

## פתרון הבחינה

# במתמטיקה

קיץ תשפ"ג, 2023, מועד ב, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי  
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.  
אל תתפשר עליה.



1. נתונה סדרה חשבונית  $a_n$  בת  $n$  איברים.  
נתון:  $a_1 = -10$ ,  $a_3 = -4$ ,  
סכום כל איברי הסדרה הוא 4,218.
- א. מצאו את  $n$ .
- מחקו כל איבר שלישי בסדרה  $a_n$  (כלומר מחקו את האיברים  $a_3, a_6, \dots$ ).
- ב. (1) כמה איברים נמחקו מן הסדרה  $a_n$ ?  
(2) מהו סכום האיברים שנמחקו מן הסדרה  $a_n$ ?  
(3) מהו סכום האיברים שנשארו בסדרה  $a_n$  אחרי המחיקה?

פתרון

I  $a_1 = -10$

II  $a_3 = -4$

III  $\sum_n = 4218$

$n = ?$

II  $a_1 + 2d = -4$

$-10 + 2d = -4$

$2d = 6$

$d = 3$



נניח  $a_1 > 0$ ,  $d < 0$  :

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

נניח  $a_1 = 20$ ,  $d = -3$ ,  $S_n = 4218$

$$4218 = \frac{n(2 \cdot 20 + (n-1) \cdot (-3))}{2} \quad | \cdot 2$$

$$8436 = n(-20 + 3n - 3)$$

$$8436 = n(3n - 23)$$

$$8436 = 3n^2 - 23n$$

$$0 = 3n^2 - 23n - 8436$$

$$n_1 = 57$$

$n_2 = -49.8$  (לא מסתבר)

$n = 57$  תשובה



ק) מספרה של 57 איקרא :  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{57}$

האיקרא של החיבור :  $a_3, a_6, a_9, \dots, a_{57}$

הפרד וישי, ולפי זה האיקרא של החיבור :  $3, 6, 9, \dots, 57$

מספרה של 13 :  $b_1 = 3$

$d = 6 - 3 = 3$

$b_n = 57 \rightarrow$  האיזו להחזון

נמצא את מקומו של האיזו להחזון (n). נוסחה הדיפר הבאה:

$b_n = b_1 + (n-1)d$

$57 = 3 + (n-1) \cdot 3$

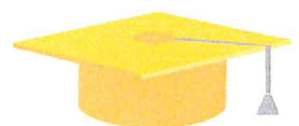
$57 = 3 + 3n - 3$

$57 = 3n$

$19 = n$

האיזו היה חיבור נמצא במיקומו ה-19, משכן אטטנו האיקרא של החיבור הוא 19.

**התשובה: 19 איקרא.**



(2)

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$a_6 = -10 + 5 \cdot 3$$

$$a_6 = 5$$

$$a_9 = a_1 + 8d$$

$$a_9 = -10 + 8 \cdot 3$$

$$a_9 = 14$$

$$a_{57} = a_1 + 56d$$

$$a_{57} = -10 + 56 \cdot 3$$

$$a_{57} = 158$$

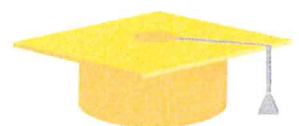
-6, 5, 14, ..., 158

סדרה חשבונית:

$$c_1 = -6 \quad : \quad 15 \text{ איברים}$$

$$d = 5 - (-6) = 9$$

$$\underline{n = 15}$$



נוסחה גנרלית (הסדר):

$$S_n = \frac{n [2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

נתון:  $a_1 = -4$ ,  $d = 9$ ,  $n = 19$

$$S_{19} = \frac{19 [2 \cdot (-4) + (19-1)9]}{2}$$

$$S_{19} = 146$$

תשובה:  
סכום האיברים הנמצאים בתחתית הוא 146.

(3)

סכום האיברים שנמצאים בתחתית = (סכום האיברים) - (סכום האיברים שנמצאים בתחתית)

$$S_n = a_n - a_n$$

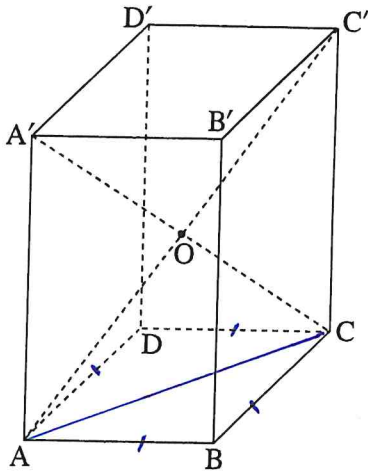
∴

סכום האיברים שנמצאים בתחתית =  $4218 - 146 = 2755$

תשובה:  
סכום האיברים הנמצאים בתחתית הוא 2755.

האחרי החישוב הוא 2755.





2. נתונה תיבה  $ABCD A'B'C'D'$  שבסיסה  $ABCD$  הוא ריבוע (ראו סרטוט). נתון כי אלכסון התיבה גדול פי  $\sqrt{3}$  מאלכסון הבסיס.
- א. מצאו את גודל הזווית בין אלכסון התיבה לבסיס.
- נתון כי שטח המלבן  $ACC'A'$  הוא  $128\sqrt{2}$ .
- ב. (1) מצאו את אורך צלע הבסיס של התיבה.  
(2) מצאו את אורך האלכסון של התיבה.
- אלכסוני התיבה  $A'C$  ו- $C'A$  נפגשים בנקודה  $O$ .
- ג. מצאו את שטח המעטפת של הפירמידה הישרה  $OABCD$ .

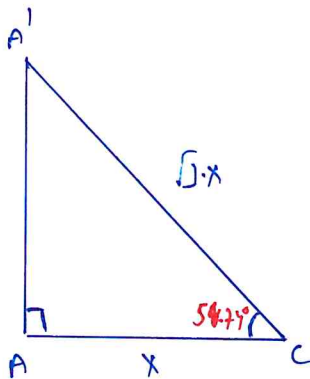
תשובה:

א. נתון: אלכסון התיבה גדול פי  $\sqrt{3}$  מאלכסון הבסיס.

$$AC = x \quad \text{נתון}$$

$$\Downarrow$$

$$A'C = \sqrt{3}x$$



$$\cos \angle ACA' = \frac{AC}{A'C}$$

$$\cos \angle ACA' = \frac{x}{\sqrt{3}x}$$

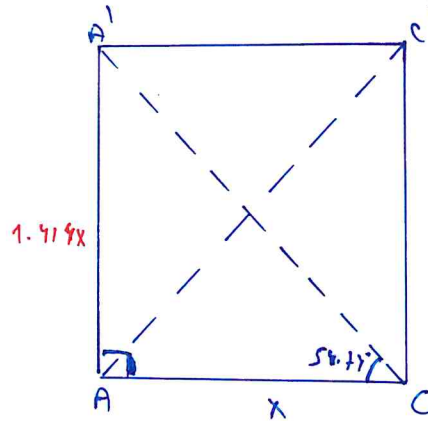
$$\cos \angle ACA' = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Downarrow$$

$$\angle ACA' = 56.74^\circ$$



משקלה: זווטל הזווטל ז'טן יזל כ'ס'טן יז'ק'ז'טל ז'ק'ס'ט' ז'ז'ט'ן ז'ז'ט'ן ז'ז'ט'ן



ז. (1)

ז'ט'ן: ז'ט'ל ז'ז'ט'ן ACC'A' ז'ז'ט'ן ז'ז'ט'ן

ΔACA' :

$$\frac{x}{\tan 56.7^\circ} = \frac{AA'}{x} \quad | \cdot x$$

$$1.414x = AA'$$

$$S_{ACC'A'} = 128\sqrt{2}$$

∩

$$x \cdot 1.414x = 128\sqrt{2}$$

$$1.414x^2 = 128\sqrt{2} \quad | : 1.414$$

$$x^2 = 128$$

$$x = \pm\sqrt{128}$$

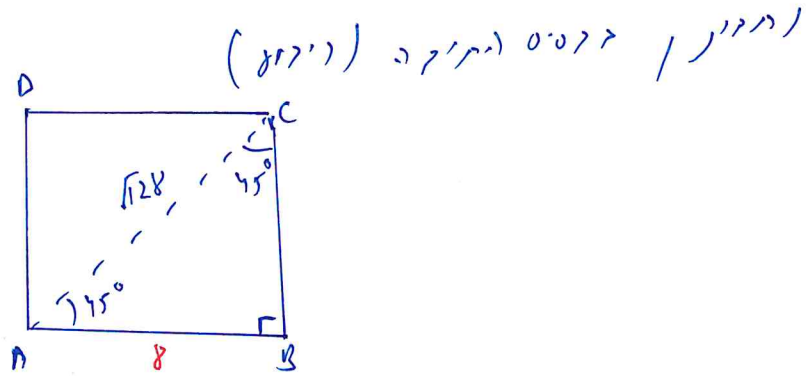




$$x_1 = \sqrt{128}$$

~~$$x_2 = -\sqrt{128}$$~~

נסו x מיינס אזון:  
לא באז



הואנסן גריקע חונכי צוי, ולכן  $\angle BCA = 45^\circ$ ,  $\angle BAC = 45^\circ$

$\triangle ABC$ :

$$\frac{\sqrt{128}}{\cos 45^\circ} = \frac{AB}{\sqrt{128}}$$

$$8 = AB$$

מיינסן באז היקסיס א הימיקה היזען 8



$$A'C = \sqrt{3} \cdot x$$

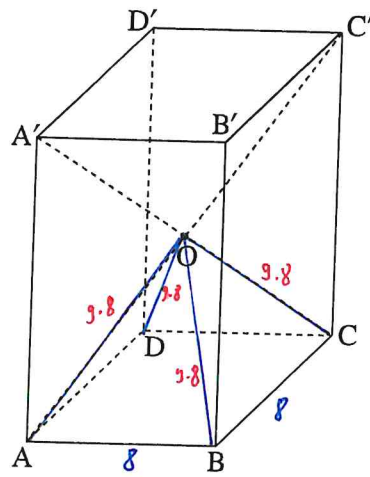
(4)

↓

$$A'C = \sqrt{3} \cdot 12.8$$

$$A'C = 19.6$$

השקפה: **אנחנו! האנטיגון במרכז הוא 19.6**



אנטיגון המוקף מניב גם יחד צני, ולכן  $OA = OB = OC = OD$

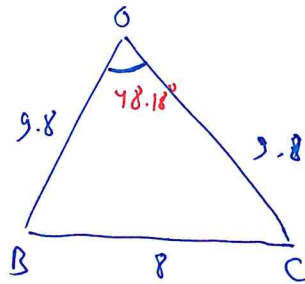
$$OA = \frac{A'C}{2} = \frac{19.6}{2} = 9.8$$





דניאל יצא לטיול והוא רוצה להכין מזון.

הוא רוצה להכין מזון והוא רוצה להכין מזון.



נמצא את זווית C.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$$

⇓

$$8^2 = (9.8)^2 + (9.8)^2 - 2 \cdot 9.8 \cdot 9.8 \cdot \cos \angle A$$

$$64 = 192.08 - 192.08 \cos \angle A$$

$$192.08 \cos \angle A = 128.08 \quad /: 192.08$$

$$\cos \angle A = 0.6668$$

$$\angle A = 48.18^\circ$$





נוצרי קואסינוס אלא נשאל לנו לגבי קואסינוס והנלוו טריגונומטרי.

$$S_D = \frac{a \cdot b \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{OB \cdot OC \cdot \sin \angle BOC}{2}$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{9.8 \cdot 9.8 \cdot \sin 42.18^\circ}{2}$$

$$S_{\Delta BOC} = 35.79$$

$$\Rightarrow \text{שטח המרובע} = 4 \cdot S_{\Delta BOC} = 4 \cdot 35.79 = 143.16$$

תשובה: שטח המרובע כח שטח הנירובע  $\Delta BOC$  הוא 143.16



3. נתונה הפונקצייה  $f(x) = 1 + x - \sin(2x)$ , המוגדרת בתחום  $0 \leq x \leq \pi$ .
- מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.
  - סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .
  - מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקצייה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = \frac{\pi}{4}$ .
  - מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה  $f(x)$ , על ידי הישר המשיק שאת משוואתו מצאתם בסעיף ג ועל ידי ציר ה- $y$  (בתחום הנתון המשיק פוגש את גרף הפונקצייה רק בנקודת ההשקה).

פתרון:

1. (5 ע')

$$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$$

שווה לאפס ופתור:

$$1 - 2\cos 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

בתחום הנתון נזקק:

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

נחשב גם את ערכי הפונקציה של הנקודות האלו ונזקק גם את הנקודות האלו:

$$\left(\frac{\pi}{6}, 0.657\right), \left(\frac{5\pi}{6}, 4.484\right), (0, 1), (\pi, 4.14)$$

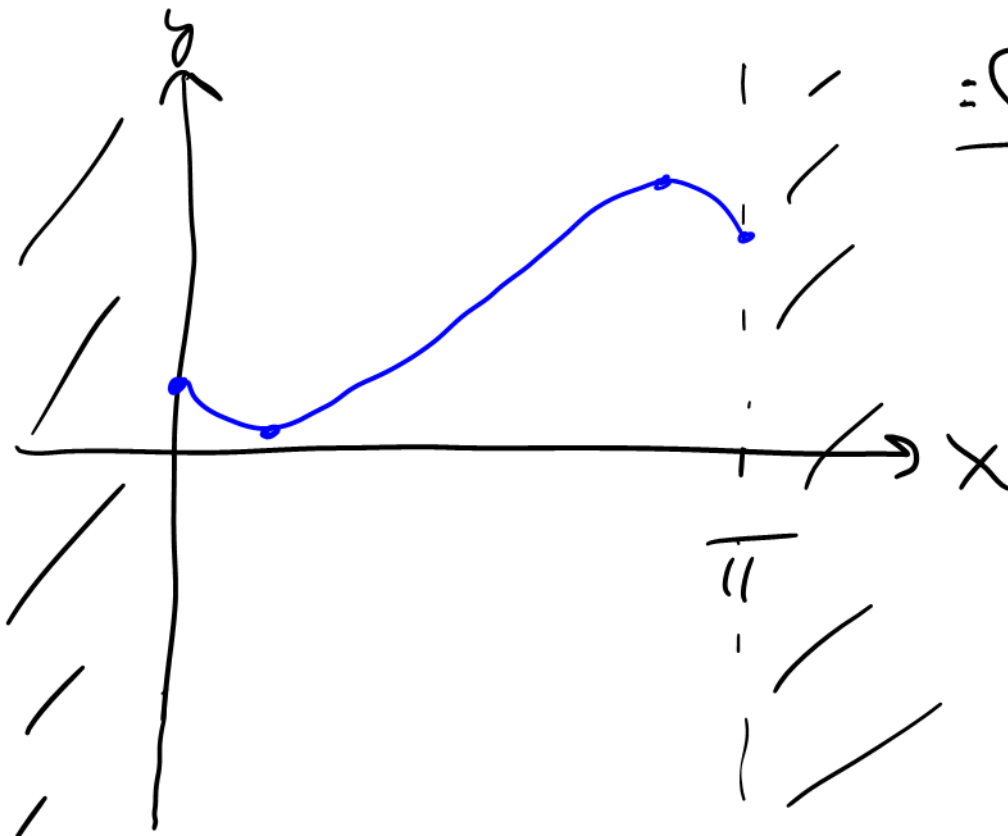


נהגה 1 - סוג ההזרזות:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\pi$
$f'(x)$		0	+	0	-	
$f(x)$	.	↘	↗	.	↘	.

נקודות קיצון:  
 מקסימום:  $(\frac{\pi}{6}, 0.657)$   
 מינימום:  $(\frac{5\pi}{6}, 4.484)$   
 מקסימום:  $(\pi, 4.14)$

אם כי:



ג. נסיטה =



ג. שיבויג הנשיך:

$$f'(\frac{\pi}{4}) = 1 - 2 \cdot \cos(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = 1$$

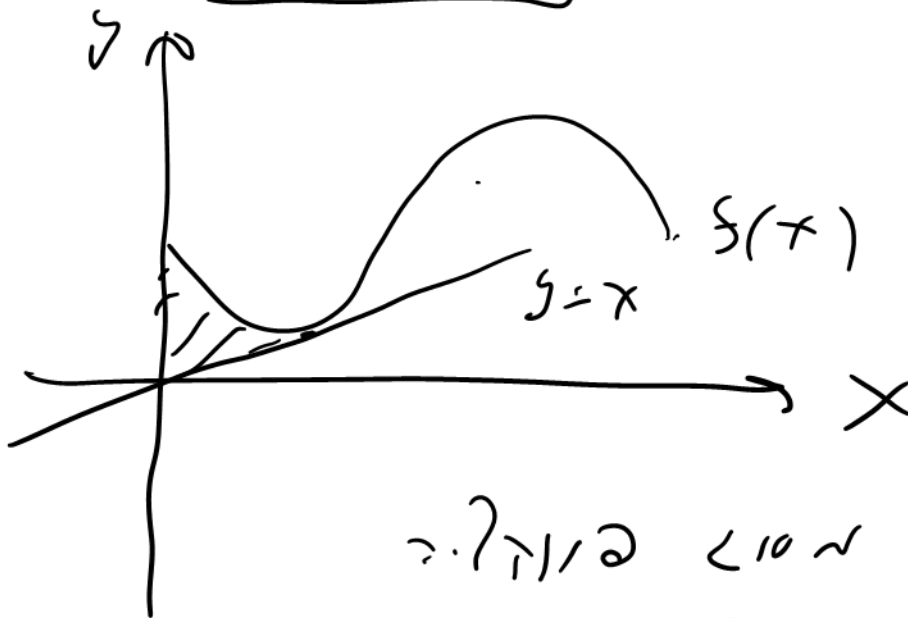
שיעור הנשיך:

$$f(\frac{\pi}{4}) = 1 + \frac{\pi}{4} - \sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

משוואת הנשיך:

$$y - \frac{\pi}{4} = 1(x - \frac{\pi}{4})$$

$$y = x$$



3.  
נוסף  
הנשיך  
אשר הוא

השטח הוא מסווג בנקודה.  
מש הנשיך, וזכור:



$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + x - \sin 2x - x) dx$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2x) dx$$

$$S = \left[ x + \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$S = \left[ \frac{\pi}{4} + \frac{\cos(\frac{\pi}{2})}{2} \right] - \left[ 0 + \frac{\cos 0}{2} \right]$$

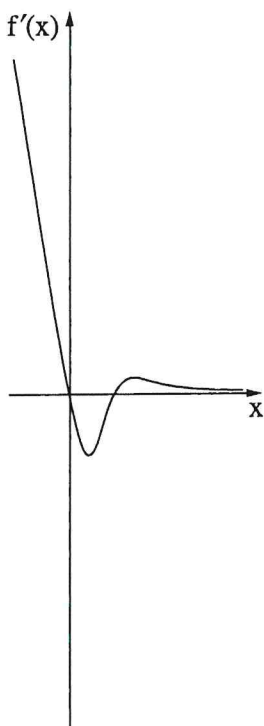
$$S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = 0.285$$



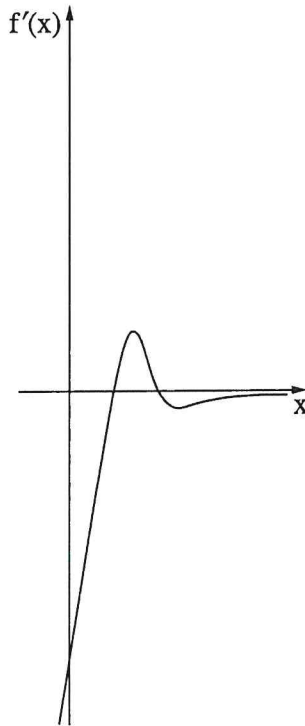


4. נתונה הפונקצייה  $f(x) = (2x^2 - 15x + 27) \cdot e^{5-x}$ .

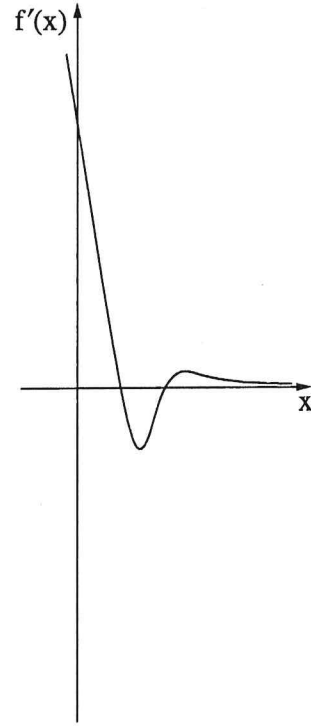
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ ?
- ב. (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם הצירים.  
(2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.  
(3) סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$ .
- ג. אחד מן הגרפים III-I שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת  $f'(x)$ . קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.
- ד. קבעו עבור אילו ערכי  $x$  מתקיים:  $f(x) < 0$  וגם  $f'(x) < 0$ . נמקו את קביעתכם.
- ה. חשבו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  ועל ידי ציר ה- $x$ .



III



II



I

א. תחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל  $x$ .



$$f(x) = (2x^2 - 15x + 27) \cdot e^{5-x}$$

2. (1)

אנחנו חוצים את קו ה-x :  $f(x) = 0$

$$(2x^2 - 15x + 27) \cdot e^{5-x} = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \rightarrow \\ 2x^2 - 15x + 27 = 0 & e^{5-x} = 0 \end{matrix}$$

נחלק את המשוואה:

$$x = 3, x = 4.5$$

$$(3, 0), (4.5, 0)$$

אין נקודות

קיצור אצטו

תמיד חיים

אנחנו חוצים את קו ה-y :  $x = 0$

$$f(0) = (2 \cdot 0^2 - 15 \cdot 0 + 27) \cdot e^{5-0} = 27e^5 \approx 4007.15$$

$$(0, 27e^5)$$



$$f(x) = (2x^2 - 15x + 27)e^{5-x}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \searrow \\ 4x-15 & -e^{5-x} \end{matrix}$$

(2) (2) (2) (2) (2)

$$f'(x) = (4x-15)e^{5-x} + (-e^{5-x})(2x^2-15x+27)$$

$$f'(x) = e^{5-x} [4x-15 - (2x^2-15x+27)]$$

$$f'(x) = e^{5-x} [-2x^2 + 19x - 42]$$

נ/א (2) (2) (2) (2) (2)

$$e^{5-x} (-2x^2 + 19x - 42) = 0$$

$$e^{5-x} = 0$$

$$-2x^2 + 19x - 42 = 0$$

אין פתרון  
ללא נאזוני  
קרא 3 חזרה

פתרון  
המשוואה הריבועית!  
 $x=3.5, x=6$

$$f(6) = (2 \cdot 6^2 - 15 \cdot 6 + 27)e^{5-6} = 3.31 \quad (6, 3.31)$$

$$f(3.5) = (2 \cdot 3.5^2 - 15 \cdot 3.5 + 27)e^{5-3.5} = -4.48 \quad (3.5, -4.48)$$



טבלת איתור נקודות קיצור:

X	0	3.5	4	6	7
$f'$	-	0	+	0	-
$f$	↘	-4.48	↗	3.31	↘

הנקודות הקיצוריות הן (3.5, -4.48) ו-(6, 3.31)

הנקודות הקיצוריות הן:

$$f'(7) = -2 \cdot 7^2 + 19 \cdot 7 - 42 = -7$$

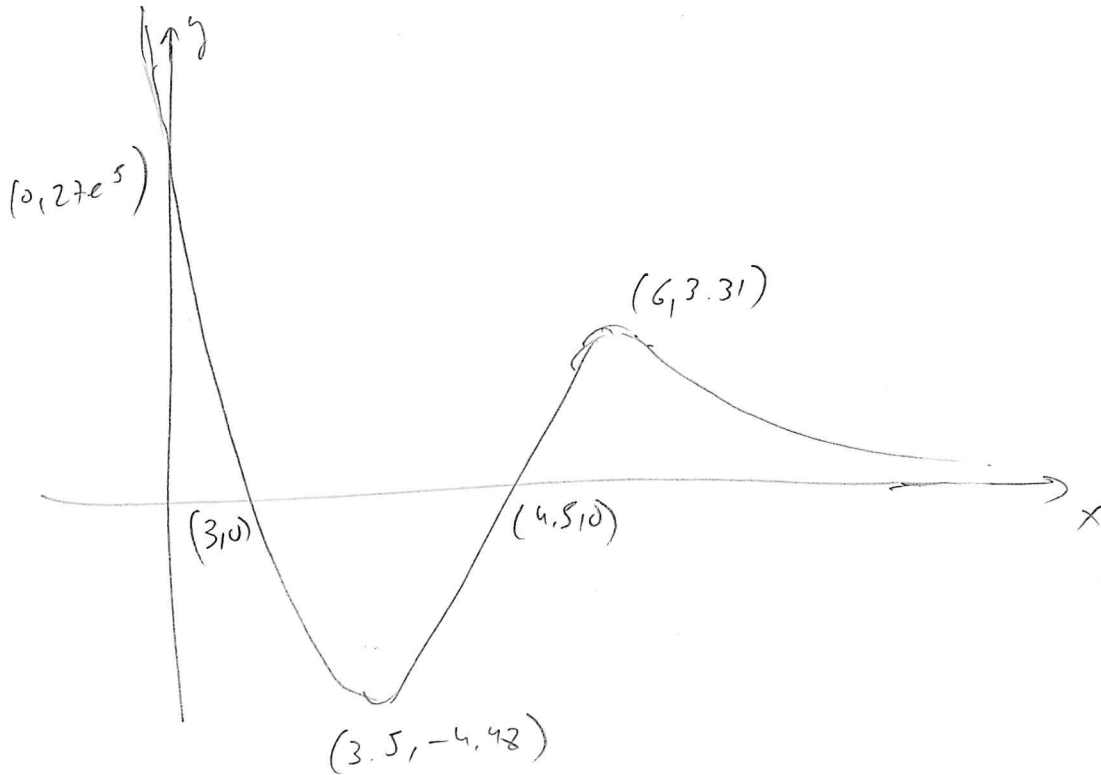
$$f'(4) = -2 \cdot 4^2 + 19 \cdot 4 - 42 = +2$$

$$f'(0) = -2 \cdot 0^2 + 19 \cdot 0 - 42 = -42$$

נקודות קיצוריות:

מקסימום (3.5, -4.48) , מינימום (6, 3.31)





(3)

ג) גבול הנגזרת הוא גוף II

$x < 3$      $x > 6$      $x \in (3, 6)$   
 שני הסטנדרטים יורדים קבוצתם  
 שם גבול הנגזרת שלילי

$3.5 < x < 6$     שני הסטנדרטים עולה קבוצתם  
 שם גבול הנגזרת חיובי



(ג) הריבועים של  $f(x) < 0$  או  $f'(x) < 0$

ט"ו  $f(x) < 0$  יש הסוקרניה (מ"ש) מתחת לציר ה-x

ט"ז  $f'(x) < 0$  יש הסוקרניה (מ"ש) יורד

הערות קודם כל הסוקרניה (מ"ש) מתחת לציר ה-x

מ"ש ומוצא:  $3 < x < 3.5$

(ה) נחשב את המרחק המזערי:

$$S = \int_{3.5}^6 f'(x) dx$$

$$S = [f(x)]_{3.5}^6$$

$$S = [f(6)] - [f(3.5)]$$

נציג את המוצא

$$f(3.5) = -4.48, \quad f(6) = 3.31$$

קבלנו מקוצר:

$$S = [3.31] - [-4.48]$$

$$S = 7.79$$



5. נתונה הפונקצייה  $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{4x}$

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה  $f(x)$ .
- ב. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקצייה  $f(x)$  עם ציר ה- $x$ .
- ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה  $f(x)$ , וקבעו את סוגן.
- ד. נתונה הפונקצייה  $g(x) = -f(x)$ .
- ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה  $f(x)$  וסקיצה של גרף הפונקצייה  $g(x)$  באותה מערכת צירים. נסמן ב- $S$  את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה  $f(x)$  ועל ידי הישר המשיק לגרף הפונקצייה  $f(x)$  בנקודת המקסימום שלה.
- ו. (1) מצאו את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקצייה  $f(x)$  בנקודת המקסימום שלה.
- ז. (2) מצאו ערך של  $c$  שבעבורו השטח המוגבל על ידי גרף הפונקצייה  $g(x)$  ועל ידי הישר  $y = c$  שווה ל- $S$ . נמקו את תשובתכם.

א. תחום הגדרה:

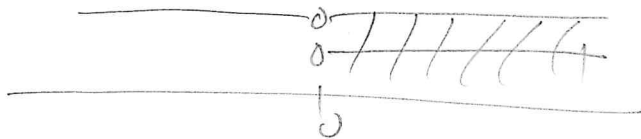
$$\frac{\ln x \text{ מוגדר}}{x > 0}$$

$$\frac{\ln x \text{ מוגדר}}{4x \neq 0}$$

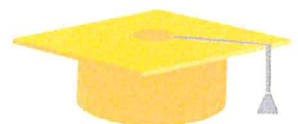
$$x \neq 0$$

$x \neq 0$     אכן     $x > 0$

אזי → אכן:



$$x > 0$$



(2) חזית, א ברי ה-x :  $y=0$

$$\frac{(\ln x)^2}{4x} = 0$$

$$(\ln x)^2 = 0 \quad \sqrt{\quad}$$

$$\ln x = 0$$

$$\log_e x = 0$$

$$x = e^0$$

$$x = 1$$

$$(1, 0)$$





$$f(x) = \frac{(\ln x)^2}{4x} \rightarrow 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \rightarrow 4$$

(2) (58) ג' הטענה:

$$f'(x) = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot 4x - 4 (\ln x)^2}{(4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8 \ln x - 4 (\ln x)^2}{(4x)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$8 \ln x - 4 (\ln x)^2 = 0$$

$$4 \ln x (2 - \ln x) = 0$$

↙

↘

$$4 \ln x = 0$$

$$2 - \ln x = 0$$

$$\ln x = 0$$

$$2 = \ln x$$

$$\log_e x = 0$$

$$2 = \log_e x$$

$$x = e^0$$

$$e^2 = x$$

$$x = 1$$

$$f(1) = \frac{(\ln 1)^2}{4 \cdot 1} = 0$$

(1, 0)

אין

$$f(e^2) = \frac{(\ln e^2)^2}{4e^2} = \frac{1}{e^2} \quad (e^2, \frac{1}{e^2})$$



אולי ויילד!  
אגל

x	0	0.5	1	2	e <sup>2</sup>	10	
f'	/	/	-	0	+	0	-
f	/	/	↘	0	↗	1/e <sup>2</sup>	↘

(הצגה דואל) (הצגה ביואל גבע) (היום ליואל)

$$f'(0.5) = 8 \ln 0.5 - 4 (\ln 0.5)^2 = -7.46$$

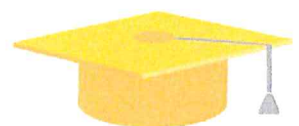
$$f'(2) = 8 \ln 2 - 4 (\ln 2)^2 = +3.62$$

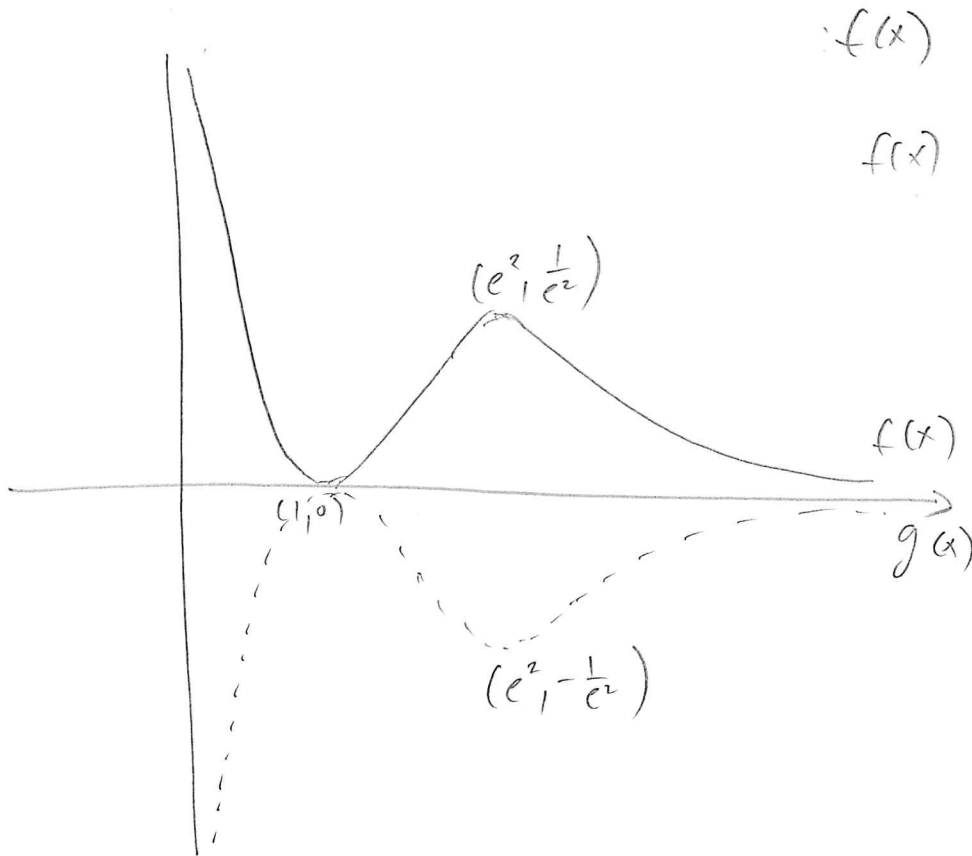
$$f'(10) = 8 \ln 10 - 4 (\ln 10)^2 = -2.78$$

הקצב הקצב ק/י

אנימאז (1,10)

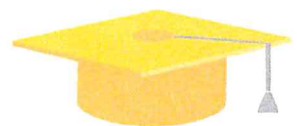
אקסמאז (e<sup>2</sup>, 1/e<sup>2</sup>)





$f(x)$  (ג) נשלב את  $f(x)$  כדי שיהיה א  $g(x)$  כזה אזורי ה- $x$

ה. (1) נמשך דרך הנקודות הם שר שיהיה אזורי ה- $x$ ,  
הם מקבוצת "מסרי"  $y = \dots$ , הוא אזורי דרך הנקודות  
 $(e^2, \frac{1}{e^2})$  וזמן משלבו  $y = \frac{1}{e^2}$ .



ה. (2) (א) פ (ט) שני א של  $f(x)$  לחס אורי ה-\*

נני שיער ש  $c = 1/e^2$  שיהיה אלא שגן דמתי

א סוף ה' קיין אהיה שני א (אח)

א הושג משווא  $y = 1/e^2$

אין א שג - קשר בייח אהיו  $y = -1/e^2$

בואו  $c = -1/e^2$

