פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023 , מועד א', שאלון: 35471

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. זמני השחייה של השחיינים בקבוצה, במשחה של "100 מטר חופשי" מתפלגים נורמלית.

57 שניות $=\bar{x}$, וסטיית התקן 2 שניות$=s$.

השיא שנקבע בעבר במשחה זה היה 51 שניות.

נמצא מהי ההסתברות , ששחיין שנבחר באקראי מן הקבוצה, שבר את השיא,

כלומר שזמן השחייה שלו <u>קטן</u> מ- 51 שניות.

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z=\frac{x-\bar{x}}{s}$

$z=\frac{51-57}{2}=\frac{-6}{2}=-3$ **(הערה: ציון תקן נמוך משמעותית, ממקום בתחילת הטבלה ממש).**

נמצא את ההסתברות המתאימה בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

. $p(x<51)=p(z<-3)=0.0013$

תשובה: ההסתברות , ששחיין שנבחר באקראי מן הקבוצה שבר את השיא, היא 0.0013.

ב. נבנה טבלת שכיחויות (לא חובה), שתתאר את הנתונים עבור שתי הקבוצות שמתאמנות בבריכה.

x - **ממוצע הקבוצה**	57	58	**סה"כ**
f - **מספר שחיינים**	150	150	$\mathrm{N}=300$

כיוון שמספר השחיינים בשתי הקבוצות הוא שווה, אז הממוצע הכולל הוא $57.5=\frac{57+58}{2}$.

או, על פי הנוסחה הרגילה: 57.5 **שניות** $=\bar{x}=\frac{57\cdot150+58\cdot150}{300}=\frac{17,250}{300}$.

תשובה: הממוצע, של זמן המשחה של כל 300 השחיינים, הוא 57.5 שניות.

ג. נתון כי זמני השחייה של <u>כל</u> 300 השחיינים מתפלג נורמלית,

וזמן המשחה של 50 מבין 300 השחיינים הוא פחות מ- 54 שניות,

כלומר $p(x<54)=\frac{50}{300}=0.167$.

על פי טבלת ההתפלגות הנורמלית, ציון התקן המתאים עבור $p=0.167$ **הוא** $z=-0.965$.

$$z=\frac{x-\overline{x}}{s}$$

$$-0.965=\frac{54-57.5}{s}$$

$$-0.965s=-3.5$$

$$\boxed{s=3.627}$$

תשובה: סטיית התקן, של זמני המשחה של כל 300 השחיינים, היא כ- 3.627 שניות.

ד. בוחרים באקראי שחיין מבין כל 300 השחיינים.

$\overline{x}=$ 57.5 **שניות, וסטיית התקן** $s=$ 3.627 **שניות** .

השיא שנקבע בעבר במשחה זה היה 51 שניות.

נמצא מהי ההסתברות , ששחיין שנבחר באקראי מן הקבוצה, שבר את השיא,

כלומר שזמן השחייה שלו <u>קטן</u> מ- 51 שניות.

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z=\frac{x-\overline{x}}{s}$

$z=\frac{51-57.5}{3.627}=\frac{-6.5}{3.627}=-1.792$ **(הערה: ציון התקן גבוה מסעיף א, בעיקר כי הפיזור של הנתונים גדל).**

נמצא את ההסתברות המתאימה בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

$p(x<51)=p(z<-1.792)=0.0367$.

תשובה: ההסתברות , ששחיין שנבחר באקראי מבין כל 300 השחיינים שבר את השיא, היא 0.0367 .

א. חוקרים בדקו את הקשר בין משקל של עכבר (Y בגרמים),
ובין משקל מנת המזון היומית שלו (X בגרמים) .
האוכלוסייה שנבדקה, על ידי החוקרים, היא 10 עכברים.

משקל מנת המזון היומית (X בגרמים)	1	2	3	3	3	4	4	4	5	5
משקל העכבר (Y בגרמים)	12	13	14	15	16	20	22	24	28	30

נתון כי המשקל הממוצע של מנת מזון היומית הוא $\bar{\mathrm{X}} = 3.4$ גרם.

$$\mathrm{S} = \sqrt{\frac{(1-3.4)^2\cdot 1+(2-3.4)^2\cdot 1+(3-3.4)^2\cdot 3+(4-3.4)^2\cdot 3+(5-3.4)^2\cdot 2}{10}}$$

$$\mathrm{S} == \sqrt{\frac{14.4}{10}} = \sqrt{1.44}$$

$$\boxed{\mathrm{S}=1.2}$$

תשובה: הראינו כי סטיית התקן, של משקל מנת המזון היומית, היא 1.2 גרמים.

ב. נתון כי 19.4 גרמים $\bar{\mathrm{Y}} =$, משקל ממוצע של עכבר , עם סטיית תקן של $S_Y = 6.086$ גרמים,
כאשר המשקל הממוצע של מנת מזון היומית הוא $\bar{\mathrm{X}} = 3.4$ גרם, ומצאנו כי סטיית תקן היא $S_X = 1.2$ גרמים.
ניתן לראות שקיימת מגמה של עלייה במשקל העכבר, עם עליית משקל מנת המזון היומית,
ולכן נצפה לראות מקדם מתאם חיובי.
ניתן גם לראות שאין קו ישר, שעליו תהיינה כל הנקודות
(ישנן גם תצפיות המראות עלייה במשקל העכבר ללא שינוי במשקל מנת המזון היומית),
ולכן מקדם המתאם אינו דטרמיניסטי $(r=1)$, ומקדם מתאם $r = 0.923$ נראה מתאים ביותר.
תשובה: $r = 0.923$ הוא מקדם המתאם.

ג. נמצא את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי משקל העכברים Y , מתוך משקל מנת המזון היומית שלהם X .
נמצא תחילה את שיפוע קו הרגרסיה: $m = r\cdot\frac{s_Y}{s_X} = 0.923\cdot\frac{6.086}{1.2} \approx 4.681$.
נמצא את משוואת ישר הרגרסיה, שעובר בנקודת הממוצעים $(3.4, 19.4)$:

$$y-\bar{y} = m(x-\bar{x})$$

$$\mathrm{Y}-19.4 = 4.681(\mathrm{X}-3.4)$$

$$\mathrm{Y}-19.4 = 4.681\mathrm{X}-15.92$$

$$\boxed{\mathrm{Y} = 4.681\mathrm{X}+3.484}$$

תשובה: משוואת קו הרגרסיה, לניבוי משקל העכברים Y , מתוך משקל מנת המזון היומית שלהם X ,
היא $\mathrm{Y} = 4.681\mathrm{X}+3.484$.

ד. לאחר זמן מה התברר כי , עקב אי כיול המאזניים, יש להפחית 2 גרמים ממשקלו של כל עכבר.

זאת, ללא שינוי בנתוני משקלי מנות המזון, שנשקלו במאזניים מכוילים היטב.

הפחתה בשיעור קבוע של הנתונים, מורידה בשיעור זה את הממוצע,

ללא שינוי בסטיית התקן כי הפיזור נשמר, ולכן $\bar{Y} =$ **גרמים** 17.4 .

מכאן שיש תזוזה אנכית, 2 **יחידות מטה של ישר הרגרסיה.**

לחילופין, נמצא את משוואת ישר הרגרסיה, שעובר בנקודת הממוצעים החדשה $(3.4, 17.4)$:

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$$
$$Y - 17.4 = 4.681(X - 3.4)$$
$$Y - 17.4 = 4.681X - 15.92$$
$$\boxed{Y = 4.681X + 1.484}$$

תשובה: משוואת קו הרגרסיה החדש, לאחר הכנסת התיקון במשקלי העכברים,

היא $Y = 4.681X + 1.484$.

ה. נמצא מהו הניבוי (Y) **למשקל עכבר שמשקל מנת המזון היומית שלו הוא** 3.5 **גרם.**

נשים לב שנתון של 3.5 **גרם הוא בתחום של נתוני משקלי מנת המזון שנצפו,**

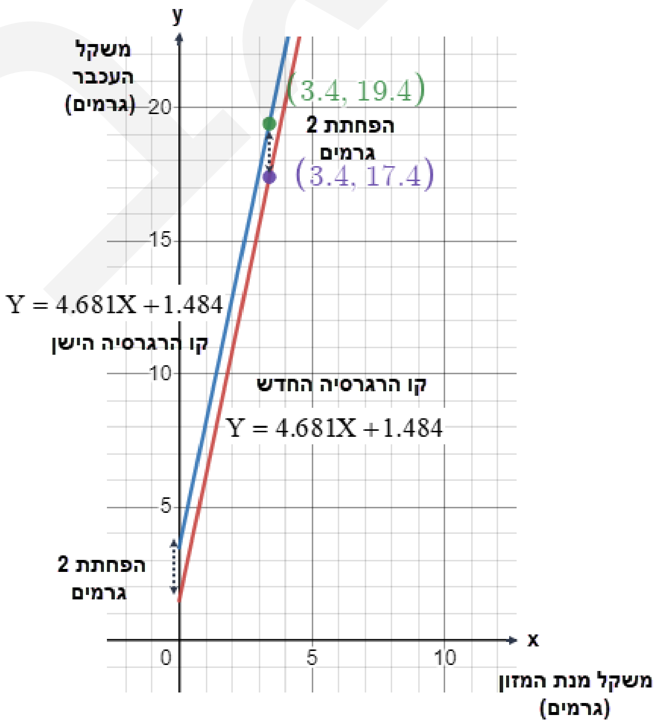
ולכן ניתן להעריך את משקל העכבר.

נציב $X = 3.5$ **, במשוואת קו הרגרסיה החדש:** $Y = 4.681 \cdot 3.5 + 1.484 = 17.8675 \approx 17.87$.

תשובה: הניבוי למשקל העבר, שמשקל מנת המזון היומית שלו הוא 3.5 **גרם ,**

הוא בערך $17.8675 \approx 17.87$ **גרם.**

הערה



א. נגדיר את המאורעות הבאים:

A **- סיימו בהצטיינות בבגרות** $\bar{A}$ **- סיימו בציונים רגילים בבגרות**

B **- הישגים גבוהים באוניברסיטה** $\bar{B}$ **- הישגים רגילים באוניברסיטה**

<u>נתונים ומשמעויות מיידיות</u>

נדרשות שלוש משוואות, על-מנת למלא טבלת 2×2 **מלאה.**

(1) $P(A)=0.2 \quad \rightarrow P(\bar{A})=0.8$

(2) $P(B/A)=0.8 \quad \rightarrow P(\bar{B}/A)=0.2$

(3) $P(B/\bar{A})=0.25 \quad \rightarrow P(\bar{B}/\bar{A})=0.75$

<u>פיתוח נוסחאות הסתברות מותנית</u>

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$
$$0.8=\frac{P(B\cap A)}{0.2}$$
$$0.16=P(B\cap A)$$

$$P(B/\bar{A})=\frac{P(B\cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$
$$0.25=\frac{P(B\cap \bar{A})}{0.8}$$
$$0.2=P(B\cap \bar{A})$$

נציב בטבלה ונשלים אותה.

	A בגרות בהצטיינות	$\bar{A}$ בגרות רגילה	
B הישגים גבוהים	0.16	0.2	0.36
$\bar{B}$ הישגים רגילים	0.04	0.6	0.64
	0.2	0.8	1

תשובה: ההסתברות, שסטודנט שנבחר באקראי הגיע להישגים גבוהים באוניברסיטה, היא 0.36 **.**

ב. נחשב מהי ההסתברות שסטודנט סיים בגרות בציונים רגילים, אם הגיע להישגים גבוהים באוניברסיטה.

$$P(\bar{A}/B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.36}=\frac{5}{9}$$

תשובה: ההסתברות, שסטודנט סיים בגרות בציונים רגילים אם הגיע להישגים גבוהים, היא $\frac{5}{9}$ **.**

	בגרות בהצטיינות A	בגרות רגילה $\bar{A}$	
B הישגים גבוהים	0.16	0.2	0.36
$\bar{B}$ הישגים רגילים	0.04	0.6	0.64
	0.2	0.8	1

ג. נבחן את שתי הטענות.

(1) מבין הסטודנטים שהגיעו להישגים גבוהים (מעל 50%), רובם סיימו את בחינות הבגרות בהצטיינות.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.16}{0.36}=\frac{4}{9}<0.5=50\%$$

תשובה: הטענה אינה נכונה .

(2) מבין הסטודנטים <u>שלא</u> הגיעו להישגים גבוהים באוניברסיטה,
רובם (מעל 50%) סיימו את בחינות הבגרות בציונים רגילים.

$$P(\bar{A}/\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{0.6}{0.64}=\frac{15}{16}>0.5=50\%$$

תשובה: הטענה נכונה .

ד. רות וענבל הן סטודנטיות באוניברסיטה, והן סיימו את בחינת הבגרות בציונים רגילים.
נחשב את ההסתברות שבדיוק אחת מהן הגיעה להישגים גבוהים באוניברסיטה.
ההסתברות להישגים גבוהים, מבין ציוני בגרות רגילים, היא $P(B/\bar{A})=0.25$.
ההסתברות, ש<u>בדיוק אחת מהן</u> תהייה עם הישגים גבוהים, היא $0.25\cdot0.75+0.75\cdot0.25=0.375$.
תשובה: ההסתברות, שבדיוק אחת מהן הגיעה להישגים גבוהים באוניברסיטה, היא 0.375 .

א. $ABCD$ **הוא טרפז** $(AB \parallel CD)$**, שכל קודקודיו מונחים על הצירים, ומפגש אלכסוניו בראשית** $O(0,0)$.

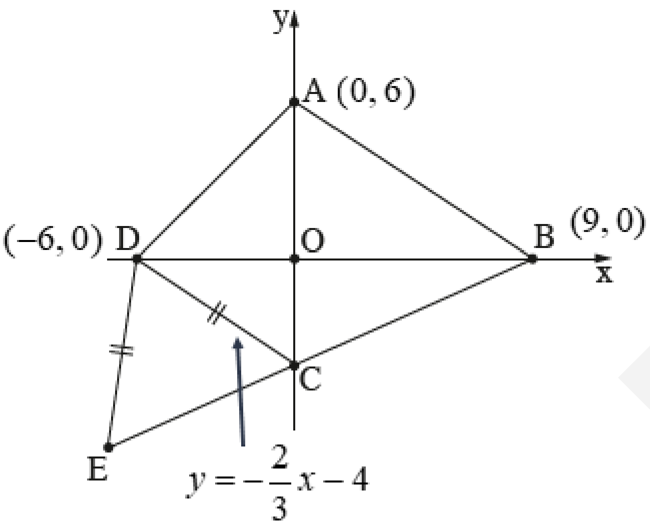
(1) ידוע כי שטח המשולש ABD **שווה ל-** 45.

$$S_{\Delta ABD} = \frac{BD \cdot AO}{2}$$

$$45 = \frac{BD \cdot 6}{2}$$

$$\boxed{BD = 15}$$

תשובה: $BD = 15$.



(2) נחשב את שיעורי הקודקודים D **ו-** B.

$AO = OD$**, ולכן** $D(-6,0)$.

$x_B = x_D + 15 = -6 + 15 = 9 \quad \rightarrow \boxed{B(9,0)}$.

תשובה: $B(9,0)$, $D(-6,0)$.

ב. נמצא את משוואת הצלע CD .

לישרים מקבילים שיפועים שווים, לכן $m_{CD} = m_{AB}$.

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-6}{9-0} = -\frac{2}{3} \quad \rightarrow m_{CD} = -\frac{2}{3}$.

נמצא את משוואת הצלע CD**, בעזרת** $m_{CD} = -\frac{2}{3}$ **ו-** $D(-6,0)$.

$$y - 0 = -\frac{2}{3}(x - (-6))$$

$$\boxed{y = -\frac{2}{3}x - 4}$$

תשובה: משוואת הצלע CD **היא** $y = -\frac{2}{3}x - 4$.

ג.(1) נמצא את גודל הזווית $\sphericalangle OBC$.

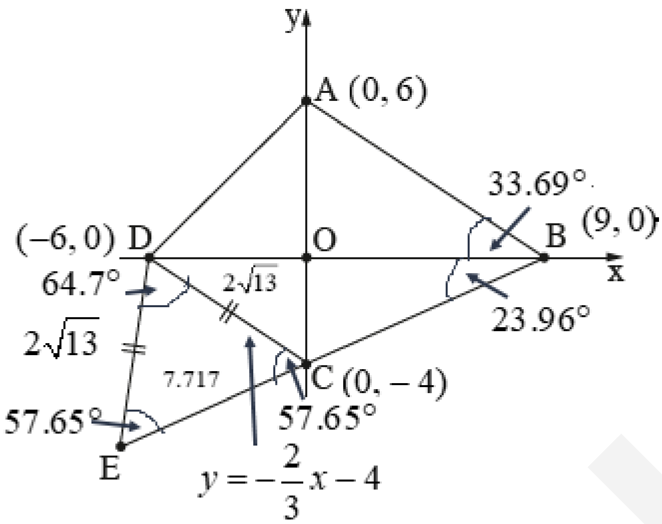
הקודקוד C **נמצא על ציר ה-** y **ועל הישר** $y=-\frac{2}{3}x-4$ **ולכן** $C(0,-4)$.

$\underline{\Delta OBC}$

$$\tan\sphericalangle OBC=\frac{OC}{OB}=\frac{4}{9}$$

$$\boxed{\sphericalangle OBC=23.96^\circ}$$

תשובה: $\sphericalangle OBC=23.96^\circ$.



(2) נמצא את גודל הזווית $\sphericalangle ABC$.

$\sphericalangle ABO$ **חדה, ופונה לכיוון השלילי של ציר ה-** x

לכן, הקשר לשיפוע הוא: $-m=\tan\alpha$

$$-(-\frac{2}{3})=\tan\sphericalangle ABO$$

$$\boxed{\sphericalangle ABO=33.69^\circ}$$

$$\sphericalangle ABC=\sphericalangle ABO+\sphericalangle OBC$$

$$\sphericalangle ABC=33.69^\circ+23.96^\circ$$

$$\boxed{\sphericalangle ABC=57.65^\circ}$$

(מובן שאפשרי גם: $\Delta ABO:\quad \tan\sphericalangle ABO=\frac{AO}{BO}=\frac{6}{9}=\frac{2}{9}\rightarrow\sphericalangle ABO=33.69^\circ$ **.)**

תשובה: $\sphericalangle ABC=57.65^\circ$.

ד. הנקודה E **נמצאת על המשך הצלע** BC **, כך ש-** $DE=DC$ **(ראו סימונים בשרטוט).**

זוויות מתאימות שוות בין ישרים מקבילים, לכן $\sphericalangle DCE=\sphericalangle ABC=57.65^\circ$.

זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים ΔCDE **, ולכן** $\sphericalangle DEC=\sphericalangle ABC=57.65^\circ$.

סכום זוויות במשולש 180° **, ולכן** $\sphericalangle EDC=180^\circ-2\cdot57.65^\circ=64.7^\circ$.

$DC=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$ **(משפט פיתגורס** ΔDOC**, או מרחק בין שתי נקודות).**

ΔCDE **(משפט סינוסים)**

$$\frac{EC}{\sin 64.7^\circ}=\frac{DC}{\sin 57.65^\circ}$$

$$EC=\frac{2\sqrt{13}\cdot\sin 64.7^\circ}{\sin 57.65^\circ}$$

$$\boxed{EC=7.717}$$

והיקף המשולש הוא: $2\cdot2\sqrt{13}+7.717=22.14$.

תשובה: היקף המשולש ΔCDE **הוא** 22.14.

א. נוכיח כי $\Delta ABC \sim \Delta DCA$.

$\sphericalangle ABC = 90°$ **, כי היא זווית היקפית שנשענת על קוטר המעגל** AC **, שמרכזו בנקודה** M.

$\sphericalangle DCA = 90°$ **, כי הקוטר מאונך למשיק** DC **בנקודה** D.

מכאן ש- $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCA$.

כמו כן, על פי הנתון: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ADC$.

$\Delta ABC \sim \Delta DCA$ **(משפט דמיון זווית זווית)**

תשובה: הוכחנו ש- $\Delta ABC \sim \Delta DCA$.

ב. נבדוק האם $BC \parallel AD$.

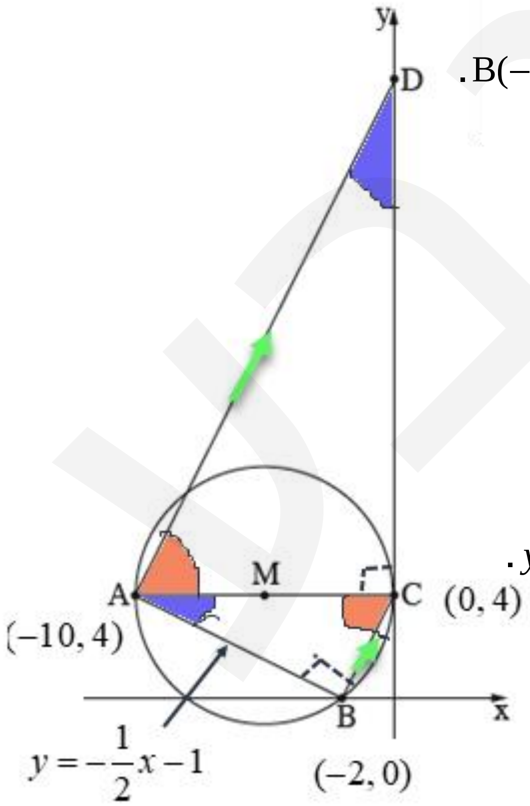
$\sphericalangle BCA = \sphericalangle DAC$ **, כי סכום זוויות בשני המשולשים הוא** $180°$ **והראינו כבר שוויון בין שני זוגות זוויות .**

לכן, $BC \parallel AD$ **כי אם זוויות מתחלפות שוות אז הישרים מקבילים.**

תשובה: כן, $BC \parallel AD$.

ג. (1) נמצא את משוואת הצלע AB **, המאונכת לצלע** BC **, ולכן השיפועים הפוכים לנגדיים.**

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{4-0}{0-(-2)} = \frac{4}{2} = 2 \quad \rightarrow m_{AB} = -\frac{1}{2} \ .$$



נמצא את משוואת הצלע AB **, בעזרת** $m_{AB} = -\frac{1}{2}$ **ו-** $B(-2, 0)$.

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x-(-2))$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x - 1}$$

תשובה: משוואת הצלע AB **היא** $y = -\frac{1}{2}x - 1$.

(2) נמצא את שיעורי הקודקוד A.

AC **מאונך לציר ה-** y **, כאשר** $C(0, 4)$ **ולכן** $y_A = y_C = 4$.

$$4 = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$\frac{1}{2}x = -5 \quad / : (\frac{1}{2})$$

$$x = -10 \quad \rightarrow \boxed{A(-10, 4)}$$

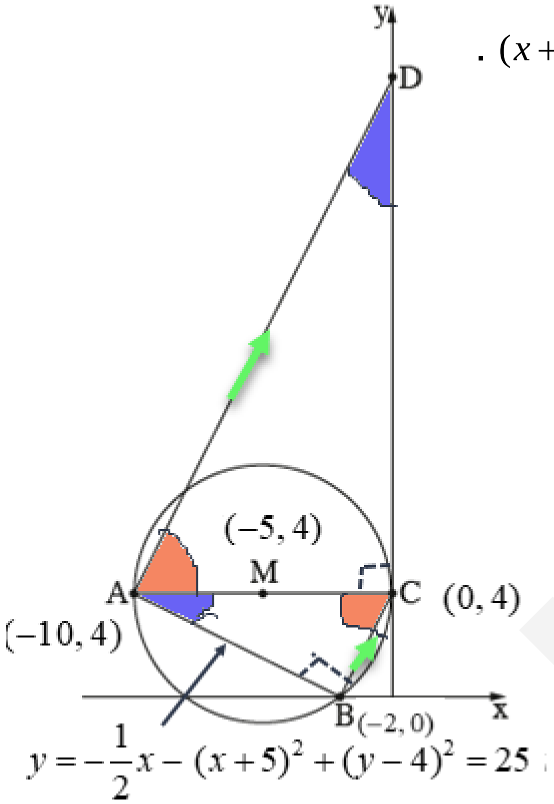
תשובה: $A(-10, 4)$.

(3) נמצא את משוואת המעגל, שמרכזו M **, אמצע הקוטר** AC.

$$M\left(\frac{x_A+x_C}{2},\frac{y_A+y_C}{2}\right)\quad\to M\left(\frac{-10+0}{2},\frac{4+4}{2}\right)\quad\to M(-5,4)$$

הרדיוס MC **מאונך לציר ה-** y **, ולכן:** $R=x_C-x_M=0-(-5)=5$.

תשובה: משוואת המעגל היא $(x+5)^2+(y-4)^2=25$.



ד. (1) נמצא את יחס הדמיון בין ΔABC **לבין** ΔDCA.

יחס הצלעות המתאימות בין המשולשים הדומים הוא

$$\frac{AB}{DC}=\frac{AC}{DA}=\frac{BC}{CA}$$

$$BC=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$$

(משפט פיתגורס ΔBOC **, או מרחק בין שתי נקודות) .**

ולכן יחס הדמיון הוא $\frac{BC}{CA}=\frac{2\sqrt{5}}{10}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

תשובה: יחס הדמיון הוא $1:\sqrt{5}$.

(2) נחשב את שטח המרובע $ABCD$ **כסכום של שטחי שני משולשים.**

$$S_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot h}{2}$$

$$AC=10$$

$$h=4-y_B=4-0=4$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{10\cdot 4}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=20}$$

יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון,

$$S_{\Delta DCA}=S_{\Delta ABC}\cdot(\sqrt{5})^2=20\cdot 5$$

$$\boxed{S_{\Delta DCA}=100}$$

$$S_{ABCD}=S_{\Delta DCA}+S_{\Delta ABC}=20+100$$

$$\boxed{S_{ABCD}=120}$$

(הערה – ניתן גם למצוא את שטח ΔDCA **, ע"י חישוב משוואת** AD **ומציאת נקודה** D**.)**

תשובה: שטח המרובע $ABCD$ **הוא** 120 .

א. נתונה הפונקציה $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$.

בתחום ההגדרה המכנה צ"ל שונה מאפס.

תשובה: תחום ההגדרה: $x \neq 0$.

ב. נמצא את שיעורי נקודת חיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם ציר ה-** x **, בו מתקיים** $y=0$.

$$0=x+\frac{4}{x^2} \quad / \cdot x^2$$
$$0=x^3+4$$
$$-4=x^3$$
$$x=\sqrt[3]{-4}\approx -1.59 \quad \rightarrow \boxed{(-1.59,0)}$$

תשובה: $(-1.59,0)$.

ג. נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגה.**

$$f'(x)=1+\frac{0-4\cdot 2x}{(x^2)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{x^4-8x}{x^4}}$$
$$x^4-8x=0$$
$$x(x^3-8)=0$$
$$\cancel{x=0}$$
$$x^3=8 \quad \rightarrow x=2 \quad \rightarrow f(2)=3 \quad \rightarrow (2,3)$$

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה, גם עבור סעיף ד.

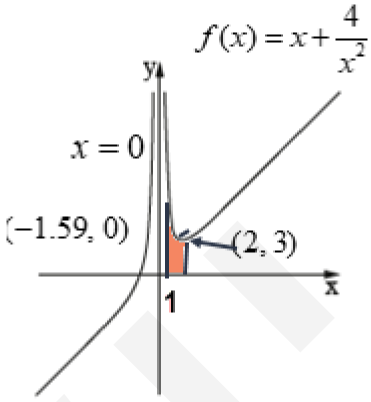
x		2		0	
$f'(x)$	+		-		+
מסקנה	↗	Min	↘		↗

תשובה: $(2,3)$ **מינימום.**

ד. הסקיצה המתאימה היא של גרף III .

נימוקים: על פי תחומי עלייה וירידה, סוג הקיצון ומיקומו במערכת הצירים,

נקודת החיתוך עם ציר ה- x **והאסימפטוטה האנכית** $x=0$ **.**



III

תשובה: גרף III מתאר את הפונקציה $f(x)$ **(באדום, השטח המבוקש בסעיף ה).**

ה. נחשב את השטח המבוקש (צבוע באדום):

$$S=\int_1^2 (x+\frac{4}{x^2})\,dx$$

$$S=\int_1^2 (x+4x^{-2})\,dx$$

$$S=\frac{x^2}{2}+\frac{4x^{-1}}{-1}\Big]_1^2$$

$$S=\frac{x^2}{2}-\frac{4}{x}\Big]_1^2$$

$$\left.\begin{array}{ll} x=2: & 0 \\ x=1: & -3.5 \end{array}\right\} S=0-(-3.5)=3.5\rightarrow \boxed{S=3.5}$$

תשובה: גודל השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ **,**

על ידי הישר $x=1$ **, ועל ידי הישר** $x=2$ **, הוא** 3.5.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{2x+b}$ **.**

גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x **בנקודה** $(8,0)$ **בלבד.**

נציב את שיעורי הנקודה בתבנית הפונקציה.

$$0=1+\frac{1}{2}\cdot 8-\sqrt{2\cdot 8+b}$$
$$\sqrt{16+b}=5$$
$$16+b=25$$
$$\boxed{b=9}$$
$$test:\sqrt{16+9}=5 \quad \rightarrow 5=5 \quad o.k.$$

הבדיקה (שחובה להראות אותה), עקב ההעלאה בריבוע ואפשרות הכנסת פתרונות זרים.

תשובה: $b=9$ **.**

ב. נציב $b=9$ **והפונקציה היא** $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{2x+9}$ **.**

בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$$2x+9\ge 0$$
$$2x\ge -9 \quad /:(2>0)$$
$$\boxed{x\ge -4.5}$$

תשובה: $x\ge -4.5$ **.**

ב. (1) נמצא את שיעורי כל נקודות הקיצון ונקבע את סוגן. $(-4.5,-1.25)$ **בהכרח נקודת קיצון קצה.**

$$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{2\sqrt{2x+9}}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{\sqrt{2x+9}-2}{2\sqrt{2x+9}}}$$
$$0=\sqrt{2x+9}-2$$
$$2=\sqrt{2x+9} \quad ()^2$$
$$4=2x+9$$
$$-5=2x$$
$$x=-2.5\rightarrow \boxed{(-2.5,-2.25)} \quad test:2=\sqrt{2\cdot(-2.5)+9}\rightarrow 2=2 \quad o.k$$

הבדיקה (שחובה להראות אותה), עקב ההעלאה בריבוע ואפשרות הכנסת פתרונות זרים.

כיוון שהפונקציה יורדת מנקודת הקצה $(-4.5,-1.25)$ **לנקודה** $(-2.5,-2.25)$**,**

הרי שנקודת הקצה היא נקודת מקסימום.

כיוון שהפונקציה עולה מהנקודה $(-2.5,-2.25)$ **אל הנקודה** $(8,0)$**,**

הרי שהנקודה $(-2.5,-2.25)$ **היא נקודת מינימום.**

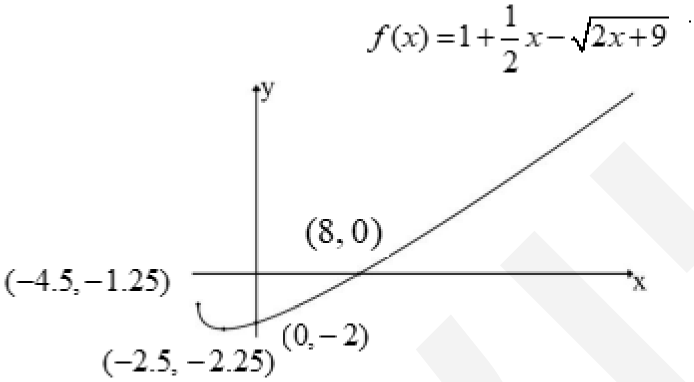
תשובה: $(-2.5,-2.25)$ **מינימום,** $(-4.5,-1.25)$ **מקסימום.**

(2) נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y .

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$ ונקבל את הנקודה $(0,-2)$.

תשובה: $(0,-2)$.

(3) נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



תשובה: הסרטוט מעל.

ד. מצאנו כי $f'(x)=\frac{\sqrt{2x+9}-2}{2\sqrt{2x+9}}$.

מכאן שתחום ההגדרה של הנגזרת הוא $x>-4.5$, ו- $x=-4.5$ אסימפטוטה אנכית.

נקודת האפס של הנגזרת היא $(-2.5,0)$, כי $f'(-2.5)=0$.

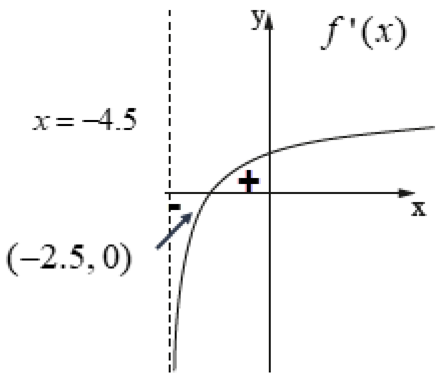
הנגזרת שלילית בתחום הירידה של הפונקציה, עבור $-4.5<x<-2.5$.

הנגזרת חיובית בתחום העלייה של הפונקציה, עבור $x>-2.5$.

אפשר גם להיעזר טבלה לסימון תחומי חיוביות ושליליות של פונקציית הנגזרת.

-4.5		-2.5		x
	-	0	**+**	$f'(x)$

בהתאם, הגרף המתאים הוא גרף IV .



IV

תשובה: גרף IV מתאר את פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

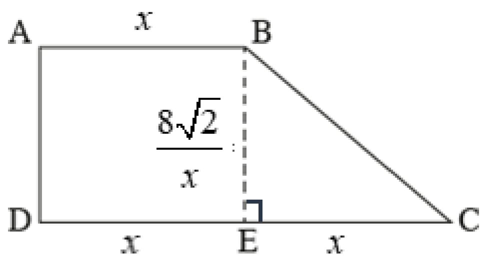
א. המרובע $ABCD$ **הוא טרפז ישר זווית (** $AB \parallel DC$ **).**

גובה הטרפז BE **חוצה את הבסיס** DC **, ומתקבל מלבן משמאל ומשולש ישר זווית מימין.**

נסמן x **- אורך הצלע** AB **, לכן** $DE = x$ **, כי** $ABED$ **הוא מלבן וצלעות נגדיות שוות במלבן.**

גובה הטרפז חוצה את הבסיס DC **, ולכן גם** $EC = x$ **ו-** $DC = 2x$ **.**

שטח הטרפז הוא $12\sqrt{2}$ **.**



$$S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot BE}{2}$$

$$12\sqrt{2} = \frac{(2x + x) \cdot BE}{2} \quad / \cdot 2$$

$$24\sqrt{2} = 3x \cdot BE$$

$$\boxed{\frac{8\sqrt{2}}{x} = BE}$$

תשובה: אורך גובה הטרפז הוא $\frac{8\sqrt{2}}{x}$**.**

ב. הפונקציה שיש להביא ***למינימום*** **היא** ***סכום ריבועי השוקיים של הטרפז*** $(AD^2 + BC^2)$.

$$AD^2 = \left(\frac{8\sqrt{2}}{x}\right)^2 = \frac{(8\sqrt{2})^2}{x^2} = \frac{128}{x^2}$$

$$BC^2 = \left(\frac{8\sqrt{2}}{x}\right)^2 + x^2 = \frac{128}{x^2} + x^2$$ **(משפט פיתגורס** ΔBEC **)**

$$f(x) = \frac{128}{x^2} + \frac{128}{x^2} + x^2$$

$$\boxed{f(x) = \frac{256}{x^2} + x^2, \quad x > 0}$$

$$f'(x) = \frac{0 - 256 \cdot 2x}{x^4} + 2x$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-512x + 2x^5}{x^4}}$$

$$0 = -512x + 2x^5$$

$$0 = 2x(-256 + x^4)$$

$$\cancel{x = 0} \quad \leftarrow x > 0$$

$$-256 + x^4 = 0 \quad \rightarrow x^4 = 256 \quad \rightarrow \boxed{x = 4} \quad \leftarrow x > 0$$

$$f'(3) < 0,\ f'(5) > 0 \quad \rightarrow \boxed{x = 4, \min}$$

תשובה: $x = 4$ **, עבורו סכום ריבועי השוקיים של הטרפז הוא מינימלי.**

ג. עבור $x=4$ **נקבל את הסכום המינימלי, שהוא:** $f(4)=\frac{256}{4^2}+4^2=32$.

מכאן, שלא ייתכן שהסכום הוא 30 .

תשובה: לא ייתכן, שסכום ריבועי השוקיים של הטרפז הוא 30 .