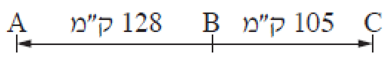
פתרון הבחינה
במתמטיקה

חורף תשפ"ג, 2023, שאלון: 35481

מוגש ע"י צוות מורי המתמטיקה של "יואל גבע"

1. היישובים A, B ו־C ממוקמים על כביש ישר, כמתואר בסרטוט שלפניכם.



המרחק בין היישוב B ליישוב C הוא 105 ק"מ, והמרחק בין היישוב B ליישוב A הוא 128 ק"מ.

משאית ומכונית יצאו באותו הזמן מן היישוב B.

המכונית נסעה במהירות קבועה לכיוון היישוב C, והמשאית נסעה במהירות קבועה לכיוון היישוב A.

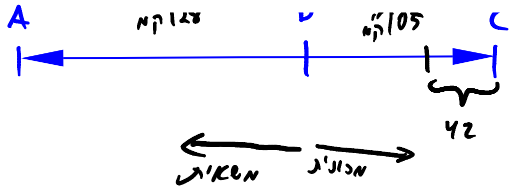
מהירות המכונית הייתה גבוהה ב־20 קמ"ש ממהירות המשאית.

המכונית הגיעה ליישוב C, התעכבה ביישוב רבע שעה, ואז נסעה בחזרה ליישוב B באותה המהירות שבה נסעה קודם.

כאשר המשאית הגיעה ליישוב A, המכונית הייתה בדרכה חזרה ליישוב B ובמרחק 42 ק"מ מן היישוב C.

א. מצאו את מהירות המכונית ואת מהירות המשאית.

ב. באיזה מרחק מן היישוב A הייתה המשאית כאשר המכונית הגיעה ליישוב C?



1. א. נסמן את מהירות המשאית $= X$

כיוון שמהירות המכונית גבוהה ב־20 קמ"ש

נוכל לבטא את מהירות המכונית כ: $X+20$

נעזר בקשר: זמן × מהירות = דרך

כדי לבטא את זמני המקטעים השונים באמצעות X:

	זמן	מהירות	דרך
מכונית $B \to C$	$\frac{105}{X+20}$	$X+20$	105
מכונית מתעכבת בנק' C	$\frac{1}{4}$	0	0
מכונית נוסעת חזרה לכיוון B	$\frac{42}{X+20}$	$X+20$	42
משאית $B \to A$	$\frac{128}{X}$	X	128

הסבר טבלה בעמוד הבא:

המשך שאלה 1.

הסבר לטבלה: השתמשנו בקשר $\text{זמן} = \frac{\text{דרך}}{\text{מהירות}}$ כדי לבטא את משך הזמן שארך כל מקטע.

המרחק בין B ל-C הוא 105 ק"מ וכאשר נחלק אותו בביטוי למהירות המכונית (x+20) נקבל שזמן ההגעה לנקודה C הוא $\frac{105}{x+20}$.

כאשר המכונית עצרה לרבע שעה מהירותה התאפסה ולכן לא התקדמה כלל בזמן זה.

ביטאנו את משך הזמן שלקח למכונית לחזור 42 ק"מ באותה המהירות: $\frac{42}{x+20}$

לפי הנתונים ברגע שהמכונית עברה 42 ק"מ בדרך חזור לנקודה B, הגיעה המשאית לנק' A

ולכן ביטאנו את סך משך הזמן שארכה הדרך של המשאית מנק' B לנק' A: $\frac{128}{X}$

כיוון שאורך הדרך הוא 128 ק"מ וביטאנו את מהירות המשאית כ-X.

המשך פתרון
שאלה 1

	זמן	מהירות	דרך
מכונית $B \to C$	$\frac{105}{x+20}$	$x+20$	105
מכונית מתעכבת בנק' C	$\frac{1}{4}$	0	0
מכונית נוסעת חזרה לכיוון B	$\frac{42}{x+20}$	$x+20$	42
משאית $B \to A$	$\frac{128}{x}$	x	128

נבנה משוואת זמנים:

נכפל במ״מ $4x(x+20)$

$$\overset{4x}{\frac{105}{x+20}} + \overset{x(x+20)}{\frac{1}{4}} + \overset{4x}{\frac{42}{x+20}} = \overset{4(x+20)}{\frac{128}{x}}$$

$$105\cdot 4x + x(x+20) + 42\cdot 4x = 128\cdot 4(x+20)$$

$$420x + x^2 + 20x + 168x = 512x + 10240$$

$$x^2 + 96x - 10240 = 0$$

נפתור עם נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-96 \pm \sqrt{96^2 - 4\cdot 1\cdot(-10240)}}{2\cdot 1}$$

$$x_1 = 64$$

$$x_2 = -160$$

כיוון ש x מבטא את גודל המהירות של המשאית בכיוון התנועה שלה, נבחר בפתרון החיובי.

מהירות המשאית היא 64 קמ״ש

ולכן מהירות המכונית היא 84 קמ״ש

המשך פתרון שאלה 1.

ב. נחשב את משך הזמן שלקח למכונית להגיע לישוב C, ונחשב את המרחק שעברה המשאית בזמן זה. לבסוף נחסר מרחק זה ממסך 128 הק"מ שבין B ל-A:

נציב $x=64$ בביטוי לזמן מ B ל-C שרשמנו בסעיף הקודם:

$$\frac{105}{x+20} = \frac{105}{84} = 1.25$$

נבדוק מה המרחק שעברה המשאית בזמן זה:

דרך = מהירות x זמן

$$1.25 \cdot x = 1.25 \cdot 64 = 80$$

כלומר המשאית עברה 80 ק"מ

נחשב את מרחקה מנקודה A:

$$128 - 80 = 48$$

כלומר מרחקה היה 48 ק"מ.

.2 בסרטוט שלפניכם מתואר מעגל שמרכזו, M, נמצא ברביע הרביעי.

המעגל משיק לציר ה־ x בנקודה $A(12, 0)$.

נתון: רדיוס המעגל הוא 10 .

א. **(1)** מצאו את שיעורי מרכז המעגל, M .

(2) רשמו את משוואת המעגל.

המעגל חותך את הישר $x = 4$ בנקודות B ו־ C, כמתואר בסרטוט.

ב. מצאו את שיעורי הנקודות B ו־ C .

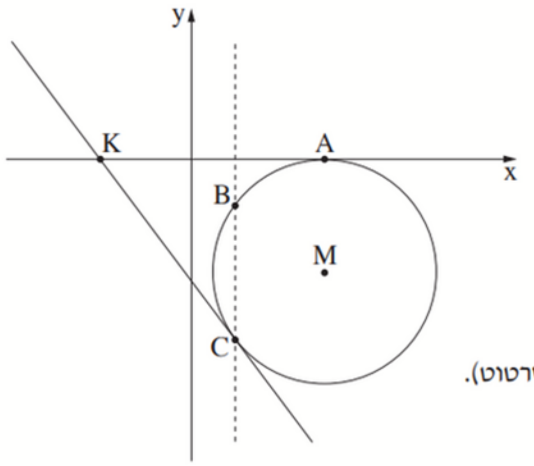
הישר המשיק למעגל בנקודה C חותך את ציר ה־ x בנקודה K (ראו סרטוט).

ג. מצאו את שיעורי הנקודה K .

ד. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה K והוא משיק לישר $x = 4$.

ה. **(1)** מצאו את אורך KM .

(2) האם המעגל שאת משוואתו מצאתם בסעיף ד, משיק למעגל המתואר בסרטוט (שמרכזו M)? נמקו את תשובתכם.



פתרון:

א. (1) המעגל משיק לציר x ולכן $x_M = x_A = 12$

$|y_M| = R \rightarrow y_M = -10$ או $y_M = 10$

הנקודה M ברביע הרביעי, לכן $y_M = -10$

מכאן: $\boxed{M(12, -10)}$

(2) נרשום את משוואת המעגל:

$$\boxed{(x-12)^2+(y+10)^2=100}$$

ב. נציב $x=4$ במשוואת המעגל:

$$(x-12)^2+(y+10)^2=100$$

$$64 + y^2 + 20y + 100 = 100$$

$$y^2 + 20y + 64 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-20 \mp \sqrt{20^2 - 4 \cdot 64}}{2} = \frac{-20 \mp 12}{2} \quad \begin{cases} -4 \\ -16 \end{cases}$$

על פי השרטוט הנתון: $\boxed{B(4,-4)\ ,\ C(4,-16)}$

ג. נמצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה C.

שיפוע הרדיוס לנקודה C: $m_{CM} = \frac{-10+16}{12-4}$

$$m_{CM} = \frac{3}{4}$$

המשיק מאונך לרדיוס אל נקודת ההשקה:

$$m_{\text{משיק}} \cdot \frac{3}{4} = -1 \longrightarrow m_{\text{משיק}} = -\frac{4}{3}$$

נציב את השיפוע ונקודה C בנוסחה למציאת משוואת ישר:

$$y - (-16) = -\frac{4}{3}(x - 4)$$

$$\Downarrow$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{32}{3}$$

נמצא חיתוך עם ציר x: $0 = -\frac{4}{3}x - \frac{32}{3}$

מכפס שמנק 3:

$$0=-4x-32$$
$$4x=-32\ /:4$$
$$x=-8$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{K(-8,0)}$$

3. המעגל משיק לישר $x=4$, לכן הרדיוס של המעגל שמונח על ציר x מאונך לישר $x=4$.
אורך הרדיוס הוא $4-(-8)=12$
נרשום את משוואת המעגל:

$$\boxed{(x+8)^2+y^2=144}$$

ה. (1) נשתמש בנוסחה למרחק בין נקודות:

$$d_{MK}=\sqrt{(12-(-8))^2+(-10-0)^2}$$
$$d_{MK}=\sqrt{400+100}=\sqrt{500}=22.36$$

אורך הקטע MK הוא $\boxed{\sqrt{500}=22.36}$

(2) סכום הרדיוסים של המעגלים הוא

$$10+12=22$$
$$\Downarrow$$

לפי סעיף ה' וד) אורך הצלע KM
הוא גדול מ- 22, כלומר גדול
מסכום הרדיוסים, לכן המעגלים
לא משיקים.

3. בקופה יש 36 מטבעות: 18 מטבעות של שני שקלים,
12 מטבעות של חמישה שקלים,
ו־ 6 מטבעות של עשרה שקלים.

הוציאו מן הקופה באקראי שני מטבעות ללא החזרה.

א. מהי ההסתברות ששני המטבעות שהוציאו היו זהים?

ב. ידוע ששני המטבעות שהוציאו היו זהים.
מהי ההסתברות שהסכום של שני המטבעות שהוציאו היה גבוה מ־ 5 שקלים?

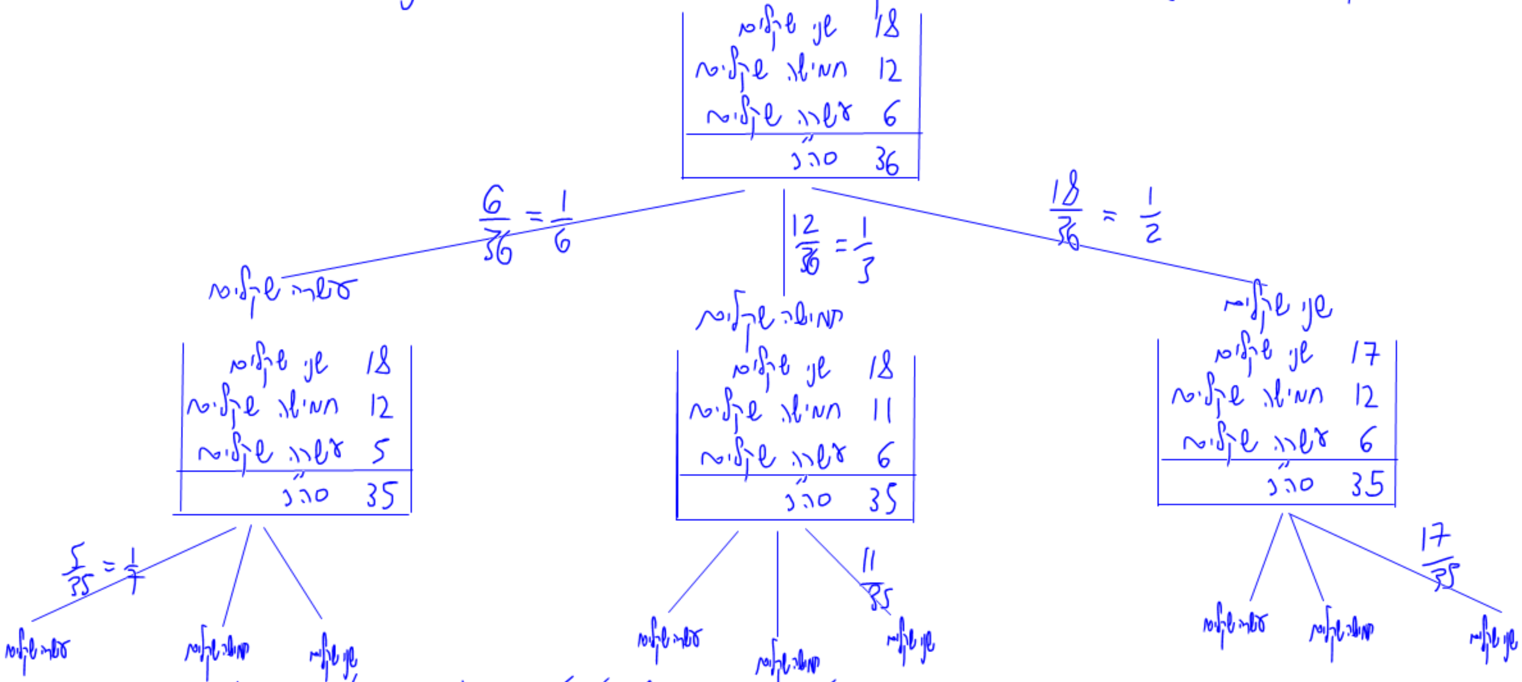
החזירו את כל המטבעות לקופה והוסיפו x מטבעות של עשרה שקלים לקופה.
נתון: לאחר ההוספה, ההסתברות להוציא מן הקופה באקראי ללא החזרה שני מטבעות של חמישה שקלים היא $\frac{1}{15}$.

ג. מצאו את x.

ד. האם ההסתברות להוציא מן הקופה באקראי (ללא החזרה) שני מטבעות זהים גדלה לאחר ההוספה, קטנה או נשארה ללא שינוי? נמקו.

פתרון:

א. ניתן לפרוש בדיאגרמת עץ מתאימה רק את ההסתברויות של המסלולים הרלוונטיים:



P(שני מטבעות שהוציאו היו זהים) = P(שני מטבעות של שני שקלים) + P(שני מטבעות של חמישה שקלים) + P(שני מטבעות של עשרה שקלים) $=\frac{1}{2}\cdot\frac{17}{35}+\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{35}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}=\frac{13}{35}$

ההסתברות ששני המטבעות שהוציאו היו זהים היא: $\boxed{\frac{13}{35}}$.

ב. מדובר בהסתברות מותנית.

נוסחה להסתברות מותנית:

$$P\left(\text{סכום שני המטבעות שהוציא גדול מ-5} \;\middle|\; \text{שני המטבעות שהוציא היו צהובים}\right) = \frac{P\left(\text{סכום שני המטבעות שהוציא גדול מ-5 וגם שני המטבעות שהוציא היו צהובים}\right)}{P\left(\text{שני המטבעות שהוציא היו צהובים}\right)} = \frac{P\left(\text{הוציא שני מטבעות של 5 או הוציא שני מטבעות של 10}\right)}{P\left(\text{שני המטבעות שהוציא היו צהובים}\right)} =$$

$$= \frac{P\left(\text{שני מטבעות של 5}\right) + P\left(\text{שני מטבעות של 10}\right)}{P\left(\text{שני המטבעות שהוציא היו צהובים}\right)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{11}{35} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}}{\frac{13}{35}} = \frac{9}{26}$$

נלקח מהסעיף הקודם

ההסתברות שסכום שני המטבעות שהוציא היה גבוה מ-5 בהינתן ששני המטבעות שהוציא היו צהובים (רק לא פעמיים שקל - הסכום יהיה $4<5$): $\boxed{\frac{9}{26}}$.

ג. נשרטט שוב אך רק את המסלול הרלוונטי:

18	שני שקלים
12	חמישה שקלים
$6+x$	עשרה שקלים
$36+x$	סה"כ

$\frac{12}{36+x}$ → חמישה שקלים

18	שני שקלים
11	חמישה שקלים
$6+x$	עשרה שקלים
$35+x$	סה"כ

$\frac{11}{35+x}$ → חמישה שקלים

ההסתברות:

$$P\left(\text{שני מטבעות של 5 שקלים}\right) = \frac{12}{36+x}\cdot\frac{11}{35+x}$$

נשווה לנתון: $\frac{1}{15}$

$$\frac{12}{36+x}\cdot\frac{11}{35+x} = \frac{1}{15}$$

נפתור...

$$\frac{12}{36+x}\cdot\frac{11}{35+x}=\frac{1}{15} \quad / \cdot 15(36+x)(35+x)\neq 0$$

(x מס' טבעי)

$$15\cdot 12\cdot 11=(36+x)(35+x)$$

$$1980=1260+71x+x^2 \quad / -1980$$

$$x^2+71x-720=0$$

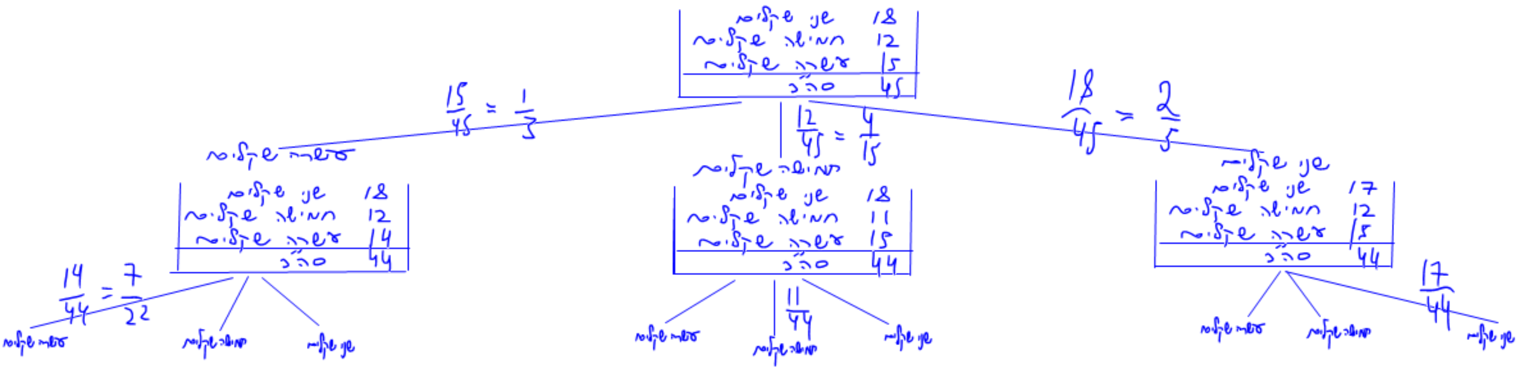
$$(x+80)(x-9)=0$$

$$\cancel{x_1=-80} \quad \text{או} \quad x_2=9 \checkmark$$

נפסל כי x טבעי

הוספנו לכד $\boxed{9}$ מטבעות של 10 שקלים.

כעת ישנם $6+9=15$ מטבעות של 10 שקלים בקופה.
ובסה"כ $36+9=45$ מטבעות.



נחשב את ההסתברות של המאורע המוצג לאחר השינוי:

$$P\left(\text{שני מטבעות שהוצאו היו זהים}\right)=P\left(\text{שני מטבעות של 2 שקלים}\right)+P\left(\text{שני מטבעות של 5 שקלים}\right)+P\left(\text{שני מטבעות של 10 שקלים}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{17}{44}+\frac{4}{15}\cdot\frac{11}{44}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{22}=\frac{18}{55}$$

נשווה עם ההסתברות שהתקבלה בסעיף א': $\frac{13}{35}$:

מתקיים: $\frac{18}{55} < \frac{13}{35}$

לכן: ההסתברות להוציא מהקופסה באקראי (ללא החזרה) שני מטבעות צהובים לאחר ההוספה קטנה.

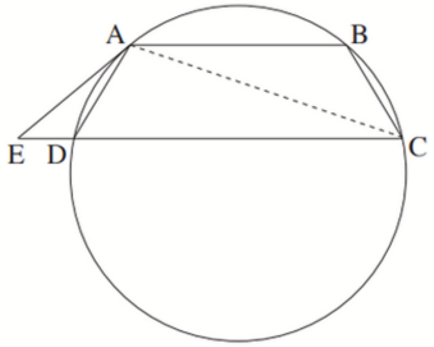
4. המרובע ABCD הוא טרפז החסום במעגל. $AB \parallel DC$.

המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה E (ראו סרטוט).

א. הוכיחו: ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. הוכיחו: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADE$.

ג. הוכיחו: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.



נתון: שטח המשולש ABC גדול פי 4 משטח המשולש ADE,

$BC + ED = 15$.

ד. **(1)** מצאו את אורך הצלע ED.

(2) מצאו את אורך הצלע AB.

פתרון:

א.

המספר	טענה	נימוק
1	ABCD טרפז חסום במעגל	נתון
2	AE משיק למעגל	נתון
3	$AB \parallel CD$	נתון
4	$\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAB$	זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים שוות
5	$AD = BC$	במעגל, מול זוויות היקפיות שוות נשענים מיתרים שווים

המספר	טענה	נימוק
6	ABCD טרפז שווה שוקיים	לפי 5. מ.ש.ל א'
7	$\sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = 180^\circ$	לפי 1. במרובע חסום במעגל סכום זוויות נגדיות 180°
8	$\sphericalangle ADE + \sphericalangle ADC = 180^\circ$	זוויות צמודות משלימות 180°
9	$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADE$	לפי 7, 8. כלל המעבר. מ.ש.ל ב'
10	$\sphericalangle DAE = \sphericalangle ACD$	לפי 2. זווית בין משיק למיתר
11	$\triangle ABC \sim \triangle ADE$	לפי 9, 10. משפט דמיון ז.ז. מ.ש.ל ג'
12	$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = 4$	נתון

המספר	טענה	נימוק
13	$BC+ED=15$	נתון
14	$\left(\frac{BC}{ED}\right)^2=\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}$ $\Downarrow$	לפי 11. יחס השטחים של משולשים דומים שווה לריבוע יחס הצלעות המתאימות
15	$\frac{BC}{ED}=2$	לפי 12, 14
16	$ED=5$, $BC=10$	לפי 13, 15. חישוב אלגברי. מ.ש.ל. 3. (1)
17	$\frac{BC}{ED}=\frac{AB}{AD}$	לפי 11. יחס הצלעות המתאימות במשולשים דומים שווה.
18	$\frac{10}{5}=\frac{AB}{10}$ $\Downarrow$	לפי 5, 16, 17
19	$AB=20$	מ.ש.ל. 3. (2)
		

5. בסרטוט שלפניכם מתואר משולש ABC.

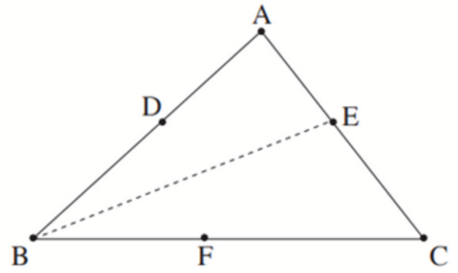
נתון: $BC = 1.5AC$,

$\sphericalangle ACB = 51^{\circ}$,

שטח המשולש ABC הוא 21.

א. מצאו את אורך הצלע AC.

ב. מצאו את גודל הזווית ABC.



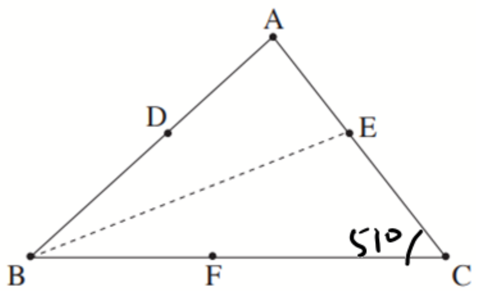
נתון: הנקודה E נמצאת על הצלע AC כך ש- BE חוצה את הזווית ABC.

ג. מצאו את אורך BE.

נתון: הנקודות D ו- F נמצאות על הצלעות AB ו- BC בהתאמה כך שהמרובע $BDEF$ הוא מעוין.

ד. מצאו את אורך צלע המעוין $BDEF$.

פתרון



א. נשתמש בנוסחה לשטח משולש:

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin\sphericalangle C}{2}$$

נציב את הנתונים:

$$21 = \frac{AC \cdot 1.5AC \cdot \sin 51^{\circ}}{2}$$

נקבל:

$$AC^2 = \frac{28}{\sin 51^{\circ}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{AC = 6}$$

ב. כעת: $BC=1.5\cdot AC=9$

נשתמש במשפט הקוסינוס במשולש ABC:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos\angle C$$

$$AB^2=6^2+9^2-2\cdot 9\cdot 6\cdot\cos 51^\circ$$

$$AB^2=49 \quad /\sqrt{\ }$$

$$AB=7$$

כעת נשתמש במשפט הסינוס במשולש ABC:

$$\frac{AB}{\sin\angle C}=\frac{AC}{\sin\angle B}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{7}{\sin 51^\circ}=\frac{6}{\sin\angle B}$$

$$\Downarrow$$

$$\sin\angle B=\frac{6\cdot\sin 51^\circ}{7}=0.666$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\angle ABC=41.76}$$

ג. $\angle CBE=\frac{41.76^\circ}{2}=20.88^\circ$

נתבונן במשולש BCG:

$$\measuredangle BEC = 180^\circ - 51^\circ - 20.88^\circ = 108.12^\circ$$

נשתמש במשפט הסינוסים:

$$\frac{BE}{\sin \measuredangle C} = \frac{BC}{\sin \measuredangle E} \Rightarrow \frac{BE}{\sin 51^\circ} = \frac{9}{\sin 108.12^\circ}$$

$$\boxed{BE = 7.36}$$

3. נתבונן במשולש BEF:

$$\measuredangle FEB = \measuredangle FBE = 20.88^\circ$$

$$\measuredangle BFE = 180^\circ - 2 \cdot 20.88^\circ = 138.24^\circ$$

נשתמש במשפט הסינוסים:

$$\frac{BE}{\sin \measuredangle BFE} = \frac{EF}{\sin \measuredangle EBF}$$

$\Downarrow$

$$\frac{7.36}{\sin 138.24^\circ} = \frac{EF}{\sin 20.88^\circ}$$

$\Downarrow$

$$EF = 3.94$$

$\boxed{\text{אורך צלע המעוין } 3.94}$

6. נתונה הפונקצייה: $f(x) = \frac{4x}{x^2+4} + a$. a הוא פרמטר.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקצייה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקצייה $f(x)$, וקבעו את סוגן (אם צריך, הביעו באמצעות a).

נתון כי נקודת המינימום של הפונקצייה $f(x)$ נמצאת על ציר ה־ x .

ג. מצאו את a .

הציבו בפונקצייה $f(x)$ את a שמצאתם בסעיף **ג**, וענו על סעיפים **ד–ו**.

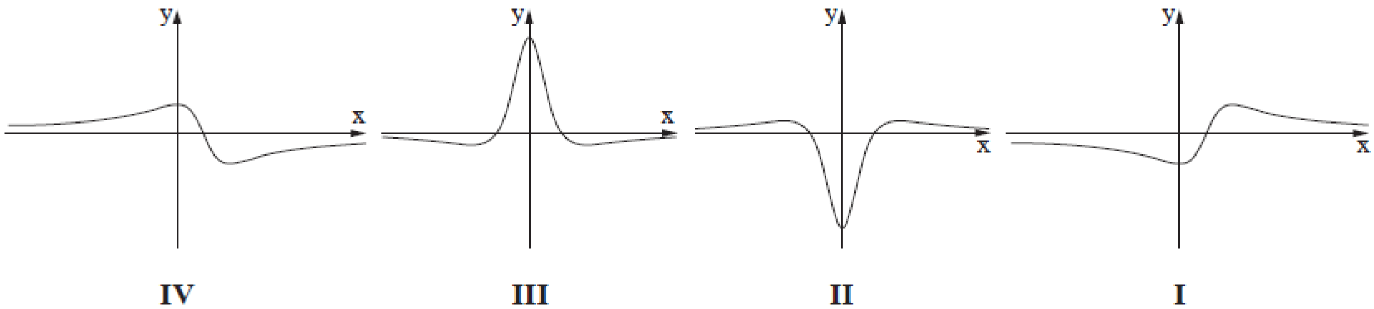
ד. מצאו את משוואות האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקצייה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקצייה $f(x)$.

נתונה הפונקצייה $g(x) = 3 \cdot f(x)$.

ו. **(1)** אחד מן הגרפים I–IV שבסוף השאלה מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$.
קבעו איזה מהם, ונמקו את קביעתכם.

(2) מצאו את השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$, על ידי הישר $x = 1$ ועל ידי הצירים.



6. $f(x)=\frac{4x}{x^2+4}+a$

א. נבדוק אילו ערכים של x מאפסים את המכנה:

$x^2+4=0$
$x^2=-4$
אין פתרון

כלומר תחום ההגדרה של הפונקציה הוא כל x.

ב. נגזור את הפונקציה:

$$f'(x)=\frac{4(x^2+4)-2x\cdot 4x}{(x^2+4)^2}=\frac{4x^2+16-8x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2}$$

נשווה את הנגזרת לאפס:

$f'(x)=0$

$0=\frac{16-4x^2}{(x^2+4)^2}$ / המכנה שונה מאפס ולכן נכפול בו

$0=16-4x^2$ / $+4x^2$

$4x^2=16$ / $\div 4$

$x^2=4$ / $\sqrt{\ }$

$x_1=2$ $x_2=-2$

נציב זאת בפונקציה לקבלת שיעורי ה-y בנקודות הקיצון:

$f(-2)=\frac{4\cdot(-2)}{(-2)^2+4}+a=a-1$ $(-2,a-1)$

$f(2)=\frac{4\cdot 2}{2^2+4}+a=a+1$ $(2,a+1)$

המשך פתרון שאלה 6 סעיף ב'

נבדוק את סוג הקיצון בעזרת הצבה בנגזרת ובדיקת התחומים בהן היא חיובית/שלילית

נרכז את התוצאות בטבלה:

x	-3	-2	0	2	3
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	min	↗	Max	↘

כלומר נקודת המקסימום היא: $(2,a+1)$

ונקודת המינימום היא: $(-2,a-1)$

ג. נתון כי נקודת המינימום נמצאת על ציר ה-x. מכאן נסיק כי שיעור ה-y בנק' המינימום היא אפס. נשווה את שיעור ה-y בנק' המינימום לאפס:

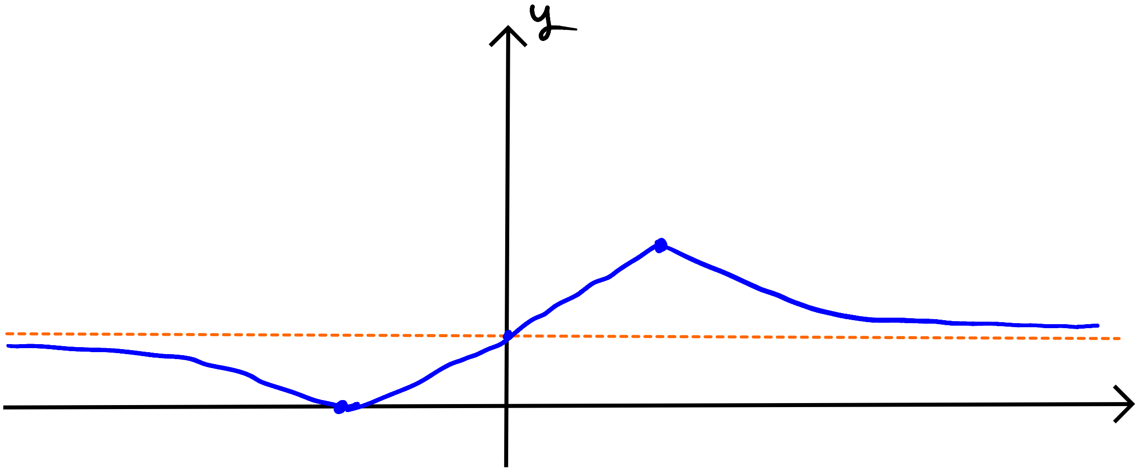
$$a-1=0$$

כלומר: $a=1$

נרשום מחדש את הפונקציה

$$f(x)=\frac{4x}{x^2+4}+1$$

3. לפונקציה אין אסימפטוטה אנכית, כיוון שאין x אשר מאפס את המכנה.
לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית: בישר: $y=1$ כיוון שהחזקה הגדולה של x נמצאת במכנה השבר, ערך השבר ישאף לאפס כאשר x ישאף ל $\pm\infty$.



המשך פתרון שאלה 6

1. (1)

$$g(x)=3\cdot f(x)$$

אם נגזור את $g(x)$:

$$g'(x)=3\cdot f'(x)$$

נראה שנגזרת ה שווה לנגזרת של $f(x)$ כפול קבוע חיובי.

מכאן נסיק שאותם שיעורי x המאפסים את $f'(x)$ מאפסים גם את $g'(x)$, ושלשתי הנגזרות תחומי חיוביות ושליליות זהים.

נבחר בגרף III כיוון שהוא מציג 2 נק' בהן הנגזרת מתאפסת: אחת בעלת שיעור x חיובי והשנייה בעלת שיעור x שלילי, ורק בינהן הנגזרת חיובית, בהתאם לתחומי העלייה והירידה שמצאנו בטבלה בסעיף ב

(2) נחשב בעזרת אינטגרל:

$$S=\int_0^1 g'(x)\,dx=\left[g(x)\right]_0^1=\left[3f(x)\right]_0^1=3\left(f(1)-f(0)\right)=3\left(\frac{4}{1^2+4}+1-(0+1)\right)=\frac{12}{5}=2.4$$ יח"ר

7. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{4x + 20}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצאו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ג. מצאו את שיעורי כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבעו את סוגן.

ד. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + c$. c הוא פרמטר.

נתון כי הישר $y = 12$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$.

ה. מצאו את c (ציינו את שתי האפשרויות).

7. $$f(x)=x^2\cdot\sqrt{4x+20}$$

א. הביטוי שנמצא תחת השורש לא יכול להיות שלילי, ולכן תחום ההגדרה הוא:

$$4x+20\ge 0$$
$$4x\ge -20$$
$$x\ge -5$$

ב. לנק' החיתוך עם ציר y נציב $x=0$:

$$f(0)=0^2\cdot\sqrt{0+20}=0$$

ומכאן נקבל $(0,0)$

לנק' החיתוך עם ציר ה-x נציב $y=0$

$$f(x)=0$$

$$0=x^2\cdot\sqrt{4x+20}$$

כאשר מכפלה שווה לאפס נוכל להשוות כל אחד מהמוכפלים לאפס:

$$x^2=0$$
$$x=0$$

זהו פתרון שכבר מצאנו...

$$\sqrt{4x+20}=0 \quad /(\ )^2$$
$$4x+20=0$$
$$4x=-20$$
$$\boxed{x=-5}$$
$$(-5,0)$$

המשך בעמוד הבא:

7. ג. נגזור את הפונקציה:

$$f'(x) = 2x\cdot\sqrt{4x+20} + x^2\cdot\frac{4}{2\sqrt{4x+20}} = 2x\cdot\sqrt{4x+20} + \frac{2x^2}{\sqrt{4x+20}}$$

נשים לב שתחום ההגדרה של הנגזרת הוא $-5<x$

נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל את שיעורי ה-x בנק' החשודות כנקודות קיצון:

$$f'(x)=0$$

$$2x\cdot\sqrt{4x+20} + \frac{2x^2}{\sqrt{4x+20}} = 0 \quad / \cdot\sqrt{4x+20} \neq 0$$

כפל במ״מ

$$2x\left(\sqrt{4x+20}\right)^2 + 2x^2 = 0$$

$$2x(4x+20) + 2x^2 = 0$$

$$2x(4x+20+x) = 0$$

$$2x(5x+20) = 0$$

נוכל להשוות כל מוכפל לאפס:

$$2x = 0 \qquad 5x+20=0$$
$$x = 0 \qquad 5x=-20$$
$$x=-4$$

נציב נקודות בחזרה בפונקציה לקבלת שיעורי ה-y בנק' החיתוך:

$$f(0) = 0 \longrightarrow (0,0)$$

$$f(-4) = (-4)^2\cdot\sqrt{4\cdot(-4)+20} = 32 \longrightarrow (-4,32)$$

המשך פתרון שאלה 7 סעיף ג:

נקודת הקיצון בקצה תחום ההגדרה: $f(-5)=0 \to (-5,0)$

נבדוק את סוג הקיצון בעזרת הצבה בנגזרת ובדיקת התחומים בהן היא חיובית/שלילית

נרכז את התוצאות בטבלה:

x	-5	-4.5	-4	-1	0	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

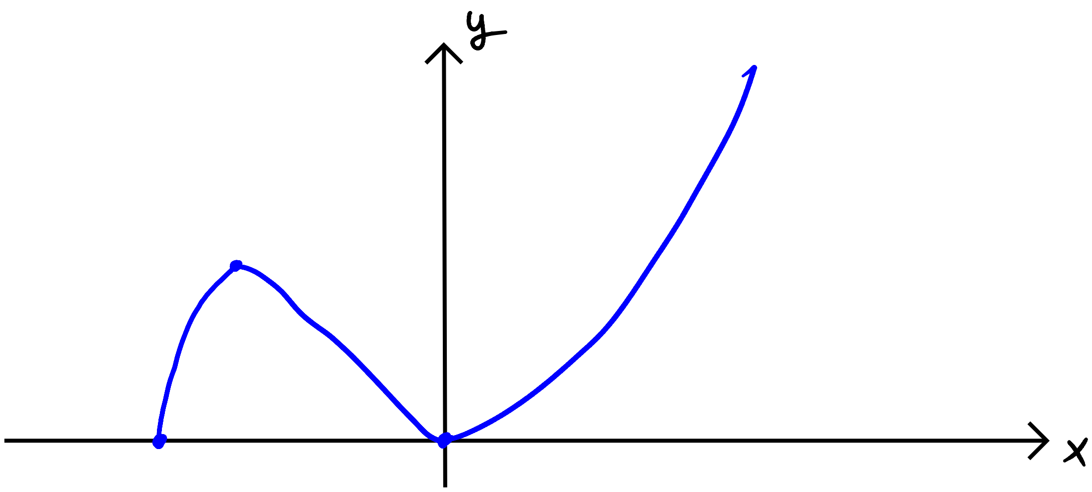
נקודות הקיצון הן:

$(-5,0)$ מינימום בקצה תחום ההגדרה

$(-4,32)$ מקסימום פנימית

$(0,0)$ מינימום פנימית

3. סקיצה של גרף הפונקציה:



המשך שאלה 7

ה. $g(x)=f(x)+C$

הישר $y=12$ הוא ישר אופקי עם שיפוע אפס, ולכן יוכל להשיק לפונקציה בנקודות הקיצון הפנימיות בהן הנגזרת מתאפסת.

נשים לב לכך שהנגזרת של $g(x)$ זהה לזו של $f(x)$: $g'(x)=f'(x)$

ולכן $g'(x)$ תתאפס באותם שיעורי ה-x בהם $f'(x)$ התאפסה: $x_1=-4$, $x_2=0$

נוכל להציב שיעורי x אלו בביטוי $g(x)=f(x)+C$ ולהשוות ל $y=12$:

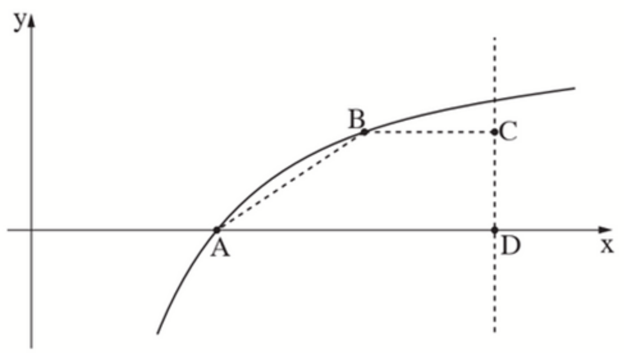
אפשרות I:

$$g(-4)=12$$
$$f(-4)+C=12$$
$$32+C=12$$
$$\underline{\underline{C=-20}}$$

אפשרות II:

$$g(0)=12$$
$$f(0)+C=12$$
$$0+C=12$$
$$\underline{\underline{C=12}}$$

8. בסרטוט שלפניכם מתואר חלק מגרף הפונקציה $f(x)=1-\frac{2}{x}$ בתחום $x>0$.



גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה־ x בנקודה A .

נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$,

ברביע הראשון, משמאל לישר $x=5$.

מן הנקודה B מעבירים ישר המקביל לציר ה־ x

וחותך את הישר $x=5$ בנקודה C .

נתון: $D(5,0)$.

א. מצאו את שיעורי הנקודה A .

נסמן את שיעור ה־ x של הנקודה B ב־ t .

ב. הביעו באמצעות t את שיעורי הנקודות B ו־ C .

ג. מצאו את שיעורי הנקודה B שבעבורה שטח הטרפז $ABCD$ הוא מקסימלי.

ד. הראו כי השטח המקסימלי של הטרפז $ABCD$ הוא 1 .

פתרון:

א. שיעורי הנקודה A: נקודת חיתוך גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x:

$f(x)=0 \Rightarrow 1-\frac{2}{x}=0 \Rightarrow \frac{2}{x}=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \boxed{A(2,0)}$

ב. $x_B=t$, B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$, לכן $y_B=f(t)=1-\frac{2}{t}$.

$\boxed{B\left(t,1-\frac{2}{t}\right)}$

נשים לב כי מהנתונים בשאלה מתקיימת $2<t<5$.

נקודה C:

BC מקביל לציר ה-x לכן $y_C=y_B=1-\frac{2}{t}$

C נמצאת על הישר $x=5$ ולכן $x_C=5$.

$\boxed{C\left(5,1-\frac{2}{t}\right)}$

ג. נתונה הנקודה $D(5,0)$

נביע את שטח הטרפז ישר הזווית $ABCD$:

$$S_{ABCD} = \frac{(AD+BC)\cdot CD}{2}$$

נביע את אורכי הקטעים באמצעות t:

(נמצא על ציר x) $AD = X_D - X_A = 5-2 = 3$

(מקביל לציר ה-x) $BC = X_C - X_B = 5-t$

(מקביל לציר ה-y) $CD = y_C - y_D = 1-\frac{2}{t}$

נציב בנוסחה לשטח ונסמן כפונקציה של t:

$$S(t) = \frac{(3+5-t)\cdot\left(1-\frac{2}{t}\right)}{2} = \frac{(8-t)\left(1-\frac{2}{t}\right)}{2}$$

$2<t<5$,

נפתח סוגריים ונפשט את הביטוי האלגברי של $S(t)$:

$$S(t) = \frac{8-\frac{16}{t}-t+2}{2} = \frac{-t+10-\frac{16}{t}}{2} = -\frac{t}{2}+5-\frac{8}{t}, \qquad 2<t<5$$

נגזור לגילוי נקודות קריטיות ("חשודות בקיצון"):

$$S'(t) = -\frac{1}{2}+\frac{8}{t^2}$$

נשווה את הנגזרת לאפס: $S'(t)=0$

$$-\frac{1}{2}+\frac{8}{t^2}=0 \Rightarrow \frac{8}{t^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow t^2=16 \xRightarrow{2<t<5} t=4$$

נגזור פעם נוספת על מנת לבדוק את סוג הקיצון:

$$S''(t) = -\frac{16}{t^3}$$

שלילי עבור $2<t<5$

בדיקה עבור $t=4$: $S''(4) = -\frac{16}{4^3} = -\frac{1}{4} < 0$

לכן, עבור $t=4$ מתקבל שטח טרפז מקסימלי,

שיעורי הנקודה $B(t, 1-\frac{2}{t})$ במקרה זה: $B_{max}(4, 1-\frac{2}{4}) \Rightarrow \boxed{B_{max}(4, \frac{1}{2})}$

ד. השטח המקסימלי של הטרפז: נציב $t=4$ בביטוי עבור שטח הטרפז:

$$S(t) = -\frac{t}{2} + 5 - \frac{8}{t} \Rightarrow \boxed{S_{max}(4) = -\frac{4}{2} + 5 - \frac{8}{4} = 1}$$

כלומר, השטח המקסימלי של הטרפז הוא 1 יח"ר כפי שנדרשנו להראות.