פתרון הבחינה

במתמטיקה

קיץ תשפ"ג, 2023, מועד א, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

1. נתונה הסדרה: $a_n = 4n - 18$.

א. מצאו את a_1 .

ב. הוכיחו כי הסדרה חשבונית, ומצאו את הפרש הסדרה.

נתון: בסדרה יש $2k$ איברים סך הכול.

ג. **(1)** הביעו באמצעות k את סכום k האיברים הראשונים בסדרה.

(2) הביעו באמצעות k את סכום כל $2k$ האיברים בסדרה.

נתון כי סכום k האיברים <u>האחרונים</u> בסדרה הוא 3,072 .

ד. מצאו את k .

<u>פתרון:</u>

א. נציב $n=1$ בכלל הנתון:

$a_1 = 4\cdot 1 - 18 = -14 \rightarrow \boxed{a_1 = -14}$

ב. נוכיח כי יש לסדרה הפרש קבוע:

$a_n = 4n - 18$

$a_{n+1} = 4(n+1) - 18 = 4n + 4 - 18 = 4n - 14$

$a_{n+1} - a_n = (4n-14) - (4n-18) = 4n - 14 - 4n + 18$

$a_{n+1} - a_n = 4$

קיבלנו הפרש קבוע 4 ולכן זו סדרה
חשבונית עם הפרש $\boxed{d=4}$

ג. (1) נשתמש בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית

$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\cdot d\right]$

לכן

$$S_k = \frac{k}{2}\{2\cdot(-14) + (k-1)\cdot 4\}$$

ונפתח את הביטוי:

$$S_k = \frac{k}{2}[-28 + 4k - 4] = \frac{k}{2}[4k - 32]$$

$$\boxed{S_k = 2k^2 - 16k}$$

(2) כעת מספר האיברים הוא $2k$

$$S_{2k} = \frac{2k}{2}\{2\cdot(-14) + (2k-1)\cdot 4\}$$

ונפתח:

$$S_{2k} = k\{-28 + 8k - 4\} = k\{8k - 32\}$$

$$\boxed{S_{2k} = 8k^2 - 32k}$$

3. סכום k האיברים האחרונים הוא 3,072.
הסכום הזה מתקבל מחיסור הסכום של
$2k$ האיברים הראשונים פחות סכום k האיברים
הראשונים:

$$S_{k\ \text{אחרונים}} = S_{2k} - S_k$$

נשתמש בביטויים שקיבלנו בסעיף ב':

נקבל כך:

$$(8k^2-32k)-(2k^2-16k)=3{,}072$$

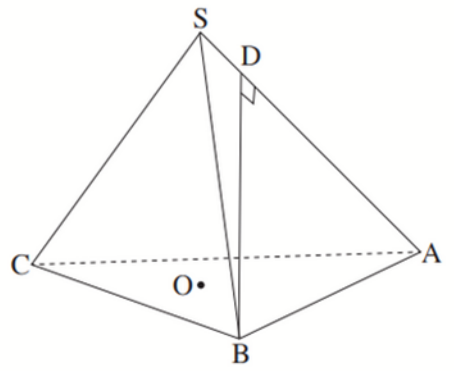
$$6k^2-16k-3{,}072=0 \quad /:2$$

$$3k^2-8k-1{,}536=0$$

פתרונות המשוואה הריבועית הם

$k=-21\frac{1}{3}$ ו- $k=24$

הפתרון המתאים הוא $\boxed{k=24}$



2. SABC היא פירמידה משולשת ישרה שבבסיסה ABC הוא משולש שווה צלעות (ראו סרטוט).

זווית הבסיס של פאה צדדית שווה ל- 50°.

הנקודה D נמצאת על המקצוע SA כך ש- BD מאונך ל-SA.

נתון: $DA = 10$.

א. **(1)** מצאו את אורך צלע הבסיס של הפירמידה.

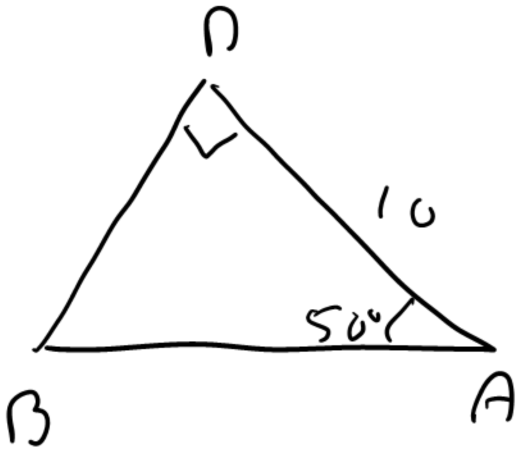
(2) מצאו את האורך של מקצוע צדדי של הפירמידה.

SO הוא גובה הפירמידה.

ב. חשבו את גודל הזווית שבין מקצוע צדדי לבסיס הפירמידה.

ג. מצאו את גובה הפירמידה.

ד. חשבו את נפח הפירמידה SABC.



פתרון:

א. (1) נתבונן במשולש ADB:

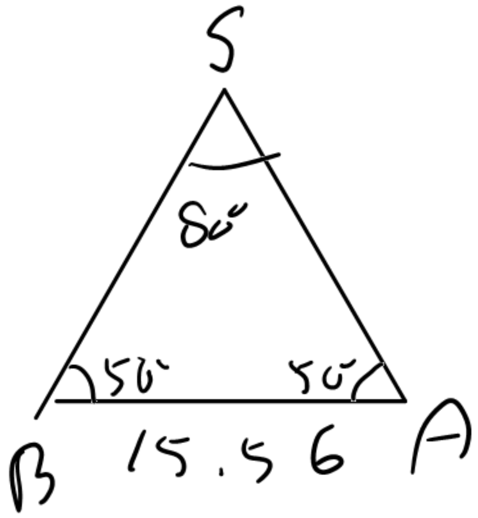
$$\sphericalangle ADB = 90^{\circ}$$
$$\sphericalangle DAB = 50^{\circ}$$
$$DA = 10$$

לכן:

$$\cos 50^{\circ} = \frac{10}{AB}$$

$$AB = \frac{10}{\cos 50^{\circ}} = 15.56$$

אורך צלע הבסיס של הפירמידה $\boxed{15.56}$



(2) נתבונן במשולש ABS:

$AB=15.56$

$\sphericalangle ABS=\sphericalangle BAS=50°$

$\downarrow$

$\sphericalangle ASB=80°$

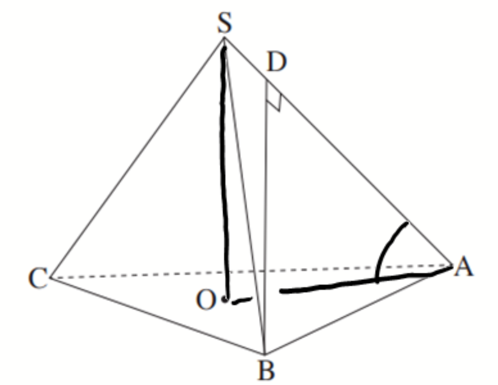
משפט הסינוסים:

$$\frac{AS}{\sin 50°}=\frac{15.56}{\sin 80°}$$

$\downarrow$

$AS=12.10$

אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה $\boxed{12.10}$



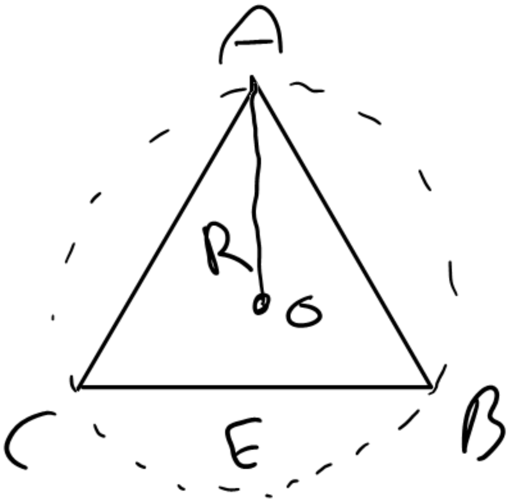
ב. הזווית המבוקשת היא זווית SAO.

ראשית, נמצא את אורך הקטע AO.

לשם כך נתבונן במשולש הבסיס ABC:

$\Downarrow$

יהי משולש שווה צלעות שאורך הצלע שלו 15.56



הגובה SO חותך את הבסיס בנקודת מרכז המעגל החוסם את המשולש.

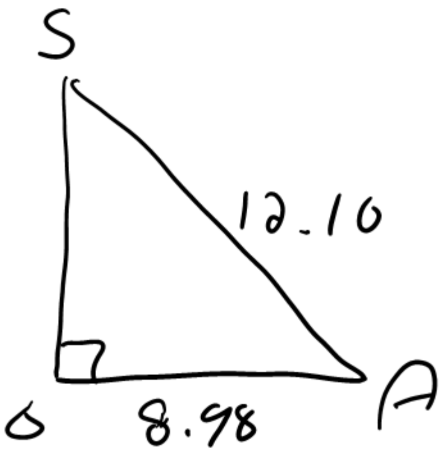
לכן אורך הקטע AO שווה לרדיוס המעגל החוסם את המשולש.

נמצא את הרדיוס בעזרת משפט הסינוסים:

$$\frac{15.56}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = 8.98$$

כלומר $AO = 8.98$

כעת נתבונן במשולש AOS:



$\sphericalangle AOS = 90^\circ$

$AO = 8.98$

$AS = 12.10$

מכאן:

$$\cos\sphericalangle OAS = \frac{8.98}{12.10}$$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle AOS = 42.083^\circ$$

הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא $\boxed{42.085^\circ}$

ג. במשולש AOS:

$$OS^2+OA^2=AS^2$$

$$OS^2+8.95^2=12.16^2$$

$$OS^2=65.7696 \quad /\sqrt{\ }$$

$$OS=8.11$$

גובה הפירמידה הוא $\boxed{8.11}$

3. נפח הפירמידה מתקבל ע"י הנוסחה

$$V=\frac{B\cdot H}{3}$$

B - שטח הבסיס
H - גובה הפירמידה

נחשב את שטח הבסיס:

$$S_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin 60^\circ}{2}=\frac{12.10\cdot 12.10\cdot \sin 60^\circ}{2}$$

$$S_{ABC}=104.84$$

מכאן נוכל להציב בנוסחה לנפח:

$$V=\frac{104.84\cdot 8.11}{3}=283.42$$

נפח הפירמידה $\boxed{283.42}$

3. הפונקצייה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מוגדרות בתחום $0 \le x \le \pi$.
נתונה פונקציית הנגזרת: $f'(x) = \sin(2x) - \cos(x)$.

א. מצאו את שיעורי ה־ x של כל נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

נתון: כל אחת מנקודות המינימום של הפונקצייה $f(x)$ נמצאת על ציר ה־ x .

ב. מצאו את הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את שיעור ה־ y של נקודות המקסימום של הפונקצייה $f(x)$.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

ה. חשבו את שטח המשולש הנוצר על ידי 3 נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקצייה $f(x)$.

נקודות הקיצון מתקבלות על-ידי $f'(x)=0$:

$\sin 2x - \cos x = 0$

נשתמש בזהות של סינוס זווית כפולה: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$2\sin x \cos x - \cos x = 0$

$\cos x(2\sin x - 1) = 0$

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$2\sin x - 1 = 0$

$2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

בתחום: $x = \frac{\pi}{6}$

בתחום: $x = \frac{5\pi}{6}$

בתחום: $x = \frac{\pi}{2}$

טבלת עליה וירידה

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$f'(x)$	קצה	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	קצה
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

הצבה בנקודות:

$$f'\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(2\cdot\frac{11\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 0.46$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0.36$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.36$$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -0.46$$

קיצון פנימיות:

מינימום $x=\frac{5\pi}{6}$

מקסימום $x=\frac{\pi}{2}$

מינימום $x=\frac{\pi}{6}$

קיצון קצוות:

מקסימום $x=\pi$

מקסימום $x=0$

ב) נמצא את הפונקציה הקדומה לפי

נגזרת: $f'(x) = \sin(2x) - \cos(x)$

נקודה: $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx$$

$$f(x) = \int \left(\sin(2x) - \cos(x)\right) dx$$

$$f(x) = -\frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\sin(x)}{1} + C$$

נציב את הנקודה:

$$0 = -\frac{\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + C$$

$$0 = -\frac{3}{4} + C$$

$$c = \frac{3}{4}$$

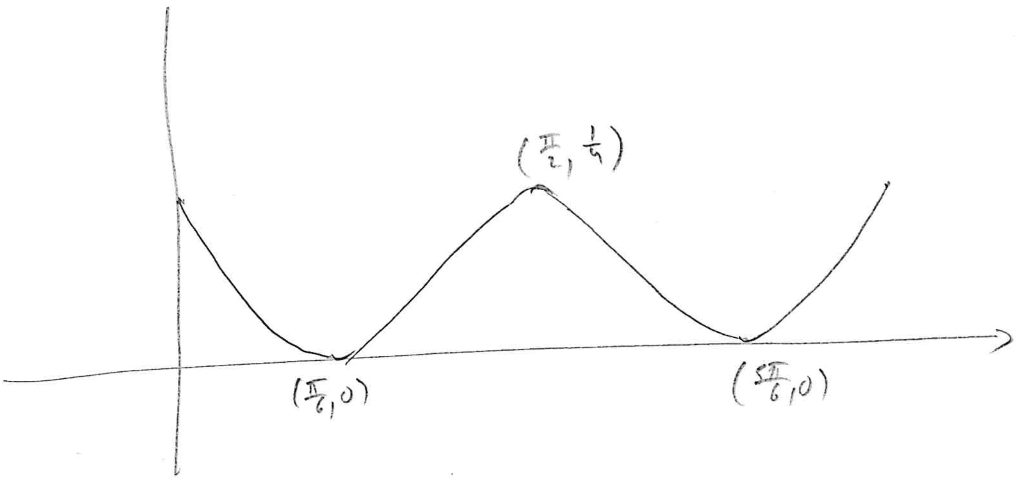
הפונקציה: $f(x) = -\frac{\cos(2x)}{2} - \sin(x) + \frac{3}{4}$

ג) מציאת y קדק' המקסימום:

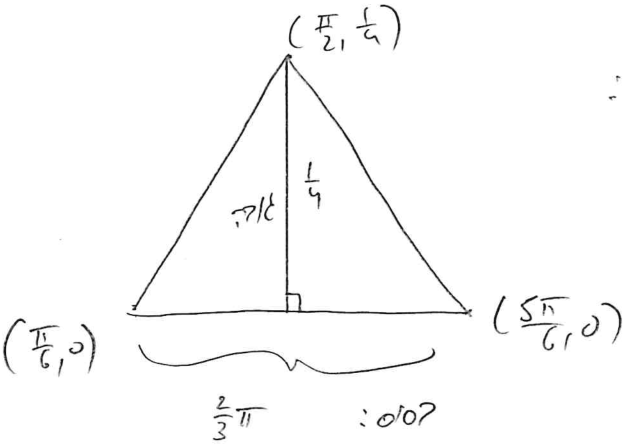
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

ד) שרטוט:



ה) נחשב את שטח המשולש:



$$S_{\Delta} = \frac{\frac{2}{3}\pi \cdot \frac{1}{4}}{2} = \frac{\pi}{12} \text{ יח"ר}$$

4. נתונה הפונקצייה $f(x) = e^x \cdot (e^x - 6)^2$ המוגדרת לכל x.

א. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.

ב. הראו כי מתקיים: $f(x) = e^{3x} - 12e^{2x} + 36e^x$.

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = e^{3x}$ העולה לכל x.

ה. **(1)** מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם גרף הפונקצייה $g(x)$.

(2) באותה מערכת צירים שבה סרטטתם את גרף הפונקצייה $f(x)$, סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $g(x)$ בקו מקווקו.

(3) מצאו את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקצייה $f(x)$, על ידי הגרף של הפונקצייה $g(x)$ ועל ידי ציר ה־ y.

א. נמצא חיתוך עם ציר ה-y, נציב $x=0$:

$f(0) = e^0(e^0-6)^2 = 25$

$(0,25)$

נמצא חיתוך עם ציר ה-x, נציב $f(x)=0$:

$0 = e^x(e^x-6)^2$

$e^x = 0$ $\quad$ $(e^x-6)^2 = 0$

אין פתרון, ביטוי מעריכי תמיד חיובי $\quad$ $e^x - 6 = 0$

$e^x = 6$

$x = \ln 6$

$(\ln 6, 0)$

$$f(x)=e^x(e^x-6)^2$$

ב.

נפתח סוגריים נוסחת כפל מקוצר:

$$f(x)=e^x\left((e^x)^2-2\cdot e^x\cdot 6+36\right)$$

$$f(x)=e^x\left(e^{2x}-12e^x+36\right)$$

$$f(x)=e^{3x}-12e^{2x}+36e^x$$

ג. נגזור את הפונקציה:

$$f'(x)=3\cdot e^{3x}-24e^{2x}+36e^x$$

$3e^{3x}-24e^{2x}+36e^x=0$ נשווה נגזרת ל-0:

נסמן: $e^x=t$ ולכן $e^{2x}=t^2$, $e^{3x}=t^3$

$$3t^3-24t^2+36t=0$$

$$3t\,(t^2-8t+12)=0$$

$3t=0$

$t=0$

$t^2-8t+12=0$

פתרונות המשוואה הריבועית: $t=6$

$t=2$

עבור $t=0$ נפתור: $e^x=0$

אין פתרון, כי מעריכי תמיד חיובי.

עבור $t=6$. נפתור: $e^x=6$

$x=\ln 6$

עבור $t=2$ נפתור $e^x=2$

$x=\ln 2$

מציאת y:

$f(\ln 6)=e^{3\cdot\ln 6}-12e^{2\ln 6}+36e^{\ln 6}=0$

$(\ln 6,0)$

$f(\ln 2)=e^{3\ln 2}-12e^{2\ln 2}+36e^{\ln 2}=32$

$(\ln 2,32)$

תחומי עליה וירידה:

x	0	$\ln 2$ (0.693)	1	$\ln 6$ (1.792)	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$

הצבה בנגזרת:

$$f'(2) = 3e^{3\cdot 2} - 24e^{2\cdot 2} + 36e^{2} = 165.93$$

$$f'(1) = 3e^{3\cdot 1} - 24e^{2\cdot 1} + 36e^{1} = -19.22$$

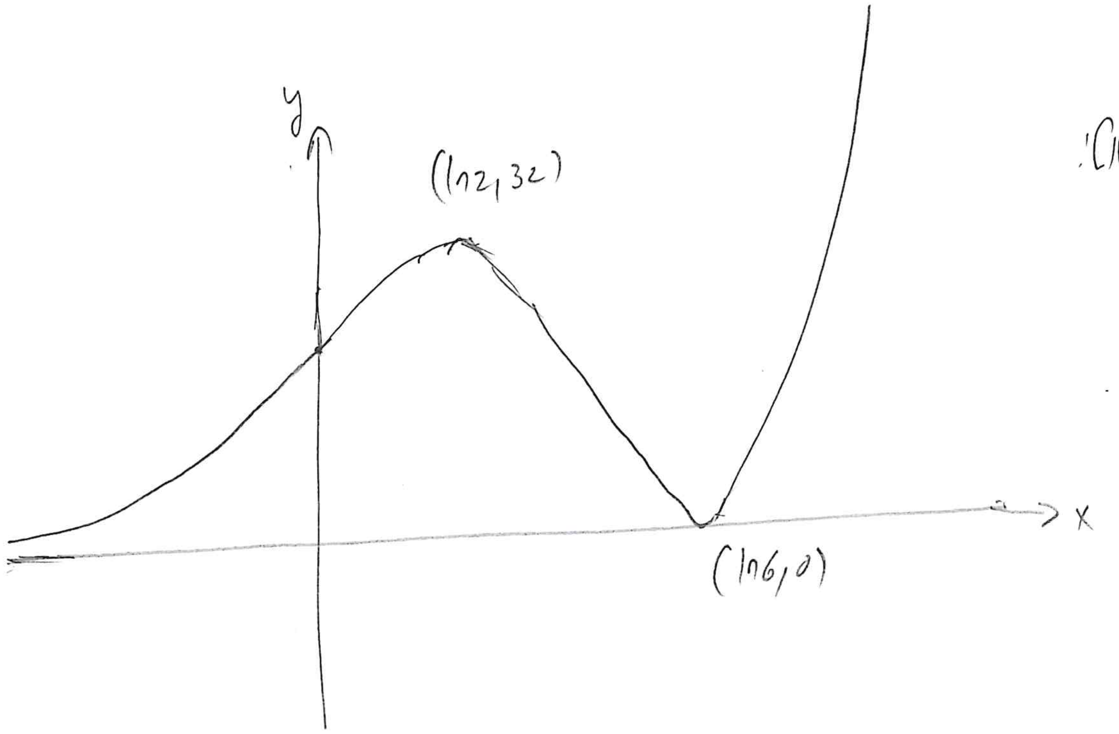
$$f'(0) = 3e^{3\cdot 0} - 24e^{2\cdot 0} + 36e^{0} = 15$$

נקודות הקיצון:

מינימום $(\ln 6, 0)$

מקסימום $(\ln 2, 32)$

ד) שרטוט:



ה. (1) נמצא חיתוך:

$$\begin{cases} f(x) = e^{3x} - 12e^{2x} + 36e^{x} \\ g(x) = e^{3x} \end{cases}$$

$$\cancel{e^{3x}} - 12e^{2x} + 36e^{x} = \cancel{e^{3x}}$$

נסמן $e^{x} = t$ ולכן $e^{2x} = t^2$

$$-12t^2 + 36t = 0$$

$$12t(-t+3) = 0$$

$12t = 0$	$-t+3=0$
$t = 0$	$t = 3$
$e^{x} = 0$	$e^{x} = 3$
אין פתרון, כי מעריכי תמיד חיובי	$x = \ln 3$

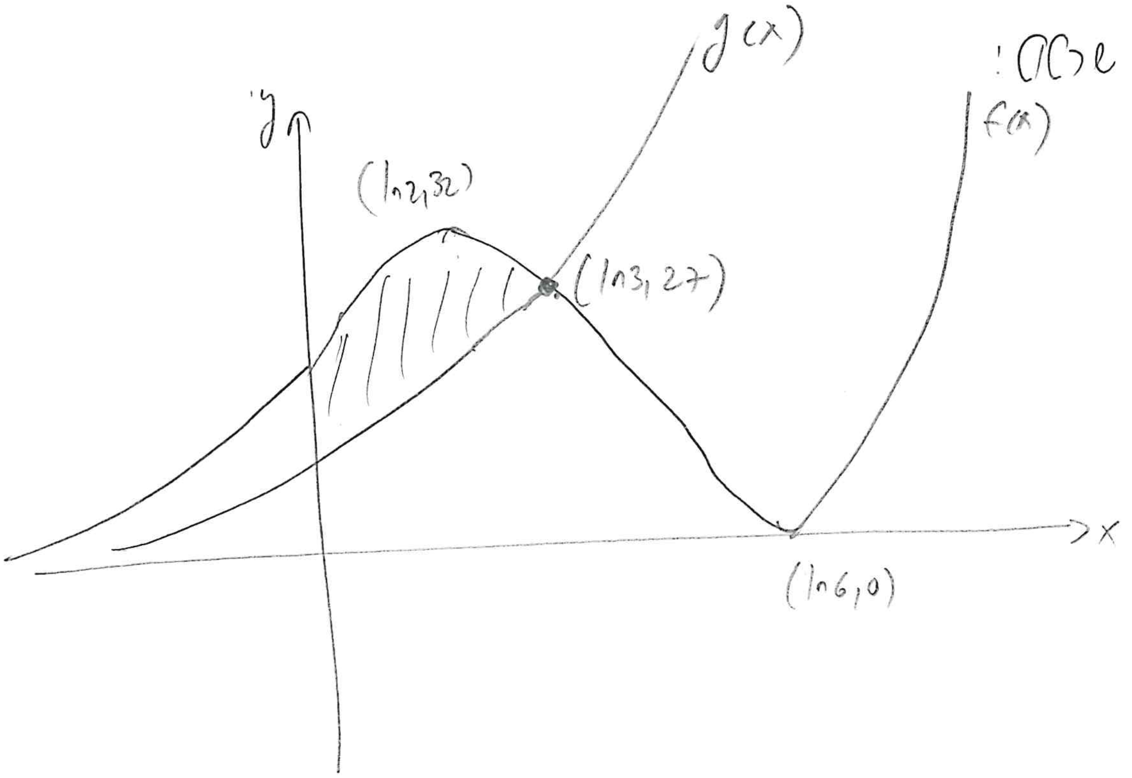
מציאת x:

מציאת y ההשקה ב $g(x)$:

$g(\ln 3) = e^{3\ln 3} = 27$

$(\ln 3, 27)$

(2) שרטוט:



(3) נחשב את השטח המסומן:

$$\int_0^{\ln 3} \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

$$\int_0^{\ln 3} \left(e^{3x} - 12e^{2x} + 36e^{x} - e^{3x}\right) dx$$

$$\int_0^{\ln 3} \left(-12e^{2x} + 36e^{x}\right) dx$$

$$\left[-\frac{12e^{2x}}{2}+\frac{36e^{x}}{1}\right]_0^{\ln 3}$$

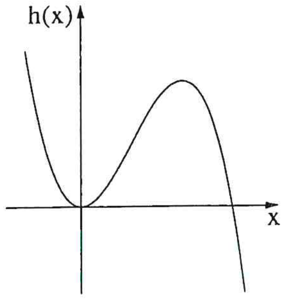
נציב את הגבולות:

$$\left[-\frac{12e^{2\ln 3}}{2}+36e^{\ln 3}\right]-\left[\frac{-12e^{2\cdot 0}}{2}+\frac{36e^{0}}{1}\right]$$

$$54 \quad - \quad 30$$

24 יח"ר

5. בסרטוט שלפניכם מתואר גרף הפונקצייה $h(x) = -2x^3 + 12x^2$ המוגדרת לכל x .



א. **(1)** מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $h(x)$ עם ציר ה־ x .

(2) היעזרו בגרף, ומצאו את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקצייה $h(x)$.

נתונה הפונקצייה $f(x) = \ell n(-2x^3 + 12x^2)$.

ב. היעזרו בתשובתכם לתת־סעיף **א(2)**, ומצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ג. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לציר ה־ x של הפונקצייה $f(x)$.

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

נתונה הפונקצייה: $g(x) = -f(x) + 8$ המוגדרת באותו התחום שבו מוגדרת הפונקצייה $f(x)$.

ה. מה הם שיעורי נקודת הקיצון של הפונקצייה $g(x)$, ומהו סוגה?

א.(1) מציאת חיתוך עם ציר ה-x: $h(x)=0$

$0 = -2x^3 + 12x^2$

$0 = 2x^2(-x+6)$

$2x^2=0$ $\qquad$ $-x+6=0$

$x^2=0$ $\qquad$ $x=6$

$x=0$

$(0,0)$, $(6,0)$

(2) תחומי החיוביות של הפונקציה: $x<0$ או $0<x<6$

תחומי השליליות של הפונקציה: $x>6$.

ד. $f(x)=\ln(-2x^3+12x^2)$

תחום הגדרה: $-2x^3+12x^2>0$

בסעיף הקודם מצאנו את תחומי החיוביות של הפונקציה $h(x)$

ולכן תחום ההגדרה של $f(x)$ הוא: $0<x<6$ או $x<0$.

ה. האסימפטוטות האנכיות לציר ה-x מתקבלות כאשר הביטוי של ה-ln שווה לאפס, כלומר: $-2x^3+12x^2=0$

פתרונות המשוואה הזו לפי סעיף ג(1) הם $x=6$, $x=0$.

לכן האסימפטוטות האנכיות לציר ה-x הן: $x=6$, $x=0$.

ו. נגזור את הפונקציה: $f'(x)=\frac{-6x^2+24x}{-2x^3+12x^2}$

נשווה מונה נגזרת ל-0:

$-6x^2+24x=0$

$6x(-x+4)=0$

$6x=0$ $-x+4=0$

$x=0$ $x=4$

נפסל לפי תחום הגדרה

$f(4) = \ln(-2\cdot 4^3 + 12\cdot 4^2) = \ln 64 \cong 4.158$

מצאנו שיעור ה - y:

נסווג את נקודת הקיצון לפי נגזרת שנייה של המונה בלבד

כי המונה חיובי בתחום ההגדרה של הפונקציה.

$f''(x) = -12x^2 + 24x$

$f''(4) = -12\cdot 4^2 + 24\cdot 4 = -96 < 0 \Rightarrow max$

נקודת הקיצון: $(4, 4.158)$ מקסימום.

ה)

$g(x) = -f(x) + 8$

שיעור ה-x של נקודת הקיצון של $g(x)$ הוא עדיין $x=4$.

שיעור ה-y של נקודת הקיצון מוכפל ב-1-

ואז מוסיפים לו 8, כלומר

$y = -1\cdot 4.158 + 8$

$y = 3.841$

סוג הקיצון משתנה במקרה השיקוף של הפונקציה ביחס לציר ה-x,

נקבל: $(4, 3.841)$ מינימום