</u> B <u>עולה</u>, ומכיוון והיא מתכנסת, כלומר $b_n \to 0$, אז $0 < q_{\mathrm{B}} < 1$, וכל איברי הסדרה שליליים.

תשובה: ההיגד נכון.

ג. המספרים c_1 , c_2 ו- c_3 הם שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית, שנסמן ב- d את הפרשה.

נתון כי $c_2=-c_1$, ומתקיים גם: $\frac{c_1\cdot c_2}{c_3}=-\frac{1}{45}$.

האיברים הראשונים הם: $c_1,-c_1,c_1+2d$, ולכן $-c_1+d=c_1+2d$.

מכאן ש- $-2c_1=d$, ושלשות האיברים הראשונים בסדרה הם: $c_1,-c_1,-3c_1$.

אפשר גם: כל איבר בסדרה חשבונית (למעט הראשון) הוא ממוצע חשבוני של "שכניו",

ולכן: $-c_1=\frac{c_1+c_1+2d}{2} \rightarrow -2c_1=2c_1+2d \rightarrow -4c_1=2d \rightarrow -2c_1=d$

$$\frac{c_1\cdot c_2}{c_3}=-\frac{1}{45} \rightarrow \frac{c_1\cdot(-c_1)}{-3c_1}=-\frac{1}{45}$$

$$\frac{c_1}{3}=-\frac{1}{45} \rightarrow \boxed{c_1=-\frac{1}{15}}$$

תשובה: $c_1=-\frac{1}{15}$.

ד. נתון כי $q_{\text{A}}=-\frac{1}{15}$, ומתקיים גם $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\ldots=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots}{b_1+b_2+b_3+\ldots}$,

כלומר, מתקיים: $S_{\text{P}}=\frac{S_{\text{A}}}{S_{\text{B}}}$.

$$\frac{a_1/b_1}{1-\frac{q_{\text{A}}}{q_{\text{B}}}}=\frac{a_1/(1-q_{\text{A}})}{b_1/(1-q_{\text{B}})} \quad /(a_1/b_1\neq 0)$$

$$\frac{q_{\text{B}}}{q_{\text{B}}-q_{\text{A}}}=\frac{1-q_{\text{B}}}{1-q_{\text{A}}}$$

$$q_{\text{B}}(1+\frac{1}{15})=(1-q_{\text{B}})(q_{\text{B}}+\frac{1}{15})$$

$$\frac{16}{15}q_{\text{B}}=q_{\text{B}}+\frac{1}{15}-q_{\text{B}}^2-\frac{1}{15}q_{\text{B}} \quad /\cdot 15$$

$$16q_{\text{B}}=15q_{\text{B}}+1-15q_{\text{B}}^2-q_{\text{B}}$$

$$15q_{\text{B}}^2+2q_{\text{B}}-1=0$$

$$\boxed{q_{\text{B}}=\frac{1}{5}} \quad \cancel{q_{\text{B}}=-\frac{1}{3}} \leftarrow 0<q_{\text{B}}<1$$

תשובה: $q_{\text{B}}=\frac{1}{5}$.

א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- תלמידי שנה א'** $\bar{A}$ **- תלמידי שנה ב'**

B **- תומכים בהצעה** $\bar{B}$ **- מתנגדים להצעה**

<u>נתונים ומשמעויות מידיות</u>

נסמן p **- ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שבעד ההצעה, מבין כלל משתתפי המשאל** $(P(B) = p)$.

(1) $P(A / B) = 0.8 \quad \rightarrow P(\bar{A} / B) = 0.2$

(2) $N(A \cap B) = N(\bar{A} \cap \bar{B}) \quad \rightarrow P(A \cap B) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$0.8 = \frac{P(A \cap B)}{p}$$

$$P(A \cap B) = 0.8p \quad \rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.8p$$

נשלים את הטבלה:

	A **תלמידי שנה א'**	$\bar{A}$ **תלמידי שנה ב'**	
B **- תומכים בהצעה**	$0.8p$	$0.2p$	p
$\bar{B}$ **- מתנגדים להצעה**	$1-1.8p$	$0.8p$	$1-p$
	$1-p$	p	1

$$P(\bar{B} / \bar{A}) = \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.8p}{p} = 0.8 .$$

תשובה: ההסתברות לבחור באקראי תלמיד שנגד ההצעה, מבין תלמידי שנה ב', היא 0.8.

ב. נתון: $P(B / A) = P(B / \bar{A}) + \frac{13}{35}$

$$\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} + \frac{13}{35}$$

$$\frac{0.8p}{1-p} = \frac{0.2\cancel{p}}{\cancel{p}} + \frac{13}{35}$$

$$\frac{0.8p}{1-p} = \frac{4}{7}$$

$$5.6p = 4 - 4p$$

$$9.6p = 4$$

$$\boxed{p = \frac{5}{12}}$$

תשובה: $p = \frac{5}{12}$.

ג. נעדכן את הטבלה.

	A **תלמידי שנה א'**	$\bar{A}$ **תלמידי שנה ב'**	
B **- תומכים בהצעה**	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
$\bar{B}$ **- מתנגדים להצעה**	0.25	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$
	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{12}$	1

נחשב את ההסתברות המבוקשת: לפחות טענה אחת נכונה –

כלומר תנאי אחד בדיוק מתקיים ($P(\bar{A}\cap\bar{B})+P(A\cap B)$ **) או שני התנאים מתקיימים (** $P(\bar{A}\cap B)$ **).**

בקצרה: $1-P(A\cap\bar{B})=1-0.25=0.75$**.**

תשובה: ההסתברות, שלפחות אחד מבין שני התנאים מתקיים, היא 0.75 **.**

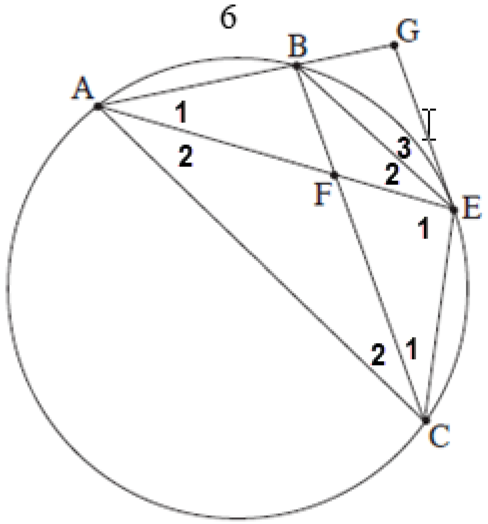
ד. מדובר בהתפלגות בינומית, כאשר $n=5$ **,** $p=P(B/\bar{A})=\frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{1/12}{5/12}=0.2$ **,** $k=2,3$ **.**

נחשב באמצעות נוסחת ברנולי:

$$P_5(2)+P_5(3)=\binom{5}{2}\cdot0.2^2\cdot(1-0.2)^{5-2}+\binom{5}{3}\cdot0.2^3\cdot(1-0.2)^{5-3}=10\cdot0.2^2\cdot0.8^3+10\cdot0.2^3\cdot0.8^2=0.256$$

תשובה: ההסתברות שמבין תלמידי שנה ב',

לפחות 2 **הם בעד ההצעה ולפחות** 2 **הם נגד ההצעה, היא** 0.256 **.**



<u>נתונים</u>

1. $BE = CE$ **.2** GE **משיק ב-** E .

עבור ב: 3. $AG = 6$ **.4** $AE = 3\sqrt{6}$

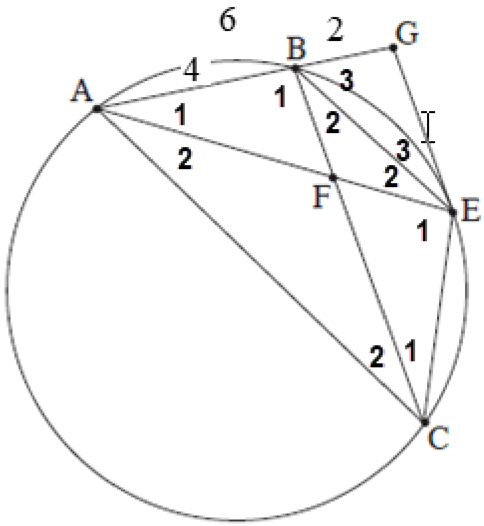
עבור ד: 5. $S_{\Delta ABF} = 2S_{\Delta BFE}$

צ"ל: א. $\Delta ACE \sim \Delta AEG$

ב. AC **ג.** $BC \parallel GE$

ד. AB **ה.** $\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta AFC}}$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
1	6	$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ (ז)	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות
1	7	$\measuredangle E_2 = \measuredangle C_2$	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות
2	8	$\measuredangle E_3 = \measuredangle C_1$	זווית בין משיק למיתר
8 ,7	9	$\measuredangle E_2 + \measuredangle E_3 = \measuredangle C_1 + \measuredangle C_2$	חיבור זוויות שוות לזוויות שוות
9	10	$\measuredangle GEA = \measuredangle ECA$ (ז)	סכום זוויות
10 ,6	11	$\Delta ACE \sim \Delta AEG$	משפט דמיון זווית זווית
		מ.ש.ל. א	
11	12	$\frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AG} = \frac{CE}{EG}$	יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים
12 ,4 ,3	13	$\frac{AC}{3\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{CE}{EG} = \frac{\sqrt{6}}{2}$	
13	14	$AC = 9$	
		מ.ש.ל. ב	
1	15	$\measuredangle EBC = \measuredangle C_1$	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות
15 ,8	16	$\measuredangle EBC = \measuredangle E_3$	
16	17	$BC \parallel GE$	אם זוויות מתחלפות שוות אז ישרים מקבילים
		מ.ש.ל ג	



הסבר	מס'	טענה	נימוק
5	18	$\frac{AF}{FE}=\frac{2}{1}$	יחס שטחים שווה ליחס צלעות בעלי גובה משותף, היורד מקודקוד B
17, 18	19	$\frac{AB}{BG}=\frac{AF}{FE}=\frac{2}{1}$	משפט תאלס
19	20	$\frac{AB}{AG}=\frac{2}{3} \rightarrow \frac{AB}{6}=\frac{2}{3}$	
3, 20	21	$AB=4$	
מ.ש.ל. ד			
6, 14, 21	22	$\frac{BF}{FC}=\frac{AB}{AC}=\frac{4}{9}$	משפט חוצה זווית ΔABC
22	23	$\frac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta AFC}}=\frac{4}{9}$	יחס שטחים שווה ליחס צלעות בעלי גובה משותף, היורד מקודקוד A
מ.ש.ל. ה			

א. $ABCD$ **דלתון חסום במעגל שרדיוסו** R.

במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות $180°$ **, ובדלתון זוויות צד שוות זו לזו.**

לכן $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 90°$ **ו-** $AC = 2R$ **האלכסון הראשי הוא קוטר המעגל הגדול.**

(1) נחשב את זוויות המשולש AOC .

מרכז מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות.

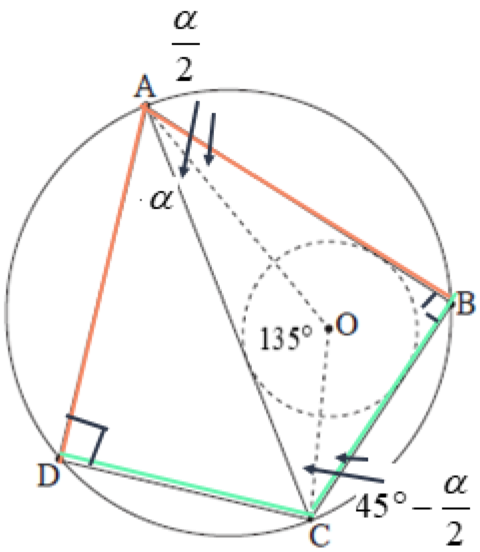
$$\sphericalangle CAB = \alpha \quad \to \sphericalangle BAO = \sphericalangle CAO = \frac{\alpha}{2}$$

$\sphericalangle ACB = 90° - \alpha$ **(סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔABC**)** .

$$\sphericalangle BCO = \sphericalangle ACO = 45° - \frac{\alpha}{2}$$

$\sphericalangle AOC = 135°$ **(סכום זוויות** $180°$ **ב-**ΔAOC**)** .

תשובה: $\sphericalangle CAO = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle ACO = 45° - \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle AOC = 135°$.



(2) נביע את אורך הקטע AO **באמצעות** R **ו-** α .

$\underline{\Delta AOC}$ **לפי משפט הסינוסים.**

$$\frac{AO}{\sin(45° - \frac{\alpha}{2})} = \frac{AC}{\sin 135°}$$

$$\boxed{AO = 2R\sqrt{2}\sin(45° - \frac{\alpha}{2})}$$

תשובה: $AO = 2R\sqrt{2}\sin(45° - \frac{\alpha}{2})$.

ב. נתון כי $AO = R\sqrt{2}$. **נמצא את** α .

$$2R\sqrt{2}\sin(45° - \frac{\alpha}{2}) = R\sqrt{2} \quad / : 2R\sqrt{2} > 0$$

$$\sin(45° - \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2} = \sin 30°$$

$$45° - \frac{\alpha}{2} = 30° + 360°k \qquad 45° - \frac{\alpha}{2} = 150° + 360°k$$

$$-\frac{\alpha}{2} = -15° + 360°k \qquad -\frac{\alpha}{2} = 105° + 360°k$$

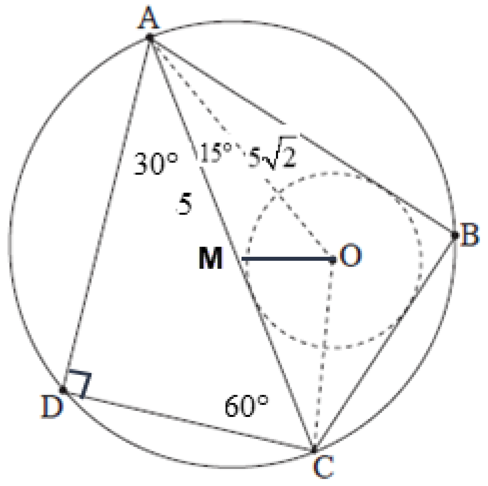
$$\alpha = 30° + 720°k \qquad \alpha = -210° + 720°k$$

$$\boxed{\alpha = 30°} \leftarrow 0° < \alpha < 90$$

תשובה: $\alpha = 30°$.

ג. נתון כי שטח הדלתון הוא $25\sqrt{3}$.

האלכסון הראשי בדלתון מחלק אותו לשני משולשים שווי שטח.



$$\frac{(2R)^2 \sin 30° \sin 60°}{2 \sin 90°} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$4R^2 \sin 30° \sin 60° = 25\sqrt{3}$$

$$R^2 = 25$$

$$\boxed{R = 5} \quad \leftarrow R > 0$$

תשובה: $R = 5$.

ד. נמצא את המרחק בין שני מרכזי המעגלים, את OM .

$\underline{\Delta AOM}$ **משפט הקוסינוסים**

$$(OM)^2 = (AM)^2 + (AO)^2 - 2AM \cdot AO \cdot \cos \sphericalangle OAM$$

$$(OM)^2 = 5^2 + (5\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5\sqrt{2} \cdot \cos 15°$$

$$(OM)^2 = 50 - 25\sqrt{3}$$

$$\boxed{OM = 2.588}$$

תשובה: המרחק בין מרכז המעגל החוסם את הדלתון לבין מרכז המעגל החסום ב- ΔABC **, הוא** 2.588 .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2a-x^2}{x}$ **,** $a>0$ **פרמטר, המוגדרת עבור** $x\neq 0$ **.**

נעבד את הפונקציה ונקבל: $f(x)=\frac{2a}{x}-x$ **, הנוחה יותר לתתי סעיפים (4) ו- (5).**

(1) תשובה: $x=0$ **אסימפטוטה אנכית.**

(2) נראה שהפונקציה $f(x)$ **היא אי-זוגית.**

$$f(-x)=\frac{2a}{-x}-(-x)$$

$$f(-x)=-(\frac{2a}{x}-x)$$

$$\boxed{f(-x)=-f(x)}$$

ולכן הפונקציה אי-זוגית, והגרף שלה סימטרי לראשית הצירים.

תשובה: הראינו שהפונקציה $f(x)$ **היא פונקציה אי-זוגית.**

(3) יש רק נקודת חיתוך עם ציר ה- x **, כי** $x\neq 0$ **בתחום ההגדרה.**

$$0=2a-x^2$$

$$x^2=2a \quad \rightarrow x=\mp\sqrt{2a}$$

תשובה: $(\sqrt{2a},0)$ **,** $(-\sqrt{2a},0)$ **.**

4) נמצא תחומי עלייה וירידה (אם יש כאלה).

$$\boxed{f'(x)=-\frac{2a}{x^2}-1}$$

$a>0$ **, ולכן הנגזרת היא הפרש בין ביטוי שלילי לביטוי חיובי, והיא שלילית עבור** $x\neq 0$ **.**

תשובה: עלייה – אף x **, ירידה -** $x>0$ **או** $x<0$ **.**

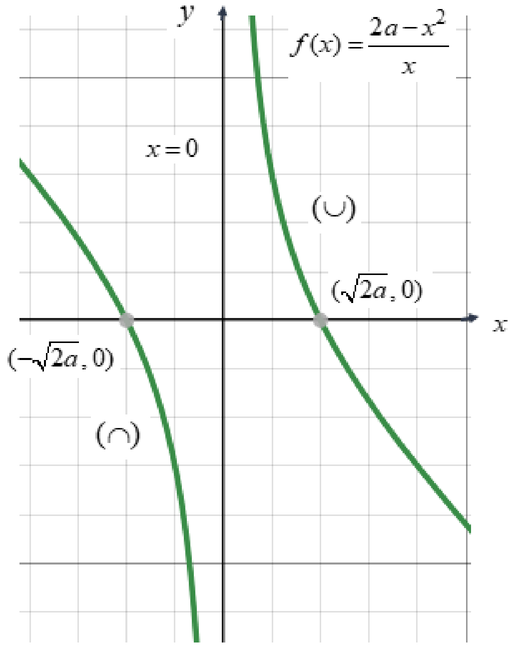
(5) נמצא את תחומי הקעירות של הפונקציה..

$$\boxed{f''(x)=\frac{4ax}{x^4}}$$

$a>0$ **, ולכן סימני הנגזרת השנייה, זהים לסימנו של המשתנה** x **.**

תשובה: קעירות כלפי מעלה $(\cup)$ **עבור** $x>0$ **, קעירות כלפי מטה** $(\cap)$ **עבור** $x<0$ **.**

ב. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



תשובה: הסרטוט מעל.

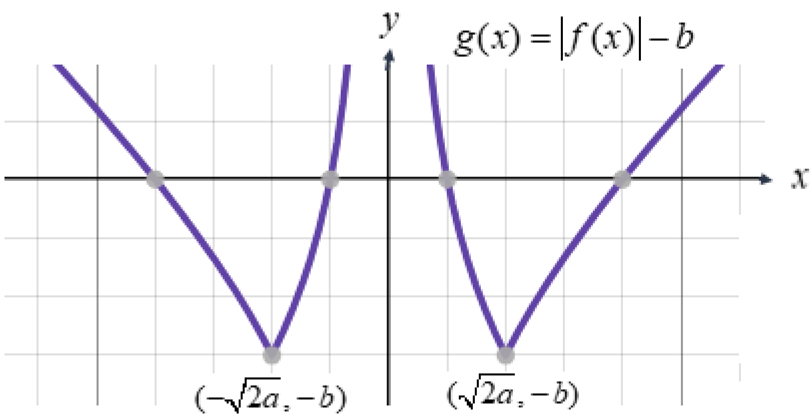
ג. נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)|-b$ **(** $b>0$**, פרמטר).**

זוהי טרנספורמציה של ערך מוחלט, שבו מתקפל החלק של הגרף שמתחת לציר ה- x **,**

סביב ציר ה- x **, והנקודות** $(\sqrt{2a},0)$ **,** $(-\sqrt{2a},0)$ **הופכות להיות נקודות מינימום, עם "שפיץ",**

כי הנגזרת אינה מוגדרת בנקודות אלו.

לאחר מכן הורדה אנכית b **יחידות, כך שהנקודות** $(\sqrt{2a},-b)$ **,** $(-\sqrt{2a},-b)$ **הן נקודות המינימום של** $g(x)$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל.

ד. $(2,-3)$ **היא אחת מנקודות הקיצון (מינימום) של** $g(x)$ **.**

מכאן ש- $b=3$ **, כי ההזה האנכית היא** 3 **יחידות כלי מטה.**

ו- $\sqrt{2a}=2 \quad \rightarrow 2a=4 \quad \rightarrow a=2$

תשובה: $a=2$ **,** $b=3$ **.**

ה. $f(x)=\frac{4-x^2}{x}$, $g(x)=\left|\frac{4-x^2}{x}\right|-3$.

נתונה גם הפונקציה $s(x)=\int_1^x g(t)\,dt$ **, המוגדרת עבור** $x>1$.

מכאן שפונקציה זו צוברת שטח (אינטגרל כפונקציית הצטברות),

שהוא חיובי כאשר הפונקציה $g(x)$ **מעל ציר ה-** x **ואז הפונקציה** $s(x)$ **עולה,**

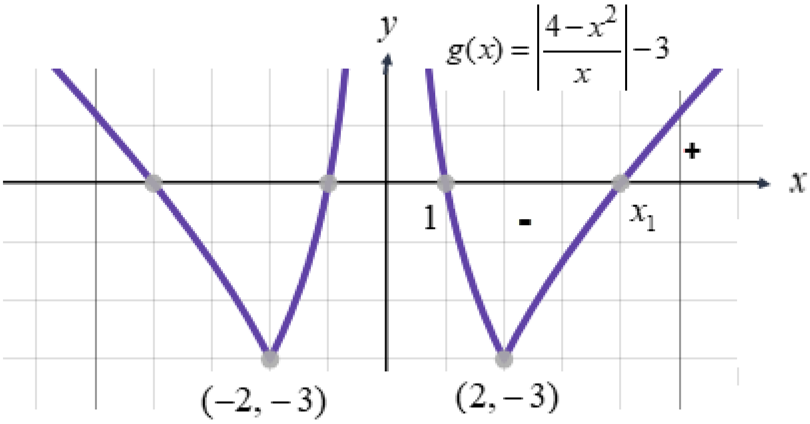
או שלילי כאשר הפונקציה $g(x)$ **מתחת לציר ה-** x **ואז הפונקציה** $s(x)$ **יורדת.**

השאלה היא מהן נקודות החיתוך של הפונקציה $g(x)$ **עם ציר ה-** x .

ניתן לפתור את המשוואה: $\left|\frac{4-x^2}{x}\right|-3=0 \rightarrow \left|\frac{4-x^2}{x}\right|=3 \rightarrow \frac{4-x^2}{x}=3 \cup \frac{4-x^2}{x}=-3$,

אבל תחילה שווה לבדוק את $g(1)$ **בגלל תחום ההגדרה של** $s(x)$.

$g(1)=\left|\frac{4-1^2}{1}\right|-3=|3|-3=0$ **, ולכן יש רק נקודת אפס אחת רלוונטית, מסומנת בציור כ-** x_1 .



עקב תחום ההגדרה של $s(x)$ **שהוא** $x>1$ **, השטח הנצבר ראשון הוא שלילי, ולאחר מכן חיובי.**

מכאן ש- $s(x)$ **עוברת מירידה לעלייה, ולכן** x_1 **מינימום.**

אפשרי גם על ידי הקשר בין פונקציה לנגזרת.

בתחום $x>1$ **הגרף של** $g(x)$ **הוא למעשה הנגזרת של** $s(x)$ **,**

וכאשר הנגזרת עוברת משליליות לחיוביות, יש לפונקציה המקורית נקודת מינימום.

תשובה: סוג נקודת הקיצון של $s(x)$ **הוא מינימום.**

א. (1) בתחום $x<0$ **מתקיים** $f\,'(x)$ **חיובית ולכן** $f(x)$ **עולה.**

בתחום $0<x<a$ **מתקיים** $f\,'(x)$ **שלילית ולכן** $f(x)$ **יורדת.**

תשובה: עבור $f(x)$ **- עלייה** $x<0$, **ירידה** $0<x<a$.

(2) בתחום $x<0$ **מתקיים** $f\,'(x)$ **עולה, ולכן** $f\,''(x)$ **חיובית ו-** $f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $(\cup)$.

בתחום $x>0$ **יש ל-** $f\,'(x)$ **קיצון מקסימום,**

ולכן בתחום $0<x<x_{\text{MAX}}$ $f(x)$ **קעורה כלפי מעלה** $(\cup)$,

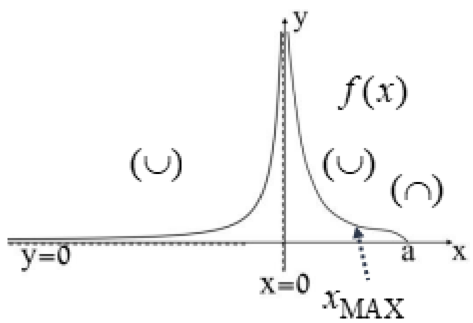
ובתחום $x_{\text{MAX}}<x<a$ $f(x)$ **קעורה כלפי מטה** $(\cap)$ **, ומתקבלת נקודת פיתול אחת.**

תשובה: לפונקציה $f(x)$ **יש נקודת פיתול אחת.**

ב. נתון כי הישר $y=0$ **הוא אסימפטוטה של גרף הפונקציה** $f(x)$.

ניתן לראות שעבור $x\to-\infty$ **מתקיים** $f\,'(x)\to 0$ **ולכן האסימפטוטה האופקית של** $f(x)$ **עבור** $x\to-\infty$.

כמו כן, הנקודה $(a,0)$ **היא נקודת מינימום, לאור תחומי העלייה והירידה, והנתון** $f(a)=0$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. הביטוי I. $\dfrac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ **מייצג את הפונקציה** $f(x)$.

נימוקים: הביטוי שבתוך השורש אי-שלילי עבור $x\le a$ **, והמכנה מתאפס עבור** $x=0$,

בהתאם לתחום ההגדרה של $f(x)$: $x\neq 0\,,\,x\le a$.

הביטוי $\dfrac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ **הוא אי-שלילי, דבר הבא לידי ביטוי בגרף הפונקציה שאינו מתחת לציר ה-** x .

שתי האסימפטוטות הן $x=0$ **ו-** $y=0$ $(x\to-\infty)$.

תשובה: הביטוי I. $\dfrac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ **מייצג את הפונקציה** $f(x)$.

ד. $f(x)=\frac{\sqrt{a-x}}{x^2}$ **, ונתון** $f'(-2)=\frac{7}{16}$ **(שיפוע המשיק שווה לערך הנגזרת בנקודה).**

$$f'(x)=\frac{\frac{-x^2}{2\sqrt{a-x}}-2x\sqrt{a-x}}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{-x^2-4x(a-x)}{2x^4\sqrt{a-x}}$$

$$\frac{7}{16}=\frac{-4+8(a+2)}{2\cdot16\sqrt{a+2}} \leftarrow f'(-2)=\frac{7}{16}$$

$$14t=-4+8t^2 \leftarrow \boxed{\sqrt{a+2}=t}$$

$$0=8t^2-14t-4$$

$$t=2 \rightarrow \sqrt{a+2}=2 \rightarrow \boxed{a=2}$$

$$t=-0.25 \rightarrow \sqrt{a+2}=-0.25 \rightarrow \varnothing$$

תשובה: $a=2$.

ה. נציב $a=2$**, ונקבל** $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{x^2}$.

נחשב את השטח המוגבל על ידי $(f(x))^2$ **שהיא פונקציה אי-שלילית, והגרף שלה מעל ציר ה-** x **,**

עם נקודת אפס $(2,0)$ **(נקודות האפס לא משתנות לאחר העלאה בריבוע של הפונקציה),**

ועל ידי הישר $x=1$

$$S=\int_1^2\left((f(x))^2-0\right)dx$$

$$S=\int_1^2\frac{2-x}{x^4}\,dx$$

$$S=\int_1^2(2x^{-4}-x^{-3})\,dx$$

$$S=\frac{2x^{-3}}{-3}-\frac{x^{-2}}{-2}\Big]_1^2$$

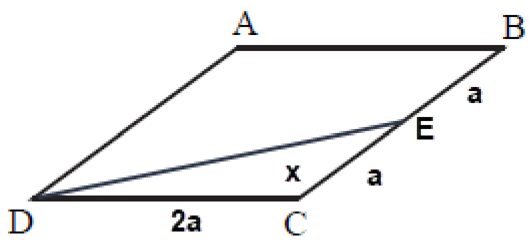
$$S=-\frac{2}{3x^3}+\frac{1}{2x^2}\Big]_1^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=2: & \frac{1}{24} \\ x=1: & -\frac{1}{6}\end{array}\right\} S=\frac{1}{24}-(-\frac{1}{6})=\frac{5}{24}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $\frac{5}{24}$.

א. נסמן את אורך צלע המעוין ב- $2a$ **(**$a>0$**).**

תחום ההגדרה הוא $0<x<\pi$ **, כי לא ידוע האם זווית** C **חדה או קהה.**



$$S_{\Delta ECD}=18$$

$$\frac{a\cdot 2a\cdot\sin x}{2}=18$$

$$a^2=\frac{18}{\sin x}$$

$$a=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}$$

$$\boxed{2a=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}}$$

תשובה: אורך צלע המעוין הוא $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}$.

ב. הפונקציה שיש להביא ל*מינימום* **היא** *אורך הקטע* DE.

<u>ΔECD</u> **משפט הקוסינוסים**

$$(DE)^2=(DC)^2+(EC)^2-2DC\cdot EC\cdot\cos\sphericalangle C$$

$$(DE)^2=\left(\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}\right)^2-2\cdot\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x$$

$$(DE)^2=\frac{72}{\sin x}+\frac{18}{\sin x}-\frac{72\cos x}{\sin x}$$

$$(DE)^2=\frac{90}{\sin x}-\frac{72\cos x}{\sin x}$$

$$\boxed{DE=\sqrt{\frac{90}{\sin x}-\frac{72\cos x}{\sin x}}}$$

נשים לב, הביטוי שבתוך השורש הוא חיובי, שכן מייצג אורך קטע, ולכן ניתן למצוא מינימום ל- $(DE)^2$.

ניתן לראות שאם $f(x)=\sqrt{g(x)}$ **, כאשר** $g(x)>0$ **, אז** $f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

וסימני הנגזרת שווים, וגם תחומי העלייה והירידה.

$$(\mathrm{DE})^2=\frac{90}{\sin x}-\frac{72\cos x}{\sin x}$$

$$\boxed{(\mathrm{DE})^2=18\cdot(\frac{5}{\sin x}-\frac{4\cos x}{\sin x})}$$

נמצא נקודת מינימום:

$$\left((\mathrm{DE})^2\right)'(x)=18\cdot\left(5\cdot\frac{-\cos x}{(\sin x)^2}-4\cdot\frac{-(\sin x)^2-(\cos x)^2}{(\sin x)^2}\right)$$

$$\left((\mathrm{DE})^2\right)'(x)=18\cdot\left(5\cdot\frac{-\cos x}{(\sin x)^2}+4\cdot\frac{(\sin x)^2+(\cos x)^2}{(\sin x)^2}\right)$$

$$\boxed{\left((\mathrm{DE})^2\right)'(x)=18\cdot\left(\frac{-5\cos x+4}{(\sin x)^2}\right)} \leftarrow (\sin x)^2+(\cos x)^2=1$$

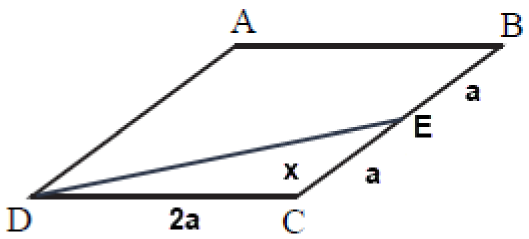
$$-5\cos x+4=0$$

$$\cos x=\frac{4}{5}$$

קיבלנו ש- זווית C חדה, אבל כאמור גודלה של הזווית לא השפיע על אופן פתירת התרגיל.

בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ הפונקציה $\cos x$ יורדת, ולכן הפונקציה $-5\cos x+4$ עולה,

ועוברת משליליות לחיוביות, ולכן כאשר $\cos x=\frac{4}{5}$ מתקבל מינימום.



$$\cos x=\frac{4}{5} \quad \rightarrow \sin x=+\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$$

$$\mathrm{DE}=\sqrt{\frac{90}{\sin x}-\frac{72\cos x}{\sin x}}$$

$$\mathrm{DE}=\sqrt{\frac{90}{\frac{3}{5}}-\frac{72\cdot\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}}$$

$$\boxed{\mathrm{DE}=3\sqrt{6}}$$

תשובה: האורך המינימלי של הקטע DE הוא $3\sqrt{6}$.