פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ג, 2023, שאלון: 35482

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

1. ביום ראשון יצאו יעל ושירה להליכה במסלול שאורכו 4,200 מטרים.

הן יצאו יחד מתחילת המסלול.

בדקה הראשונה הלכה יעל מרחק של 130 מטרים, ובכל דקה שלאחר מכן היא הלכה מרחק הקטן ב־ 2 מטרים מן המרחק שהלכה בדקה שקדמה לה.

א. מהו המרחק שהלכה יעל בדקה ה־ 55 ?

ב. **(1)** כמה דקות הלכה יעל מתחילת המסלול ועד סופו?

(2) מהו המרחק שהלכה יעל בדקה האחרונה?

שירה הלכה בכל דקה מרחק קבוע.

יעל ושירה הגיעו לסוף המסלול באותו הזמן.

ג. מהו המרחק הקבוע שהלכה שירה בכל דקה?

ביום שני יצאו יעל ושירה להליכה במסלול אחר.

שירה יצאה מתחילת המסלול והלכה בכל דקה אותו מרחק קבוע כמו ביום ראשון.

יעל יצאה מתחילת המסלול 4 דקות אחרי שירה, והלכה בכל דקה באותו אופן שבו הלכה ביום ראשון

(בדקה הראשונה היא הלכה מרחק של 130 מטרים, ובכל דקה שלאחר מכן היא הלכה מרחק הקטן ב־ 2 מטרים מן המרחק שהלכה בדקה שקדמה לה.)

ד. כמה דקות עברו מזמן שיצאה יעל מתחילת המסלול ועד שהיא פגשה את שירה <u>בפעם הראשונה</u>?

פתרון:

א. המרחקים שיעל עוברת הם סדרה חשבונית – שבה איבר הראשון שלה הוא 130, וההפרש הוא -2. נציב $n=55$ בנוסחת האיבר הכללי:

$$a_{55} = 130 + 54 \cdot (-2) = 22$$

בדקה ה-55 יעל הלכה $\boxed{\text{22 מטרים}}$

ב. (1) נשתמש בנוסחת הסכום של סדרה חשבונית – כדלקמן:

$$S_n = 4{,}200 \quad , a_1 = 130 \quad , d = -2 \quad , n = ?$$

$$4{,}200 = \frac{n}{2}\{2\cdot 130 + (n-1)(-2)\}$$

$$4{,}200 = \frac{n}{2}\{262 - 2n\}$$

$$4{,}200 = 131n - n^2$$

$$n^2 - 131n + 4{,}200 = 0$$

נפתור את המשוואה:

$$n_{1,2} = \frac{131 \mp \sqrt{(-131)^2 - 4\cdot 1\cdot 4{,}200}}{2}$$

$$n_{1,2} = \frac{131 \mp 19}{2} = \begin{cases} n = 75 \\ n = 56 \end{cases}$$

לפי התשובה לסעיף א' $n=75$ לא אפשרי
[גם בדיקה ש-75 תהווה מרחק שלילי]
ולכן יעל הלכה $\boxed{56 \text{ דקות}}$

(2) בסעיף א' ציינו שבדקה ה-22 יעל הלכה
22 מטרים, ולכן בדקה ה-56
יעל הלכה $\boxed{20 \text{ מטרים}}$

ג. יעל ושירה הלכו אותו זמן בדיוק, כלומר
שירה הלכה 56 דקות, ולכן
המרחק שעברה בכל דקה הוא:

$$\frac{4{,}200}{56} = 75$$

שירה הלכה בכל דקה **75 מטרים**

3. נשווה את סך המרחקים שכל אחת מהן הלכה כאשר זמן ההליכה של יעל n ושל שירה $n+4$:

$$75(n+4) = \frac{n}{2}\left[2\cdot 130 + (n-1)\cdot(-2)\right]$$

$$75n+300 = \frac{n}{2}\left[262-2n+2\right]$$

$$75n+300 = 131n-n^2$$

$$n^2-56n+300=0$$

נפתור את המשוואה:

$$n_{1,2} = \frac{56 \mp \sqrt{(-56)^2-4\cdot 1\cdot 300}}{2}$$

$$n_{1,2} = \frac{56 \mp \sqrt{1936}}{2} = \frac{56 \mp 44}{2} = \begin{cases} n=50 \\ n=6 \end{cases}$$

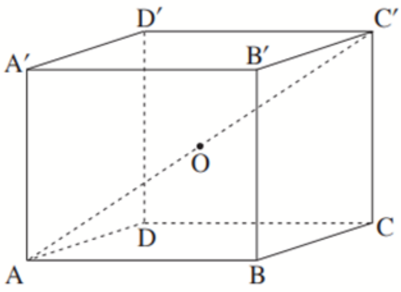
שימו לב המפגש הראשון בין יעל
ושירה ולכן התשובה 6 דקות

.2 נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ (ראו סרטוט).

$ABCD$ הוא בסיס של התיבה.

O היא נקודת מפגש האלכסונים של התיבה.

נתון: $AB = \sqrt{3} \cdot a$, $BC = a$, $CC' = 1.5 \cdot a$.



א. הביעו את אורך אלכסון הבסיס, AC , באמצעות a .

ב. מצאו את גודל הזווית שבין אלכסון התיבה, AC' , ובין הבסיס $ABCD$.

נתון: שטח המעטפת של התיבה הנתונה הוא $108 \cdot (1 + \sqrt{3})$.

ג. מצאו את a .

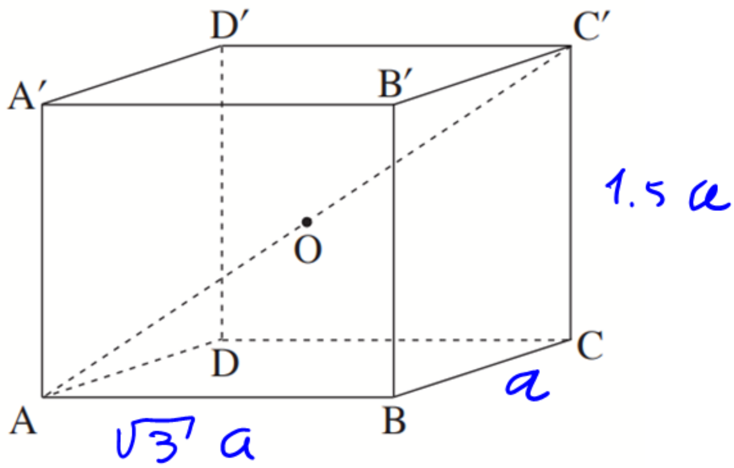
ד. מצאו את נפח הפירמידה $OABCD$.

ה. בעבור כל אחת מן הטענות (1)–(2) שלפניכם, קבעו אם הטענה נכונה או לא נכונה, ונמקו את קביעתכם.

(1) נפח הפירמידה $OABCD$ גדול מנפח הפירמידה $OAA'D'D$.

(2) הזווית בין הישר AC ובין מישור הפאה $DD'C'C$ היא בת 30° .

פתרון:



א. נשתמש במשפט פיתגורס במשולש ABC:

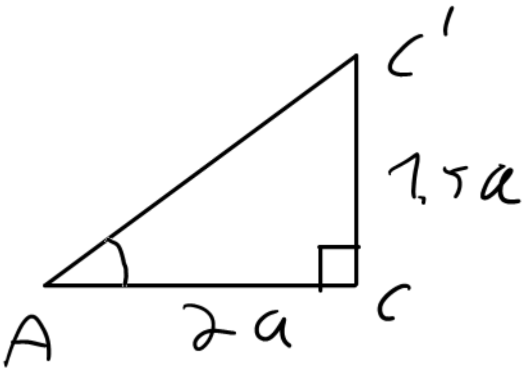
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = (\sqrt{3}a)^2 + a^2$$

$$AC^2 = 4a^2 \; / \sqrt{}$$

$$\boxed{AC = 2a}$$

ב. הזווית המבוקשת היא זווית – CAC'
במשולש CAC':



$$\tan\sphericalangle CAC' = \frac{1.5a}{2a}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sphericalangle CAC' = 36.87^\circ}$$

ג. נתון כי שטח מעטפת התיבה הוא:

$$M = 108(1+\sqrt{3})$$

שטח המעטפת הוא סכום השטחים של הפאות הצדדיות:

$$M = 2\cdot a\cdot 1.5a + 2\cdot\sqrt{3}a\cdot 1.5a$$

$$\Downarrow$$

$$108(1+\sqrt{3}) = 3a^2 + 3\sqrt{3}a^2$$

$$108(1+\sqrt{3}) = a^2(3+3\sqrt{3})$$

$$a^2 = \frac{108(1+\sqrt{3})}{3+3\sqrt{3}} = 36 / \sqrt{\ }$$

$$a = \pm 6 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

$$\Downarrow$$

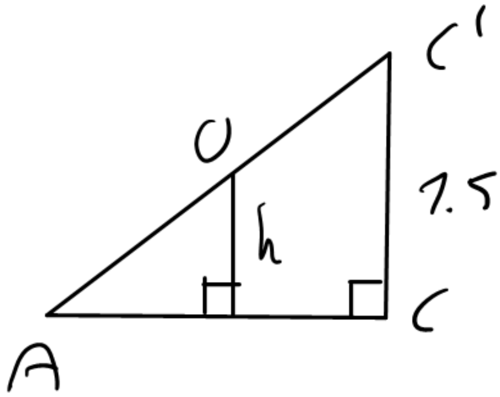
3. נקודה O היא אמצע אלכסון AC.

הגובה של הפירמידה OABCD

הוא האנך לבסיס ABCD.

האם הגובה הוא קטע אמצעים?

במשולש ACC':



לכן אורך הגובה

$1.5a = 9$

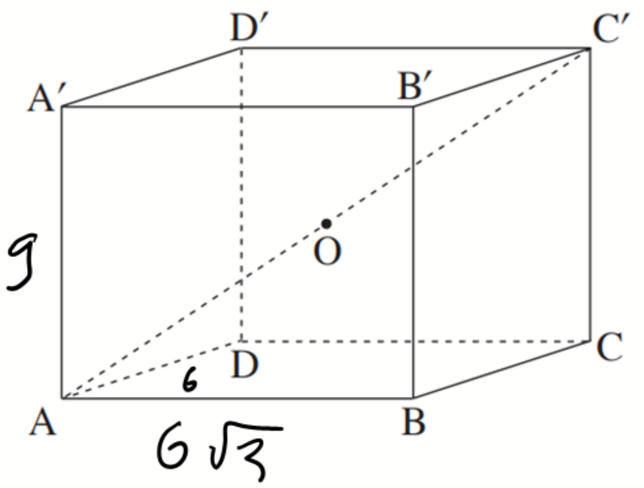
הוא:

$h = \frac{1}{2} CC' = 4.5$

נציב בנוסחה לנפח פירמידה:

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{AB \cdot BC \cdot h}{3} = \frac{\sqrt{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4.5}{3}$$

$$\boxed{V = 54\sqrt{3} = 93.53}$$



ה. (1)

בצורה דומה לסעיף ג', הנפח של פירמידה $OAA'D'D$ הוא:

$$V = \frac{B\cdot h}{3} = \frac{AD\cdot AA'\cdot h}{3} = \frac{6\cdot 9\cdot h}{3}$$

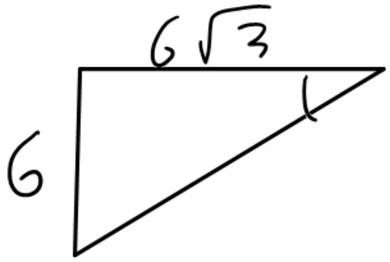
הגובה הוא, הפעם, אנך אמצעי במשולש ABC וכן שווה לחצי מ-AB, כלומר שווה ל- $3\sqrt{3}$.

נציב, ונחשב את הנפח:

$$V = \frac{6\cdot 9\cdot 3\sqrt{3}}{3} = 54\sqrt{3} = 93.53$$

כלומר $\boxed{\text{הטענה לא נכונה}}$

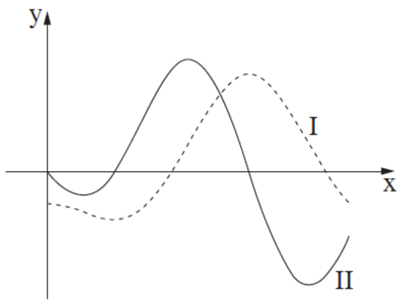
(2) הזווית המבוקשת היא זווית ACB במשולש ACB:



$$\tan\measuredangle ACB = \frac{6}{6\sqrt{3}} \rightarrow \measuredangle ACB = 30^{\circ}$$

כלומר, הטענה נכונה

.3 בסרטוט שלפניכם מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x)$
ושל פונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$, המוגדרות בתחום $0 \le x \le 1.5\pi$.



א. קבעו איזה מבין הגרפים I–II שבסרטוט מתאר את גרף הפונקציה $f(x)$,
ואיזה מהם מתאר את גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתון: $f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x)$, בתחום $0 \le x \le 1.5\pi$.

ב. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$,
וקבעו את סוגן (תוכלו לקבוע את סוגן באמצעות הסרטוט).

ג. בעבור אילו ערכים של k יש לישר $y = k$ ולגרף הפונקציה $f(x)$ בדיוק שתי נקודות משותפות? נמקו.

ד. חשבו את השטח הכלוא על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה־x.

3. א. גרף I מתאר את הפונקציה $f(x)$
גרף II מתאר את הנגזרת $f'(x)$
בשיעורי ה-x של נקודות הקיצון בגרף I, ניתן לראות התאפסות בגרף II
ותחומי החיוביות והשליליות של גרף II תואמים את תחומי העלייה
והירידה בגרף I

$f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) - \cos(x)$ $\qquad 0 \le x \le 1.5\pi$

ב. נקודות הקיצון בקצה תחום ההגדרה:

$f(0) = \frac{1}{2}\cos(0) - \cos(0) = -\frac{1}{2} \rightarrow (0, -\frac{1}{2})$

$f(1.5\pi) = \frac{1}{2}\cos(3\pi) - \cos(1.5\pi) = -\frac{1}{2} \rightarrow (1.5\pi, -\frac{1}{2})$

המשך בעמוד הבא

המשך פתרון שאלה 3 סעיף ב.

נקודות קיצון פנימיות - נגזור את הפונקציה ונשווה לאפס:

$$f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x)$$

$$0 = -\sin(2x) + \sin(x)$$ / פרוק זווית כפולה.

$$0 = -2\sin x\cos x + \sin x$$

$$0 = \sin x \cdot (1 - 2\cos x)$$

נשווה כל מוכפל לאפס:

$$\sin x = 0$$

$$x = 0 + \pi k$$

הפתרונות שבתחום:

$$x = 0$$

$$x = \pi$$

$$1 - 2\cos x = 0$$

$$1 = 2\cos x$$

$$\frac{1}{2} = \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \qquad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

הפתרונות שבתחום:

$$x = \frac{\pi}{3}$$

נציב בפונקציה לקבלת שיעורי הy, ונרכז את כל נק' הקיצון יחד:

$$f(\pi) = 1.5$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0.75$$

$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ max

$\left(\frac{\pi}{3}, -0.75\right)$ min

$(\pi, 1.5)$ max

$\left(1.5\pi, -\frac{1}{2}\right)$ min

כאשר קבענו את סוג הקיצון בעזרת הסרטוט וסדר הופעתן בו משמאל לימין.

המשך פתרון שאלה 3.

ג. לפי נקודות הקיצון שמצאנו בסעיף ב', ולפי איור הגרף

לישר $y=k$ יש בדיוק שתי נקודות משותפות עם גרף הפונקציה

בתחומים הבאים:

$$-\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$$

או

$$-\frac{3}{4}<k<-\frac{1}{2}$$

ניתן לראות כי לישרים $y=1.5$ ו- $y=-\frac{3}{4}$ יש בדיוק נקודת חיתוך אחת

ואילו לישר $y=-\frac{1}{2}$ יש בדיוק שלוש נקודות חיתוך.

כלומר בכל התחום $-\frac{1}{2}<k<\frac{3}{2}$

2 נקודות חיתוך, כיוון שהישר $y=k$ יפגוש את הפונקציה פעם אחת כשהיא

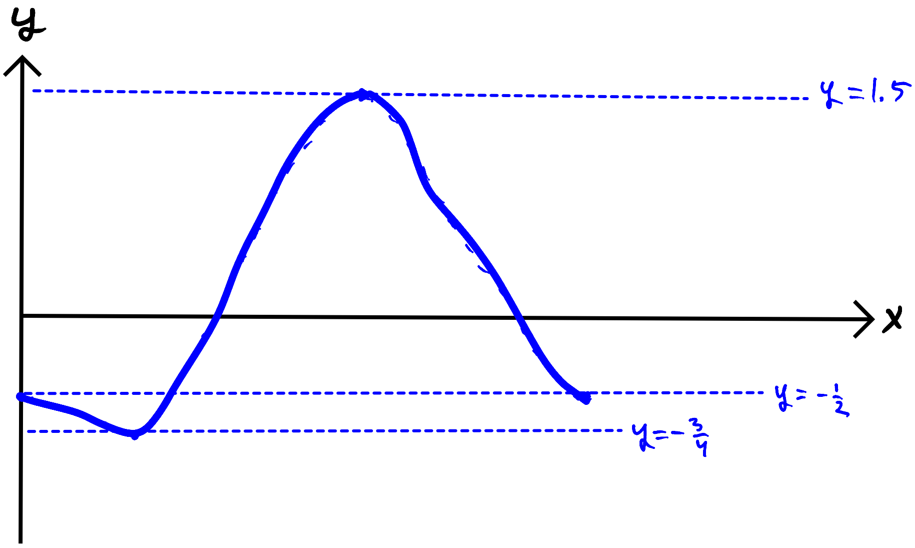
עולה לנקודת המקסימום ופעם נוספת כאשר היא יורדת ממנה.

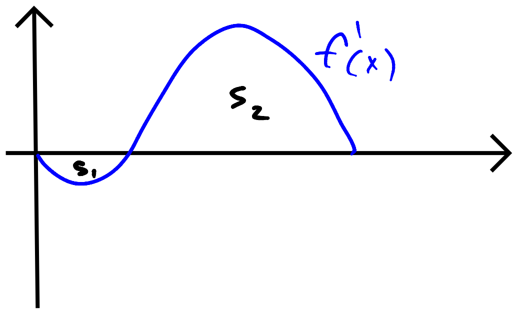
ובתחום $-\frac{3}{4}<k<-\frac{1}{2}$ הישר יפגוש את הפונקציה פעם אחת

כשהיא יורדת לנקודת המינימום ופעם אחת כשהיא עולה

ממנה.

ראו איור מצורף:





המשך פתרון שאלה 3.

3. נחשב את השטח באמצעות אינטגרלים:

$$S_1=\int_0^{\pi/3}\left(0-f'(x)\right)dx=\Big[-f(x)\Big]_0^{\pi/3}=\left(-f\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right)-\left(-f(0)\right)=\left(\tfrac{3}{4}\right)-\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{4}$$ יח"ר

$$S_2=\int_{\pi/3}^{\pi}\left(f'(x)-0\right)dx=\Big[f(x)\Big]_{\pi/3}^{\pi}=\left(f(\pi)\right)-\left(f\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right)=1.5-\left(-\tfrac{3}{4}\right)=\tfrac{9}{4}$$ יח"ר

סה"כ השטח:

$$S=S_1+S_2=\tfrac{9}{4}+\tfrac{1}{4}=2.5$$ יח"ר

4. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-2}$.

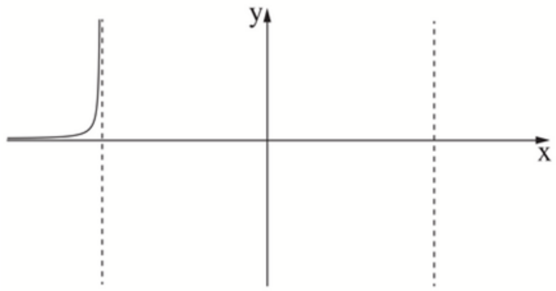
א. **(1)** מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצאו את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה־ x .

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

ג. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. לפניכם סקיצה חלקית של גרף הפונקציה $f(x)$.
העתיקו את הסקיצה החלקית למחברתכם, והשלימו
בה את החלקים החסרים של גרף הפונקציה $f(x)$.



נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)+c$. c הוא פרמטר.

ה. מצאו את שני הערכים האפשריים של c שבעבורם
יש לפונקציה $g(x)$ נקודת קיצון על הישר $y=3$.
נמקו את תשובתכם.

פתרון:

א.1. תחום הגדרת של הפונקציה f: נדרוש: מכנה שונה מאפס:

$x^2-2\neq0$

$x^2\neq2$

$\boxed{x\neq\pm\sqrt{2}}$

2. אסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לציר ה-x: מתחום ההגדרה:
מאפסים את מכנה הפונקציה אך לא את המונה.
ולכן אסימפטוטות מאונכות לציר x של הפונקציה.

$\boxed{x=-\sqrt{2}\ ;\ x=\sqrt{2}}$

ב. נקודות חיתוך גרף הפונקציה עם הצירים:
חיתוך עם ציר x $(y=0)$:

$f(x)=0 \Rightarrow \frac{e^{2x}}{x^2-2}=0 \quad /\cdot(x^2-2)$

$e^{2x}=0$

אין פתרון. שכן $e^{2x}\neq0$ לכל x.

מסקנה: לגרף הפונקציה f אין נקודות חיתוך עם ציר ה-x!

נקודות חיתוך גרף הפונקציה f עם ציר ה-y $(x=0)$:

$$f(0)=\frac{e^{2\cdot 0}}{0^2-2}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\left(0,-\frac{1}{2}\right)}$$

ג. נקודות קיצון של הפונקציה f: נגזור:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot(x^2-2)-e^{2x}\cdot 2x}{(x^2-2)^2}$$

נפשט את הביטוי האלגברי של הנגזרת:

$$f'(x)=\frac{2e^{2x}\cdot(x^2-2-x)}{(x^2-2)^2}=\frac{2e^{2x}\cdot(x+1)(x-2)}{(x^2-2)^2}, \quad x\neq\pm\sqrt{2}$$

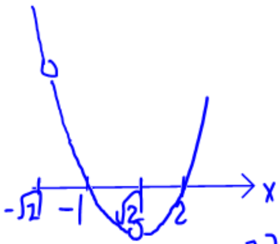
נשווה את הנגזרת לאפס על מנת למצוא נקודות קריטיות ("חשודות כקיצון") אם ישנן:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2e^{2x}\cdot(x+1)(x-2)}{(x^2-2)^2}=0 \Rightarrow 2e^{2x}\cdot(x+1)(x-2)=0$$

$2e^{2x}\neq 0$ לכל x או $x=-1$ או $x=2$

נשים לב כי הביטוי $\frac{2e^{2x}}{(x^2-2)^2}$ המופיע בביטוי האלגברי של הנגזרת

חיובי בכל תחום הגדרת הפונקציה והנגזרת.



לכן סימן הנגזרת כסימן הביטוי $(x+1)(x-2)$ בתחום $x\neq\pm\sqrt{2}$.

סביב האפס $x=-1$ הביטוי הריבועי משנה סימן מחיוביות לשליליות דרך אפס

לכן עבור $x=-1$ f עוברת מעליה לירידה ויש לה שם נקודת קיצון מסוג מקסימום.

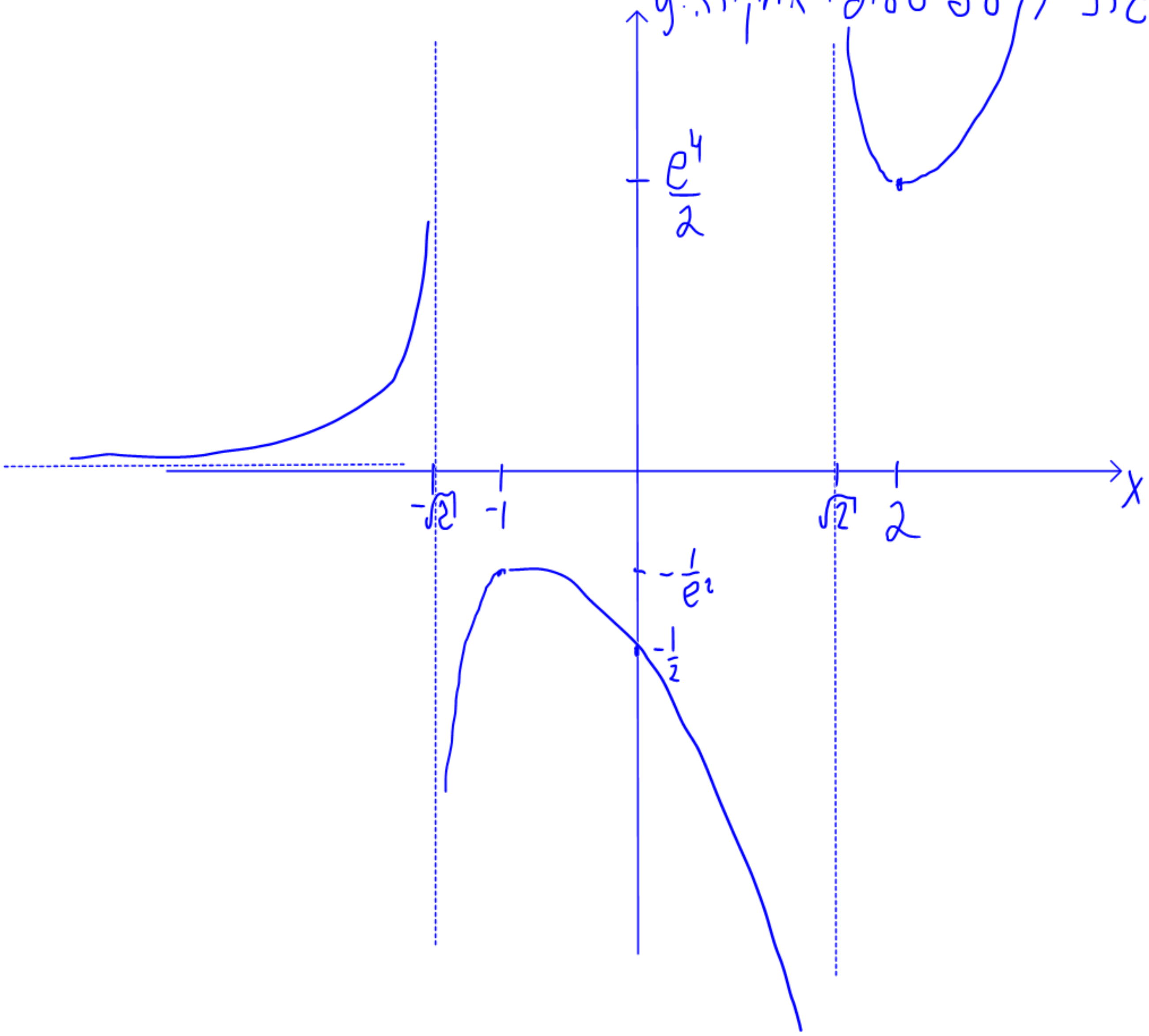
$$f(-1)=\frac{e^{-2}}{1-2}=-\frac{1}{e^2} \Rightarrow \boxed{\left(-1,-\frac{1}{e^2}\right) max}$$

סביב המעבר $x=2$ הביטוי הריבועי משנה סימן משליליות לחיוביות דרך אפס

לכן עבור $x=2$ f עוברת מירידה לעלייה ויש לו שם נקודת קיצון מסוג מינימום.

$$f(2)=\frac{e^4}{4-2}=\frac{e^4}{2} \Rightarrow \boxed{\left(2, \frac{e^4}{2}\right) \min}$$

ג. גרף f עפ"י סעיפי החקירה:



ה. גרף הפונקציה $g(x)=f(x)+c$ מהווה "הזזה "אנכית"/בציר ה-y
של גרף הפונקציה f, ב-c יחידות.

ישנן 2 אפשרויות לפי ערך הקיצון של הפונקציה f:

השקה לישר $y=3$ בנקודת המינימום. נבדוק:

$g(2)=3$

$f(2)+c_1=3$

$\frac{e^4}{2}+c_1=3 \Rightarrow \boxed{c_1=3-\frac{e^4}{2}}$

או

השקה לישר $y=3$ בנקודת המקסימום. נבדוק:

$g(-1)=3$

$f(-1)+c_2=3$

$-\frac{1}{e^2}+c_2=3 \Rightarrow \boxed{c_2=3+\frac{1}{e^2}}$

5. נתונה הפונקציה $f(x) = (\ell nx)^2 - a \cdot \ell nx + 3$. a הוא פרמטר.

אחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x היא $(e^3, 0)$.

א. מצאו את a .

הציבו $a = 4$ בפונקציה $f(x)$, וענו על הסעיפים ב–ו שלפניכם.

ב. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצאו את שיעורי נקודת החיתוך האחרת של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x .

ד. מצאו את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגה.

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $g(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $g'(x)$ מוגדרות באותו תחום שבו מוגדרת הפונקציה $f(x)$.

נתון: $g'(x) = -f(x)$.

ו. קבעו את שיעורי ה־ x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ ואת סוגן. נמקו את קביעותיכם.

5. נציב $x=e^3$ בפונקציה ונשווה לאפס:

$$f(e^3) = 0$$

$$(\ln(e^3))^2 - a \cdot \ln(e^3) + 3 = 0$$

$$9 - 3a + 3 = 0$$

$$12 = 3a$$

$$\boxed{a = 4}$$

$f(x)=(\ln x)^2-4\ln x+3$

המשך פתרון שאלה 5

ב. תחום ההגדרה הוא $0<x$

ג. נציב $y=0$ ונחלץ את שיעורי ה x בנק' החיתוך:

$$0=(\ln x)^2-4\ln x+3$$

נסמן: $\ln x=t$

$$0=t^2-4t+3$$

$$0=(t-3)\cdot(t-1)$$

$t_1=3$ $\qquad$ $t_2=1$

$\ln x=3$ $\qquad$ $\ln x=1$

$x=e^3$ $\qquad$ $x=e$

ולכן נקודת החיתוך הנוספת עם ציר x היא $(e,0)$

המשך בעמוד הבא

המשך שאלה 5.

3. נגזור את הפונקציה:

$$f'(x) = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{4}{x} = \frac{2\ln x - 4}{x}$$

נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את שיעורי ה-x

מנקודות החשודות כקיצון:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2\ln x - 4}{x} = 0 \quad / \text{נכפול במכנה } x \text{ אשר שונה מאפס}$$

$$2\ln x - 4 = 0$$

$$2\ln x = 4$$

$$\ln x = 2$$

$$x = e^2$$

$$f(e^2) = (\ln(e^2))^2 - 4\ln(e^2) + 3 = -1 \qquad (e^2, -1)$$

נבדוק את סוג הקיצון בעזרת הצבת מספרים מהתחומים שמימין ומשמאל לנקודת הקיצון בנגזרת ובדיקת תחומי עלייה וירידה לפי חיוביות ושליליות הנגזרת:

המשך פתרון שאלה 5 סעיף 3:

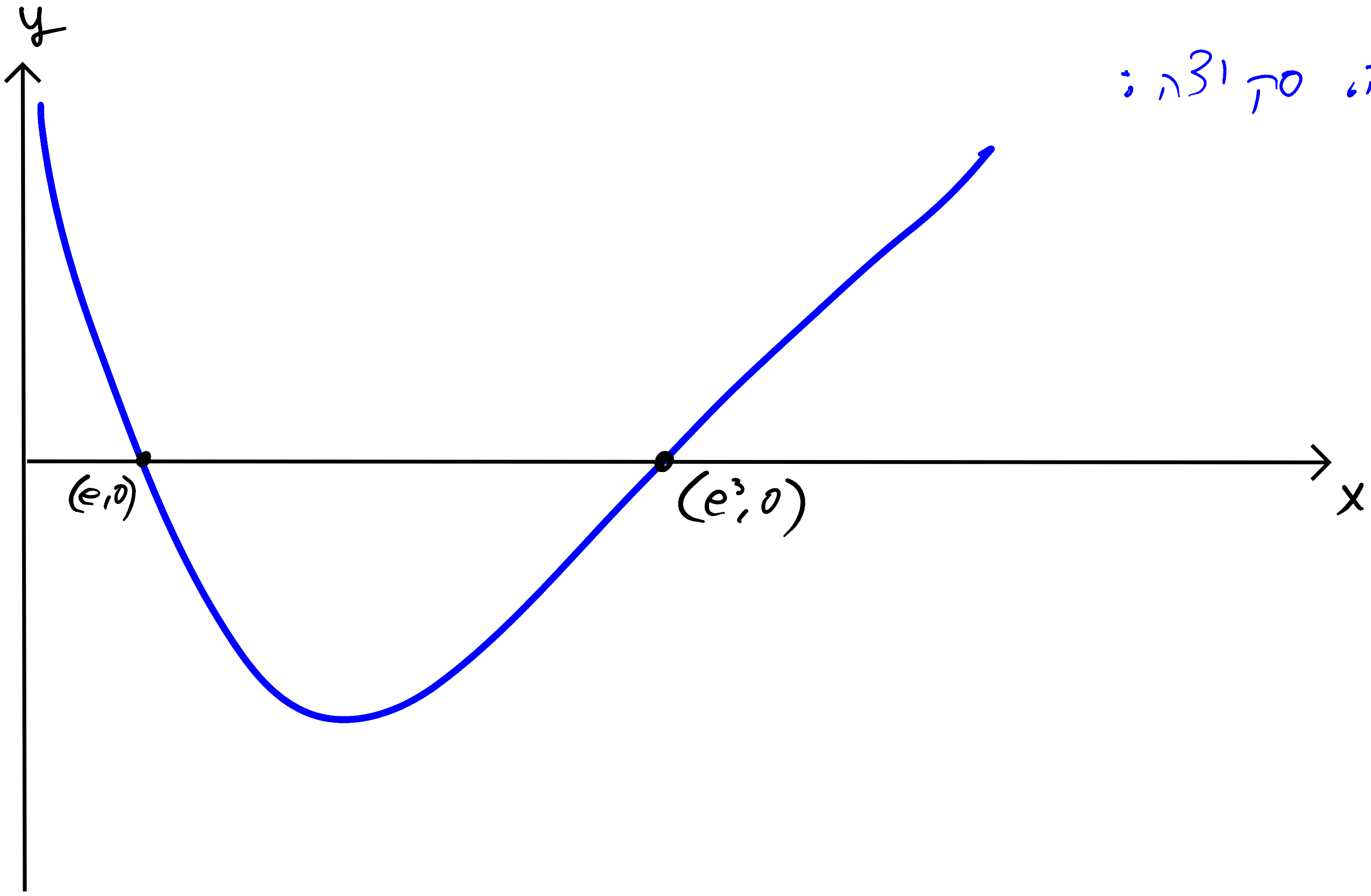
x	0	e	e^2	e^3
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

$f'(e) < 0$

$f'(e^3) > 0$

כלומר, נקודת הקיצון של הפונקציה היא $(e^2, -1)$
והיא נקודת מינימום.

ה. סקיצה:



המשך שאלה 5.

ו. $g'(x) = -f(x)$

לפי ההגדרה הנתונה, התחום בו $f(x)$ חיובי, הנגזרת של $g(x)$ שלילית ולכן $g(x)$ יורדת בתחומים:

$x<e$ או $e^3<x$

בתחום בו $f(x)$ שלילית, הנגזרת של $g(x)$ חיובית ולכן $g(x)$ עולה בתחום:

$e<x<e^3$

ובנקודות בהן $f(x)$ מתאפסת יש נקודות קיצון:

$x=e^3$ $x=e$

נרכז את הנתונים בטבלה:

x		e		e^3	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	min	↗	max	↘

ולכן ב $x=e$ יש ל $g(x)$ נקודת מינימום

ובנקודה $x=e^3$ יש נקודת מקסימום.