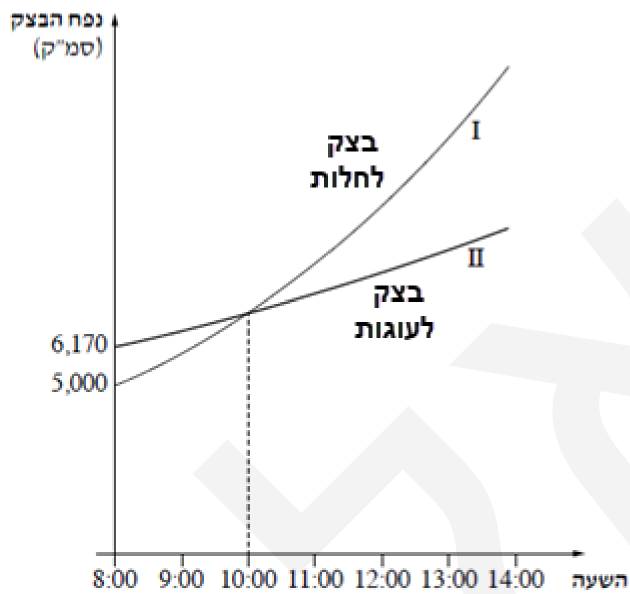
פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג ,2023 , מועד א', שאלון: 35371

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה

במאפיית "הלחמניא" אופים חלות ועוגות, משני סוגי בצק: בצק לחלות ובצק לעוגות.
הנפח של שני סוגי הבצק גדל בצורה מעריכית.
הגרפים שלפנינו מתארים את הנפח של כל אחד מסוגי הבצק, לפי שעה.



א. בשעה $8:00$, בזמן תחילת תהליך הנפיחה, היה נפח הבצק לעוגות גדול מנפח הבצק לחלות.

על פי הסרטוט, גרף II מתחיל מנפח גדול יותר של $6{,}170$ סמ"ק (לעומת $5{,}000$ סמ"ק של גרף I).

ולכן גרף II מתאר את נפח הבצק לעוגות, וגרף I מתאר את נפח הבצק לחלות.

תשובה: גרף I מתאר את נפח הבצק לחלות.

ב. בשעה $8:00$, נפח הבצק לחלות היה $5{,}000$ סמ"ק.

ג. נתון כי נפח הבצק לחלות גדל ב- 20% בכל שנה.

$$q=\frac{100+20}{100}=\frac{120}{100}$$

$$\boxed{q=1.2}$$

נמצא מה היה נפח הבצק לחלות בשעה $10:00$, כלומר $t=2$.

A_t	A_0	q	t
?	5,000	1.2	2

$$A_2=5{,}000\cdot1.2^2$$

$$\boxed{A_2=7{,}200}$$

תשובה: נפח הבצק לחלות בשעה $10:00$ היה $7{,}200$ סמ"ק .

ד. בשעה $10:00$ נפח הבצק לעוגות היה שווה לנפח הבצק לחלות

נחשב בכמה אחוזים גדל נפח הבצק לעוגות בכל שעה.

הנפח ההתחלתי היה $6{,}170$ סמ"ק, והוא גדל ל- $7{,}200$ סמ"ק לאחר 2 שעות (מ- $8:00$ עד $10:00$).

A_t	A_0	q	t
$7{,}200$	$6{,}170$	**?**	2

$$7{,}200 = 6{,}170 \cdot q^2 \quad / : 6{,}170$$

$$\frac{7{,}200}{6{,}170} = q^2$$

$$1.167 = q^2$$

$$q = \sqrt[2]{1.167}$$

$$\boxed{q = 1.08}$$

$$1.08 = \frac{100 + P}{100} \quad / \cdot 100$$

$$108 = 100 + P$$

$$\boxed{P = 8}$$

תשובה: נפח הבצק לעוגות גדל כל שעה ב- 8% .

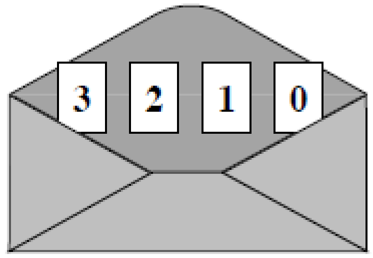
ה. נמצא מה יהיה נפח הבצק לעוגות בשעה $13:00$, 5 שעות מאז השעה ההתחלתית (מ- $8:00$ עד $13:00$).

A_t	A_0	q	t
?	$6{,}170$	1.08	5

$$A_5 = 6{,}170 \cdot 1.08^5$$

$$\boxed{A_5 \approx 9{,}065.8}$$

תשובה: נפח הבצק לעוגות בשעה $13:00$ יהיה כ- $9{,}065.8$ סמ"ק.



במעטפה יש ארבעה פתקים, עם המספרים הרשומים: $3,2,1,0$.

לכן, ההסתברות להוצאה של כל אחד מהפתקים השונים האלו היא $\frac{1}{4}$.

בסעיף א הוציאו באקראי פתק אחד מן המעטפה, ולאחר מכן החזירו אותו.

א. תשובה: ההסתברות, *שעל הפתק שהוציאו רשום המספר* 2 **, היא** $\frac{1}{4}$.

בסעיפים ב–ג: חני הוציאה פתק מהמעטפה,

לאחר מכן <u>החזירה אותו</u>, ושוב הוציאה פתק באקראי .

ב. נחשב את ההסתברות שבשתי הפעמים הוציאה חני פתק שרשום עליו המספר 1.

$$P=\overset{1}{\frac{1}{4}}\cdot\overset{1}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{16}$$

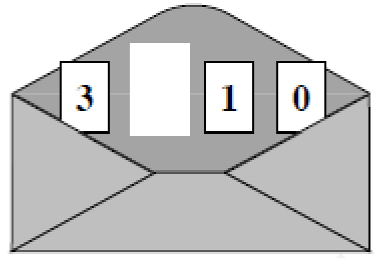
תשובה: ההסתברות, שבשתי הפעמים הוציאה חני פתק שרשום עליו המספר 1**, היא** $\frac{1}{16}$.

ג. נחשב את ההסתברות שסכום שני המספרים שעל הפתקים שהוציאה חני הוא 4 .

$$P=\overset{3}{\frac{1}{4}}\cdot\overset{1}{\frac{1}{4}}+\overset{1}{\frac{1}{4}}\cdot\overset{3}{\frac{1}{4}}+\overset{2}{\frac{1}{4}}\cdot\overset{2}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{16}$$

תשובה: ההסתברות, שסכום שני המספרים שעל הפתקים שהוציאה חני הוא 4**, היא** $\frac{3}{16}$.

בסעיף ד: הוציאו מן המעטפה את הפתק שעליו רשום המספר 2,
כך שנותרו 3 פתקים בלבד המעטפה.



לכן, ההסתברות להוצאה של כל אחד מהפתקים השונים האלו היא $\frac{1}{3}$.

ד. יעל הוציאה באקראי פתק מן המעטפה, לאחר מכן <u>החזירה אותו</u>, ושוב הוציאה פתק באקראי.

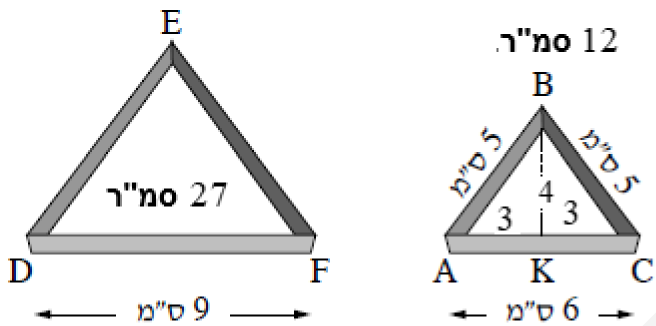
נחשב את ההסתברות שסכום שני המספרים שעל הפתקים שהוציאה יעל הוא 4 .

$$P=\overset{3}{\frac{1}{3}}\cdot\overset{1}{\frac{1}{3}}+\overset{1}{\frac{1}{3}}\cdot\overset{3}{\frac{1}{3}}=\frac{2}{9}$$

תשובה: ההסתברות, שסכום שני המספרים שעל הפתקים שהוציאה יעל הוא 4**, היא** $\frac{2}{9}$.

רוני הכינה עוגיות מבצק פריק, בעזרת שני חותכנים של עוגיות.
המשולשים הם משולשים שווי שוקיים הדומים זה לזה $\Delta DEF \sim \Delta ABC$.

א. הגובה (BK) **לבסיס** (AC) **במשולש שווה שוקיים הוא גם תיכון, לכן** $AK = CK =$ 3 **ס"מ** .



נמצא את AB **באמצעות משפט פיתגורס.**

$\underline{\Delta BKC}$

$(BK)^2 + (CK)^2 = (BC)^2$

$(BK)^2 + 3^2 = 5^2$

$(BK)^2 = 16$

$BK = \sqrt{16}$

$BK =$ 4 **ס"מ**

תשובה: אורך הגובה לבסיס של החותכן הקטן (BK) **הוא** 4 **ס"מ.**

ב. נחשב את שטח המשולש ABC.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BK}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ סמ"ר}$$

תשובה: השטח של עוגייה קטנה הוא 12 **סמ"ר.**

ג. נמצא את יחס הדמיון בין המשולש DEF **ובין המשולש** ABC $(\Delta DEF \sim \Delta ABC)$.

$\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$ **(יחסי צלעות מתאימות במשולשים דומים).**

$$\frac{DF}{AC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 3:2 = 1.5 \quad .$$

תשובה: יחס הדמיון, בין החותכן הגדול לחותכן הקטן, הוא $1.5 = 3:2 = \frac{3}{2} = \frac{9}{6}$ **(אפשר לרשום בכל דרך).**

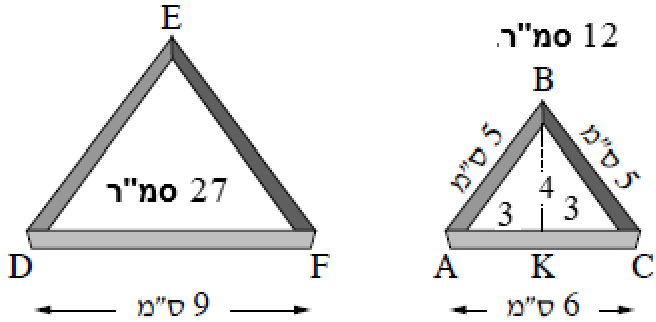
ד. יחס שטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הדמיון .

$$S_{\Delta DEF} = S_{\Delta ABC} \cdot 1.5^2 = 12 \cdot 1.5^2 = 27 \text{ סמ"ר}$$

תשובה: השטח של עוגייה גדולה הוא 27 **סמ"ר.**

רוני רידדה את הבצק עד ששטחו היה 546 סמ"ר.

להכנת כל העוגיות היא השתמשה בחצי משטח הבצק המרודד.



ה. שטח הבצק, שממנו הכינה רוני את העוגיות היה 273 סמ"ר $=546:2$.

מספר העוגיות הקטנות והגדולות היה זהה, לכן נסמן ב- x **את מספר העוגיות מכל גודל.**

המשוואה המתאימה היא: $12\cdot x+27\cdot x=273$.

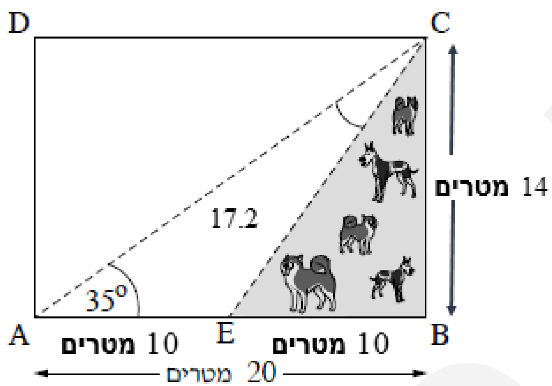
$$12x+27x=273$$

$$39x=273 \quad /:39$$

$$\boxed{x=7}$$

תשובה: רוני הכינה 7 **עוגיות גדולות, ו-** 7 **עוגיות קטנות.**

בסרטוט מתוארת גינה בצורת מלבן ABCD.
משולש EBC מיועד לגינת כלבים, ולכן הוא מגודר מכל הצדדים.



א. נמצא את אורך הצלע BC.

$\underline{\Delta ABC}$

$$\tan\sphericalangle CAB=\frac{BC}{AB}$$

$$\tan 35^\circ=\frac{BC}{20}$$

$$20\tan 35^\circ=BC$$

BC = 14 **מטרים**

תשובה: אורך הצלע BC **הוא** 14 **מטרים.**

ב. נחשב את שטח המלבן ABCD.

$S_{ABCD}=AB\cdot BC=20\cdot 14=$ 280 **מ"ר**

תשובה: שטח הגינה ABCD **הוא** 280 **מ"ר.**

ג. נמצא את אורך הקטע EC **, באמצעות משפט פיתגורוס.**

הנקודה E **היא אמצע הצלע** AB **, לכן** $EB=20:2=$ 10 **מטרים** .

$\underline{\Delta EBC}$

$$(EB)^2+(BC)^2=(EC)^2$$

$$10^2+14^2=(EC)^2$$

$$296=(EC)^2$$

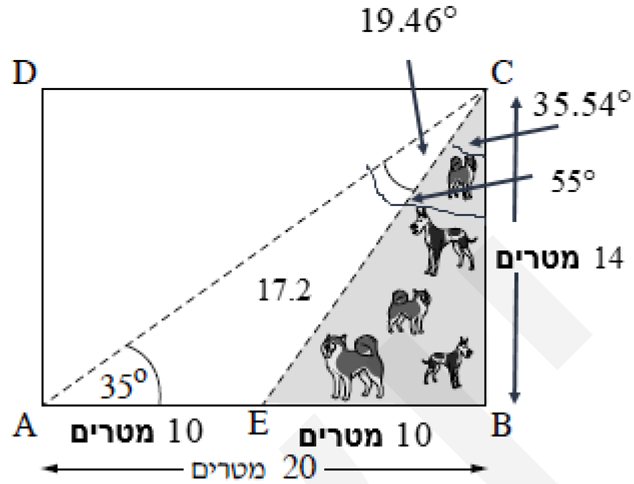
$$\sqrt{296}=EC$$

EC = 17.2 **מטרים**

היקף המשולש EBC **הוא:** $10+14+17.2=$ 41.2 **מטרים** .

תשובה: אורך הגדר, שמסביב לגינת הכלבים, הוא 41.2 **מטרים.**

ד. נחשב את $\sphericalangle ACE$ **, כהפרש בין שתי זוויות:** $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ECB$.



<u>ΔECB</u>

$$\tan \sphericalangle ECB = \frac{EB}{BC}$$

$$\tan \sphericalangle ECB = \frac{10}{14}$$

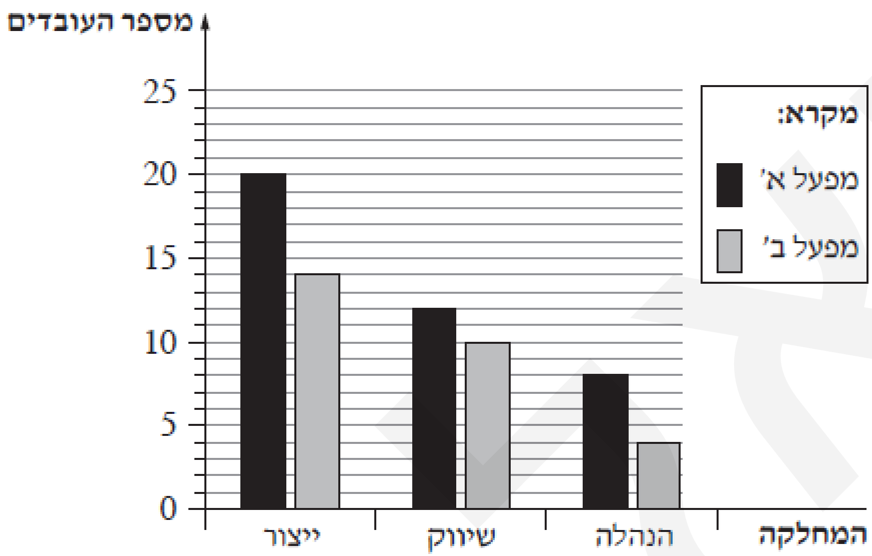
$$\boxed{\sphericalangle ECB = 35.54^\circ}$$

ב- ΔABC **סכום זוויות הוא** 180° **, ולכן:** $\sphericalangle ACB = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

$$\sphericalangle ACE = 55^\circ - 35.54^\circ = 19.46^\circ$$

תשובה: גודל הזווית, שבין שני השבילים CA **ו-** CE**, הוא** 19.46° **(** $\sphericalangle ACE$ **).**

בכל אחד מן המפעלים, מפעל א' ומפעל ב', יש שלוש מחלקות" ייצור, שיווק והנהלה.
בדיאגרמה מתוארת התפלגות של מספר העובדים,
לפי מחלקה, בעבור כל אחד מו המפעלים.



א. המספר הכולל הוא סכום השכיחויות: $N = f_1 + f_2 + ... + f_n$:

(1) במפעל א':

$$N = 20 + 12 + 8$$

$$\boxed{N = 40}$$

תשובה: במפעל א' יש 40 **עובדים.**

(2) במפעל ב':

$$N = 14 + 10 + 4$$

$$\boxed{N = 28}$$

תשובה: במפעל ב' יש 28 **עובדים.**

ב. נבדוק בכל מפעל, מהו אחוז העובדים במחלקת השיווק:

במפעל א': $\frac{12}{40} \cdot 100\% = 0.3 \cdot 100\% = 30\%$

במפעל ב': $\frac{10}{28} \cdot 100\% = 0.3571 \cdot 100\% = 35.71\%$

תשובה: במפעל ב', אחוז העובדים במחלקת השיווק גדול יותר ($35.71\% > 30\%$).

בטבלה מוצגת המשכורת של עובד ב', בהתאם למחלקה שבה הוא עובד.

בדיאגרמה מתוארת התפלגות של מספר העובדים.

ג. נשלים, על פי הדיאגרמה הראשונה, את מספר העובדים בכל מחלקה.

המחלקה	הנהלה	שיווק	ייצור	
המשכורת (בשקלים)	$18,000$	x	$9,000$	**סה"כ**
מספר העובדים	4	10	14	28

תשובה: הטבלה מעל.

ד. נתון כי המשכורת הממוצעת, של עובד במפעל ב', היא $11,500$ **שקלים.**

הממוצע שווה לסכום הנתונים (המשכורות) מחולק בסכום השכיחויות.

לכן: סכום המשכורות במפעל ב' הוא $322,000$ **שקלים** $=11,500\cdot 28$ **.**

נפחית את המשכורות של המחלקות האחרות: $124,000$ **שקלים** $=322,000-18,000\cdot 4-9,000\cdot 14$ **.**

ולסיום, נחלק המספר העובדים במחלקת השיווק: $12,400$ **שקלים** $=124,000:10$ **.**

או: נעזר בנוסחה לחישוב הממוצע.

$$11,500=\frac{18,000\cdot 4+x\cdot 10+9,000\cdot 14}{28} \quad /\cdot 28$$

$$322,000=198,000+10x \quad /-198,000$$

$$124,000=10x \quad /:10$$

$$\boxed{12,400=x}$$

תשובה: המשכורת, של עובד במפעל ב' במחלקת השיווק, היא $12,400$ **שקלים.**

ה. נעדכן את הטבלה, ונוסיף שורה של שכיחות מצטברת.

המחלקה	הנהלה	שיווק	ייצור	
המשכורת (בשקלים)	$18,000$	$12,400$	$9,000$	**סה"כ**
מספר העובדים	4	10	14	28
שכיחות מצטברת	4 $(4-1)$	14 $(14-5)$	28 $(28-15)$	

מספר הנתונים הוא זוגי, לכן החציון הוא הממוצע של שני הנתונים האמצעיים.

$14.5=\frac{29}{2}=\frac{28+1}{2}$ **, והחציון הוא הממוצע של הנתון ה-** 14 **והנתון ה-** 15.

ממוצע המשכורות של שני הנתונים האמצעיים הוא $10,700$ **שקלים** $=\frac{21,400}{2}=\frac{12,400+9,000}{2}$ **.**

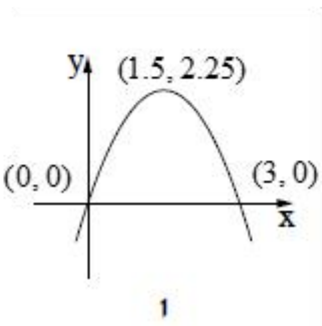
תשובה: חציון המשכורות במפעל ב' הוא $10,700$ **שקלים.**

א. נתונה הפרבולה $f(x)=-x^2+3x$ **.**

בנקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **.**

$$0=-x^2+3x$$
$$0=x\cdot(-x+3)$$
$$x=0 \quad \rightarrow \boxed{(0,0)}$$
$$-x+3=0 \quad \rightarrow x=3 \quad \rightarrow \boxed{(3,0)}$$

תשובה: $(3,0)$ **,** $(0,0)$**.**



ב. גרף 1 **מתאר את הפרבולה, בהתאם לנקודות החיתוך עם ציר ה-** x **,**

וגם בגלל שהפרבולה בעלת מקסימום ("בוכה"), כי $a=-1<0$ **.**

תשובה: גרף 1 **מתאר את הפרבולה.**

בציור מתוארת בריכה ובה מזרקה, כאשר החלק החיובי של הפרבולה $f(x)=-x^2+3x$

מתאר את המסלול של זרימת המים **מעל פני המים בבריכה.**

ג. שיעור ה- x **של קדקוד הפרבולה,** $f(x)=-x^2+3x$ **, מתקבל על ידי הנוסחה** $x=-\dfrac{b}{2a}$**.**

לכן, $x_{\text{KODKOD}}=\dfrac{-3}{2\cdot(-1)}=\dfrac{-3}{-2}=1.5$ **ו-** $y_{\text{KODKOD}}=-1.5^2+3\cdot1.5=2.25$ **, ובהתאם** $\boxed{(1.5,\ 2.25)}$**.**

תשובה: שיעורי הנקודה, שבה המים מגיעים לגובה מקסימלי, הם $(1.5,\ 2.25)$**.**

ד. על פי הסרטוט, ניתן לראות את כי הפרבולה עולה משמאל לקודקוד.

כאשר, בהתאמה, המים עולים החל מהגובה $y=0$ **, שבו גם** $x=0$ **.**

תשובה: בעבור ערכים של $0<x<1.5$ **זרם המים נמצא בעליה .**

ה. שיעורי הנקודה, שבה המים מגיעים לגובה מקסימלי, הם $(1.5,\ 2.25)$**.**

כלומר, הגובה המקסימלי של המים הוא 2.25 **מטרים,**

בעוד שהציפור עפה בגובה של 3 **מטרים מעל פני המים בבריכה.**

תשובה: הציפור לא נרטבה ממי המזרקה.