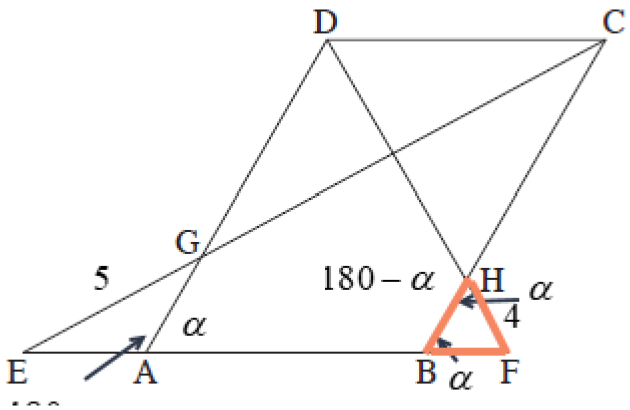
יואל גבע
לא מתפשרים.

פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023, מועד מיוחד , שאלון:35571

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה



א. נפתור באמצעות טריגונומטריה ומשפט הסינוסים.

נסמן $\sphericalangle HBF=\alpha$ **ומכאן ש-** $\sphericalangle EAD=180-\alpha$

(זוויות חד צדדיות משלימות ל- $180°$ **בין הצלעות הנגדיות המקבילות של המקבילית** $ABCD$ **.**

ΔHBF

$$\frac{HF}{\sin\alpha}=2R_{\Delta HBF}$$

$$\frac{4}{2\sin\alpha}=R_{\Delta HBF}$$

$$\frac{2}{\sin\alpha}=R_{\Delta HBF}$$

ΔGEA

$$\frac{EG}{\sin(180°-\alpha)}=2R_{\Delta GEA}$$

$$\frac{5}{2\sin\alpha}=R_{\Delta GEA}$$

$$\frac{2.5}{\sin\alpha}=R_{\Delta GEA}$$

ומכאן ש:

$$\frac{R_{\Delta HBF}}{R_{\Delta GEA}}=\frac{2}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{2.5}$$

$$\boxed{\frac{R_{\Delta HBF}}{R_{\Delta GEA}}=\frac{4}{5}}$$

תשובה: היחס הוא $4:5$.

ב. ונעבור לגיאומטריה של המישור.

$\sphericalangle GAB=\alpha$ **(זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$)

$\sphericalangle DHB=180°-\alpha$ **(זוויות נגדיות במרובע חסום במעגל משלימות ל-** $180°$)

$\sphericalangle FHB=\alpha$ **(זוויות צמודות משלימות ל-** $180°$)

$\sphericalangle FHB=\sphericalangle HBF$ **(כלל המעבר)**

$HF=BF$ **(אם שתי זוויות שוות, ב-** ΔHBF **, אז הצלעות מולן שווֹת)**

$HF=BH$ **(נתון)**

$HF=BH=BF$ **(כלל המעבר).**

תשובה: הוכחנו כי המשולש HBF **הוא שווה צלעות.**

ננתח תחילה את שני הביטויים.

ביטוי 1: $1-0.2^4-0.8^4$.

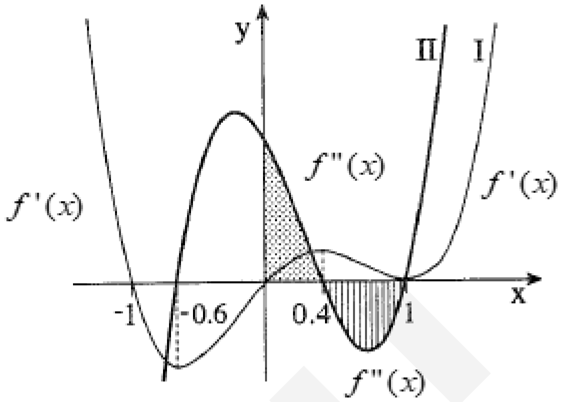
אם בוחרים 4 **אנשים מהיישוב באקראי, אז זו ההסתברות שלא כולם נשים ולא כולם גברים.**

ביטוי 2: $\binom{4}{3}\cdot 0.2^3\cdot 0.8+0.2^4$ **.**

אם בוחרים 4 **אנשים מהיישוב באקראי, אז זו ההסתברות שלפחות** 3 **מהם גברים.**

תשובה: I **ההסתברות לבחור באקראי יותר גברים מנשים מתאימה לביטוי 2.**

III **ההסתברות לבחור באקראי לפחות גבר אחד ולפחות אישה אחת מתאימה לביטוי 1.**



א. כאשר ל: $f'(x)$ יש נקודת קיצון, עבור פונקציות רציפות וגזירות לכל x , הרי שבוודאות $f''(x)=0$.

גרף I מתקיים קיצון עבור $x=1$ וגרף II מתאפס שם,

גרף I מתקיים קיצון עבור $x=0.4$ וגרף II מתאפס שם.

גרף I מתקיים קיצון עבור $x=-0.6$ וגרף II מתאפס שם.

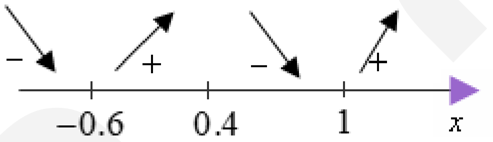
<u>נבדוק גם</u> :

האם תחומי החיוביות שליליות של גרף II - $f''(x)$

תואמים את תחומי העלייה והירידה של גרף I -$f'(x)$.

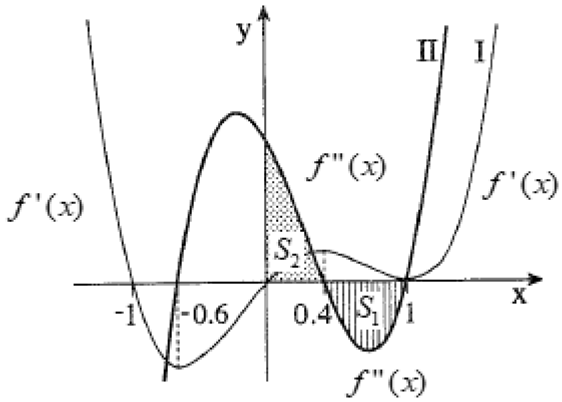
סימני $f''(x)$

ועלייה/ירידה של $f'(x)$



תשובה: גרף I - $f'(x)$, גרף II - $f''(x)$

ב. נחשב כל שטח בנפרד



$$S_1=\int_{0.4}^{1}(0-f''(x))\,dx=-f'(x)\Big]_{0.4}^{1}=-f'(1)+f'(0.4)=-0+f'(0.4)=f'(0.4)$$

$$S_2=\int_{0}^{0.4}(f''(x)-0)\,dx=f'(x)\Big]_{0}^{0.4}=f'(0.4)-f'(0)=f'(0.4)-0=f'(0.4)$$

כלומר: $S_1=S_2$

תשובה: הוּכַח שהשטחים שווים זה לזה.

נכתב ע"י עפר ילין

(1) נתון כי זווית הראש של כל אחד מהמשולשים שווים השוקיים, החל מהזווית השנייה,

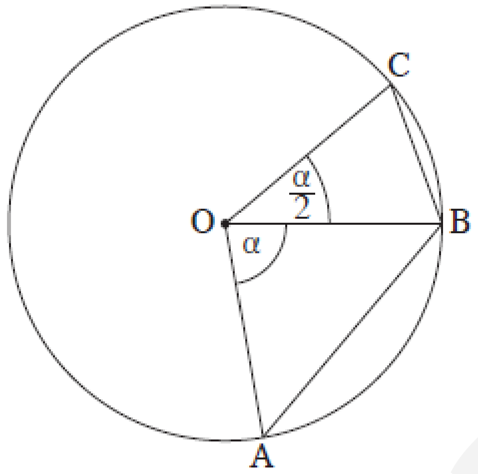
קטנה פי 2 **מזווית הראש של המשולש הקודם, ולכן** $q=\frac{1}{2}$,

והסדרה היא סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

$a_1=\alpha$ **במעלות, ו-** $q=\frac{1}{2}$,

כאשר $S=240°$ **סכום כל זוויות הראש של המשולשים שנוצרים באופן המתואר.**

נציב בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.



$$S=\frac{a_1}{1-q}$$

$$240°=\frac{\alpha}{1-0.5}$$

$$240°=\frac{\alpha}{0.5}$$

$$\boxed{\alpha=120°}$$

תשובה: $\alpha=120°$.

(2) כל המשולשים, שווי השוקיים, הם בעלי שוקיים השוות לרדיוס המעגל.

נסמן α_n **- זווית הראש של המשולש ה-** n**-י.**

שטח המשולש ה- n**-י הוא:** $T_n=\frac{R\cdot R\cdot\sin\alpha_n}{2}=0.5\cdot R^2\sin\alpha_n$

המנה בין שטחי שני משולשים עוקבים היא $\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{0.5R^2\cdot\sin\alpha_{n+1}}{0.5R^2\cdot\sin\alpha_n}=\frac{\sin\alpha_{n+1}}{\sin\alpha_n}$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{\sin\alpha_{n+1}}{\sin 2\alpha_{n+1}}=\frac{\sin\alpha_{n+1}}{2\sin\alpha_{n+1}\cos\alpha_{n+1}}$$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{1}{2\cos\alpha_{n+1}}$$

מכאן, שהמנה בין כל שני איברים עוקבים אינה קבועה, והסדרה אינה הנדסית.

תשובה: שטחי כל המשולשים האלה אינם סדרה הנדסית.

א. נתונה סדרה חשבונית A **ובה** $2n$ **איברים, מספר זוגי של איברים, שהפרשה הוא** d .

נתונה סדרה חשבונית נוספת B**, שמקיימת** $b_m = \frac{a_m + a_{m+1}}{2}$.

ברור שבסדרה זו $2n-1$ **איברים, כי** $b_{2n-1} = \frac{a_{2n-1} + a_{2n}}{2}$ **ולכן בסדרה זו איבר אחד פחות מהסדרה** A .

נוכיח שהסדרה B **חשבונית, ונביע באמצעות** d **את הפרשה.**

$$b_{m+1} - b_m = \frac{a_{m+1} + a_{m+2}}{2} - \frac{a_m + a_{m+1}}{2}$$

$$b_{m+1} - b_m = \frac{a_{m+1} + a_{m+2} - a_m - a_{m+1}}{2}$$

$$b_{m+1} - b_m = \frac{a_{m+2} - a_m}{2}$$

$$b_{m+1} - b_m = \frac{2d}{2}$$

$$\boxed{b_{m+1} - b_m = d}$$

ולכן, B **חשבונית, והפרשה זהה להפרש הסדרה** A.

תשובה: הסדרה B **חשבונית, והפרשה הוא** d.

ב. מסמנים ב- $\mathrm{S_A}$ **את סכום** $2n$ **האיברים בסדרה** A**, וב-** $\mathrm{S_B}$ **את סכום** $2n-1$ **האיברים בסדרה** B.

צריך להוכיח: $\frac{\mathrm{S_A}}{2n} = \frac{\mathrm{S_B}}{2n-1}$

	A	B
$\mathrm{A_1}$	a_1	$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{a_1 + a_1 + d}{2} = \frac{2a_1 + d}{2} = a_1 + \frac{d}{2}$
D	d	d
N	$2n$	$2n-1$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{2n}{2}(2a_1 + d(2n-1))}{2n} = \frac{\frac{2n-1}{2}(2(a_1 + \frac{d}{2}) + d(2n-2))}{2n-1}$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 + d(2n-1) = 2a_1 + d + d(2n-2)$$

$$\Leftrightarrow 2a_1 + d(2n-1) = 2a_1 + d(2n-1)$$

הראינו שאגף שמאל שווה לאגף ימין, ולכן הוכחנו את המתבקש.

תשובה: הוכחנו ש- $\frac{\mathrm{S_A}}{2n} = \frac{\mathrm{S_B}}{2n-1}$.

ג. נתון: $S_A = \frac{66}{65} \cdot S_B$ **ו-** $S_A = 220 + S_B$.

(1) $S_A = \frac{66}{65} \cdot S_B$, **והראינו כי** $\frac{S_A}{2n} = \frac{S_B}{2n-1}$.

$$\frac{66}{65} = \frac{2n}{2n-1}$$
$$132n - 66 = 130n$$
$$2n = 66$$
$$\boxed{n = 33}$$

תשובה: $n = 33$.

(2) $S_A = 220 + S_B$.

$$\frac{66}{65} S_B = 220 + S_B$$
$$\frac{1}{65} S_B = 220$$
$$\boxed{S_B = 14,300} \quad \rightarrow \boxed{S_A = 14,520}$$

שני האיברים האמצעיים בסדרה A **, הם** a_n **ו-** a_{n+1} .

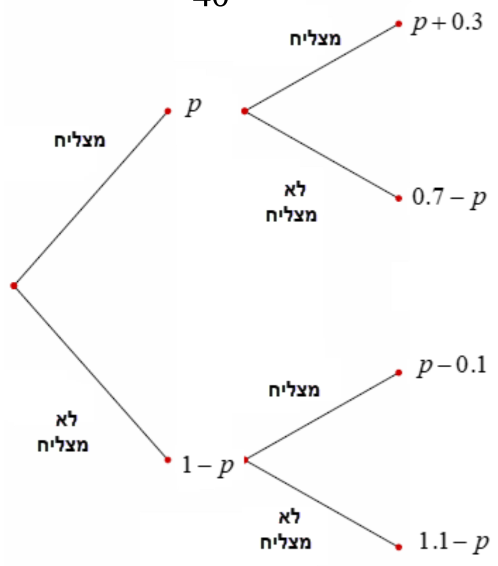
$$a_n + a_{n+1} = a_1 + d(n-1) + a_{2n} - d(n-1)$$
$$a_n + a_{n+1} = a_1 + a_{2n}$$

$$S_A = 14,520$$
$$\frac{66}{2}(a_1 + a_{2n}) = 14,520$$
$$\boxed{a_n + a_{n+1} = 440}$$

תשובה: סכום שני האיברים האמצעיים בסדרה A **הוא** 440.

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים, כאשר p **היא ההסתברות שמועמד יצליח במבחן הראשון** $(p>0.5)$ **.**

נתון כי ההסתברות שהמועמד יצליח בדיוק במבחן אחד מבין שני המבחנים היא $\frac{9}{40}$ **.**



$$p\cdot(0.7-p)+(1-p)\cdot(p-0.1)=\frac{9}{40}$$

$$0.7p-p^2+p-0.1-p^2+0.1p=\frac{9}{40}$$

$$-2p^2+1.8p-0.325=0$$

$$\boxed{p=0.65} \quad (p>0.5) \quad \cancel{p=0.25}$$

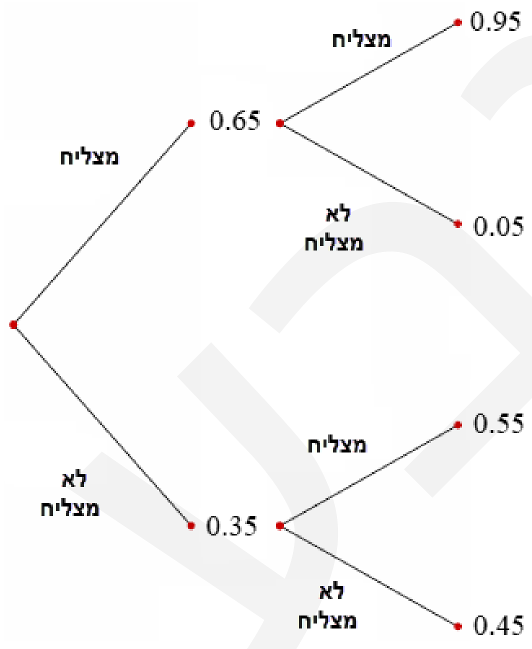
תשובה: $p=0.65$ **.**

נעדכן את עץ האפשרויות.

ב. כדי להתקבל ללימודים בפקולטה המועמד צריך להצליח בשני המבחנים.

ידוע כי המועמד הצליח לפחות במבחן אחד.

נחשב את ההסתברות שהוא התקבל לפקולטה.



$$P(\text{was admitted to the faculty} / \text{succeeded at least 1 test})=$$

$$=\frac{P(\text{was admitted to the faculty}\cap\text{succeeded at least 1 test})}{P(\text{succeeded at least 1 test})}=$$

$$=\frac{0.65\cdot0.95}{1-0.35\cdot0.45}=\frac{0.6175}{0.8425}=\frac{247}{337}\approx0.733$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{247}{337}\approx0.733$ **.**

ג. שלושה מועמדים נבחנו בשני המבחנים.

ההסתברות לקבלה, היא הסתברות להצלחה בשני המבחנים - $0.65\cdot 0.95=0.6175$ **.**

ההסתברות להיכשל בשני המבחנים היא $0.45\cdot 0.35=0.1575$ **.**

מספר האפשרויות ששני מועמדים מבין השלושה התקבלו לפקולטה, הוא המקדם הבינומי $3=\binom{3}{2}$ **.**

לכן ההסתברות ששני מועמדים מבין השלושה יתקבלו לפקולטה ואחד מהם נכשל בשני המבחנים היא:

$$P=3\cdot(0.6175)^2\cdot(0.1575)=0.1802$$

תשובה: ההסתברות היא 0.1802 **.**

ד. n **מועמדים נבחנו בשני המבחנים** $(n\geq 2)$**.**

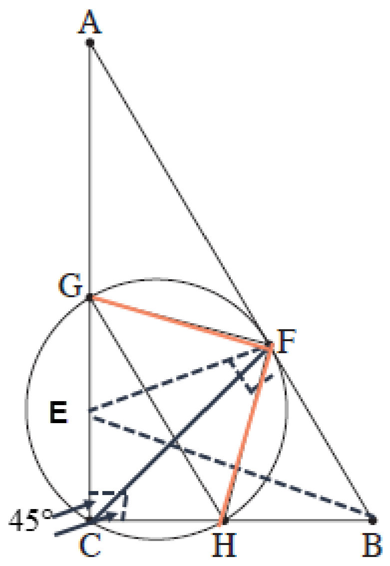
ההסתברות שלפחות מועמד אחד התקבל לפקולטה, וגם לפחות מועמד אחד לא התקבל לפקולטה,
היא המאורע המשלים למאורע "אף אחד לא התקבל, או כל n **המועמדים התקבלו".**

$$p=1-\left[(1-0.6175)^n+0.6175^n\right]$$

$$p=1-(0.3825^n++0.6175^n)$$

תשובה: ההסתברות היא $1-(0.3825^n+0.6175^n)$**.**

בגרות פג יוני 23 מועד קיץ מיוחד שאלון 35571



<u>נתונים</u>

1. ΔABC **ישר זווית** $(\sphericalangle ACB = 90°)$. **2.** $GCHF$ **חסום במעגל.**

3. AB **משיק ב-** F . **4.** $AB \parallel GH$.

עבור ג: 5. FE **נמצא על קוטר, החותך את** AC **בנקודה** E .

צ"ל: א. $FG = FH$

ב. (1) $\sphericalangle ACF$ **(2)** $\Delta GFC \sim \Delta FBC$

ג. $\sphericalangle FEB = \sphericalangle FCB$

הסבר	מס'	טענה	נימוק
3	6	$\sphericalangle AFG = \sphericalangle GHF$	זווית בין משיק למיתר
4	7	$\sphericalangle AFG = \sphericalangle FGH$	זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים
7 ,6	8	$\sphericalangle GHF = \sphericalangle FGH$	כלל המעבר
8	9	$FG = FH$	מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות ΔFGH
		מ.ש.ל. א	
9	10	$FG = FH$	למיתרים שווים קשתות שוות (מאותו צד)
10	11	$\sphericalangle ACF = \sphericalangle HCF$ (ז)	על קשתות שוות נשענות זוויות היקפיות שוות
11 ,1	12	$\sphericalangle ACF = 45°$	
		מ.ש.ל. ב (1)	
3	13	$\sphericalangle BFC = \sphericalangle FGC$ (ז)	זווית בין משיק למיתר
13 ,11	14	$\Delta GFC \sim \Delta FBC$	משפט דמיון זוויות זווית
		מ.ש.ל. ב (2)	
5 ,3	15	$\sphericalangle EFB = 90°$	הקוטר מאונך למשיק בנקודת ההשקה
15 ,1	16	$\sphericalangle EFB + \sphericalangle ACB = 180°$	
15 ,1	17	$GCHF$ בר חסימה	סכום זוויות נגדיות $180°$
17	18	$\sphericalangle FEB = \sphericalangle FCB$	על קשת משותפת FB זוויות היקפיות שוות
		מ.ש.ל. ג	

ב. <u>נתונים ומשמעויות גיאומטריות</u>

ΔABC **חסום במעגל שרדיוסו** R.

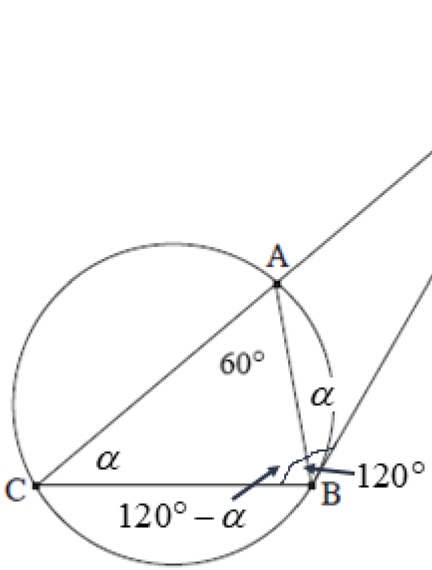
$\sphericalangle ABD = \alpha$

$\sphericalangle C = \alpha$ **(זווית בין משיק למיתר).**

$\sphericalangle DBC = 120°$

$\sphericalangle CBA = 120° - \alpha$

$\sphericalangle CAB = 60°$ **(סכום זוויות** $180°$ **ב-** ΔABC**).**



נביע את אורך הצלעות AB **ו-** BC **באמצעות** R **ו-** α**.**

$\underline{\Delta ABC}$ **לפי משפט הסינוסים.**

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\boxed{AB = 2R\sin\alpha}$$

$\underline{\Delta ABC}$ **לפי משפט הסינוסים.**

$$\frac{BC}{\sin 60°} = 2R$$

$$\boxed{BC = R\sqrt{3}}$$

תשובה: $AB = 2R\sin\alpha$ **,** $BC = R\sqrt{3}$**.**

ב. נתון כי $\frac{S_{\Delta BDC}}{S_{\Delta BDA}} = 1.8$ **. נמצא את** α **.**

$\Delta BDC \sim \Delta ADB$ **(משפט דמיון זווית זווית)**

$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AB} = \frac{DC}{DB}$ **(יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים)**

$\frac{BC}{AB} = \sqrt{1.8}$ **(יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון)**

$$\frac{R\sqrt{3}}{2R\sin\alpha} = \sqrt{1.8}$$

$$\frac{3}{4\sin^2\alpha} = 1.8$$

$$\frac{5}{12} = \sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$\boxed{\alpha = 40.2°} \leftarrow 0° < \alpha < 60°$$

תשובה: $\alpha = 40.2°$**.**

ג. נתון כי רדיוס המעגל החסום במשולש BDA **הוא** 4 .

רדיוס מעגל חסום הוא מפגש חוצי זוויות, לכן נעביר חוצי זוויות.

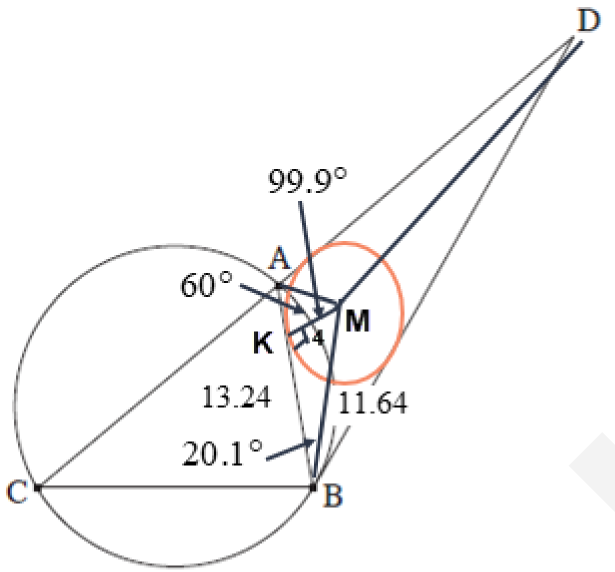
נחשב את זוויות משולש AMB **, כאשר** $MK = 4$ **הוא רדיוס המעגל החסום.**

נחשב את הצלע AB **ונשווה אותה ל-** $AB = 2R\sin 40.2°$

$$\sphericalangle DAB = 120° \quad \rightarrow \sphericalangle BAM = 60°$$

$$\sphericalangle DBA = 40.2° \quad \rightarrow \sphericalangle ABM = 20.1°$$

$$\sphericalangle AMB = 99.9°$$



$\underline{\Delta KMB}$ **(** $\sphericalangle MKB = 90°$ **).**

$$\sin 20.1° = \frac{MK}{MB}$$

$$MB = \frac{4}{\sin 20.1°}$$

$$\boxed{MB = 11.64}$$

$\underline{\Delta AMB}$ **לפי משפט הסינוסים.**

$$\frac{MB}{\sin 60°} = \frac{AB}{\sin 99.9°}$$

$$\frac{11.64\sin 99.9°}{\sin 60°} = AB$$

$$\boxed{AB = 13.24}$$

$$AB = 2R\sin 40.2°$$

$$13.24 = 2R\sin 40.2°$$

$$\frac{13.24}{2\sin 40.2°} = R$$

$$\boxed{R = 10.26}$$

תשובה: $R = 10.26$.

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sin x\cdot\cos^3 x$ **, המוגדרת בתחום** $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ **.**

(1) נבדוק האם הפונקציה $f(x)$ **היא זוגית <u>או</u> אי-זוגית.**

$$f(-x)=\sin(-x)\cdot\cos^3(-x)$$
$$f(-x)=-\sin x\cdot\cos^3 x$$
$$\boxed{f(-x)=-f(x)}$$

ומכאן שהפונקציה אי-זוגית, והגרף שלה סימטרי לראשית הצירים, עם נקודת פיתול בראשית.

תשובה: הפונקציה $f(x)$ **היא אי-זוגית.**

(2) $(0,0)$ **היא נקודת החיתוך עם ציר ה-** y **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=\sin x\cdot\cos^3 x$$
$$0=\cos x \qquad\qquad \sin x=0$$
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \qquad\qquad x=\pi k$$
$$\boxed{(-\frac{\pi}{2},0)},\ \boxed{(\frac{\pi}{2},0)},\ \boxed{(0,0)}$$

תשובה: $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(0,0)$ **,** $(-\frac{\pi}{2},0)$**.**

(3) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **ונקבע את סוגן.**

נקודות קצה: $(\frac{\pi}{2},0)$ **,** $(-\frac{\pi}{2},0)$**, שתהיינה גם נקודות קיצון.**

$$\boxed{f(x)=\sin x\cdot\cos^3 x}$$
$$f'(x)=\cos^4 x-3\sin^2 x\cos^2 x$$
$$\boxed{f'(x)=\cos^2 x\quad(\cos^2 x-3\sin^2 x)}$$
$$0=\cos x$$
$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad\rightarrow \boxed{(-\frac{\pi}{2},0)},\ \boxed{(\frac{\pi}{2},0)}$$

נשים לב שאלו אומנם נקודות קצה של הפונקציה, שתהיינה נקודות קיצון קצה,
אבל בתחום גדול יותר הן היו נקודות פיתול שכן הנגזרת לא מחליפה בהן סימן,
וציר ה- x **הוא המשיק בהן.**

$$\cos^2 x - 3\sin^2 x = 0$$

$$-3\sin^2 x = -\cos^2 x \quad / : -3\cos^2 x \neq 0$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{3}$$

$$\tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$\boxed{(-\frac{\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{16})} \quad \boxed{(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16})}$$

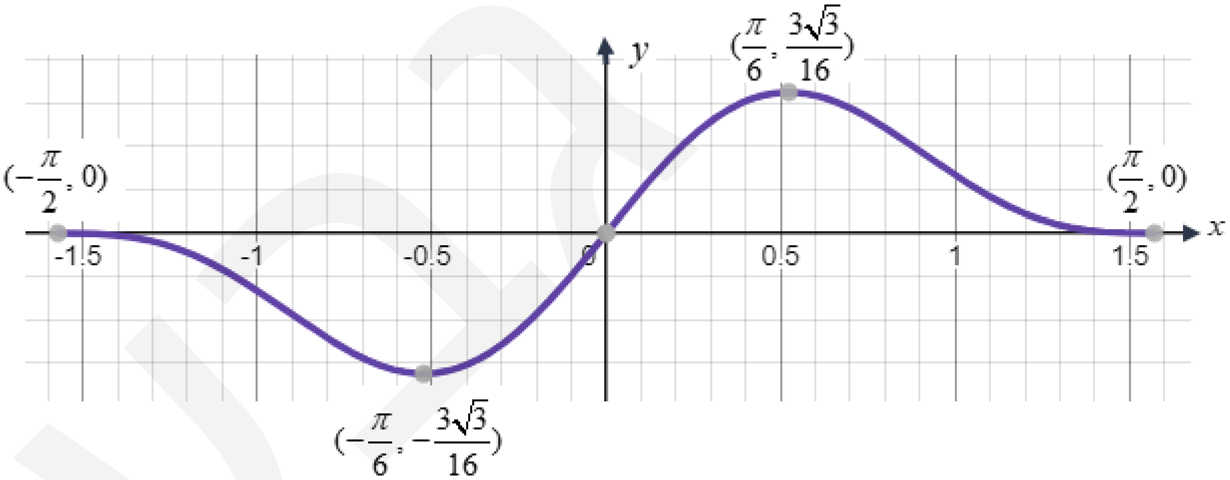
נוכיח את סוג הקיצון, על פי ערכי הפונקציה.

x	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0		$\frac{3\sqrt{3}}{16}$		$-\frac{3\sqrt{3}}{16}$		0
מקסום	**Min**	↘	**Max**	↗	**Min**	↘	**Max**

תשובה: $(\frac{\pi}{2}, 0)$ **מינימום,** $(\frac{\pi}{6}, \frac{3\sqrt{3}}{16})$ **מקסימום,** $(-\frac{\pi}{6}, -\frac{3\sqrt{3}}{16})$ **מינימום ,** $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ **מקסימום.**

(4) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x$



תשובה: הסקיצה מעל.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ **.**

(1) $g(x)$ **מוגדרת בתחום שבו** $f(x)>0$ **, כלומר בתחום החיוביות של** $f(x)$ **.**

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ **הוא** $0<x<\frac{\pi}{2}$ **.**

(2) פונקציית השורש שומרת על תחומי העלייה והירידה של הפונקציה המקורית.

פונקציית $g(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ **מחליפה תחומי עלייה וירידה,**

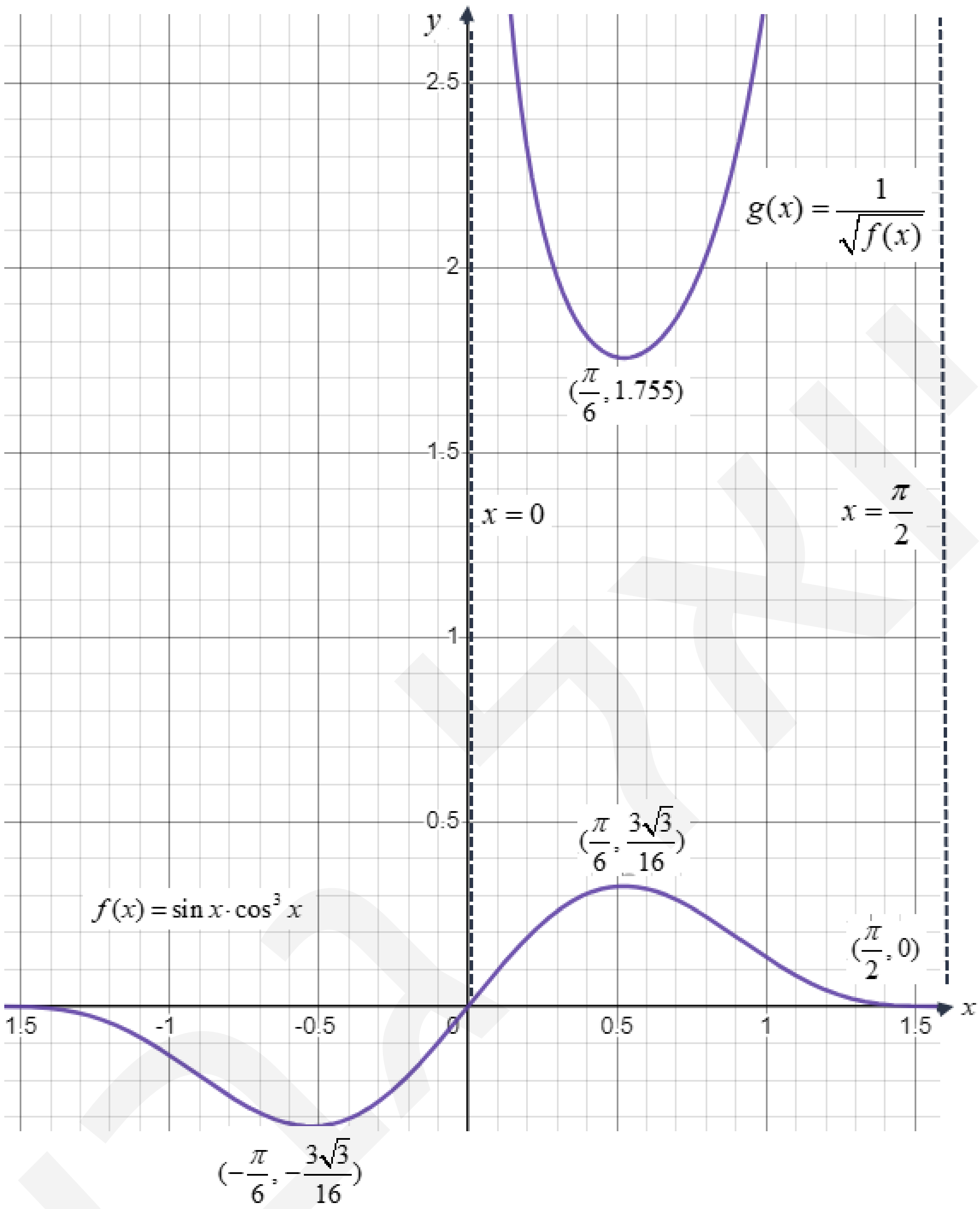
ולכן בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ **נקבל** $(\frac{\pi}{6},1.755)$ **מינימום,**

כאשר מימין ומשמאל שתי אסימפטוטות אנכיות: $x=\frac{\pi}{2}$ **ו-** $x=0$ **, ואין קיצון בקצוות כמובן.**

מובן שניתן גם להראות: $g'(x)=-\frac{f'(x)}{2f(x)\sqrt{f(x)}}$ **, ותחומי עלייה וירידה מתחלפים בתחום ההגדרה.**

תשובה: שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ **הם** $(\frac{\pi}{6},1.755)$ **מינימום.**

(3) **נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה** $g(x)$ **על אותה מערכת צירים.**



תשובה: הסקיצה מעל.

ג. בתחום ההגדרה המשותף $0<x<\frac{\pi}{2}$:

הערך המקסימלי של $f(x)$ **הוא** $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ **, והערך המינימלי של** $g(x)$ **הוא** 1.755 .

ולכן, המרחק המינימלי בין הפונקציות $f(x)$ **ו-** $g(x)$ **הוא** $1.755-\frac{3\sqrt{3}}{16}\approx 1.43$.

תשובה: המרחק המינימלי בין הפונקציות $f(x)$ **ו-** $g(x)$ **הוא** 1.43 .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x+\sqrt{x^2-4}$.

הערה: ההסברים הם קצת מעבר למתבקש בבגרות, למטרת הקניית ידע נוסף והעשרה.

(1) נמצא את תחום ההגדרה, כאשר הביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$x^2-4\ge 0$ **, נקבל פרבולה בעלת מינימום, שמתאפסת עבור** $x=-2,2$ **, וחיובית מימין ומשמאל.**

תשובה: תחום ההגדרה של $f(x)$ **הוא** $x\ge 2$ **או** $x\le -2$.

(2) בנקודת חיתוך עם ציר x **מתקיים** $y=0$.

$$0=x+\sqrt{x^2-4}$$
$$-x=\sqrt{x^2-4} \quad ()^2$$
$$x^2=x^2-4$$

אין פתרון.

תשובה: אין נקודות חיתוך עם ציר x .

(3) נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

$(2,2)$ **ו-** $(-2,-2)$ **הן נקודות קצה, ולכן תהיינה גם נקודות קיצון.**

$$f'(x)=1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4}}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}}}$$

הביטוי שבמונה הוא $f(x)$ **, שאינו מתאפס על-פי תת סעיף א(1),**

ולכן הנגזרת אינה מתאפסת, ואין נקודות קיצון, פרט לנקודות הקצה.

$$f'(-3)=\frac{(-)}{(+)}<0 \ \searrow \quad , \quad f'(3)=\frac{(+)}{(+)}>0 \ \nearrow$$

מסקנה: $(2,2)$ **מינימום, ו-** $(-2,-2)$ **מינימום.**

תשובה: עלייה - $x>2$ **, ירידה** $x<-2$.

(4) נמצא את תחומי הקעירות של הפונקציה $f(x)$.

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\cdot$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}-\frac{x\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{x^2-4-x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4}$$

$$\boxed{f''(x)=\frac{-4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}}$$

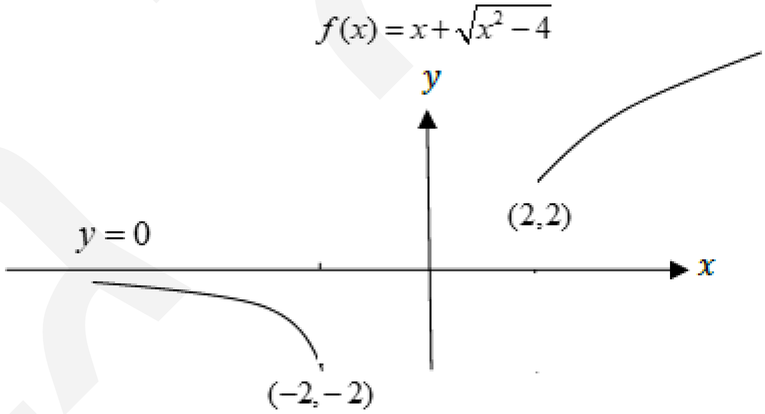
הביטוי שבמונה הוא שלילי, המכנה חיובי בתחום ההגדרה, ולכן הנגזרת השנייה שלילית בתחום ההגדרה.

תשובה: $f(x)$ קעורה כלפי מטה $(\cap)$ עבור $x>2$ או $x<-2$, וקעורה כלפי מעלה $(\cup)$ לאף x.

ב. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$:

לפני כן שתי הצבות מומלצות: $x=-1{,}000\,,\,y=-2\cdot10^{-3}\to0^-$, $x=1{,}000\,,\,y\approx2000\to+\infty$.

ומקבלים: אסימפטוטה אופקית לשמאל: $y=0$ $(x\to-\infty)$ (העשרה בסוף התרגיל).



תשובה: הסרטוט מעל.

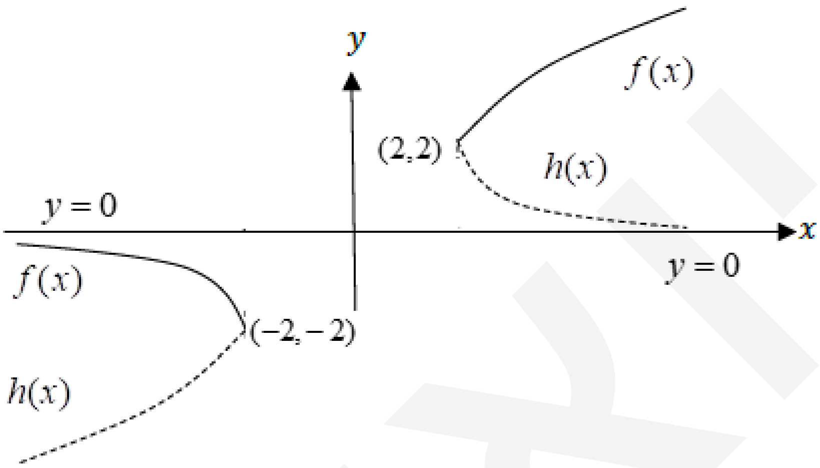
ב. נתונה הפונקציה $h(x)=-f(-x)$.

יש כאן טרנספורמציה כפולה.

$f(-x)$ **היא פונקציה סימטרית לפונקציה** $f(x)$ **, כאשר ציר הסימטריה הוא ציר ה-** y .

$-f(-x)$ **היא פונקציה סימטרית לפונקציה** $f(-x)$ **, כאשר ציר הסימטריה הוא ציר ה-** x .

מסקנה: ראשית הצירים היא נקודת הסימטריה של $f(x)$ **ו-** $h(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ג. נתון $a>4$ **הוא פרמטר.**

בסקיצה שמעל ניתן לראות ש- $f(x)>h(x)$ **עבור** $x>2$ **או** $x<-2$ **לכן שלושת הביטויים חיוביים.**

עקב הסימטריה לראשית הצירים נקבל ש- $\int_{a-2}^{a-1}(f(x)-h(x))\,dx=\int_{-a+1}^{-a+2}(f(x)-h(x))\,dx$.

לשלושת הביטויים גבולות הגדולים זה מזה באחת, ולכן קיים רוחב זהה לשטח המתאים.

בתחום $x>2$ $f(x)$ **עולה ו-** $h(x)$ **יורדת, ולכן ההפרש ביניהן הולך וגדל, ככל שהגבולות נעים ימינה.**

מכאן ש- $\int_{a+1}^{a+2}(f(x)-h(x))\,dx<\int_{a}^{a+1}(f(x)-h(x))\,dx<\int_{a-2}^{a-1}(f(x)-h(x))\,dx$.

תשובה: $\text{III}<\text{I}<\text{II}$.

העשרה

נתונה הפונקציה $f(x)=x+\sqrt{x^2-4}$ **, המוגדרת בתחום** $x\ge 2$ **או** $x\le -2$.

$$f(x)=x+\sqrt{x^2-4}=x+|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x+|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty} x+x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\to 1=x+x=2x\to+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x+|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to-\infty} x-x\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\to 1=x-x\to 0$$

ומקבלים: אסימפטוטה אופקיות לשמאל: $y=0$ $(x\to-\infty)$.

א. ישר ששיפועו -2 **חותך את החלק החיובי של ציר ה-** x **בנקודה** B.

נסמן: $OE = p$ **, ושטח המשולש** OED **הוא** $\frac{p}{2}$.

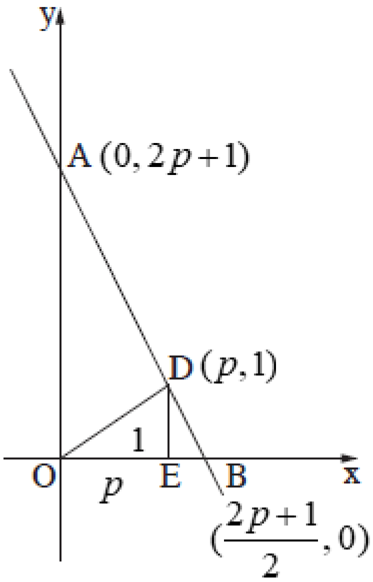
לכן: $DE = 1 \rightarrow \frac{p}{2} = \frac{p \cdot DE}{2}$ **ושיעורי הנקודה** D **הם** $(p,1)$.

נביע באמצעות p **את משוואת הישר** AB .

$$y - 1 = -2(x - p)$$

$$\boxed{y = -2x + 2p + 1}$$

תשובה: משוואת הישר AB **היא** $y = -2x + 2p + 1$.



ב. הפונקציה שיש להביא *למינימום* היא היחס $f(p) = \frac{S_{\Delta OED}}{S_{\Delta ABO}}$.

שיעורי הנקודה A **, שעל ציר ה-** y **שבו** $x = 0$ **, הם** $(0, 2p+1)$.

שיעורי הנקודה B **, שעל ציר ה-** y **שבו** $y = 0$,

הם $(\frac{2p+1}{2}, 0) \leftarrow x = \frac{2p+1}{2} \quad \leftarrow \quad 0 = -2x + 2p + 1$.

$$S_{\Delta ABO} = \frac{OB \cdot OA}{2} = \frac{\frac{(2p+1)}{2} \cdot (2p+1)}{2} = \frac{(2p+1)^2}{4}$$

$$f(p) = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{(2p+1)^2}{4}}$$

$$\boxed{f(p) = \frac{2p}{(2p+1)^2}}$$

$$f'(p) = 2 \cdot \frac{(2p+1)^2 - 2p(2p+1) \cdot 2}{(2p+1)^4} \ .$$

$$f'(p) = 2 \cdot \frac{(2p+1)(2p+1-4p)}{(2p+1)^4}$$

$$\boxed{f'(p) = 2 \cdot \frac{-2p+1}{(2p+1)^3}}$$

$$-2p + 1 = 0 \quad \rightarrow \boxed{p = 0.5}$$

המכנה חיובי, בתחום הבעיה $p > 0$ **, המונה הוא של קו ישר יורד,**

העובר מחיוביות לשליליות עבור $p = 0.5$ **, ולכן** $f(p)$ **עוברת מעלייה לירידה ו-** $p = 0.5$ **מקסימום.**

תשובה: $p = 0.5$ **, עבורו היחס** $S_{\Delta OED} : S_{\Delta ABO}$ **הוא מקסימלי.**

נכתב ע"י עפר ילין

נכתב ע"י עפר ילין