פתרון הבחינה

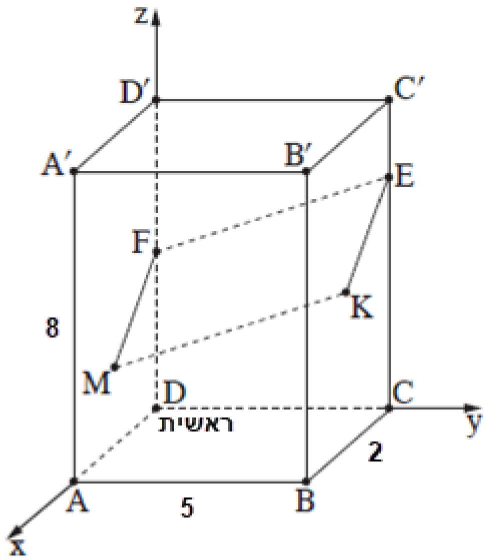
במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023, מועד ב', שאלון:35472

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ **, הממוקמת במערכת הצירים, כך שהקודקוד** D **נמצא בראשית הצירים.**

הקודקודים A C **ו-** D' **נמצאים על החלקים <u>החיוביים</u> של שלושת הצירים.**



(1) נפח התיבה הוא 80 **. בסיס התיבה הוא מלבן** $ABCD$ **, שצלעותיו הם** $AD=2$ **ו-** $DC=5$,

ולכן שטח בסיס התיבה הוא $2\cdot5=10$.

בהתאם, גובה התיבה הוא $80:10=8$.

הקודקוד D' **נמצא על החלק החיובי של ציר ה-** z ,

כאשר $DD'=8$ **והקודקוד** D **בראשית, ולכן** $D'(0,0,8)$.

תשובה: $D'(0,0,8)$.

(2) $AD=2$ **והקודקוד** A **נמצא על החלק החיובי של ציר ה-** x **והקודקוד** D **בראשית, ולכן** $A(2,0,0)$.

$DC=5$ **והקודקוד** C **נמצא על החלק החיובי של ציר ה-** y **והקודקוד** D **בראשית, ולכן** $C(0,5,0)$.

ובהתאם, שיעורי קודקוד הבסיס B **הם** $B(2,5,0)$.

$CC'=DD'=8$ **, כאשר** CC' **מאונך למישור** $z=0$ **, ולכן** $C'(0,5,8)$.

תשובה: $A(2,0,0)$, $B(2,5,0)$, $C(0,5,0)$, $C'(0,5,8)$.

ב. $\boxed{E(0,5,6)}\ \leftarrow\ CE=\frac{3}{4}CC'=\frac{3}{4}\cdot8=6\ \leftarrow\ \overrightarrow{CE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CC'}$.

הנקודה F **היא אמצע המקצוע** DD' **, לכן** $F(0,0,4)\ \leftarrow\ z_F\dfrac{z_D+z_{D'}}{2}=\dfrac{0+8}{2}=4$.

הנקודה K **היא מפגש אלכסוני הפאה המלבנית** $BB'C'C$ **, החוצים זה את זה,**

ולכן $K(1,5,4)\ \leftarrow\ K(\frac{2+0}{2},\frac{5+5}{2},\frac{0+8}{2})\ \leftarrow\ K(\frac{x_B+x_{C'}}{2},\frac{y_B+y_{C'}}{2},\frac{z_B+z_{C'}}{2})$

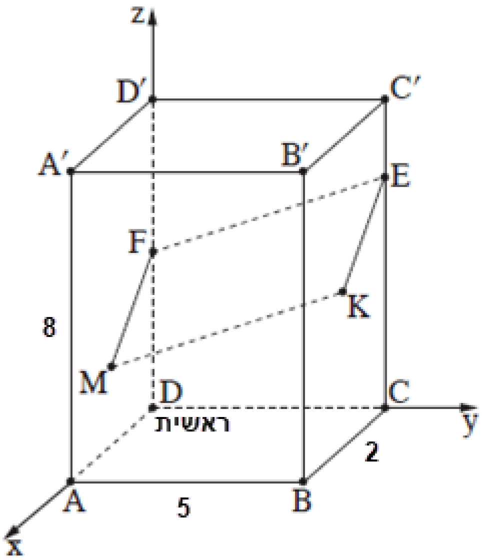
תשובה: $E(0,5,6)$, $F(0,0,4)$, $K(1,5,4)$.

ג. (1) נחשב את גודל הזווית $\sphericalangle FEK$.

מצאנו כי : $E(0,5,6)$, $F(0,0,4)$, $K(1,5,4)$.

פתרון בעזרת ווקטורים

תכנון: $\cos\sphericalangle FEK = \frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EK}}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\overrightarrow{EK}|}$



$$\overrightarrow{EF} = \underline{F} - \underline{E} = \underline{x} = (0,-5,-2)$$

$$\overrightarrow{EF} = \sqrt{0^2+(-5)^2+(-2)^2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EF} = \sqrt{29}}$$

$$\overrightarrow{EK} = \underline{K} - \underline{E} = \underline{x} = (1,0,-2)$$

$$\overrightarrow{EK} = \sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{EK} = \sqrt{5}}$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EK} = (0,-5,-2)\cdot(1,0,-2)$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EK} = 0\cdot1+(-5)\cdot0+(-2)\cdot(-2)$$

$$\boxed{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EK} = 4}$$

$$\cos\sphericalangle FEK = \frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EK}}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\overrightarrow{EK}|}$$

$$\cos\sphericalangle FEK = \frac{4}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\sphericalangle FEK = 70.599^\circ \approx 70.6^\circ}$$

תשובה: $\sphericalangle FEK = 70.599^\circ \approx 70.6^\circ$.

(2) נחשב את שטח המקבילית $FEKM$.

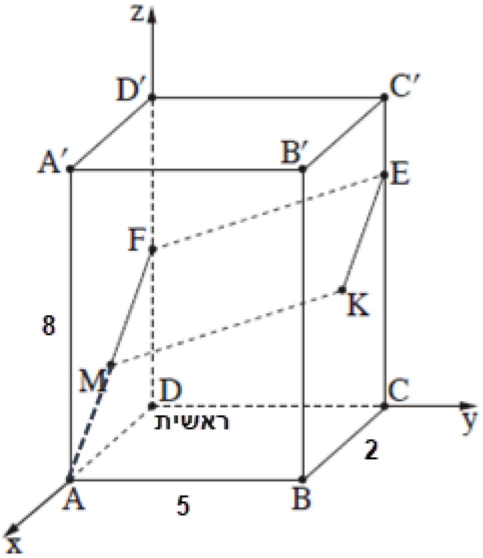
$$S_{FEKM} = |\overrightarrow{EF}|\cdot|\overrightarrow{EK}|\cdot\sin\sphericalangle FEK$$

$$\boxed{S_{FEKM} = 11.358 \approx 11.36}$$

תשובה: שטח המקבילית $FEKM$ **הוא** $11.358 \approx 11.36$.

ד. (1) נמצא את שיעורי הנקודה M .

$FEKM$ מקבילית, ולכן צלעות נגדיות שוות ומקבילות.



$$\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{EF}$$

$$\overrightarrow{EF} = (0, -5, -2)$$

$$\underline{M} = \underline{K} + \underline{(0, -5, -2)}$$

$$\underline{M} = (1, 5, 4) + \underline{(0, -5, -2)} \quad \rightarrow \boxed{M(1, 0, 2)}$$

תשובה: $M(1, 0, 2)$

(2) נסביר מדוע הנקודות F , M ו- A נמצאות על אותו ישר.

מצאנו כי: $A(2, 0, 0)$, $M(1, 0, 2)$, $F(0, 0, 4)$.

"קל" לראות שהנקודה M היא אמצע הקטע AF .

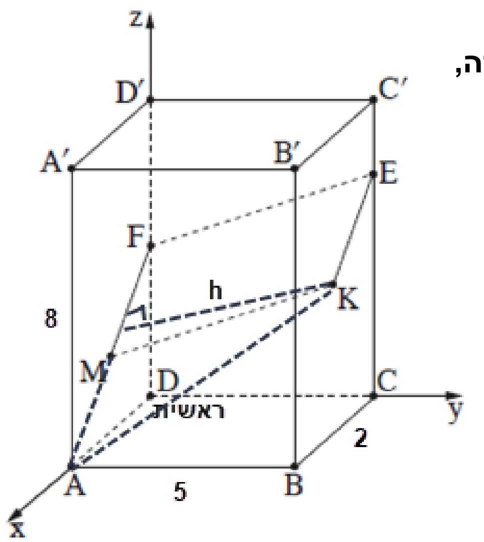
אבל, נוכיח בדרך הסדורה.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AM} = \underline{M} - \underline{A} = \underline{x} = (-1, 0, 2) \\ \overrightarrow{AF} = \underline{F} - \underline{A} = \underline{x} = (-2, 0, 4) \end{array}\right\} \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AM}$$

לכן שני הווקטורים האלו קולינאריים, ומכיון שיוצאים מאותה נקודה,

הרי שהנקודות F , M ו- A נמצאות על אותו ישר.

תשובה: הוכחנו שהנקודות F , M ו- A נמצאות על אותו ישר.



(3) כיוון שהנקודות F , M ו- A נמצאות על אותו ישר,

אז יש גובה משותף (h בציור) מהקודקוד K ,

לצלע AM של המשולש ולצלע MF של המקבילית ,

השוות זו לזו על פי תת-סעיף (2).

נמצא את היחס המבוקש:

$$\frac{S_{\text{FEKM}}}{S_{\Delta\text{AMK}}} = \frac{\text{EF} \cdot h}{\text{AM} \cdot h \cdot 0.5} = \frac{1}{0.5} = 2$$

תשובה: שטח המקבילית $FEKM$ גדול פי 2 משטח המשולש AMK .

א. מרצה באוניברסיטה רצתה לבדוק אם היעדרות משיעורים בקורס שנתי (המשתנה x),

קשורה ליניארית לציון במבחן הסופי (המשתנה y).

נתון: ממוצע ההיעדרויות מן השיעורים היה $\bar{x}=10$, הציון הממוצע היה $\bar{y}=70$.

בנוסף, מקדם המתאם היה שלילי $(r<0)$.

המרצה מצאה את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y מ- x.

שיפוע ישר הרגרסיה נתון על פי הנוסחה $m=r\cdot\frac{s_y}{s_x}$.

סטיות התקן לא יכולות להיות אפס, כי אז מקדם המתאם , שהוא ממוצע מכפלות ציוני התקן, לא מוגדר.

לכן סטיות התקן חיוביות, ומכאן שסימני שיפוע ישר הרגרסיה שווים לסימני מקדם המתאם, ולכן $m<0$.

ישר הרגרסיה עובר בנקודת הממוצעים, שהיא $(10,70)$.

לסיכום $m<0$ והישר עובר בנקודה $(10,70)$, ולכן המשוואה המתאימה היא .4 $y=-2x+90$.

תשובה: המשוואה .4 $y=-2x+90$ היא המשוואה שמצאה המרצה.

ב. המרצה חישבה את סטיות התקן, בעבור ההיעדרות מן השיעורים ובעבור הציונים במבחן הסופי.

סטיות התקן שהתקבלו הן: $s_x=4$ ו- $s_y=10$.

נחשב את מקדם המתאם (r) , כאשר על פי ישר הרגרסיה $y=-2x+90$ מתקבל ש- $m=-2$.

$$m=r\cdot\frac{s_y}{s_x}$$

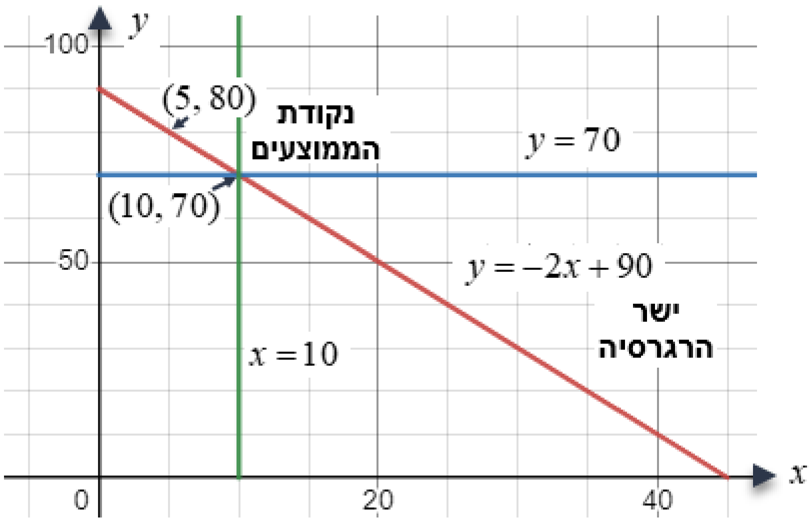
$$-2=r\cdot\frac{10}{4}$$

$$-2=2.5r \quad /:2.5$$

$$\boxed{r=-0.8}$$

תשובה: מקדם המתאם הוא $r=-0.8$.

הערה



ג. כדי למצוא את מספר ההיעדרויות (x), שישר רגרסיה מנבא עבורו ציון $y=80$,

נציב $y=80$ במשוואת ישר הרגרסיה $y=-2x+90$.

$$80=-2x+90 \quad /-90$$

$$-10=-2x \quad /:(-2)$$

$$\boxed{x=5}$$

תשובה: מספר ההיעדרויות, שישר הרגרסיה מנבא בעבורו ציון 80 , הוא 5.

ד. דוד, מרצה אחר, רצה לערוך את אותה בדיקה בנוגע לתלמידיו.

הוא מצא את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y מ- x,

וגילה כי בעבור כל מספר של היעדרויות – הישר מנבא תמיד את הציון 65 .

מסקנה: משוואת ישר הרגרסיה, שמצא דוד, היא $y = 65$.

(1) כיוון שמשוואת ישר הרגרסיה, שמצא דוד, היא $y = 65$, הרי ש- $m = 0$.

תשובה: שיפוע ישר הרגרסיה הוא 0 .

(2) כיוון שהישר מנבא תמיד את הציון 65, הרי שזה הציון הממוצע.

כל ישר רגרסיה חייב לעבור דרך נקודת הממוצעים ולכן אם הוא ישר אופקי,

הערך הקבוע של y עליו הוא גם הממוצע של y.

תשובה: הציון הממוצע הוא 65.

ה. אין כל דרך לחשב את ממוצע ההיעדרויות, כי לא נמצא כל קשר בין שני המשתנים.

למעשה, מקדם המתאם הוא 0 .

אין כל דרך להגיע לנתונים על המשתנה x, ולכן גם לא ניתן למצוא את הממוצע שלו.

תשובה: על פי הנתונים שבשאלה, לא ניתן למצוא את הממוצע של היעדרויות התלמידים של דוד.

סעיף ד2: הרחבה והעשרה

שיפוע של קו רגרסיה יהיה 0 , רק כאשר:

- מקדם המתאם יהיה 0 ובמצב כזה, אין למנבא x שום משמעות בניבוי y ,

  ולכן הערך היחיד שכדאי לנבא במצב כזה עבור כל ערך של x,

  הוא פשוט הממוצע של y שהוא הניבוי הסטטיסטי הכי בטוח בהיעדר מידע נוסף.
- כל המדידות של y במדגם זהות ,

  ולכן סטיית התקן שלו היא 0 ולכן ברור שזהו הערך היחיד שכדאי לנבא.

- שימו לב שתיאורטית, שיפוע ישר הרגרסיה יכול לצאת 0

  גם כשסטיית התקן של y היא 0, כאשר כל ערכי ה- y שבדגם זהים.

  מובן שבמקרה זה מקדם המתאם אינו מוגדר, כי סטיית התקן מופיעה במכנה

  $$r = \frac{1}{N \cdot S_x \cdot S_y}\left((x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \ldots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})\right) .$$

  ואומנם לא מתייחסים למקרה זה בניבוי על פי רגרסיה,

  וממילא אין משמעות לניבוי y על פי x .

נוסחת הגדילה והדעיכה: $A_t = A_0 \cdot q^t$ **, כאשר** A_0 **- הכמות ההתחלתית,**

q **הוא גורם הגדילה/דעיכה,** A_t **הכמות לאחר זמן** t**.**

א. אחד הבנקים מלווה כסף לגופים מסחריים בריבית קבועה.

הנהלת הבנק קבעה ריבית של 1.45% **לשנה.**

בהתאם גורם הגדילה הוא $\boxed{q=1.0145} \rightarrow \quad q=\frac{100+1.45}{100}=\frac{101.45}{100}=1.0145$.

(1) חברת "הייטק" לוותה $1{,}000{,}000$ **לשנתיים, לכן:** $A_0 = 1{,}000{,}000$ **ו-** $t=2$.

$A_2 = 1{,}000{,}000 \cdot 1.0145^2 =$ **שקלים** $1{,}029{,}210.25$.

תשובה: גובה הסכום, שהיה על החברה להחזיר לבנק בתום שנתיים, הוא $1{,}029{,}210.25$ **שקלים.**

(2) חברת "התעשייה" לוותה $1{,}000{,}000$ **ל-** 3 **חודשים, רבע שנה, לכן:** $A_0 = 1{,}000{,}000$ **ו-** $t=0.25$.

$A_{0.25} = 1{,}000{,}000 \cdot 1.0145^{0.25} =$ **שקלים** $1{,}003{,}605.45$

תשובה: גובה הסכום, שהיה עליה להחזיר לבנק בתום 3 **החודשים, הוא** $1{,}003{,}605.45$ **שקלים.**

(3) חברת "הבנייה" לוותה $2{,}000{,}000$ **שקלים,**

והחזירה לבנק בתום תקופת ההלוואה $2{,}103{,}353.05$ **שקלים,**

לכן: $A_t = 2{,}103{,}353.05$ **ו-** $A_0 = 2{,}000{,}000$.

$$2{,}103{,}353.05 = 2{,}000{,}000 \cdot 1.0145^t \quad /:2{,}000{,}000$$

$$1.05168 = 1.0145^t$$

$$\ell n 1.05168 = \ell n 1.0145^t$$

$$\ell n 1.05168 = t \cdot \ell n 1.0145$$

$$\frac{\ell n 1.05168}{\ell n 1.0145} = t$$

$$\boxed{t \approx 3.5}$$

תשובה: משך תקופת ההלוואה היה 3.5 **שנים.**

הנהלת הבנק התחלפה, ואז הציעה הבנק ללקוחותיו המסחריים
שני מסלולי הלוואה חדשים לשנתיים:

מסלול 1 – מסלול בריבית משתנה 1% ריבית לשנה הראשונה, ו- 2.2% ריבית לשנה השנייה.

מסלול 2 – מסלול בריבית שנתית קבועה לשנתיים.

ב. חברה לווה סכום מסוים.

נסמן ב- x את סכום הכסף המסוים.

לאחר שנה, בריבית של 1% , גורם הגדילה הוא $q=\frac{100+1}{100}=1.01$,

וההלוואה עומדת על $1.01\cdot x=1.01x$.

לאחר שנה נוספת, בריבית של 2.2% , גורם הגדילה הוא $q=\frac{100+2.2}{100}=1.022$,

וההלוואה עומדת על $1.022\cdot 1.01x=1.03222x$.

נבדוק מהי הריבית השנתית במסלול 2, כדי שבתום השנתיים יקבל הבנק מן החברה,
את אותו סכום החזר בשני המסלולים.

אם כך: $\mathrm{A}_2=1.03222x$ **ו-** $\mathrm{A}_0=x$ **, כאשר** $t=2$**.**

נמצא קודם את גורם הגדילה.

$$1.03222x=x\cdot q^2 \quad /:x$$
$$1.03222=q^2$$
$$\sqrt[2]{1.03222}=q$$
$$\boxed{q\approx 1.016}$$

נמצא עכשיו את הריבית השנתית.

$$q=\frac{100+p}{100}$$
$$1.016=\frac{100+p}{100} \quad /\cdot 100$$
$$101.6=100+p$$
$$\boxed{p=1.6}$$

תשובה: הריבית השנתית במסלול 2 צריכה להיות 1.6%,
כדי שבתום השנתיים יקבל הבנק מן החברה, את אותו סכום החזר בשני המסלולים.

.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(2x^2-11x+14)\cdot e^{4-x}$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא כל** x .

ב. (1) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים .**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$.

$$(2x^2-11x+14)\cdot e^{4-x}=0$$
$$2x^2-11x+14=0$$
$$x=3.5 \quad \to \boxed{(3.5,0)}$$
$$x=2 \quad \to \boxed{(2,0)}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$,

$f(0)=(2\cdot 0^2-11\cdot 0+14)\cdot e^{4-0}=14e^4 \quad \to \boxed{(0,14e^4)}$.

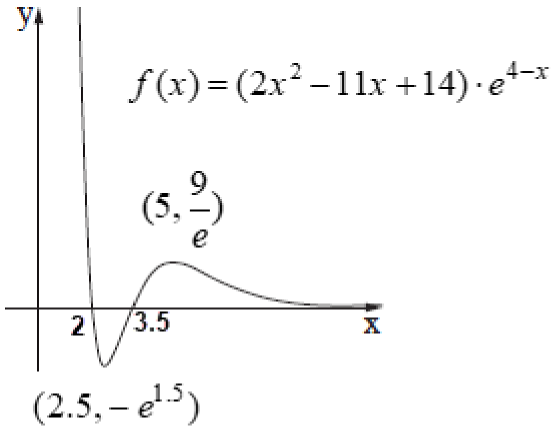
תשובה: $(3.5,0)$, $(2,0)$, $(0,14e^4)$.

(2) נמצא את שיעורי נקודות הקיצון $f(x)$ **, ונקבע את סוגן.**

$$\boxed{f(x)=(2x^2-11x+14)\cdot e^{4-x}}$$
$$f'(x)=(4x-11)\cdot e^{4-x}+(2x^2-11x+14)e^{4-x}\cdot(-1)$$
$$f'(x)=e^{4-x}(4x-11-(2x^2-11x+14))$$
$$f'(x)=e^{4-x}(4x-11-2x^2+11x-14)$$
$$\boxed{f'(x)=e^{4-x}(-2x^2+15x-25)}$$
$$-2x^2+15x-25=0$$
$$x=5 \quad \to f(5)=(2\cdot 5^2-11\cdot 5+14)\cdot e^{4-5}=9e^{-1} \quad \to \boxed{(5,\frac{9}{e})}$$
$$x=2.5 \quad \to f(2.5)=(2\cdot 2.5^2-11\cdot 2.5+14)\cdot e^{4-2.5}=-e^{1.5} \quad \to \boxed{(2.5,-e^{1.5})}$$
$$f'(0)<0,\ f'(3)>0 \quad \to x=2.5,\min$$
$$f'(3)>0,\ f'(6)<0 \quad \to x=5,\max$$

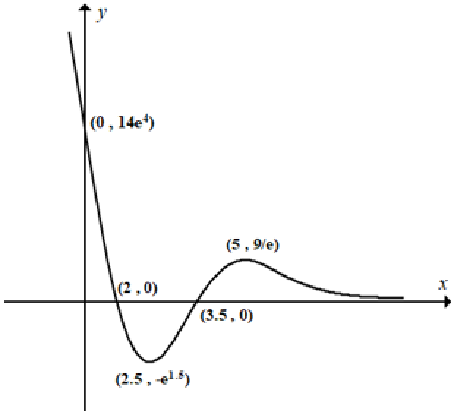
תשובה: $(5,\frac{9}{e})$ **מקסימום ,** $(2.5,-e^{1.5})$ **מינימום.**

(3) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



סרטוט , בפרופורציות לא מדויקות,

המראה שכמובן קיימת נקודת חיתוך עם ציר ה y

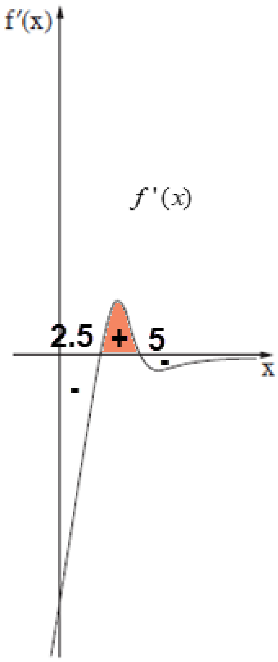


ג. כאשר מציירים, או בוחרים, את גרף הנגזרת $f'(x)$, נעזרים בשיקולים הבאים (מעבר לנדרש בבגרות):

- תחום הגדרה: כל x
- אסימפטוטה אופקית $y=0$ לימין ($x\to\infty$), עבור $f'(x)=e^{4-x}(-2x^2+15x-25)$.
- נקודת אפס: $(5,0)$ ו- $(2.5,0)$ כי $f'(2.5)=f'(5)=0$.
- סימני נגזרת, בהתאם לעלייה/ירידה של $f(x)$,

$f'(x)>0$ כאשר $2.5<x<5$.

$f'(x)<0$ כאשר $x>5$ או $x<2.5$.



II

מסקנה – גרף II מתאר את גרף הפונקציה $f'(x)$.

תשובה: גרף II מתאר את גרף הפונקציה $f'(x)$.

ד. $f(x)<0$ כאשר הגרף מתחת לציר ה- x , בתחום $2<x<3.5$.

$f'(x)<0$ כאשר הפונקציה יורדת, בתחום $x>5$ או $x<2.5$.

תשובה: $f(x)<0$ וגם $f'(x)<0$ בתחום $2<x<2.5$.

ה. משמאל השטח המבוקש בין פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ציר ה- x (צבוע בכתום).

$$S=\int_{2.5}^{5}(f'(x)-0)\,dx=f(x)\Big]_{2.5}^{5}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=5 & f(5)=\frac{9}{e} \\ x=2.5 & f(2.5)=-e^{1.5}\end{array}\right\} S=\frac{9}{e}-(-e^{1.5})\to\boxed{S=\frac{9}{e}+e^{1.5}\approx 7.793}$$

תשובה: גודל השטח, המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ועל ידי ציר ה- x,

הוא $\frac{9}{e}+e^{1.5}\approx 7.793$.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(\ell n\, x)^2}{4x}$.

בתחום ההגדרה, הביטוי שמקבלת הפונקציה הלוגריתמית גדול מאפס, לכן $x>0$.

בתחום ההגדרה, המכנה שונה מאפס, לכן $x\neq 0$.

תשובה: $x>0$.

ב. בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$:

$$(\ell n\, x)^2=0$$
$$\ell n\, x=0 \quad \to x=1$$
$$\boxed{(1,0)}$$

נשים לב, כי הפונקציה היא אי-שלילית, ולכן הנקודה $(1,0)$ **היא נקודת מינימום.**

תשובה: $(1,0)$.

ג. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגן.

$$f(x)=\frac{(\ell n\, x)^2}{4x}$$
$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{2\ell n\, x}{x}\cdot x-(\ell n\, x)^2}{x^2}$$
$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2\ell n\, x-(\ell n\, x)^2}{x^4}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{\ell n\, x(2-\ell n\, x)}{4x^4}}$$
$$\ell n\, x=0 \quad \to x=1 \quad \to (1,0)$$
$$\ell n\, x=2 \quad \to x=e^2 \quad \to (e^2,\frac{1}{e^2})$$
$$f'(0.5)<0,\ f'(2)>0 \quad \to \boxed{(1,0),\min}$$
$$f'(2)>0,\ f'(8)<0 \quad \to \boxed{(e^2,\frac{1}{e^2}),\max}$$

תשובה: $(e^2,\frac{1}{e^2})$ **מקסימום ,** $(1,0)$ **מינימום .**

ד. נתונה הפונקציה $g(x)=-f(x)$, שסימטרית לפונקציה $f(x)$, כאשר ציר ה- x הוא ציר הסימטריה.

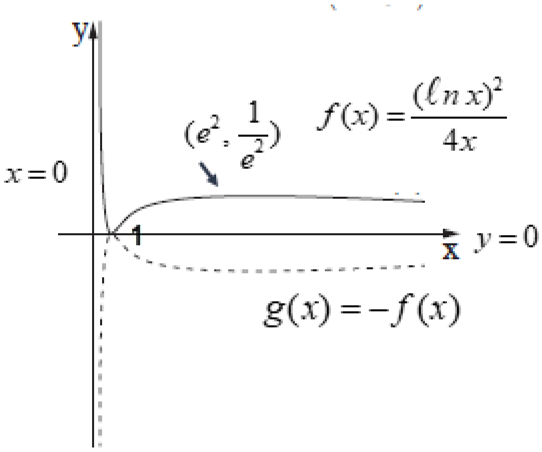
תחומי עלייה וירידה מתהפכים,

תחומי חיוביות/שליליות מתהפכים, ושתי הפונקציות נפגשות בנקודת האפס $(1,0)$.

שתי הצבות מומלצות לפני ציור הסקיצה של $f(x)$:

כאשר $x\to 0$, למשל $f(0.01)=530\to\infty$, ו- $x=0$ אסימפטוטה אנכית.

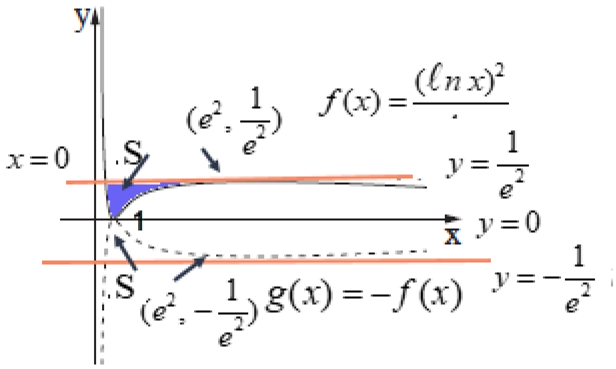
כאשר $x\to\infty$, למשל $f(1000)=0.023\to 0$, ו- $y=0$ אסימפטוטה אופקית לימין.



תשובה: הסרטוט מעל.

ה. נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,

והמשיק שלה בנקודת המקסימום (השטח מסומן בכחול).



(1) משוואת המשיק בנקודת קיצון (פנימית) היא של פונקציה קבועה, ולכן היא $y=\frac{1}{e^2}$.

תשובה: משוואת המשיק היא $y=\frac{1}{e^2}$.

(2) עקב הסימטריה לציר ה- x , אז לפונקציה יש נקודת מינימום ב- $(e^2,-\frac{1}{e^2})$.

בנקודה זו משוואת המשיק היא $y=-\frac{1}{e^2}$, ואם $c=-\frac{1}{e^2}$ נקבל שטח השווה ל- S בגלל הסימטריה.

תשובה: עבור $c=-\frac{1}{e^2}$, השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$ ועל ידי הישר $y=c$ שווה ל- S .