

פתרון הבחינה

במתמטיקה

חורף תשפ"ג, 2023, שאלון: 35581

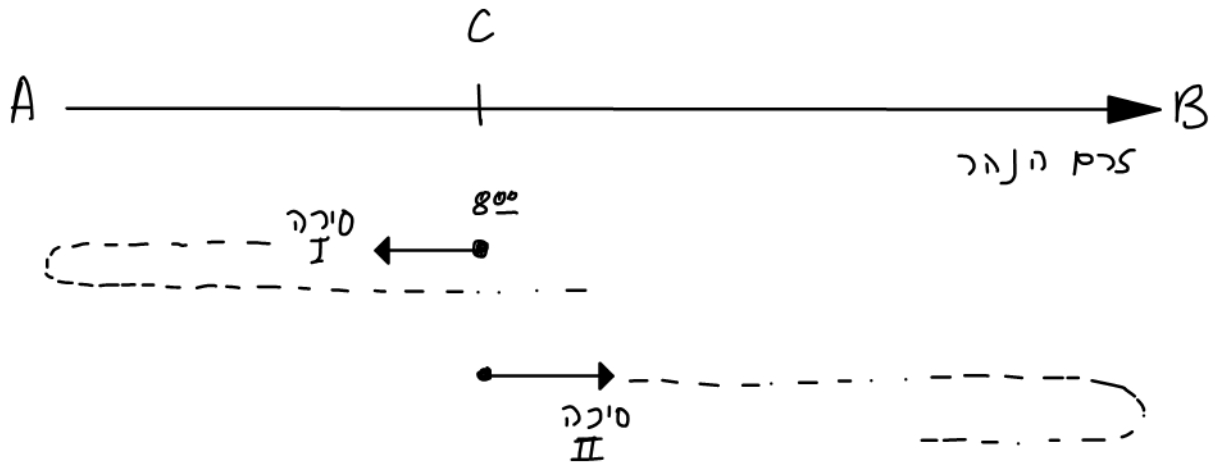
מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



1. לאורך גדת נהר יש שלוש תחנות: תחנה A, תחנה B ותחנה C שנמצאת בנקודה מסוימת בין תחנה A ובין תחנה B. הנהר זורם מכיוון תחנה A לכיוון תחנה B במהירות קבועה. שתי סירות, סירה I וסירה II, יצאו בשעה 8:00 מנקודה C ושטו לכיוונים הפוכים: סירה I שטה (נגד הזרם) אל תחנה A, וסירה II שטה (עם הזרם) אל תחנה B. מייד לאחר שכל אחת מן הסירות הגיעה לתחנה המתאימה, היא הסתובבה ושטה בכיוון ההפוך. נתון כי המהירות של כל אחת מן הסירות במים עומדים היא קבועה. המהירות של סירה I כאשר היא שטה עם הזרם הייתה גדולה פי 1.5 ממהירותה כאשר היא שטה נגד הזרם. המהירות של סירה II כאשר היא שטה עם הזרם הייתה גדולה פי 4 ממהירותה של **סירה I** כאשר היא שטה נגד הזרם. נסמן ב- x את מהירות הזרם בנהר.
- א. הביעו באמצעות x את המהירות של סירה I במים עומדים ואת המהירות של סירה II במים עומדים. סירה I הגיעה לתחנה A לאחר 3 שעות מרגע היציאה לדרך, ומייד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה B. סירה II הגיעה לתחנה B לאחר 7 שעות מרגע היציאה לדרך, ומייד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה A.
- ב. (1) באיזו שעה נפגשו הסירות?
(2) האם הסירות נפגשו בין תחנה A לתחנה C או בין תחנה B לתחנה C? נמקו את תשובתכם.
- הסירות נפגשו במרחק של 84 ק"מ מתחנה C.
- ג. מהי מהירות הזרם בנהר?



$$x = \text{מהירות הזרם בנהר}$$



המהירות של סירה I כאשר היא שטה עם הזרם הייתה גדולה פי 1.5 ממהירותה כאשר היא שטה נגד הזרם.
 המהירות של סירה II כאשר היא שטה עם הזרם הייתה גדולה פי 4 ממהירותה של **סירה I** כאשר היא שטה נגד הזרם.
 נסמן ב- x את מהירות הזרם בנהר.
 א. הביעו באמצעות x את המהירות של סירה I במים עומדים ואת המהירות של סירה II במים עומדים.

$$a+x = 1.5(a-x)$$

$$a+x = 1.5a - 1.5x$$

$$2.5x = 0.5a$$

$$a = 5x$$

מהירות סירה I
 במים עומדים היא $5x$

$$a = \text{מהירות סירה I במים עומדים}$$

$$a+x = \text{מהירות סירה II עם הזרם}$$

$$a-x = \text{מהירות סירה I נגד הזרם}$$

$$\begin{matrix} \text{מהירות} \\ \text{סירה I} \\ \text{נגד} \\ \text{הזרם} \end{matrix} = a-x = 4x$$

$$b+x = 4 \cdot (4x)$$

$$b = 15x$$

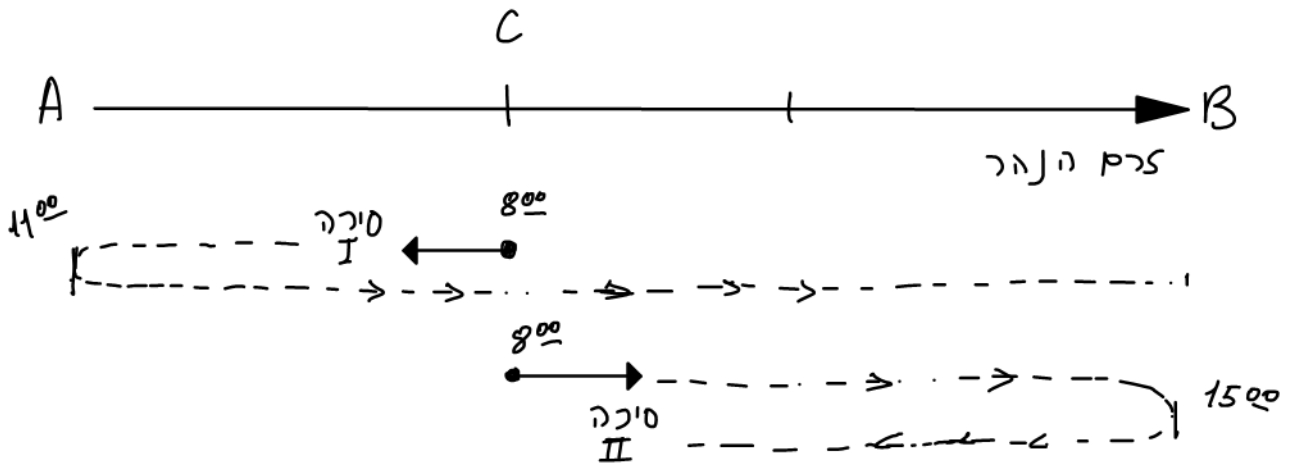
מהירות סירה II
 במים עומדים היא $15x$

$$b = \text{מהירות סירה II במים עומדים}$$

$$b+x = \text{מהירות סירה II עם הזרם}$$



- סירה I הגיעה לתחנה A לאחר 3 שעות מרגע היציאה לדרך, ומייד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה B.
 סירה II הגיעה לתחנה B לאחר 7 שעות מרגע היציאה לדרך, ומייד הסתובבה ושטה לכיוון תחנה A.
 ב. (1) באיזו שעה נפגשו הסירות?
 (2) האם הסירות נפגשו בין תחנה A לתחנה C או בין תחנה B לתחנה C? נמקו את תשובתכם.



	זמן S	מהירות V	מסלול t	תיאור
AB	12x	5x - x = 4x	3	סירה I נצטק C → A
	112x	15x + x = 16x	7	סירה II נצטק C → B
	6tx	5x + x = 6x	t	סירה I נצטק A → D
	14x(t-4)	15x - x = 14x	t-4	סירה II נצטק B → D

D = נקודת המפגש

AB = 12x + 112x

AB = 124x

t = זמן מה-11:00 עד המפגש

סה"כ זקרו גורק זיק AB עד המפגש

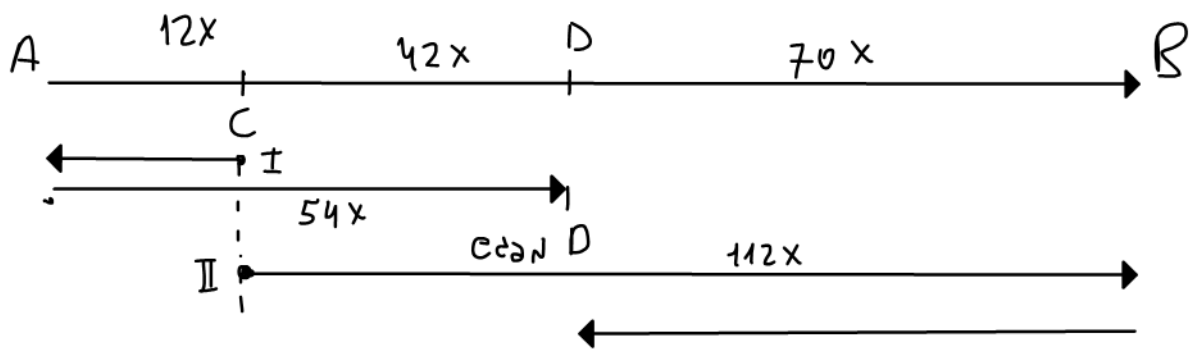
$6tx + 14x(t-4) = 124x$ $x \neq 0$
 $6t + 14t - 56 = 124$
 $20t = 180$ $t = 9$ קצת

ק(1) = 11:00 + 9:00 = 20:00 המפגש

היסיוכר נפגשו קססה 20:00



S	V	ret	
54x	6x	9	ס'רה I A → D מפגש C
70x	14x	5	ס'רה II B → D מפגש D



ק"מ (2) הסירות נפגשו בין B ו-C

הסירות נפגשו במרחק של 84 ק"מ מתחנה C.

ג. מהי מהירות הזרם בנהר?

לפי התנאים

$$CD = 42x = 84 \Rightarrow x = 2$$

ק"מ



2. נתונה סדרה הנדסית אין סופית A שהאיבר הכללי שלה הוא a_n ומנתה היא q .
בונים סדרה חדשה B שהאיבר הכללי שלה הוא $b_n = a_n \cdot q^{n-1}$.

א. הוכיחו שגם סדרה B היא סדרה הנדסית.

ב. בנוגע לכל אחד מן ההיגדים (1)–(2) שלפניכם קבעו אם הוא נכון או לא נכון, ונמקו את קביעתכם.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת – בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

(2) אם הסדרה A יורדת – בהכרח היא גם מתכנסת.

נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{3}{5}$.
ג. מצאו את q .

נתון: n הוא מספר טבעי המקיים $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{2059}{729}$

ד. מצאו את n .

$$b_n = a_n \cdot q^{n-1}$$

$$b_{n+1} = a_{n+1} \cdot q^{n+1-1} = a_{n+1} \cdot q^n$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} \cdot q^n}{a_n \cdot q^{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot q^{n-(n-1)} = q \cdot q^1 = q^2$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q^2$$

הסדרה B אכן הנדסית ומנתה הינה q^2



ג. בנוגע לכל אחד מן ההיגדים (1)–(2) שלפניכם קבעו אם הוא נכון או לא נכון, ונמקו את קביעתכם.

(1) אם הסדרה A לא מתכנסת – בהכרח גם הסדרה B לא מתכנסת.

(2) אם הסדרה A יורדת – בהכרח היא גם מתכנסת.

. $q^2 =$ מנת הסדרה B . q מנת הסדרה A .

ב(1). כז' שהסדרה B מתכנסת צריך שיתקיים $q^2 < 1$.

אם הסדרה A לא מתכנסת אז $q \geq 1$ ולכן $q^2 \geq 1$

ולכן B בהכרח לא מתכנסת ולכן הישג (1)

הנא נכון.

(2) הישג (2) אין נכון.

דוגמה נכונה: סדרה הנדסית בעלת a_1 שלילי

1- $q > 1$ הינה סדרה יורדת (שלילי)

והיא אינה מתכנסת. לדוגמה:

$-2, -4, -8, \dots$



נתון כי שתי הסדרות מתכנסות, וכי היחס בין הסכום של כל איברי הסדרה B לסכום של כל איברי הסדרה A הוא $\frac{3}{5}$.
 ג. מצאו את q.

נניח הנניין שהסדרה מתכנסת נקבע כי $|q| < 1$

$$\frac{S_B}{S_A} = \frac{\frac{b_1}{1-q^2}}{\frac{a_1}{1-q}} = \frac{b_1}{1-q^2} \cdot \frac{1-q}{a_1} = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{1-q}{(1-q)(1+q)}$$

$$b_n = a_n q^{n-1} \quad b_1 = a_1 q^{1-1} = a_1 q^0 = a_1$$

$$\frac{S_B}{S_A} = \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{1}{1+q} = \frac{a_1}{a_1} \cdot \frac{1}{1+q} = \frac{1}{1+q} = \frac{3}{5}$$

$$5 = 3 + 3q$$

$$2 = 3q$$

$$\boxed{q = \frac{2}{3}}$$



$$\cdot \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{2059}{729}$$

נתון: n הוא מספר טבעי המקיים

$$c_n = \frac{b_n}{a_n} = \frac{a_n q^{n-1}}{a_n} = q^{n-1}, \quad c_1 = \frac{b_1}{a_1} = 1$$

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{q^n}{q^{n-1}} = q$$

$c_n = \frac{b_n}{a_n}$ סדרה הנדסית שהנסיגה $q = \frac{2}{3}$

$$S_n = \frac{c_1 (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right)}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{2059}{729} \quad \left| \cdot \frac{1}{-1/3} \right.$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 = - \frac{2059}{2187} \quad \left| +1 \right.$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^n = \frac{128}{2187}$$

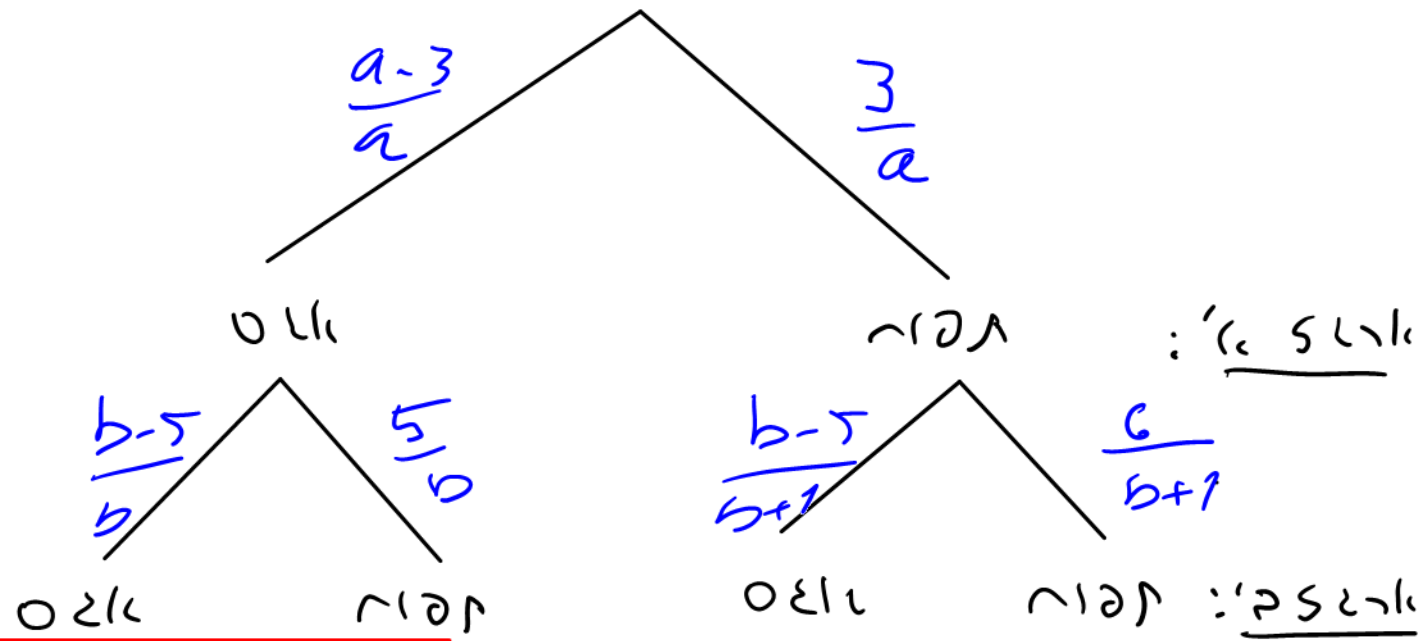
$$\left(\frac{2}{3} \right)^n = \left(\frac{2}{3} \right)^7 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 7}$$



3. בחנות פירות יש ארגזים ובתוכם פירות.
 בארגז א' יש a פירות: 3 תפוחים והשאר אגסים.
 בארגז ב' יש b פירות: 5 תפוחים והשאר אגסים.
 מוציאים באקראי פרי אחד מארגז א'. אם יצא תפוח – מעבירים אותו לארגז ב', ואם יצא אגס – מחזירים אותו לארגז א'.
 לאחר מכן מוציאים באקראי פרי אחד מארגז ב'.
 א. הביעו באמצעות a ו-b את ההסתברות שיצאו 2 תפוחים.
 נתון: ההסתברות להוציא באופן המתואר 2 תפוחים היא $\frac{9}{65}$.
 ההסתברות להוציא באופן המתואר תפוח אחד ואחר כך אגס אחד היא $\frac{21}{130}$.
 ב. מצאו את a ואת b.
 ג. חשבו את ההסתברות שמארגז ב' יצא אגס, אם ידוע כי מארגז א' יצא תפוח.
 מעבירים את כל הפירות משני הארגזים לארגז אחר שהיה ריק, ומוציאים ממנו באקראי פרי 6 פעמים, עם החזרה.
 ד. מצאו את ההסתברות שב-4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח אך שבכל 6 הפעמים יצא אגס.
 ה. ידוע שב-4 מן הפעמים בדיוק יצא תפוח. מצאו את ההסתברות שהתפוחים יצאו ברציפות, בזה אחר זה.

פתרון:

א. נתאר את ההנצח הנכונה של האירועים:



$$p = \frac{3}{a} \cdot \frac{6}{b+1}$$

תשובה:

למידע על פסיכומטרי
 ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





ג. קיבור מערכת של שני משוואות בסגור
נעלם לה:

$$\begin{cases} \frac{3}{a} \cdot \frac{6}{b+1} = \frac{9}{65} \\ \frac{3}{a} \cdot \frac{b-5}{b+1} = \frac{21}{130} \end{cases}$$

קבולק משוואות:

$$\frac{\frac{3}{a} \cdot \frac{6}{b+1}}{\frac{3}{a} \cdot \frac{b-5}{b+1}} = \frac{\frac{9}{65}}{\frac{21}{130}}$$

$$\frac{6}{b-5} = \frac{6}{7} \Rightarrow$$

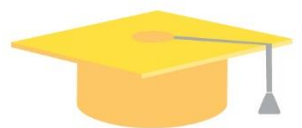
$$b = 12$$

$$\frac{3}{a} \cdot \frac{6}{13} = \frac{9}{65} \Rightarrow$$

$$a = 10$$

ג. זו הסתברת מוחלט. אכן יזל
גבול מערכת א', אז כגור קארול
בי יש 13 פיו, מחזק 7 וחסוק
זכנו ההסתברות תהיה

$$\frac{7}{13}$$



3. כגד ביארזס החצב יש 8 תפוזים
1- 14 אזסיק.

גוזב 6 פירג גב האזרה, אכן לו
התפוזים ביןולמית. נפוזר בקגד
נוסח - ברנול, הואשר הפוגלרית הק:

ס או 4 = 4, $P(אפוח) = \frac{8}{22}$, $n = 6$
אכן:

$$P = P_6(4) + P_6(6) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{8}{22}\right)^4 \cdot \left(\frac{14}{22}\right)^2 + \left(\frac{14}{22}\right)^6 =$$

$$P = 0.1726$$

ה. יש $\binom{6}{4}$ מקרים בהם יצאו קציה
4 תפוזים, נאמר 15 מקרים.
מתזרם 3 מקרים בהם 4 התפוזים
יוצאים בקלף. 4 המקרים הם

- 1 → 2 → 3 → 4
- 2 → 3 → 4 → 5
- 3 → 4 → 5 → 6

$$P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

אכן התעלה היא



4. שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B (ראו סרטוט).

המיתר AC במעגל השמאלי חותך את המעגל הימני בנקודה D.

המיתר AE במעגל הימני חותך את המעגל השמאלי בנקודה F.

הקטע CE עובר דרך הנקודה B.

א. הוכיחו כי $\triangle ACE \sim \triangle BCD$.

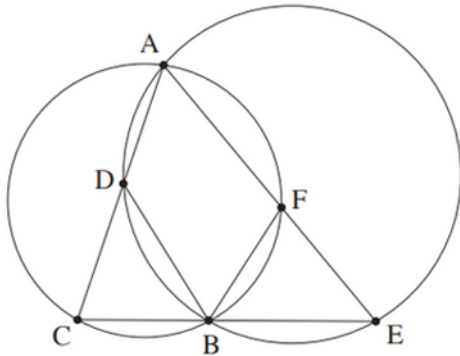
נתון: $DC = FE$.

ב. הוכיחו כי $\triangle BFE \cong \triangle BCD$.

ג. (1) הוכיחו כי $AC \cdot BE = AE \cdot BC$.

(2) הוכיחו כי AB הוא חוצה זווית CAE.

ד. הוכיחו כי $\angle DEC = \angle FCE$.




פתרון: שוטטת על התוספת בסוף התרגיל.

המספר	לעשה	נימוק
①	$\angle ACE = \angle BCD$	זווית שווה לעקומה
②	$\angle ADB + \angle AEB = 180^\circ$	במרוקן חסוב קמגל זכוב זווית זכוב 180°
③	$\angle ADB + \angle BDC = 180^\circ$	זווית זכוב זכוב 180°
④	$\angle BDC = \angle AEC$	כזא הזקרה לבי ז, ז
⑤	$\triangle ACE \sim \triangle BCD$	משפט זכוב זכוב S.S לפי ז, ז, ז. זכוב זכוב
⑥	$DC = FE$	נתון

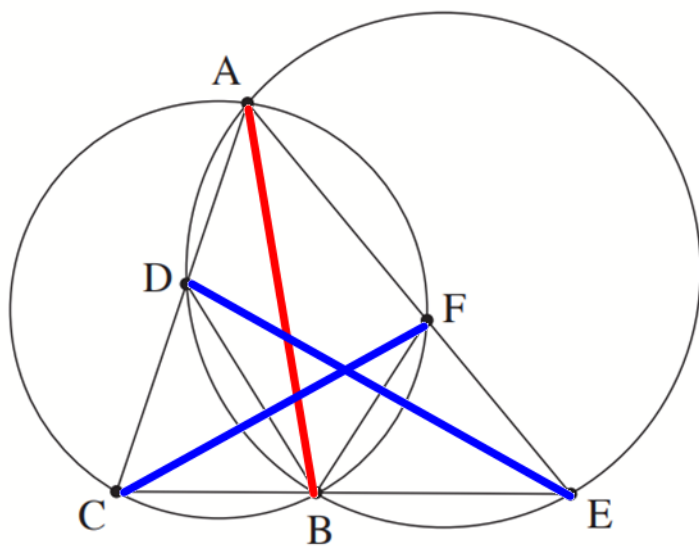


הגדרה	טענה	נימוק
(7)	$\# B E F = \# B D C$	אפי 4
(8)	$\# A C B + \# B F A = 180^\circ$	בהינתן חסוב במעל סכוב שלול גליל גליל
(9)	$\# B F A + \# B F E = 180^\circ$	שלול גליל גליל סכוב
(10)	$\# B C D = \# B F E$	בז המעקד. אפי 8, 9
(11)	$\triangle B F E \cong \triangle B C D$	מטע חסיבה 5.3.5 אפי 6, 7, 10 מ.ש.ל.ב
(12)	$\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{CD} = \frac{AE}{BD}$	יחס הזלעג המתאייל במשולש קוליק.
(13)	$AC \cdot BD = AE \cdot BC$	אפי 5 ואז דקה
(14)	$BD = BE$	זלעג מתאייל במשולש חסיב. טול סלול. אפי 11



הזמנה	אלגוריתם	נימוק
(15)	$AC \cdot BE = AE \cdot BC$	הצבה. אפי 13, 14 מ.ש.א 2 (1)
(16)	$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{BE}$	אם גזרה. אפי 15
(17)	AB חוצה CE - CAE	המטען ההפוך למטען חוצה הצלעות במעוקב ACE מ.ש.א 2 (2)
(18)	$\angle CAB = \angle BAE$	הצורה חוצה צלעות. אפי 17
(19)	$\angle CAB = \angle DEC$	צלעות היקפית הוסיקנה על דלתאות שולח שוויון
(20)	$\angle BAE = \angle FCE$	צלעות היקפית הוסיקנה על דלתאות שולח שוויון
(21)	$\angle DEC = \angle FCE$	כחז המעקה. אפי 18, 19, 20 מ.ש.א 3
		

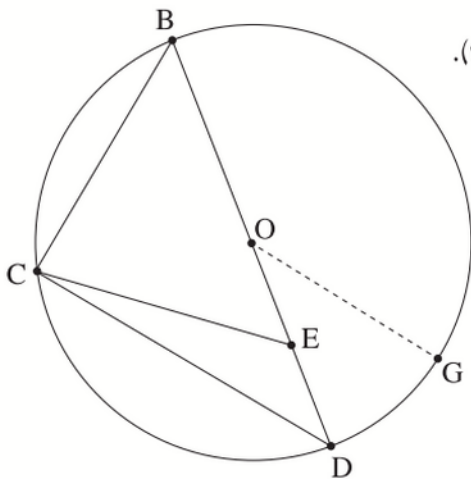




למידע על פסיכומטרי
ביזאל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.





5. משולש BCD חסום במעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R. הנקודות O ו-E נמצאות על הצלע BD כך שמתקיים $OE = ED$ (ראו סרטוט). נסמן: $\angle CDB = \alpha$, $CD = m$.

א. הביעו את $\cos \alpha$ באמצעות m ו-R.

ב. הוכיחו כי $CE = \frac{1}{2} \sqrt{2m^2 + R^2}$.

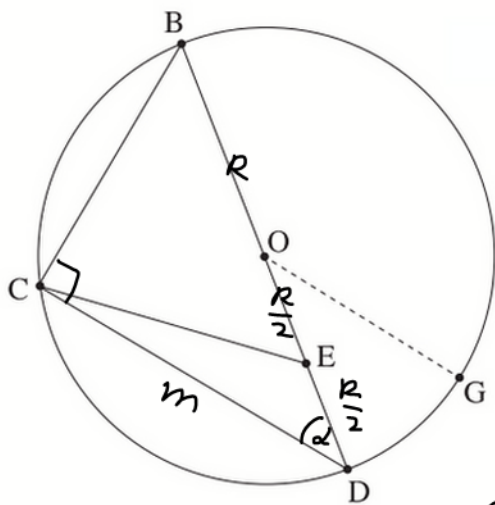
נתון: $BC = EC$.

ג. חשבו את α .

מעבירים רדיוס OG המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.

ד. חשבו את גודל הזווית OEG.

א. $BD = 2R$, קוטר. כי עובר במרכז המעגל O. $OD = R$ רדיוס. $OE = ED = \frac{R}{2}$ כי E נמצא במרכז הקוטר. $\angle BCD = 90^\circ$ זווית היקף שמצולק על קוטר שנוכח 90° .



ΔBCD : $\frac{DC}{BD} = \cos \alpha$

$\cos \alpha = \frac{m}{2R}$

ΔCDE :

$CE^2 = m^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2 \cdot m \cdot \frac{R}{2} \cdot \cos \alpha$

$CE^2 = m^2 + \frac{1}{4}R^2 - m \cdot R \cdot \frac{m}{2R} = m^2 + \frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}m^2$

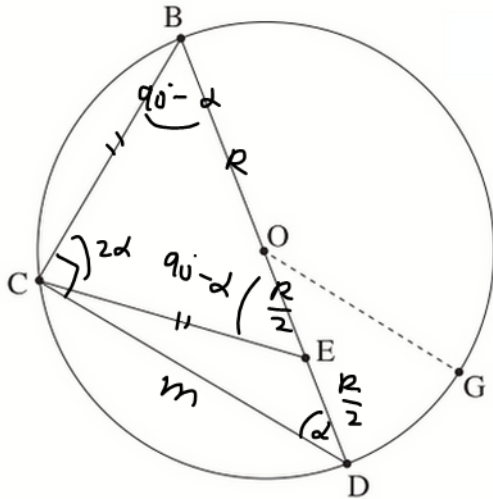
$= \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{4}R^2 = \frac{1}{4}(2m^2 + R^2)$

$CE^2 = \frac{1}{4}(2m^2 + R^2) \quad | \sqrt{\quad}$

$CE = \frac{1}{2} \sqrt{2m^2 + R^2}$

ו.ע.נ. ב'.





נתון: $BC = EC$

ג. חשבו את α .

במלת $\angle B = 90^\circ - \alpha$
במלת $\angle B$

במלת $\angle CEB = \angle B = 90^\circ - \alpha$
במלת $\angle CEB$

במלת $\angle BCE = 2\alpha$
במלת $\angle BCE$

$\triangle BCD$: $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$ $BC = 2R \sin \alpha = CE$

$\triangle BCE$: $\frac{1.5R}{\sin 2\alpha} = \frac{2R \sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)}$ $\div : R$

$BE = 1.5R$

$\frac{1.5}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha}$

$1.5 \cos \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha$

$(0 < \alpha < 90^\circ)$

$\div : \cos \alpha \neq 0$

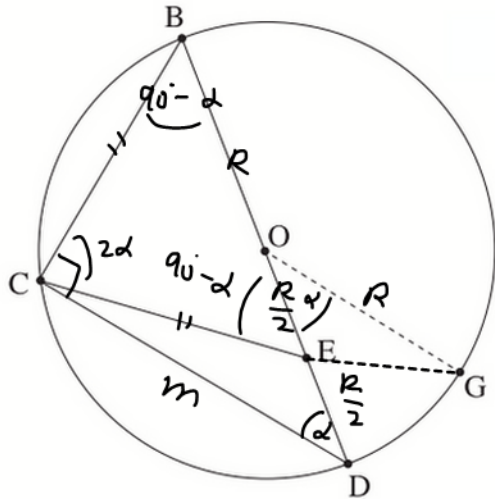
$1.5 \cancel{\cos \alpha} = 2 \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cancel{\cos \alpha}$

$1.5 = 4 \sin^2 \alpha$ $\sin^2 \alpha = \frac{3}{8}$

$\sin \alpha = \sqrt{\frac{3}{8}}$

$\alpha = 37.76^\circ$





מעבירים רדיוס OG המקביל לצלע CD, כמתואר בסרטוט.
7. חשבו את גודל הזווית OEG.

שני זוויות מתחלפות
על קוין המקביל
 $\angle OOG = \angle D = \alpha$

$\triangle OGE$:

$$EG^2 = R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 - 2 \cdot R \cdot \frac{1}{2}R \cdot \cos \alpha$$

$$EG^2 = 0.459 \cdot R^2$$

$$EG = 0.6778R$$

$$\frac{EG}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \angle E}$$

$$\sin \angle E = \frac{R \sin \alpha}{EG} = 0.903$$

$$\angle OEG = 180 - 64.62^\circ$$

ול $\angle OEG = 64.62^\circ$

$$\angle OEG = 115.38^\circ$$

$$\angle G = 26.86^\circ$$

ול $\angle G = 77.62^\circ$

מאחר ו- $OE = \frac{R}{2}$ קטנה מ- $OG = R$ של הזווית
שממנה OE (הזווית G) היא קטנה יותר

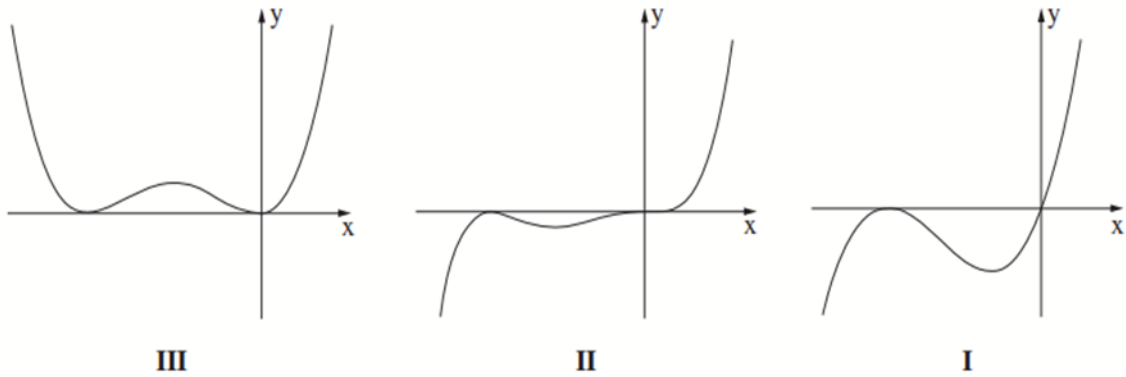
ולכן התשובה היא $\angle OEG = 115.38^\circ$

קבוצה בין שתי
היא שכיחות לפי
הזווית G
שנתנה
לבין בתוך

$$\angle G = 180 - \angle E - \alpha$$



6. נתונה הפונקצייה $f(x) = x^n \cdot (x + 1)^2$, $n > 1$ הוא מספר טבעי. הפונקצייה $f(x)$ מוגדרת לכל x .
- מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים.
 - מצאו את תחומי החיוביות ואת תחומי השליליות של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה). הבחינו בין n זוגי ובין n אי-זוגי.
 - מצאו את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן. הביעו את תשובותיכם באמצעות n , אם יש צורך. הבחינו בין n זוגי ובין n אי-זוגי.
- לפניכם שלושה גרפים III-I. אחד מן הגרפים מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואחד מהם מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי.



- ד. קבעו איזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור n זוגי, ואיזה גרף מתאר את הפונקצייה $f(x)$ עבור $n > 1$ ואי-זוגי. נמקו את קביעותיכם.

- נתונה הפונקצייה $g(x) = a \cdot f(x - 2)$, a הוא פרמטר חיובי. נסמן ב- T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $g(x)$ ובין ציר ה- x .
- ה. הביעו באמצעות a ו- T את השטח הכלוא בין גרף הפונקצייה $f(x)$ ובין ציר ה- x . נמקו את תשובתכם.

א6. חיתוך קט ביז א:

$$x^n (x+1)^2 = 0$$

$$x = 0 \quad x = -1$$

חיתוך זט ביז ע:

$$f(0) = 0^n (0+1)^2 = 0$$

$(0, 0)$ · $(-1, 0)$





זמן 15:00

x	$x < -1$	$-1 < x < \frac{-n}{n+2}$	$\frac{-n}{n+2} < x < 0$	$0 < x$
$f'(x)$	+	-	+	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↗

$x = \frac{-n}{n+2}$ min	$x = -1$ max
-----------------------------	-----------------

זמן 15:00

x	$x < -1$	$-1 < x < \frac{-n}{n+2}$	$\frac{-n}{n+2} < x < 0$	$0 < x$
$f'(x)$	-	+	-	+
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

$x = -1$ min	$x = \frac{-n}{n+2}$ max	$x = 0$ min
-----------------	-----------------------------	----------------

3. זמן 15:00 (מחנה) הוא פונקציה של x וזמן 15:00 (מחנה) הוא פונקציה של x וזמן 15:00 (מחנה) הוא פונקציה של x

זמן 15:00 (מחנה) הוא פונקציה של x וזמן 15:00 (מחנה) הוא פונקציה של x וזמן 15:00 (מחנה) הוא פונקציה של x

למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



לכיון a חיובי קיבלו לנו ישבס על האינטגרל/אנטי-גזירה של $f(x-2)$, $g(x)$
 קרא בצורה של 2 האינטגרל יחנה של $f(x)$ וזכנו:

$$a \int_1^2 f(x-2) dx = T$$

ה. לפי הגרפים של הסעיף הקודם:

$$\int_1^2 f(x-2) dx = \frac{T}{a}$$

זכור a (גובה)

↓
 זכור f :

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{T}{a}$$

זכור a שני זכור: $a \int_1^2 -f(x-2) dx = T$ קציון קאלט זכור חישוב (קל):

$$\int_{-1}^0 -f(x) dx = \frac{T}{a}$$

שני סופים: $\frac{T}{a}$



7. נתונה הפונקצייה $f(x) = \frac{2 \sin(x)}{\cos^2(x) - 1}$ בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

- א. (1) מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.
 (2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקצייה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x .
 (3) האם הפונקצייה $f(x)$ זוגית, אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית? הוכיחו את תשובתכם.
- ב. ענו על התת-סעיפים (1)–(2) שלפניכם בעבור התחום $0 \leq x \leq 2\pi$.
 (1) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
 (2) מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן.
 ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$ (בתחום $-2\pi \leq x \leq 2\pi$).
 ד. הוכיחו כי לפונקצייה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
 ה. חשבו את השטח הכלוא בין גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ובין ציר ה- x , בתחום $1.7 \leq x \leq 2$.

כאשר $\cos(x) = 1$ (הניח):

$$f(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x - 1} = \frac{2 \sin x}{- \sin^2 x} = - \frac{2}{\sin(x)}$$

$$\sin x = 0$$

(1) כ

$$x = 0 + \pi k$$

$$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi$$

ת. ה. : $-2\pi < x < 2\pi$ \wedge $x \neq 0, \pi, -\pi$



א (2) ישנן 5 אסימטות אנכיות:
 $x=0$
 $x=\pi$
 $x=-\pi$
 $x=2\pi$
 $x=-2\pi$

שימו לב: אסימטות אנכיות קובצות את כל הנקודות בהן הפונקציה אינה מוגדרת, אך לא את כל הנקודות בהן הפונקציה איננה מוגדרת. אסימטות אנכיות קובצות את כל הנקודות בהן הפונקציה איננה מוגדרת.

א (3) $f(-x) = \frac{-2}{\sin(-x)} = \frac{-2}{-\sin(x)} = -\frac{-2}{\sin x} = -f(x)$

הפונקציה היא סי'א

ב (1) $0 = \frac{-2}{\sin x} \rightarrow$ אין חיתוך עם x

חיתוך עם y כמובן שאין מאתר! $x \neq 0$

$f'(x) = \frac{0 - (-2 \cos x)}{\sin^2 x}$

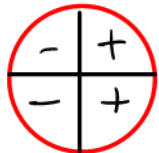
$u = -2 \quad u' = 0$
 $v = \sin x \quad v' = \cos x$

$f'(x) = \frac{2 \cos x}{\sin^2 x} = 0 \rightarrow \cos x = 0$
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
 $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}$





x	0	$< x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$< x < \pi$	π	$< x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$< x < 2\pi$	
$f'(x)$	///	+	0	-	///	-	0	+	///
$f(x)$	///		max		///		min		///



נמצא חיבור וקטין - אם נעלה היתרון של \cos

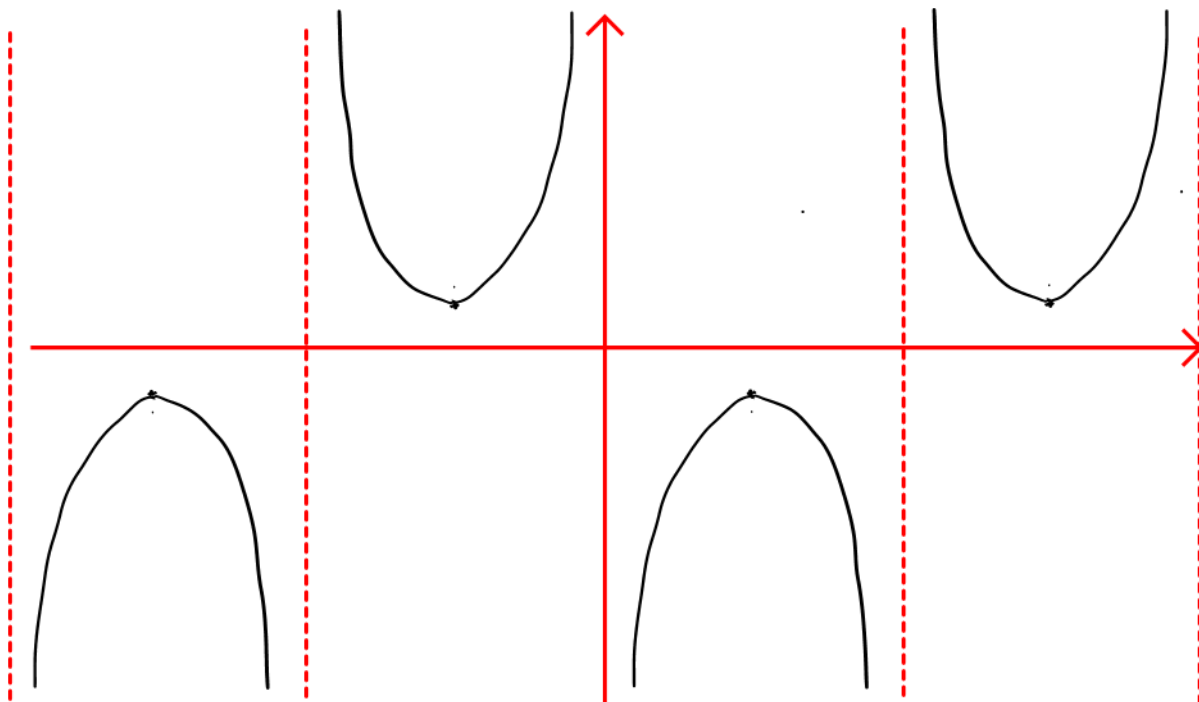
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, -2\right) \text{ max}$$

$$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right) \text{ min}$$

ג. שאתר והבנת א"ס הסרט (ראו כק):



למידע על פסיכומטרי
ביואל גבע ←

הזדמנות לעתודה יש פעם בחיים.
אל תתפשר עליה.



$$f'(x) = \frac{2 \cos x}{\sin^2 x}$$

$$u = 2 \cos x \quad u' = -2 \sin x \quad \underline{3}$$

$$v = \sin^2 x \quad v' = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$f''(x) = \frac{-2 \sin^3 x - 4 \sin x \cos^2 x}{\sin^4 x} = \frac{-2 \sin x (\sin^2 x + 2 \cos^2 x)}{\sin^4 x}$$

$$f''(x) = \frac{-2 (1 - \cos^2 x + 2 \cos^2 x)}{\sin^3 x} = \frac{-2 (\cos^2 x + 1)}{\sin^3 x}$$

לאחר וינג'ור (השנייה) לאינן למאמטר, נסיק שאין
 נקודות ניתוח

ה' ע"פ טבלת סינוס קיצון, נסיק ש $f'(x)$ בתחום הניקוד
 שלילי דהן עלונו עמסור אינאזר אר $-f'(x)$

$$\int_{1.7}^2 (0 - f'(x)) dx = \left[-f(x) \right]_{1.7}^2 = (2.199) - (2.016)$$

$$= \boxed{0.182}$$



8. לפניכם שלוש פונקציות שלכל אחת מהן יש שני ערכי x שבהם היא אינה מוגדרת.

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)}, \quad h(x) = \frac{x^3}{x(x + 2)}, \quad k(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)}$$

ידוע כי לאחת משלוש הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית אחת ואסימפטוטה אנכית אחת בלבד.

א. מבין שלוש הפונקציות הנתונות, קבעו איזו פונקצייה מקיימת את כל התכונות האלה. נמקו את קביעתכם.

ענו על סעיפים ב-ד עבור הפונקצייה שקבעתם בסעיף א.

ב. (1) מצאו את המשוואה של האסימפטוטה האופקית ואת המשוואה של האסימפטוטה האנכית של הפונקצייה.

(2) מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקצייה עם הצירים.

נתון כי לפונקצייה זו אין נקודות קיצון.

ג. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה.

נסמן נקודה A על גרף הפונקצייה, שעבורה $x = t$, $-1 < t < 1$.

מן הנקודה A מעבירים שני ישרים, האחד מאונך לציר ה- x והאחר מאונך לאסימפטוטה האנכית של הפונקצייה,

כך שנוצר מלבן על ידי שני הישרים, על ידי האסימפטוטה האנכית ועל ידי ציר ה- x .

ד. מצאו את ערכו של t שבעבורו היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי. תוכלו להשאיר שורש בתשובתכם.

19

$$k(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2(x + 2)} \rightarrow \begin{array}{l} \text{אנכי } x=0 \\ \text{אנכי } x=-2 \\ \text{אופקי } y=1 \end{array}$$

$$h(x) = \frac{x^3}{x(x + 2)} = \frac{x^2}{x + 2} \quad (x \neq 0) \rightarrow \begin{array}{l} \text{אנכי } x=-2 \\ \text{חור } x=0 \\ \text{אין אסימטרה אופקית} \end{array}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{x - 1}{x + 2} \quad (x \neq -1) \rightarrow \begin{array}{l} \text{אנכי } x=-2 \\ \text{חור } x=-1 \\ \text{אופקי } y=1 \end{array}$$

(כפי שמתקיימת אה הנתונים הנכונים היא $g(x)$)

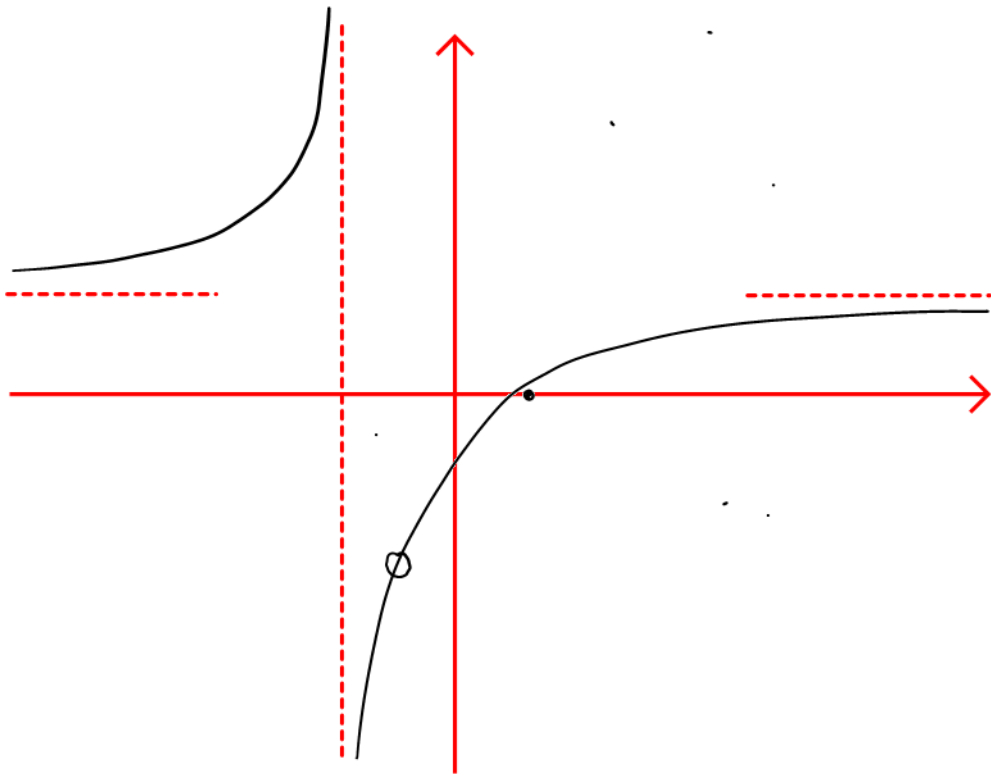


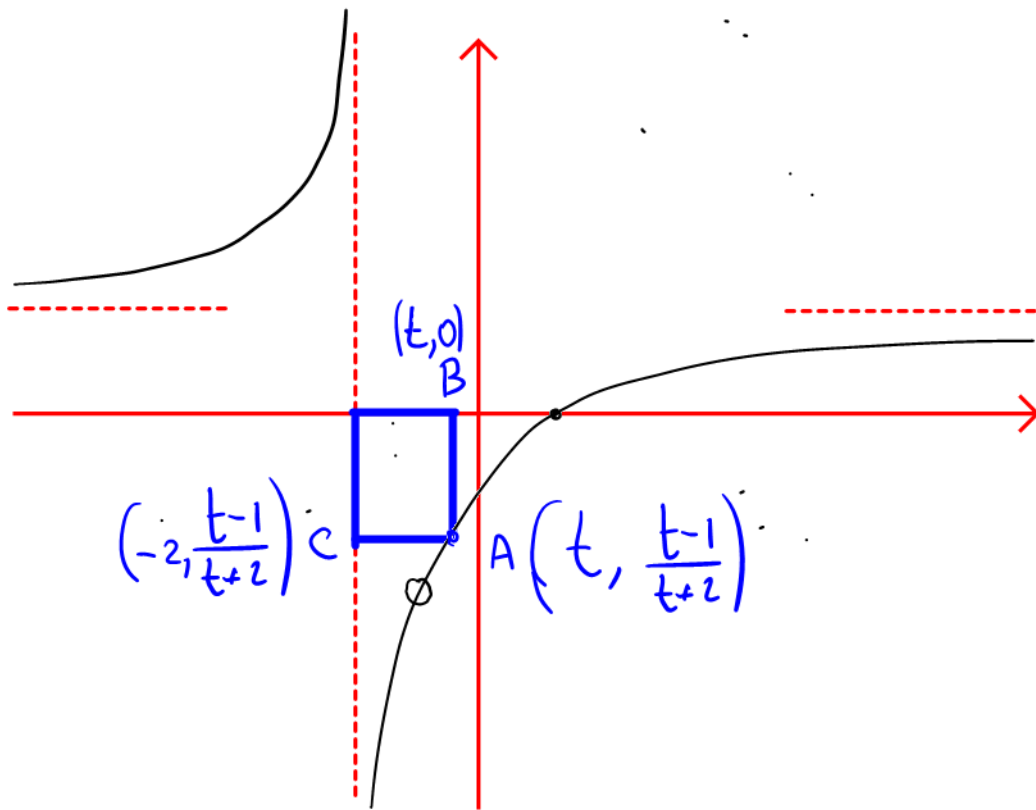
ק (1) $x = -2$ אנכי
אנכי $y = 1$

ב (2) $x = 1$: $x = 1$ $(1, 0)$

$g(0) = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}$ $(0, -\frac{1}{2})$: $y = -\frac{1}{2}$

ע יש שים ♥ שקיים חור ? $x = -1$





נתאר את הנקודה A כן: $A(t, \frac{t-1}{t+2})$
 כעור. נתנו פונקציה שמתאר את היקף המלבן

$$p(t) = 2(x_A - x_C) + 2(y_B - y_A)$$

$$p(t) = 2(t+2) + 2\left(\frac{1-t}{t+2}\right) = 2t+4 + \frac{2-2t}{t+2}$$

$$p'(t) = 2 + \frac{-2(t+2) - 1(2-2t)}{(t+2)^2} = \frac{2(t+2)^2 - 2t - 4 - 2 + 2t}{(t+2)^2} =$$

$$p'(t) = \frac{2(t^2 + 4t + 4) - 6}{(t+2)^2} = \frac{2t^2 + 8t + 2}{(t+2)^2} = 0$$

$t = -2 + \sqrt{3} \approx -0.26$
 $t = -2 - \sqrt{3} \approx -3.73$
 (נסר)





נאזא אמצוקר בקוקזר מנימל צי נסרה שניה לקוקזר

$$p''(t) = 4t + 8$$

$$p''(-0.26) = + \rightarrow \text{min}$$

ס'ס'נום : עקור $t = \sqrt{3} - 2$ היקף הגבין מינימלי

