פתרון הבחינה
במתמטיקה

קיץ תשפ"ג , 2023 , מועד א', שאלון: 35372

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

הציונים במבחן קבלה לאוניברסיטה מתפלגים נורמלית

א. **נתון** $\boxed{s=80}$ **וכי** 84% **מן הנבחנים קיבלו ציון גבוה מ-** 410 **נקודות.**

אם 84% **קיבלו ציון <u>גבוה</u> מ-** 410 **נקודות, אז** $100\%-84\%=16\%$ **קיבלו ציון <u>נמוך</u> מ-** 410 **נקודות.**

נחשב משמאל לימין את האחוז המצטבר עד שנקבל $0.5\%+1.5\%+5\%+9\%=16\%$ **.**

לכן, הציון 410 **נמצא במרחק של סטיית תקן אחת מתחת לממוצע.**

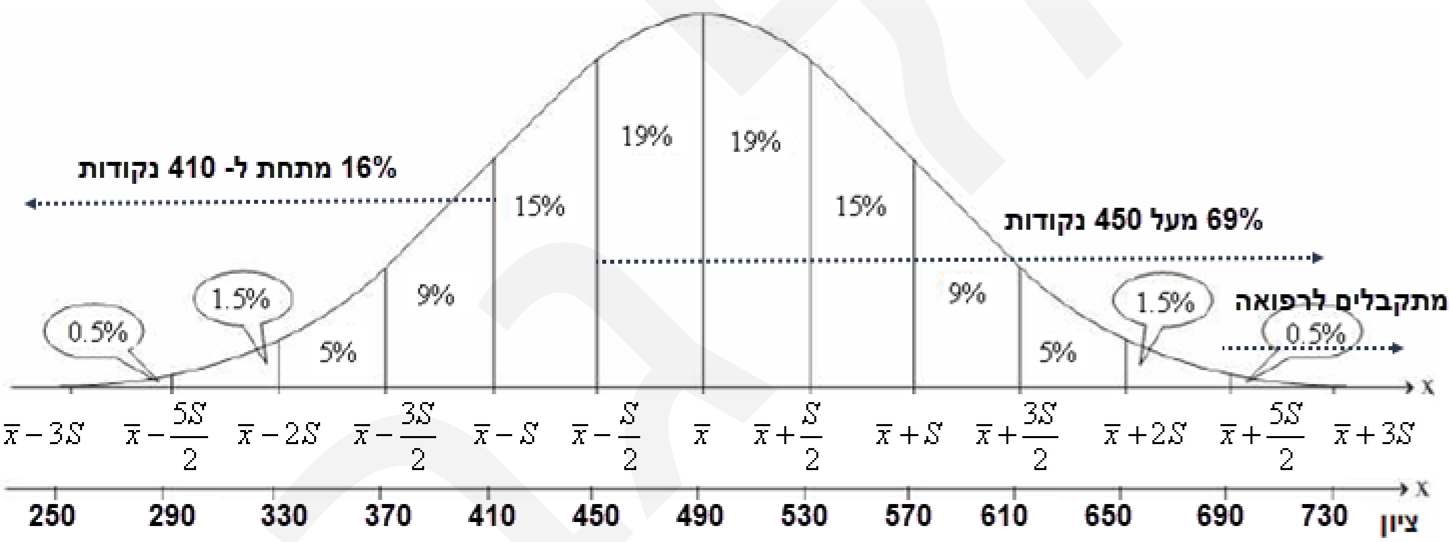
כיוון ש- $s=80$ **אז הציון הממוצע הוא** 490 **נקודות** $\bar{x}=410+80=$ **.**

תשובה: הציון הממוצע הוא 490 **נקודות.**

ב. **נעלה על גרף ההתפלגות הנורמלית שבנוסחאון את הציונים המתאימים,**

בהתאם למרחק שלהם בסטיות תקן מהממוצע. כאשר ידוע כי $\boxed{s=80}$ **,** $\boxed{\bar{x}=490}$

וחצי סטיית תקן הוא $80:2=40$ **.**



אחוז הציונים שמעל ל- 450 **הוא:** $19\%+50\%=69\%$,

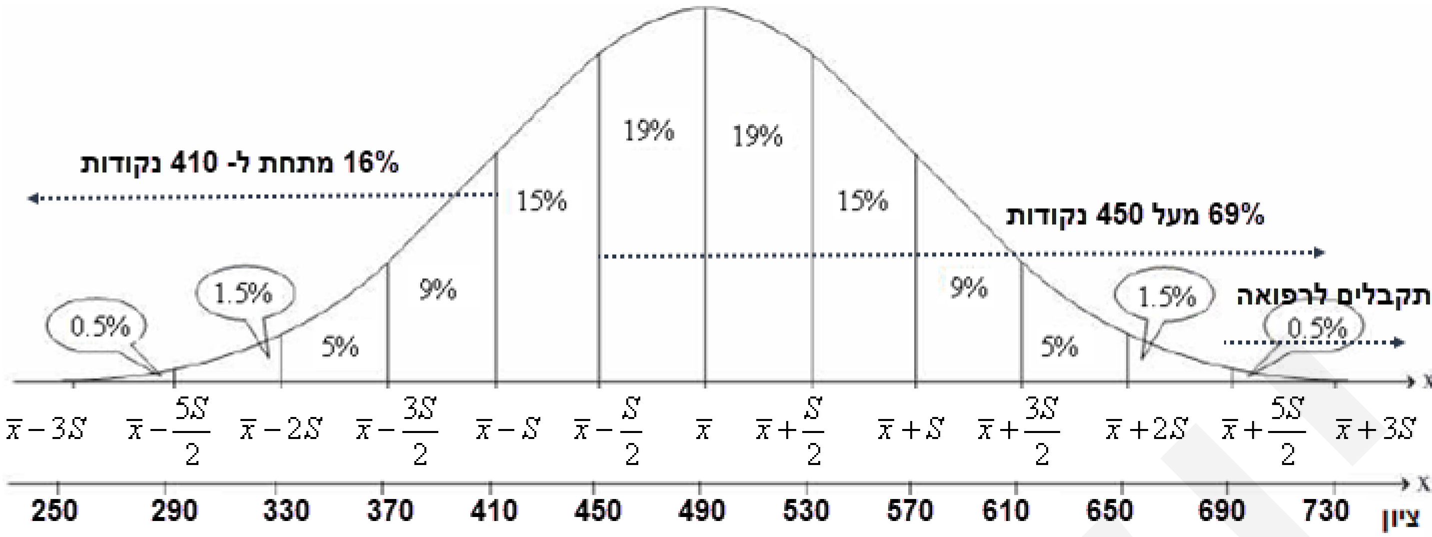
תשובה: 69% **מהנבחנים יכולים להתקבל לאוניברסיטה.**

ג. **למבחן ניגשו** $40,000$ **נבחנים, לכן** $27,600$ **נבחנים** $69\%\cdot 40,000=\frac{69}{100}\cdot 40,000=0.69\cdot 40,000=$ **מתקבלים.**

או, אם 100% **הם** $40,000$ **נבחנים, אז** 1% **הם** $40,000:100=400$,

ו- 69% **הם** $27,600$ **נבחנים** $69\cdot 400=$ **.**

תשובה: על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, $27,600$ **נבחנים יכולים להתקבל לאוניברסיטה.**



ד. יורם נבחן המבחן הקבלה לאוניברסיטה. ציון התקן של יורם היה אפס $(z=0)$ **.**

ציון תקן של אפס, מראה שהנתון היה הממוצע, כלומר שיורם קיבל בבחינה ציון $\bar{x}=490$ **,**

ניתן גם להציב בנוסחה:

$$z=\frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$0=\frac{x-490}{80} \quad /\cdot 80$$

$$0=x-490$$

$$\boxed{x=490}$$

ולכן יורם יכול להתקבל לאוניברסיטה כי $490>450$ **, שהוא ציון הסף לקבלה לאוניברסיטה.**

תשובה: כן, יורם יכול להתקבל לאוניברסיטה.

ה. 0.5% **מהנבחנים, אלה שקיבלו את הציונים הגבוהים ביותר במבחן, יכולים להתקבל ללימודי רפואה.**

(1) על פי הטבלה 0.5% **מהציונים נמצאים מעל לציון** 690**.**

תשובה: הציון, הנמוך ביותר המאפשר קבלה ללימודי רפואה באוניברסיטה, הוא 690**.**

(2) המרחק בסטיות תקן מהממוצע הוא ציון התקן.

לכן ציון התקן, עבור $x=690$ **(או עבור** $p<(100-0.5\%)=p<99.5\%$ **) הוא** $z=2.5$ **.**

אפשר גם להציב בנוסחה: $z=\frac{x-\bar{x}}{s} \rightarrow z=\frac{690-490}{80} \rightarrow z=\frac{200}{80} \rightarrow \boxed{z=2.5}$ **.**

תשובה: ציון התקן הנמוך ביותר, המאפשר קבלה ללימודי רפואה, הוא 2.5**.**

במאפייה מכינים שני סוגי מאפים: מאפה המכיל שומשום ומאפה בלי שומשום.
הטבלה שלפניכם מציגה את המשקלים שנמסרו בשאלה
ואת הרווח של המאפייה מכל מאפה שנמכר.

א. נסמן ב- x מספר המאפים המכילים שומשום, וב- y את מספר המאפים בלי שומשום.

נבנה טבלה מתאימה, כולל טור מתאים לפונקציית המטרה.

	משקל הבצק הדרוש למאפה (בגרמים)	משקל השומשום הדרוש למאפה (בגרמים)	הרווח של המאפייה ממכירת כל מאפה
x - מאפה המכיל שומשום	80 גרם	4 גרמים	4 שקלים
y - מאפה בלי שומשום	100 גרם	0 גרמים	2 שקלים
אילוץ	לכל היותר 20 ק"ג $20\cdot 1000 =$ גרם $20{,}000$	640 גרם לכל היותר	

ב. אם אופים רק מאפים בלי שומשום, אז מספר המאפים יהיה $20{,}000:100=200$.

תשובה: אם אופים רק מאפים בלי סומסום, אז אפשר לאפות לכל היותר 200 מאפים ביום זה במאפייה.

ג. נרשום את מערכת האילוצים, הנובעת הן מהמגבלות שהוצגו בטבלה,

והן מהעובדה שכמויות הבצק והשומשום אינן שליליות.

תשובה: מערכת האילוצים של הבעיה היא:

$$\begin{cases} 80x+100y\le 20{,}000 \\ 4x\le 640 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}.$$

ד. נסרטט את התחום האפשרי המתאים לבעיה.

כדי לצייר את האילוץ הראשון,

נבנה טבלת ערכים קטנה.

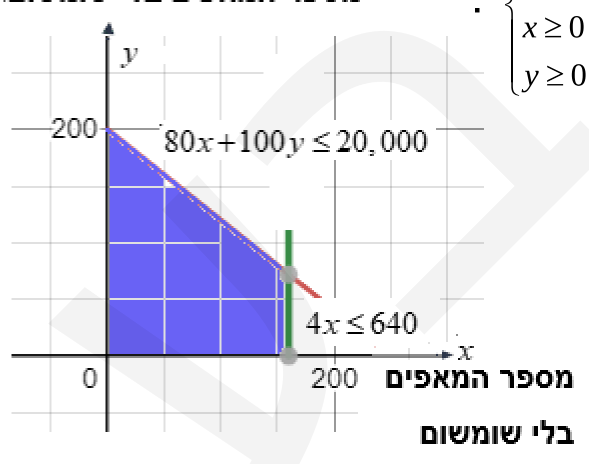
$80x+100y\le 20{,}000 \quad /:80$

$x+1.25y\le 250$

200	0
0	250

$x=0 \quad \to 1.25y=250 \quad \to y=200$

$y=0 \quad \to x=250$



נציב $(0,0)$ באילוץ $80x+100y\le 20{,}000$ ונקבל $0\le 20{,}000$, ולכן $(0,0)$ אפשרית, ונצבע מתחת לישר.

האילוץ השני הוא של קו אנכי $x\le 160 \leftarrow 4x\le 640$ ונצבע משמאל לישר.

תשובה: הסרטוט משמאל.

ה. הרווח של המאפייה ממכירת מאפה המכיל שומשום הוא 4 שקלים, וממאפה בלי שומשום הוא 2 שקלים.

תשובה: פונקציית המטרה היא: $f(x,y)=4x+2y$.

ו. נבנה טבלה שתסייע במענה לשאלה מהו הרווח המקסימלי האפשרי ביום זה, ממכירת כל המאפים.

נמצא את נקודת החיתוך בין שני האילוצים הראשונים.

$$\begin{cases} 80x+100y=20,000 \quad /:80 \\ 4x=640 \quad /:4 \end{cases}$$

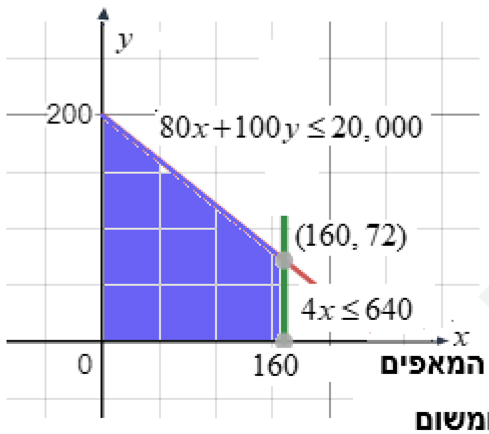
$$\begin{cases} x+1.25y=250 \\ \boxed{x=160} \end{cases}$$

$$160+1.25y=250 \quad /-160$$

$$1.25y=90 \quad /:1.25$$

$$\boxed{y=72} \rightarrow \boxed{(160,72)}$$

מספר המאפים בלי שומשום.



מספר המאפים
בלי שומשום

	$f(x,y)=4x+2y$
(0, 0)	$f(0,0)=4\cdot 0+2\cdot 0=0$
(0, 200)	$f(0,200)=4\cdot 0+2\cdot 200=400$
(160, 72)	$f(160,72)=4\cdot 160+2\cdot 72=\boxed{784}$
(160, 0)	$f(160,0)=4\cdot 160+2\cdot 0=640$

תשובה: הרווח המקסימלי, האפשרי ביום זה ממכירת כל המאפים, הוא 784 שקלים.

א. משוואת הצלע AB **היא** $y=\frac{1}{2}x+3$.

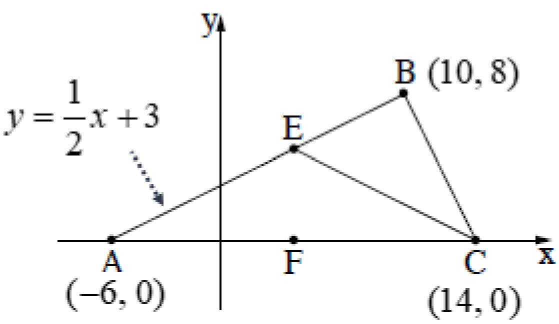
(1) הקודקוד A **נמצא על ציר ה-** x **, ולכן** $y_A=0$.

$$0=\frac{1}{2}x+3$$

$$-\frac{1}{2}x=3 \quad /:(-\frac{1}{2})$$

$$x=-6 \quad \rightarrow \boxed{A(-6,0)}$$

תשובה: $A(-6,0)$.



(2) $y_B=8$.

$$8=\frac{1}{2}x+3$$

$$5=\frac{1}{2}x \quad /:(\frac{1}{2})$$

$$x=10 \quad \rightarrow \boxed{x_B=10}$$

תשובה: $x_B=10$.

ב. נתון: שיעורי הקודקוד C **הם** $(14,0)$.

נוכיח כי הצלע AB **מאונכת לצלע** BC.

$$m_{BC}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}=\frac{8-0}{10-14}=\frac{8}{-4}=-2 \ .$$

משוואת הצלע AB **היא** $y=\frac{1}{2}x+3$ **, ולכן** $m_{AB}=\frac{1}{2}$.

$m_{AB}\cdot m_{BC}=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$ **, ולכן :** $AB\perp BC$ **(שיפוע הופכי לנגדי).**

תשובה: הוכחנו כי הצלע AB **מאונכת לצלע** BC.

ג. נתון כי $m_{EC}=-\frac{1}{2}$.

(1) נמצא את משוואת הישר EC **, באמצעות** $m_{EC}=-\frac{1}{2}$ **, ו-** $C(14,0)$.

$$y-0=-\frac{1}{2}(x-14)$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{2}x+7}$$

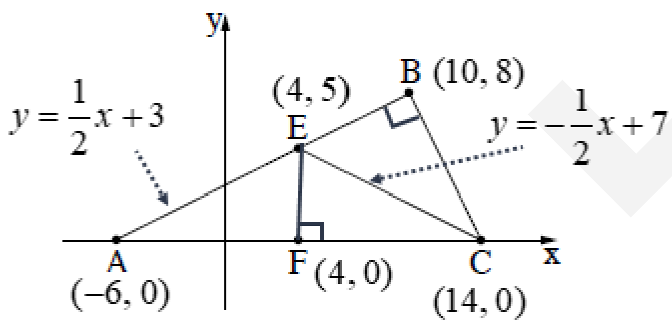
תשובה: משוואת הישר EC **היא** $y=-\frac{1}{2}x+7$.

(2) נמצא את שיעורי הנקודה , נקודת ההיתוך בין הישרים EC **ו-** AB**.**

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+7 \\ y=\frac{1}{2}x+3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x+3=-\frac{1}{2}x+7$$

$$\left.\begin{aligned} &x=4 \\ &y=\frac{1}{2}\cdot 4+3=5 \end{aligned}\right\} \boxed{E(4,5)}$$



תשובה: $E(4,5)$.

ד. נחשב את שטח המשולש EBC .

$$BE=\sqrt{(10-4)^2+(8-5)^2}=\sqrt{45}$$

$$BC=\sqrt{(10-14)^2+(8-0)^2}=\sqrt{80}$$

$$S_{\Delta EBC}=\frac{BE\cdot BC}{2}=\frac{\sqrt{45}\cdot\sqrt{80}}{2}$$

$$\boxed{S_{\Delta EBC}=30}$$

תשובה: שטח המשולש EBC **הוא** 30 .

ה. נחשב את שטח המרובע $FEBC$.

EF **מקביל לציר** y **, לכן** $x_F=x_E=4$,

וגם EF **מאונך לציר ה-** x **ול-** CF .

$$EF=y_E-y_F=5-0=5$$

$$CF=x_C-x_F=14-4=10$$

$$S_{\Delta EFC}=\frac{CF\cdot EF}{2}=\frac{10\cdot 5}{2}$$

$$S_{\Delta EFC}=25$$

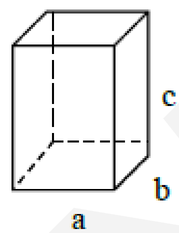
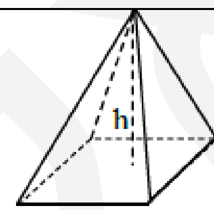
$$S_{FEBC}=S_{\Delta EFC}+S_{\Delta EBC}=25+30$$

$$\boxed{S_{FEBC}=55}$$

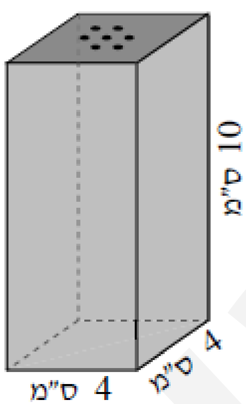
תשובה: שטח המרובע $FEBC$ **הוא** 55 .

בתרגיל זה נעבוד עם הגופים תיבה ופירמידה.

כך זה מופיע בדף הנוסחאות, ובתרגיל שלנו שני הבסיסים הם ריבועים.

הגוף	סרטוט	שטח מעטפת (M)	שטח פנים (F)	נפח (V)
<u>תיבה</u> שמקצועות הבסיס שלה הן a ו- b והמקצוע הצדדי שלה הוא c		M = סכום שטחי הפאות הצדדיות $M = 2(a\cdot c + b\cdot c)$	$F = M + 2ab$ $F = 2(a\cdot b + b\cdot c + a\cdot c)$	$V = a\cdot b\cdot c$
<u>פירמידה ישרה שבסיסה מלבן</u> S הוא שטח המלבן / הבסיס h הוא גובה הפירמידה		M = סכום שטחי הפאות הצדדיות	$F = M + S$	$V = \frac{S\cdot h}{3}$

א. נחשב את נפח המלחייה מסוג א', שבסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו 4 ס"מ , וגובהה הוא 10 ס"מ.



נפח תיבה, שמקצועות הבסיס שלה הם a , b , וגובהה הוא c, הוא $V = a\cdot b\cdot c$.

נפח המלחייה הוא: $V = 4\cdot 4\cdot 10 =$ 160 סמ"ק .

תשובה: נפח המלחייה מסוג א' הוא 160 סמ"ק.

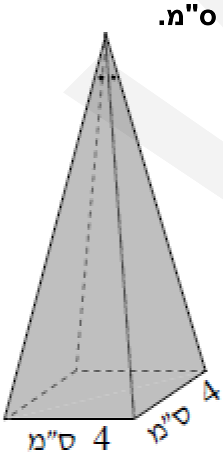
ב. נפח מלחייה מסוג ב' קטן ב- 96 סמ"ק מנפח מלחייה מסוג א'.

(1) נמצא מהו הנפח של מלחייה מסוג ב'.

$160 - 96 =$ 64 **סמ"ק**

תשובה: הנפח של מלחייה מסוג ב' הוא 64 סמ"ק .

(2) נמצא מהו הגובה של מלחייה מסוג ב', שהבסיס שלה הוא גם בצורת ריבוע שאורך צלעו 4 ס"מ.



מלחייה מסוג ב'

נפח פירמידה, ששטח הבסיס שלה הוא S , וגובהה h , הוא $V = \frac{S\cdot h}{3}$.

שטח הבסיס הוא 16 סמ"ר $S = 4\cdot 4 =$.

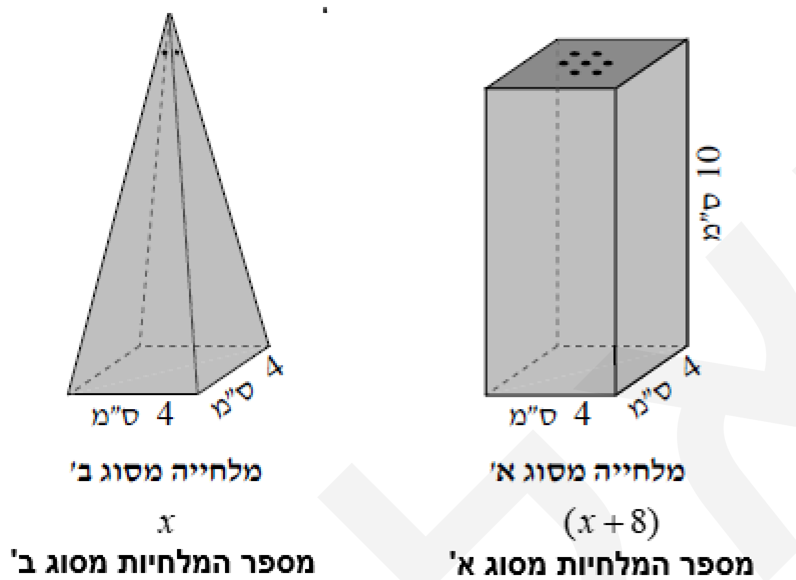
$$64 = \frac{16\cdot h}{3} \quad /\cdot 3$$
$$192 = 16\cdot h \quad /:16$$
$$\boxed{h = 12}$$

תשובה: הגובה של מלחייה מסוג ב' הוא 12 ס"מ .

ג. על השולחנות במסעדה שידרו מלחיות משני הסוגים.

מספר המלחיות מסוג א' שסידרו היה גדול ב- 8 **ממספר המלחיות מסוג ב'.**

נסמן ב- x **את מספר המלחיות מסוג ב', ובהתאם** $(x+8)$ **הוא מספר המלחיות מסוג א'.**



בכל מלחייה מילאו מלח, שנפחו היה 75% **מנפח המלחייה:**

במלחייה מסוג א' מילאו: 120 **סמ"ק** $= 75\%\cdot 160 = \frac{75}{100}\cdot 160 = 0.75\cdot 160$.

במלחייה מסוג ב' מילאו: 48 **סמ"ק**$= 75\%\cdot 64 = \frac{75}{100}\cdot 64 = 0.75\cdot 64$.

נפח המלח, שמילאו בתוך כל המלחיות משני הסוגים, היה $3{,}144$ **סמ"ק סך הכול.**

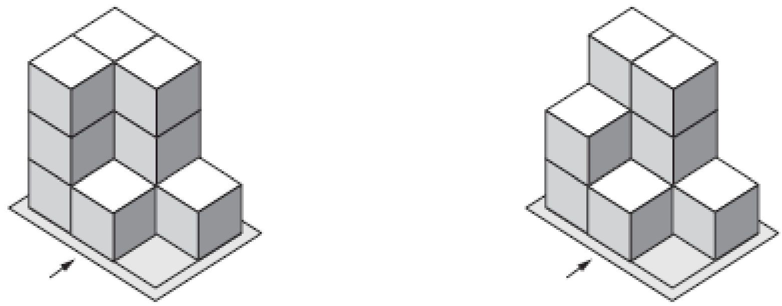
המשוואה המתאימה היא: $48\cdot x + 120\cdot(x+8) = 3{,}144$.

$$48x + 120x + 960 = 3{,}144 \quad / -960$$

$$168x = 2{,}184 \quad / :168$$

$$\boxed{x=13}$$

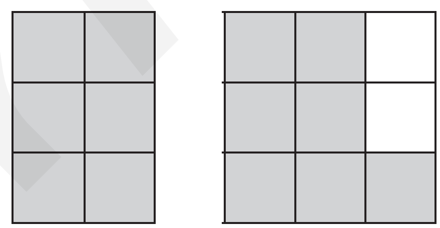
תשובה: מספר המלחיות מסוג ב', שסידרו במסעדה, היה 13 .



מבנה 2   מבנה 1

לפנינו סרטוטים של שני מבנים מקוביות.
החץ בסרטוטים מייצג את המבט מלפנים

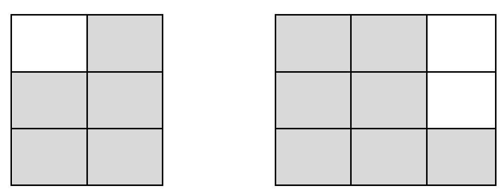
א. לפנינו תרשימים המייצגים שני מבטים: מבט מלפנים ומבט מימין.



מבט מימין   מבט מלפנים

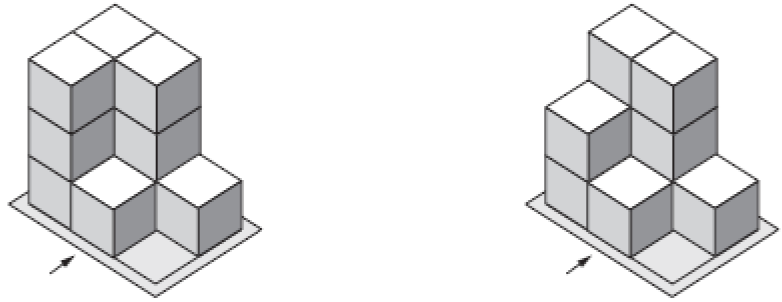
(1) במבט מלפנים, רואים מימין לשמאל גובה של קובייה אחת, שלוש קוביות ושלוש קוביות (כך גם במבנה 1).
במבט מימין, רואים מימין לשמאל, גובה של שלוש קוביות, ועוד טור עם גובה של שלוש קוביות
(בניגוד למבנה 1, שבו רואים בטור הימני גובה של שלוש קוביות ובשמאלי גובה רק של שתי קוביות.)
תשובה: מבנה 2 מתאים לשני המבטים.

(2) בהתאם להסבר מהסעיף הקודם, נשלים את המבט מימין ואת המבט מלפנים, עבור מבנה 1.



מבט מימין   **מבט מלפנים**

תשובה: המבטים מעל.



מבנה 2 מבנה 1

לפנינו סרטוטים של שני מבנים מקוביות.

החץ בסרטוטים מייצג את המבט מלפנים

ב. תרשים מספרים, מראה כמה קוביות יש בכל משבצת, כאשר מסתכלים ממבט לפנים.

כאשר, בלוח הנוכחי, יש שתי שורות ושלושה טורים.

3	3	1
2	1	0

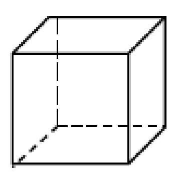
תשובה: רשמנו את תרשים המספרים של מבנה 1.

ג. אורך הצלע של כל קוביה הוא 3 **.**

על פי הציור, ותרשים המספרים של מבנה 1, במבנה 1 יש: 10 **קוביות** $=2+1+0+3+3+1$ **.**

על פי הציור מבנה 2 יש: 11 **קוביות** $=3+1+0+3+3+1$ **.**

מכאן שבמבנה 2 יש קובייה אחת יותר.

$V = a^3$	$F = 6a^2$	$M =$ סכום שטחי הפאות הצדדיות $M = 4a^2$	 a	קובייה שאורך המקצוע שלה הוא a

נפח קובייה, שאורך המקצוע שלה הוא a **, הוא** $V = a^3$.

לכן, נפח הקובייה שלפנינו הוא $V = 3^3 = 27$ **.**

תשובה: הנפח של מבנה 2 גדול ב- 27 **מן הנפח של מבנה 1.**