פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023 , מועד ב', שאלון:35471

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

א. קצב התארכות שער הראש של אנשים, על פי המחקר של חברת קוסמטיקה, מתפלג נורמלית.

i. השיעור של 50% מן הנבדקים התארך בפחות מ- 12 ס"מ לשנה.

התפלגות נורמלית סימטרית סביב לממוצע, כאשר 50% מהנתונים מימין, ו- 50% משמאל.

לכן, הממוצע הוא 12 ס"מ לשנה.

תשובה: קצב ההתארכות הממוצע, של השיעור של הנבדקים, הוא 12 ס"מ לשנה.

ב. 12 ס"מ $= \bar{x}$.

ii. השיעור של $33\% = 0.33$ מן הנבדקים התארך ביותר מ- 12.56 ס"מ לשנה.

נמצא את ציון התקן המתאים בעזרת טבלת ההתפלגות הנורמלית.

$$p(x>12.56)=1-p(x<12.56)$$

$$0.33=1-p(x<12.56).$$

$$p(x<12.56)=0.67 \quad \rightarrow z=0.44$$

נשתמש בנוסחה למציאת ציון תקן: $z=\dfrac{x-\bar{x}}{s}$.

$$0.44=\frac{12.56-12}{s}$$

$$0.44s=0.56$$

$$\boxed{s=1.273}$$

תשובה: סטיית התקן, של קצב ההתארכות השיער של הנבדקים, היא 1.273 ס"מ .

ג. חברת הקוסמטיקה הכריזה שהיא הצליחה לפתח שמפו שמגביר ב- 10% את קצב התארכות השיער .

כאשר יש גידול באחוזים, הן הממוצע והן סטיית התקן משתנים בהתאם לשינוי.

כל הנתונים גדלים פי $110\% = 1.1$, ולכן הממוצע החדש הוא 13.2 ס"מ$=12\cdot 1.1$,

וסטיית התקן החדשה תהיה 1.4 ס"מ$=1.273\cdot 1.1$.

תשובה: הממוצע החדש יהייה 13.2 ס"מ, וסטיית התקן החדשה תהיה 1.4 ס"מ.

ד. בכל התפלגות נורמאלית (ללא תלות בערך של הממוצע שלה או סטיית התקן שלה),

אחוז הערכים תלוי רק בכמה סטיות תקן התרחקנו מהממוצע (זהו הערך של z).

לכן, אחוז זה לא ישתנה גם אם שינינו את ערכם של הממוצע וסטיית התקן.

ניתן לחשב בשאלה זו את האחוז הזה אך זה לא נדרש בשאלה (חישוב בעמוד הבא).

תשובה: אחוז זה לא ישתנה, גם אם כל הנבדקים ישתמשו בשמפו שהחברה פיתחה.

<u>הרחבה והעשרה</u>

לסעיף ג

תוספת או החסרה של קבוע מכל דגימה משנה את הממוצע אך לא את סטיית התקן שכן הפיזור לא משתנה.
לעומת זאת, תוספת של אחוז קבוע לכל דגימה אינה בעצם תוספת של קבוע,
אלא הכפלה (כי אחוזים זהים משלמים שונים זה מזה).
לכן, במקרה של תוספת באחוזים, גם סטיית התקן מוכפלת באותו פקטור כי התוספת באחוזים מגדילה יותר את הדגימות בעלות הערכים הגבוהים, מאשר את אלו בעלות הערכים הקטנים כך שהפיזור גדל.
(והפוך לגבי החסרה של אחוזים).

לסעיף ד

מתחת לממוצע יש 50% **מהנתונים .**

אם סטיית התקן היא 1 **, אז זהו ציון התקן** $(z=1)$ **,**

ועל-פי טבלת ההתפלגות הנורמלית: $p(z<1)=0.841=84.1\%$ **.**

מכאן שבין הממוצע לסטיית תקן אחת ישנם $84.1\%-50\%=34.1\%$ **מהנבדקים.**
אחוז זה לא תלוי בכלל בשיעורו של הממוצע, או בגודלה של סטיית התקן,
כל עוד כמובן ההתפלגות נורמלית.

א. בעל חנות המוכר טאבלטים בדק את הקשר הליניארי
בין גודל המסך של טאבלט באינצ'ים (המשתנה x)
ובין מספר הדקות שנדרשו ללקוח להחליט לקנות את הטאבלט (המשתנה y).

האוכלוסייה שנבדקה, על ידי בעל החנות, היא מכירה של 8 טאבלטים.

גודל המסך באינצ'ים (x)	מספר הדקות לקבלת החלטה לקנות את הטאבלט (y)
9	2
9	10
9	10
9	10
11	10
11	10
11	10
11	18

נמצא את ממוצע גדלי המסך. קל לראות שהממוצע הוא 10 אינץ',
כי יש בדיוק ארבעה נתונים הקטנים ב- 1 ס"מ, ומספר זהה של נתונים (ארבעה) הגדולים ב- 1 ס"מ.

או : $\bar{x}=\frac{9\cdot4+11\cdot4}{8}=\frac{80}{8}=10$ **אינץ'**

סטיית התקן היא: $S_x=\sqrt{\frac{(9-10)^2\cdot4+(11-10)^2\cdot4}{8}}=\sqrt{\frac{8}{8}}=1$

נמצא את ממוצע מספר הדקות לקבלת החלטה. קל לראות שהממוצע הוא 10 אינץ',
כי יש בדיוק נתון אחד הקטן ב- 8 דקות, ומספר זהה של נתונים (אחד) הגדול ב- 8 דקות.

או : $\bar{y}=\frac{1\cdot2+6\cdot10+1\cdot18}{8}=\frac{80}{8}=10$ **דקות**

סטיית התקן היא: $S_y=\sqrt{\frac{(2-10)^2\cdot1+(10-10)^2\cdot6+(18-10)^2\cdot1}{8}}=\sqrt{\frac{128}{8}}=\sqrt{16}=4$ **דקות**

תשובה: $\bar{x}=10$ **אינץ'**, $S_x=1$ **אינץ'**, $\bar{y}=10$ **דקות**, $S_y=4$ **דקות** .

ב. מצאנו כי: 10 **אינץ'** $\bar{x}=$, 1 **אינץ'** $S_x=$, 10 **דקות** $\bar{y}=$, 4 **דקות** $S_y=$.

נחשב את מקדם המתאם r .

מקדם המתאם שווה לממוצע מכפלות ציוני התקן.

$$r=\frac{1}{N\cdot S_x\cdot S_y}\left((x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y})+...+(x_N-\bar{x})(y_N-\bar{y})\right)$$

ששה מציוני התקן של המשתנה y **הם** 0 **, כי הנתון שווה לממוצע, ומכאן שניתן להתעלם מהם בחישוב.**

$$r=\frac{1}{8\cdot 1\cdot 4}\cdot\left((9-10)(2-10)+(11-10)(18-10)\right)$$

$$r=\frac{1}{32}\cdot\left((-1)\cdot(-8)+(1\cdot 8)\right)$$

$$r=\frac{1}{32}\cdot 16$$

$$\boxed{r=0.5}$$

תשובה: מקדם המתאם הוא $r=0.5$.

ג. נמצא את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי y **על פי** x .

$$m=r\cdot\frac{s_y}{s_x}\quad\rightarrow m=0.5\cdot\frac{4}{1}=2$$

נמצא את משוואת קו הרגרסיה, שעובר בנקודת הממוצעים.

$$y-10=2(x-10)$$

$$y-10=2x-20$$

$$\boxed{y=2x-10}$$

תשובה: משוואת ישר הרגרסיה, לניבוי מספר הדקות להחלטה כתלות בגודל המסך, היא $y=2x-10$.

ד. בעל החנות הזמין לחנותו דגם חדש של טאבלט, שגודל המסך שלו 10 **אינצ'ים, זהה לממוצע גודל המסך.**

לכן, הניבוי למספר הדקות הוא בדיוק כממוצע של הדקות, כלומר 10 **דקות.**

אפשר גם להציב במשוואת קו הרגרסיה: $y=2\cdot 10-10=10$.

תשובה: ניבוי מספר הדקות לקבלת החלטה, כתלות בגודל המסך, היא 10 **דקות.**

ה. בעקבות העסקתו של מוכר חדש בחנות,

התקצר ב- 20% **זמן קבלת ההחלטה לקנות כל אחד מדגמי הטאבלטים,**

כלומר ירידה ל- $0.8 = 80\%$ **מהזמן הקודם.**

לכן, הממוצע החדש הוא 8 **דקות** $= 0.8 \cdot 10 = \bar{y}$ **, וסטית התקן היא** 3.2 **דקות** $= 0.8 \cdot 4 = S_y$ **.**

נבדוק את ההשפעה על כל אחד מהמדדים.

(1) מקדם המתאם r **.**

מקדם המתאם נבנה בצורה כזו שהוא אינו רגיש לשינוי לינארי אם נעשה על אחד מ- או שני המשתנים.

(אלא אם אחד מהמשתנים מוכפל במקדם חיובי והשני בשלילי, ואז רק סימנו של מקדם המתאם מתהפך).

<u>הסבר נוסף</u>: מקדם המתאם שווה לממוצע מכפלות ציוני התקן.

$$r = \frac{1}{N \cdot S_x \cdot S_y}\left((x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + \ldots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})\right)$$

גם הסטייה $(y_1 - \bar{y})$ **קטנה ב-** 20% **, וגם סטיית התקן** S_y **קטנה ב-** 20% **,**

כך שמקדם המתאם לא משתנה.

תשובה: מקדם המתאם r **לא ישתנה.**

(2) סטיית התקן של המשתנה y **.**

החסרה של קבוע מכל דגימה משנה את הממוצע אך לא את סטיית התקן שכן הפיזור לא משתנה.

לעומת זאת, החסרה של אחוז קבוע מכל דגימה אינה בעצם החסרה של קבוע,

אלא הכפלה (כי אחוזים זהים משלמים שונים זה מזה).

לכן, במקרה של החסרה באחוזים, גם סטיית התקן מוכפלת באותו פקטור כי ההחסרה באחוזים מקטינה יותר את הדגימות בעלות הערכים הגבוהים, מאשר את אלו בעלות הערכים הקטנים כך שהפיזור קטן.

(והפוך לגבי תוספת של אחוזים).

או לאחר חישוב, סטיית הקטן תקטן ב- 20% **, כי כל סטייה של נתון מהממוצע תקטן ב-** 20%**.**

כאשר מספר הנתונים לא השתנה.

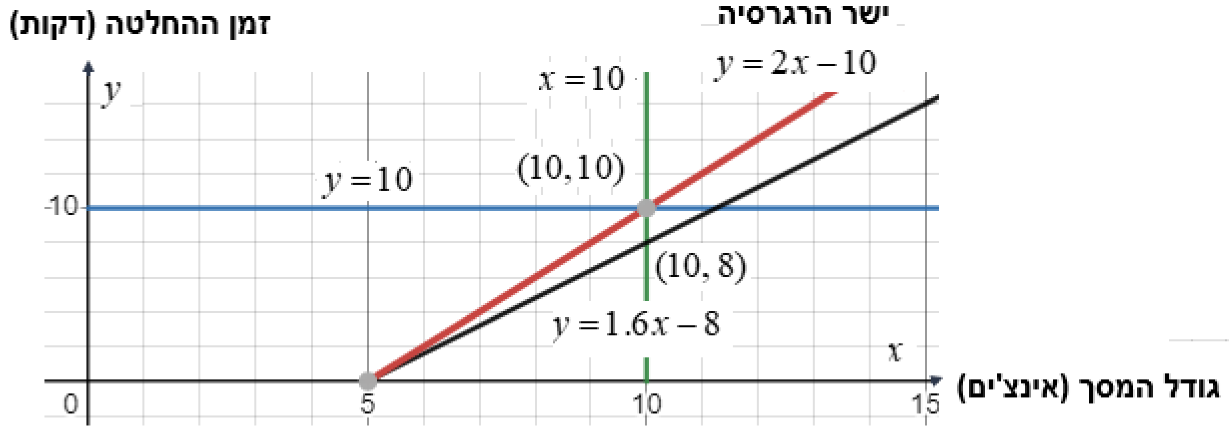
תשובה: סטיית התקן של המשתנה y **תקטן.**

(3) שיפוע ישר הרגרסיה .

$m = r \cdot \frac{s_y}{s_x}$ **, וכאשר** s_y **קטן ב-** 20% **, בעוד ששאר המשתנים קבועים, הרי שהשיפוע קטן.**

תשובה: שיפוע ישר הרגרסיה, לניבוי מספר הדקות לקבלת ההחלטה כתלות בגודל המסך, יקטן.

העשרה



לאחר הירידה ב- 20% **בזמן קבלת ההחלטה,**

נקודת הממוצעים החדשה היא $(10,8)$ **.**

$m=0.5\cdot\frac{3.2}{1}=1.6$ **(גם ירידה ב-** 20%**)**

וקו הרגרסיה החדש הוא $y=1.6x-8$

א. נבנה עץ אפשרויות מתאים, עם החזרה עבור עיפרון כחול או אדום בלבד.

נחשב את ההסתברות, שדנה תוציא שני עפרונות צהובים .

$$P(2\ yellow\ pencils)=\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{24}=0.05$$

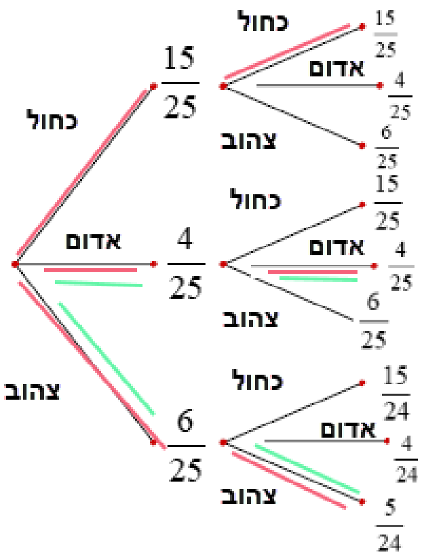
תשובה: ההסתברות היא 0.05 .

ב. (1) נחשב את ההסתברות שדנה תוציא שני עפרונות ב<u>אותו</u> <u>הצבע</u>.

המאורע המשלים הוא: הוצא שני כפתורים אדומים.

$$P(same\ colours)=\frac{15}{25}\cdot\frac{15}{25}+\frac{4}{25}\cdot\frac{4}{25}+\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{24}=0.4356$$

תשובה: ההסתברות היא 0.4356 .



(2) נחשב את ההסתברות

שדנה הוציאה שני עפרונות אדומים או צהובים,

אם ידוע ששני העפרונות שהוציאה דנה הם באותו הצבע.

אלו המסלולים הירוקים, מבין המסלולים האדומים.

$$P(red\ or\ yellow/same\ colours)=$$

$$=\frac{P(red\ or\ yellow\cap same\ colours)}{P(same\ colours)}=$$

$$=\frac{\frac{4}{25}\cdot\frac{4}{25}+\frac{6}{25}\cdot\frac{5}{24}}{0.4356}=\frac{0.0756}{0.4356}=\frac{21}{121}$$

תשובה: ההסתברות היא $\frac{21}{121}$.

ג. דנה החזירה את כל העפרונות לקלמר, ונתנה לאחיה מן הקלמר x עפרונות כחולים, 3 אדומים ו- 2 צהובים.

לכן, בקלמר של דנה נשארו: $(15-x)$ עפרונות כחולים, 1 עיפרון אדום, ו- 4 עפרונות צהובים .

סה"כ בקלמר של דנה ישנם $20-x$ עפרונות $=4+1+15-x$ **.**

נתון: ההסתברות שדנה הוציאה עיפרון צהוב ולאחריו עיפרון אדום היא $\frac{1}{60}$.

$$\frac{1}{60}=\frac{4}{20-x}\cdot\frac{1}{19-x}$$

$$\frac{1}{60}=\frac{4}{(20-x)(19-x)}$$

$$(20-x)(19-x)=240$$

$$380-20x-19x+x^2=240$$

$$x^2-39x+140=0$$

$$\cancel{x=35}\quad\boxed{x=4}$$

הפתרון השני נפסל כי $0<x\le 15$.

<u>פתרון חלופי</u>

נסמן n מספר העפרונות שנשארו בקלמר, לאחר שנתנה לאחיה עפרונות.

$$\frac{1}{60}=\frac{4}{n}\cdot\frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{60}=\frac{4}{n(n-1)}$$

$$n(n-1)=240$$

$$n^2-n=240$$

$$n^2-n-240=0$$

$$\cancel{n=-15}\quad\boxed{n=16}$$

הפתרון השני נפסל כי $0<n\le 19$ ושלם.

אם נשארו 16 עפרונות, לאחר שהוצאו $3+2=5$ עפרונות אדומים וצהובים,

אז הוצאו $x=4$ עפרונות כחולים, מתוך 25 העפרונות כולם.

תשובה: $x=4$.

א. נסמן ב- α **את הזוויות השוות:** $\sphericalangle AOE = \sphericalangle COB = \alpha$.

(1) כיוון שהצירים מאונכים זה לזה, אז $\sphericalangle FOC = 90^\circ - \alpha$.

כיוון שסכום זוויות ב-ΔOCF **הוא** 180°**, אז** $\sphericalangle OCF = \alpha$.

או: כיוון שהצירים מאונכים זה לזה, אז $CF \parallel BO$,

ואז $\sphericalangle OCF = \sphericalangle COB = \alpha$ **(זוויות מתחלפות שוות בין מקבילים)**

תשובה: הוכחנו ש- $\sphericalangle AOE = \sphericalangle OCF = \alpha$.

(2) $\sphericalangle AEO = \sphericalangle CFO = 90^\circ$**., כי** AE **ו-** CF **אנכים לציר ה-** x .

ומכאן ש- $\Delta OCF \sim \Delta AOE$ **, על פי משפט דמיון זווית זווית.**

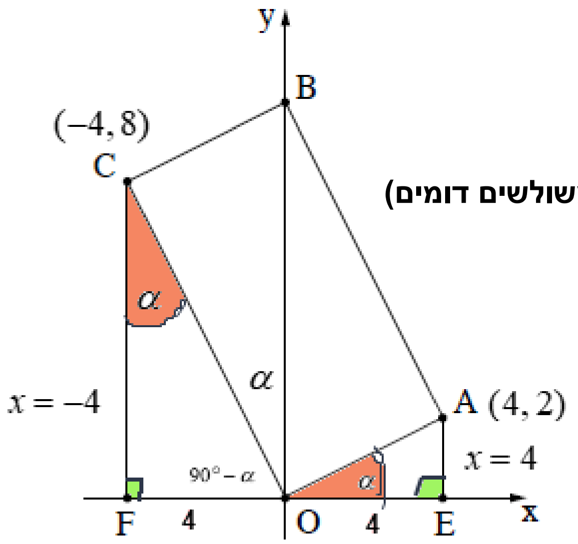
תשובה: הוכחנו ש- $\Delta OCF \sim \Delta AOE$.

ב. $S_{\Delta OCF} = 4S_{\Delta AOE}$ **,** $AF: x = 4$ **ו-** $CF: x = -4$.

(1) יחס הדמיון בין המשולשים OCF **ו-** AOE **הוא** $2:1$,

כי יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון.

תשובה: יחס הדמיון בין המשולשים OCF **ו-** AOE **הוא** $2:1$.



(2) $OE = x_E - x_O = 4 - 0 = 4$.

$2 = \frac{CF}{OE} = \frac{OF}{AE} = \frac{OC}{AO}$ **(יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים)**

על פי יחס הדמיון: $CF = 2OE = 2 \cdot 4 = 8$.

תשובה: $OE = 4$ **,** $CF = 8$.

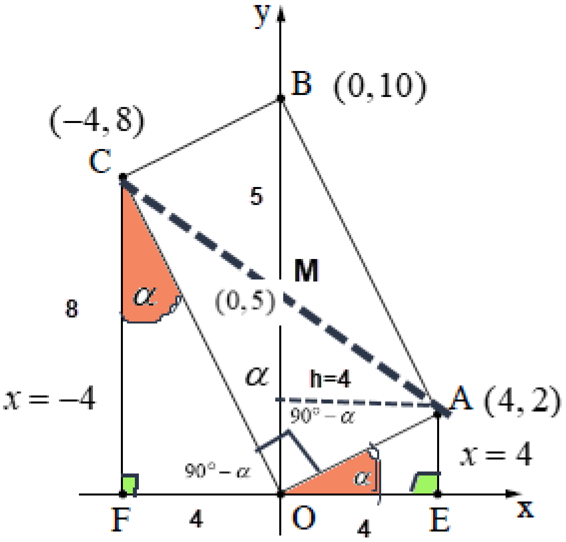
(3) $C(-4, 8) \leftarrow x_F = -4, CF = 8$.

על פי יחס הדמיון: $A(4, 2) \leftarrow AE = 2 \leftarrow OF = 4, OF = 2AE$

תשובה: $C(-4, 8)$ **,** $A(4, 2)$.

ג. במקבילית OABC צלעות נגדיות מקבילות זו לזו, לכן $m_{\mathrm{CB}} = m_{\mathrm{OA}}$.

הקודקוד B מונח על ציר ה- y, לכן $x_{\mathrm{B}} = 0$.



$$m_{\mathrm{OA}} = \frac{y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{O}}}{x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{O}}} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2} \quad \to m_{\mathrm{CB}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{y_{\mathrm{B}} - 8}{0-(-)4} \quad \to 2 = y_{\mathrm{B}} - 8 \quad \to 10 = y_{\mathrm{B}} \to \boxed{\mathrm{B}(0,10)}$$

תשובה: $\mathrm{B}(0,10)$.

ד. נראה שבמקבילית OABC יש זווית ישרה ולכן היא מלבן.

$$m_{\mathrm{OC}} = \frac{y_{\mathrm{C}} - y_{\mathrm{O}}}{x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{O}}} = \frac{8-0}{-4-0} = -2 \quad \to m_{\mathrm{OC}} = -2$$

$$m_{\mathrm{OC}} \cdot m_{\mathrm{OA}} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1 \quad \to \boxed{\mathrm{OC} \perp \mathrm{OA}}$$

קיבלנו שיפוע הופכי לנגדי, ולכן על פי תנאי ניצבות $\mathrm{COA} = 90^\circ$.

אפשר גם: $\sphericalangle \mathrm{COA} = 90^\circ \leftarrow \; = \sphericalangle \mathrm{COA} = \alpha + 90^\circ - \alpha \leftarrow \; \sphericalangle \mathrm{BOA} = 90^\circ - \alpha$.

תשובה: הוכחנו כי המקבילית OABC היא מלבן .

ה. אלכסוני המלבן OABC חוצים זה את זה, לכן $y_{\mathrm{M}} = \frac{y_{\mathrm{B}} + y_{\mathrm{O}}}{2} = \frac{10+0}{2} = 5 \to \mathrm{M}(0,5)$.

$$\left.\begin{aligned} S_{\mathrm{AOE}} &= \frac{\mathrm{OE} \cdot \mathrm{AE}}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \\ S_{\mathrm{CFO}} &= \frac{\mathrm{OF} \cdot \mathrm{CF}}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16 \\ S_{\mathrm{ABM}} &= \frac{\mathrm{BM} \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \end{aligned}\right\} 4 + 16 = 2 \cdot 10 = 20 \quad \to \boxed{S_{\mathrm{AOE}} + S_{\mathrm{CFO}} = 2 \cdot S_{\mathrm{ABM}}}$$

תשובה: נכון, $S_{\mathrm{AOE}} + S_{\mathrm{CFO}} = 2 \cdot S_{\mathrm{ABM}}$.

א. מרכז המעגל M **נמצא על ציר ה-** y **, ולכן** $x_{\mathrm{M}}=0$.

(1) הרדיוסים שווים זה לזה.

אפשר <u>להראות</u> שהמרחק של מרכז המעגל משתי הנקודות הנתונות שווים.

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{MA}&=\sqrt{(0-3)^2+(3-7)^2}=\sqrt{25}=5\\ \mathrm{MB}&=\sqrt{(0-(-5))^2+(3-3)^2}=\sqrt{25}=5\end{aligned}\right\}\mathrm{MA}=\mathrm{MB}=R=5$$

ואפשר גם <u>להוכיח</u>.

$$\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$$

$$\sqrt{(0-3)^2+(y-7)^2}=\sqrt{(0-(-5))^2+(y-3)^2}$$

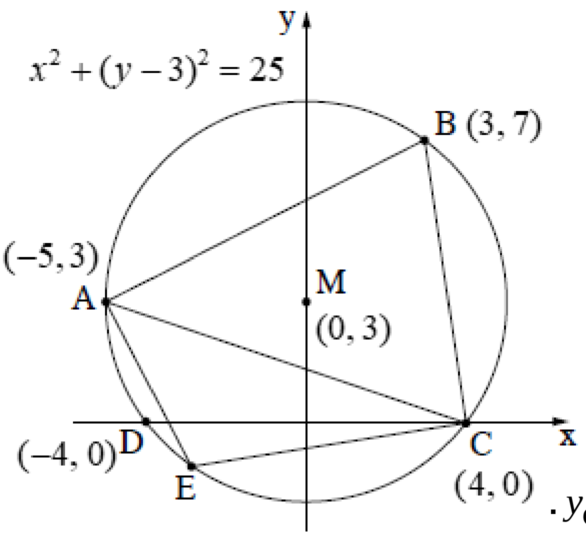
$$9+(y-7)^2=25+(y-3)^2$$

$$9+y^2-14y+49=25+y^2-6y+9 \quad /-y^2$$

$$58-14y=-6y+34$$

$$-8y=-24 \quad /:(-8)$$

$$y=3 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{M}(0,3)}$$



(2) תשובה: משוואת המעגל היא $x^2+(y-3)^2=25$.

(3) הנקודות C **ו-** D **נמצאות על ציר ה-**x **, ולכן** $y_{\mathrm{C}}=y_{\mathrm{D}}=0$.

נציב $y=0$ **במשוואת המעגל, ובהתאם לסרטוט:** $x_{\mathrm{C}}>x_{\mathrm{D}}$.

$$x^2+(0-3)^2=25$$

$$x^2+9=25\rightarrow \quad /-9$$

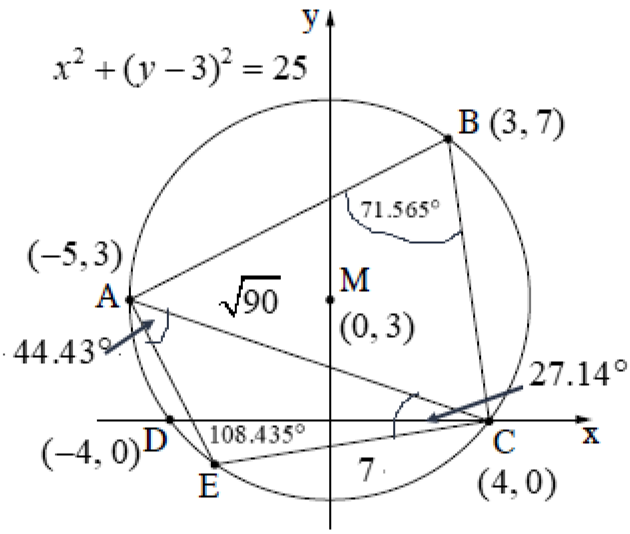
$$x^2=16$$

$$x=4 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{C}(4,0)} \quad \leftarrow x_{\mathrm{C}}>x_{\mathrm{D}}$$

$$x=-4 \quad \rightarrow \boxed{\mathrm{D}(-4,0)}$$

תשובה: $\mathrm{D}(-4,0)$, $\mathrm{C}(4,0)$.

ב. נביט על ΔABC שחסום במעגל.



(1) $AC=\sqrt{(3-0)^2+(-5-4)^2}=\sqrt{90}$

תשובה: אורך הצלע AC הוא $\sqrt{90}$.

(2) נשתמש במשפט הסינוסים ב- ΔABC .

$$\frac{AC}{\sin\sphericalangle ABC}=2R_{\Delta ABC}$$

$$\frac{\sqrt{90}}{2\cdot 5}=\sin\sphericalangle ABC \ .$$

$$\boxed{\sphericalangle ABC=71.565^\circ}$$

נבחרה זווית חדה כי נתון ש- ΔABC חד-זווית.

תשובה: $\sphericalangle ABC=71.565^\circ$

ג. מרובע $ABCE$ חסום המעגל, ולכן סכום זוויות נגדיות 180°.

$$\sphericalangle AEC=180^\circ-71.565^\circ=108.435^\circ$$

תשובה: $\sphericalangle AEC=108.435^\circ$.

ד. במשולש ACE יש לנו אורכים של שתי צלעות, נחשב את הזווית שביניהן, בשני שלבים.

$$\frac{AC}{\sin 108.435^\circ}=\frac{EC}{\sin\sphericalangle CAE}$$

$$\sin\sphericalangle CAE=\frac{7\sin 108.435^\circ}{\sqrt{90}}=0.7$$

$$\boxed{\sphericalangle CAE=44.43^\circ}$$

דרך חלופית – גם ACE חסום באותו מעגל

$$\frac{EC}{\sin\sphericalangle CAE}=2R$$

$$\frac{7}{2\cdot 5}=\sin\sphericalangle CAE$$

$$\sin\sphericalangle CAE=0.7$$

$$\boxed{\sphericalangle CAE=44.43^\circ}$$

$$\sphericalangle ACE=180^\circ-44.43^\circ-108.435^\circ$$

$$\boxed{\sphericalangle ACE=27.14^\circ}$$

ועכשיו, סוף סוף, ניתן לחשב את השטח.

$$S_{\Delta AEC}=\frac{AC\cdot EC\cdot\sin\sphericalangle ACE}{2}$$

$$S_{\Delta AEC}=\frac{\sqrt{90}\cdot 7\cdot\sin 27.14^\circ}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta AEC}=15.15}$$

תשובה: שטח משולש AEC הוא 15.15.

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{9-4x^2}{1-x^2}$

(מומלץ לשים לב לכך שהפונקציה זוגית, והגרף סימטרי לציר ה- y **, ותהייה גם נקודת קיצון על ציר זה).**

(1) בתחום ההגדרה מכנה שונה מאפס: $x\neq\pm1 \quad \rightarrow 1-x^2\neq 0$.

תשובה: תחום ההגדרה: $x\neq\pm1$.

(2) נמצא אסימפטוטות המאונכות לצירים.

אסימפטוטות מאונכות לציר ה- x **: הישרים** $x=1$ **, ו-** $x=-1$ **(מספרים אלה מאפסים מכנה ולא מונה).**

אסימפטוטה מאונכת לציר ה- y **: הישר** $y=4$.

(חזקות המונה והמכנה שווים, והפונקציה שואפת למנת המקדמים של x^2 **)**

הערה – לא נדרשים הסברים בבגרות.

תשובה: $x=1$, $x=-1$, $y=4$.

(3) נמצא את נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ציר y **:** $x=0$ **-** $\boxed{(0,9)} \leftarrow f(0)=\dfrac{9-4\cdot0^2}{1-0^2}=1$

ציר x **:** $y=0$ **-** $x=\pm1.5 \leftarrow x^2=2.25 \leftarrow 9-4x^2=0$.

תשובה: $(0,9)$ **,** $(1.5,0)$ **,** $(-1.5,0)$.

(4) נמצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה, ונקבע את סוגה.

$$f'(x)=\frac{-8x(1-x^2)-(-2x)(9-4x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x\left[-4(1-x^2)+9-4x^2\right]}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(-4+4x^2+9-4x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{10x}{(1-x^2)^2}}$$

$$10x=0 \quad \rightarrow x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,9)}$$

הביטוי במונה הוא של קו ישר עולה, שעובר משליליות לחיוביות, וסימניו קובעים את סימן הנגזרת.

נבנה טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה

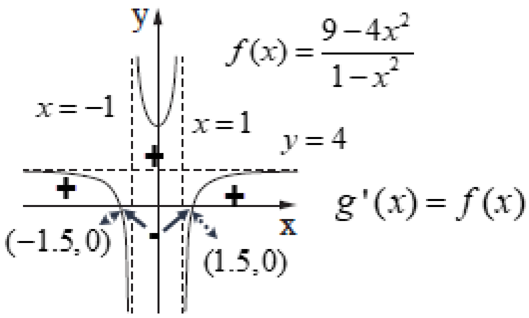
x		1		0		-1	
$f'(x)$	+		+	0	-		-
מסקנה	↗		↗	מינ	↘		↘

תשובה: $(0,9)$ **מינימום (כצפוי נקודת קיצון על ציר ה-** y **בהתאם לזוגיות של הפונקציה).**

(5) תשובה: עלייה $x>1$ **או** $0<x<1$ **, ירידה** $-1<x<0$ **או** $x<-1$.

ב. הסקיצה המתאימה.

כמו שציינו בהתחלה: (מומלץ לשים לב לכך שהפונקציה זוגית, והגרף סימטרי לציר ה- y **).**



תשובה: השרטוט מעל.

ג. נתון כי הפונקציה $g(x)$ **מוגדרת באותו תחום של** $f(x)$ **ומקיימת:** $g'(x)=f(x)$ **.**

בסקיצה, בסעיף ב, סימנו את סימני $g'(x)$**, שמהם ניתן ללמוד על תחומי עלייה וירידה של** $g(x)$ **.**

$g'(x)$ **עוברת מחיוביות לשליליות עבור** $x=-1.5$ **, ולכן** $g(x)$ **מעלייה לירידה, ו-** $x=-1.5$ **מקסימום.**

$g'(x)$ **עוברת משליליות לחיוביות עבור** $x=1.5$ **, ולכן** $g(x)$ **מירידה לעלייה, ו-** $x=1.5$ **מינימום.**

תשובה: עבור $g(x)$ **:** $x=-1.5$ **מקסימום,** $x=1.5$ **מינימום.**

א. נתונה הפונקציה $f(x)=(x-1)\cdot\sqrt{2x+10}$ **.**

בתחום ההגדרה, ביטוי בתוך השורש הוא אי-שלילי.

$$2x+10\ge 0$$
$$2x\ge -10 \quad /:2>0$$
$$\boxed{x\ge -5}$$

תשובה: $x\ge -5$ **.**

ב. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **ונקבל את הנקודה** $(0,-\sqrt{10})$ **.**

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **ונקבל את הנקודות** $(1,0)$ **,** $(-5,0)$ **.**

תשובה: $(0,-\sqrt{10})$ **,** $(1,0)$, $(-5,0)$ **.**

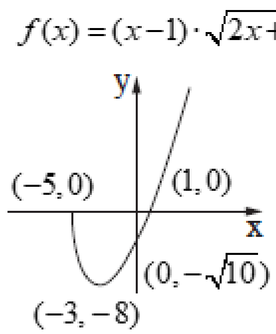
ג. נמצא את שיעורי כל נקודות הקיצון ונקבע את סוגן. $(-5,0)$ **בהכרח נקודת קיצון קצה.**

$$f'(x)=\sqrt{2x+10}+\frac{(x-1)\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x+10}}$$
$$f'(x)=\frac{2x+10+x-1}{\sqrt{2x+10}}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{3x+9}{\sqrt{2x+10}}}$$
$$0=3x+9 \quad \to -3x=9 \quad \to x=-3 \quad \to (-3,-8)$$
$$f'(-4)<0\ ,\ f'(-2)>0 \quad \to \boxed{(-3,-8),\min}$$

כיוון שהפונקציה יורדת מנקודת הקצה $(-5,0)$ **לנקודת המינימום, הרי שנקודת הקצה היא מקסימום.**

תשובה: $(-3,-8)$ **מינימום ,** $(-5,0)$ **מקסימום.**

ד. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ **.**



תשובה: הסרטוט מעל.

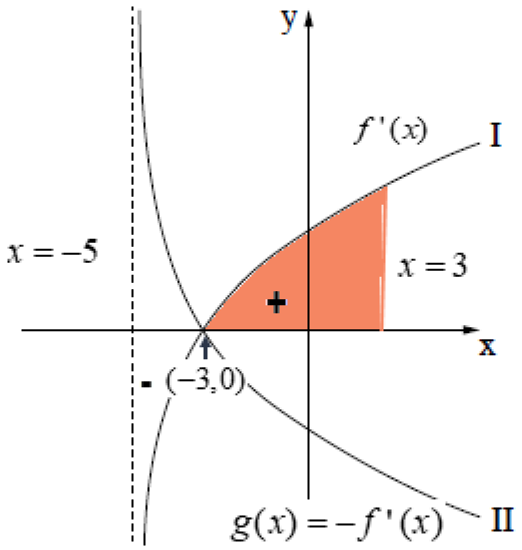
ה. כאשר מציירים, את גרף הנגזרת $f'(x)$, בתחום $x \ge 1$, נעזרים בשיקולים הבאים (מעבר לנדרש בבגרות):

- תחום הגדרה: $x > -5$ (כי $x = -5$ מאפס את המכנה)
- נקודת אפס: $(-3, 0)$ כי $f'(-3) = 0$.
- $x = -5$ אסימפטוטה אנכית
- סימני נגזרת, בהתאם לעלייה/ירידה של $f(x)$,

$f'(x) > 0$ כאשר $x > -3$.

$f'(x) < 0$ כאשר $-5 < x < -3$.

מסקנה – גרף I מתאר את גרף הפונקציה $f'(x)$.



הגרף $g(x) = -f'(x)$ סימטרי לגרף של $f'(x)$,

כאשר ציר ה- x הוא ציר הסימטריה.

מסקנה – גרף II מתאר את הפונקציה $g(x) = -f'(x)$

תשובה: גרף I מתאר את גרף הפונקציה $f'(x)$.

ו. משמאל השטח המבוקש בין פונקציית הנגזרת $f'(x)$, הישר $x = 3$ וציר ה- x (צבוע בכתום).

$$S = \int_{-3}^{3} (f'(x) - 0)\, dx = f(x)\Big]_{-3}^{3}$$

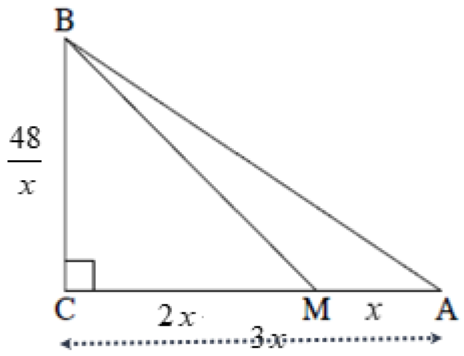
$$\left.\begin{matrix} x = 3 & f(3) = 8 \\ x = -3 & f(-3) = -8 \end{matrix}\right\} S = 8 - (-8) = 16 \rightarrow \boxed{S = 16}$$

תשובה: גודל השטח, המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$,

על ידי הישר $x = 3$, ועל ידי ציר ה- x , הוא 16.

א. נסמן $\mathrm{MA}=x$.

$\mathrm{MC}=2\mathrm{MA} \quad \leftarrow \mathrm{MC}=2x$ **, ובהתאם** $\mathrm{AC}=3x$.



$\Delta\mathrm{ABC}$ **הוא ישר זווית.**

$$S_{\Delta\mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}}{2}$$

$$72=\frac{3x\cdot\mathrm{BC}}{2} \quad /\cdot 2$$

$$144=3x\cdot\mathrm{BC} \quad /:3$$

$$\frac{144}{3x}=\mathrm{BC}$$

$$\boxed{\mathrm{BC}=\frac{48}{x}}$$

תשובה: $\mathrm{BC}=\frac{48}{x}$.

ב. (1) הפונקציה שיש להביא ל*מינימום* היא *סכום ריבועי מרחקי הנקודה* M ***משלושת קודקודי המשולש*** $(\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2+\mathrm{MC}^2)$.

משפט פיתגורס ב- $\Delta\mathrm{MBC}$

$$(\mathrm{MB})^2=(\mathrm{MC})^2+(\mathrm{BC})^2$$

$$(\mathrm{MB})^2=(2x)^2+(\frac{48}{x})^2$$

$$(\mathrm{MB})^2=4x^2+\frac{2{,}304}{x^2}$$

ופונקציית סכום הריבועים היא

$$f(x)=\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2+\mathrm{MC}^2$$

$$f(x)=x^2+4x^2+\frac{2{,}304}{x^2}+(2x)^2$$

$$f(x)=x^2+4x^2+\frac{2{,}304}{x^2}+4x^2$$

$$\boxed{f(x)=9x^2+\frac{2{,}304}{x^2}}$$

נמצא מינימום לפונקציה $f(x)=9x^2+\dfrac{2{,}304}{x^2}$

$$f(x)=9x^2+\frac{2{,}304}{x^2}$$

$$f'(x)=18x+\frac{0\cdot x^2-2x\cdot 2{,}304}{(x^2)^2}$$

$$f'(x)=18x-\frac{4{,}608x}{x^4}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{18x^5-4{,}608x}{x^4}}$$

$$18x^5-4{,}608x=0$$

$$x(18x^4-4{,}608)=0 \quad /:x>0$$

$$18x^4-4{,}608=0$$

$$18x^4=4{,}608 \quad /:18$$

$$x^4=256$$

$$x=+\sqrt[4]{256} \quad \leftarrow x>0$$

$$\boxed{x=4}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3)=\dfrac{(-)}{(+)}<0 \\[2ex] f'(5)=\dfrac{(+)}{(+)}>0 \end{array}\right\} x=4,\min$$

או בעזרת טבלה לזיהוי סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.

x	5	4	3	0
$f'(x)$	+		-	
מסקנה	↗	מין	↘	

תשובה: $x=4$ **, עבור סכום ריבועי מרחקי הנקודה** M **משלושת קודקודי המשולש** $(\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2+\mathrm{MC}^2)$ **הוא מינימלי.**

(2) הערך המינימלי של הסכום הוא $f(4)=9\cdot 4^2+\dfrac{2{,}304}{4^2}=288$.

ולכן סכום של 300 **הוא אפשרי.**

תשובה: ייתכן שהסכום $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2+\mathrm{MC}^2$ **הוא** 300 .