יואל גבע
לא מתפשרים.

שאלון 35472 מועד
חורף תשפ״ג

מורים יקרים,
החל משנת 2022, נוספו סמלי שאלון המציינים את השאלונים לפי התוכנית החדשה במתמטיקה.
להלן השינויים:
שאלון 182 (801) שונה ל- 172
שאלון 381 (802) שונה ל- 371
שאלון 382 (803) שונה ל- 372
שאלון 481 (804) שונה ל- 471
שאלון 482 (805) שונה ל- 472
שאלון 581 (806) שונה ל- 571
שאלון 582 (807) שונה ל- 572

בהתאם לכך, מצורף פתרון בחינת בגרות לשאלון 35472 מועד חורף תשפ״ג.

תודה מיוחדת למר עפר ילין על כתיבת הפתרונות ועריכת קובץ זה.

א. (1) בסרטוט מתוארת תיבה, בהתאם המקצועות הצדדים מאונכים לבסיסים.

$\boxed{\overrightarrow{AB} = \underline{u}}$

$\boxed{\overrightarrow{AD} = \underline{v}}$

$\boxed{\overrightarrow{AA'} = \underline{w}}$

$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{v}$

$\underline{u} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$

$\underline{v} \cdot \underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$

מה עוד ניתן ללמוד מהנתונים ?

E **מפגש אלכסוני הפאה המלבנית** $AA'D'D$**, שחוצים זה את זה.**

$\boxed{\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\underline{u}}$ **ולכן, למשל,** $EF \parallel AB$ **(אופס... ענינו על ב (1)... תמיד טוב להבין את הנתונים).**

נביע את הווקטורים $\overrightarrow{BD'}$ **ו-** $\overrightarrow{AE}$ **, באמצעות** $\underline{u}$ **,** $\underline{v}$ **ו-** $\underline{w}$**.**

$$\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BD'} = -\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}}$$

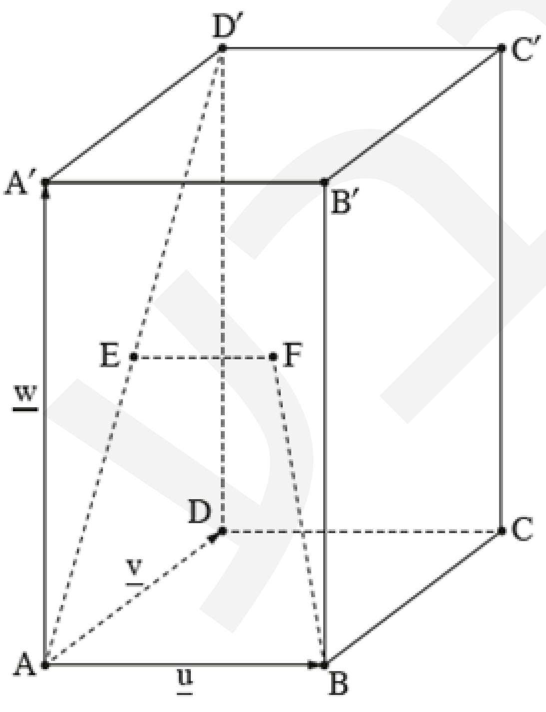
E **היא מפגש אלכסוני הפאה** $AA'D'D$.

הפאה היא מלבן, והאלכסונים חוצים זה את זה, ולכן E **היא אמצע האלכסון** AD'.

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD'}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D'})$$

$$\boxed{\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}}$$



תשובה: $\overrightarrow{BD'} = -\underline{u} + \underline{v} - \underline{w}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}$.

(2) נביע תחילה את $\overrightarrow{BF}$.

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}$$

$$\overrightarrow{BF} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} + \frac{1}{2}\underline{u}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}}$$

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(-\underline{u} + \underline{v} + \underline{w})$$

$$\boxed{\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'}}$$

תשובה: הוכחנו ש- $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'}$.

ב. (1) $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\underline{u}$, על פי הנתון, כאשר $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

לכן שני הווקטורים האלו קולינאריים, כי $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (כל אחד הוא כפולה של השני בסקלר).

<u>הסבר חלופי</u>: הווקטור $\overrightarrow{AB}$ והווקטור $\overrightarrow{EF}$ תלויים לינארית (יוצאים לאותו כיוון).

מכיוון שנקודה E אינה על המקצוע AB, או המשכו, אלא באמצע הפאה $AA'D'D$,

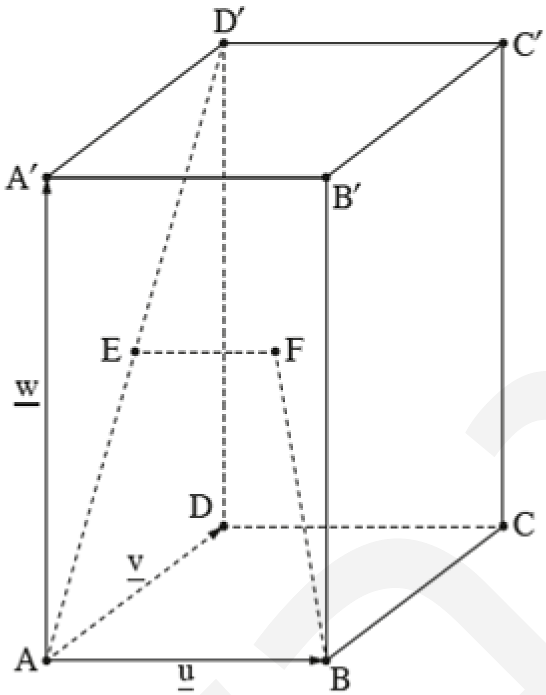
הרי שהישרים, עליהם מונחים הקטעים EF ו- AB אינם מתלכדים, אלא מקבילים.

<u>הסבר גיאומטרי</u>: EF קטע אמצעים ב- $\Delta ABD'$, כי מחבר אמצעי שתי צלעות,

(על פי הנתון, ועל פי תת-סעיף א (2)), ולכן $EF \parallel AB$,

כי קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית. (*תודה לשי חנני*).

תשובה: הסברנו מדוע $EF \parallel AB$.



$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{u}}$

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{v}}$

$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}}$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{v}$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{w}$

$\underline{v}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{v}\perp\underline{w}$

(2) נראה כי $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$.

הסבר: מקצוע הבסיס AB מאונך לפאה $AA'D'D$,

ולכן מאונך לכל ישר העובר בפאה, ובפרט ל- AE .

הסבר מקדים: AB מאונך ל- AD (כי הבסיס מלבן)

וגם ל- AA' (פאות המנסרה הן מלבנים),

ולכן מאונך לפאה.

ניתן גם על ידי כפל סקלרי (לא נדרש):

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\underline{u}\cdot(\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w})$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\underline{u}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}\underline{w}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=0 \quad \rightarrow \boxed{\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}}$$

$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}|=2}$ $\boxed{\underline{u}^2=4}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}|=2}$ $\boxed{\underline{v}^2=4}$

$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}|=4}$ $\boxed{\underline{w}^2=16}$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{v}$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{w}$

$\underline{v}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{v}\perp\underline{w}$

תשובה: הראינו כי $\overrightarrow{AB}$ מאונך ל- $\overrightarrow{AE}$.

ג. נתון: בסיס התיבה הוא ריבוע שאורך צלעו הוא 2, ונפח התיבה הוא 16.

(1) נפח תיבה שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה התיבה.

$$16 = 2^2 \cdot h \quad \rightarrow \boxed{h = 4}$$

תשובה: אורך המקצוע הצדדי של התיבה הוא 4.

(2) נחשב את אורך הווקטור $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$.

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{BF}} = -\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w}}$$

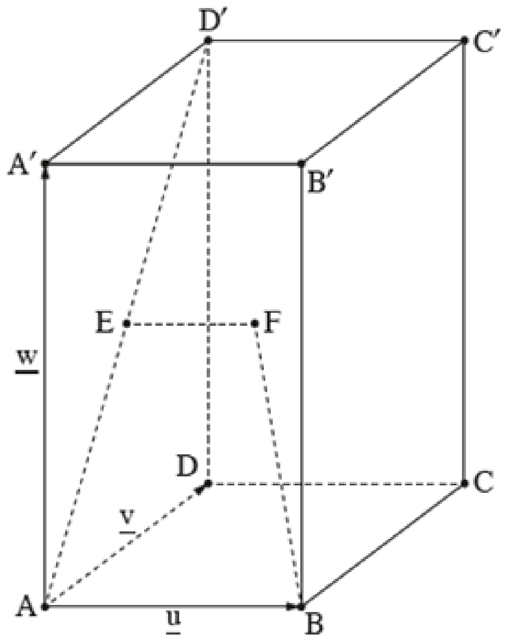
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right| = \sqrt{(-\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w})^2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}\underline{u}^2 + \frac{1}{4}\underline{v}^2 + \frac{1}{4}\underline{w}^2}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}4 + \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot 16}$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right| = \sqrt{6}}$$

תשובה: אורך הווקטור $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$ הוא $\sqrt{6}$.



$\boxed{\overline{\mathrm{AD}} = \underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}| = 2}$ $\boxed{\underline{u}^2 = 4}$

$\boxed{\overline{\mathrm{AB}} = \underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}| = 2}$ $\boxed{\underline{v}^2 = 4}$

$\boxed{\overline{\mathrm{AA'}} = \underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}| = 4}$ $\boxed{\underline{w}^2 = 16}$

$\underline{u}\cdot\underline{v} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{v}$

$\underline{u}\cdot\underline{w} = 0 \leftarrow \underline{u} \perp \underline{w}$

$\underline{v}\cdot\underline{w} = 0 \leftarrow \underline{v} \perp \underline{w}$

הערה: בחישובים נעשה שימוש בנוסחת כפל מקוצר: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

אם לא למדתם את הנוסחה, וזה ממש סבבה בארבע יחידות, אז מומלץ להשתמש בחוק הפילוג המורחב.

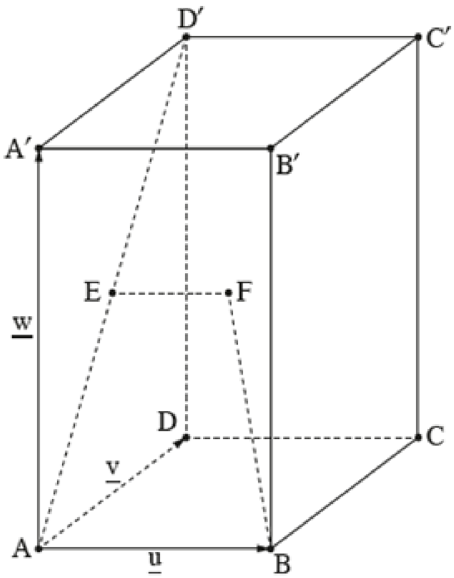
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right| = \sqrt{(-\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w})(-\frac{1}{2}\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w})}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BF}}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}\underline{u}^2 + \frac{1}{4}\underline{v}^2 + \frac{1}{4}\underline{w}^2}$$

התוצאה נראית ממש זהה, כי במקרה זה: $\underline{u}\cdot\underline{v} = \underline{u}\cdot\underline{w} = \underline{v}\cdot\underline{w} = 0$,

ואין טעם לרשום את המכפלות המתאפסות.

ד. (1) נחשב את $\sphericalangle ABF$ **.**



$\boxed{\overrightarrow{AD}=\underline{u}}$ $\boxed{|\underline{u}|=2}$ $\boxed{\underline{u}^2=4}$

$\boxed{\overrightarrow{AB}=\underline{v}}$ $\boxed{|\underline{v}|=2}$ $\boxed{\underline{v}^2=4}$

$\boxed{\overrightarrow{AA'}=\underline{w}}$ $\boxed{|\underline{w}|=4}$ $\boxed{\underline{w}^2=16}$

$\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{v}$

$\underline{u}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{u}\perp\underline{w}$

$\underline{v}\cdot\underline{w}=0 \leftarrow \underline{v}\perp\underline{w}$

תכנון: $\cos\sphericalangle ABF=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BF}|}$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}=(-\underline{u})\cdot(-\frac{1}{2}\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w})$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\cdot\underline{u}^2$$

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\cdot 4$$

$$\boxed{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF}=2}$$

$$\cos\sphericalangle ABF=\frac{2}{2\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\boxed{\sphericalangle ABF=65.91^\circ}$$

תשובה: גודל הזווית ABF **הוא** 65.91°.

(2) המרובע $AEFB$ **הוא טרפז ישר זווית.**

הסבר: הראינו ש- AB **מקביל ל-** EF **ושווה למחציתו, ולכן זהו טרפז.**

בטרפז, סכום הזוויות שעל השוקיים הוא 180° .

הראינו ש- AB **מאונך ל-** AE **, ומכאן שגם** $\sphericalangle AEF=90^\circ$.

כמו כן הראינו ש- $\sphericalangle ABF=65.91^\circ$ **, ולכן** $\sphericalangle EFB=114.09^\circ$.

תשובה: $\sphericalangle BAE=90^\circ$, $\sphericalangle AEF=90^\circ$, $\sphericalangle EFB=114.09^\circ$, $\sphericalangle ABF=65.91^\circ$.

א. המחקר נועד לבדוק את הקשר בין צריכת הסיגריות היומית לפני קורס גמילה לעישון (x),
ובין צריכת הסיגריות היומית לאחר שבוע מתחילת הקורס (y) .

האוכלוסייה שנבדקה היא 9 מעשנים שנכחו בקורס.

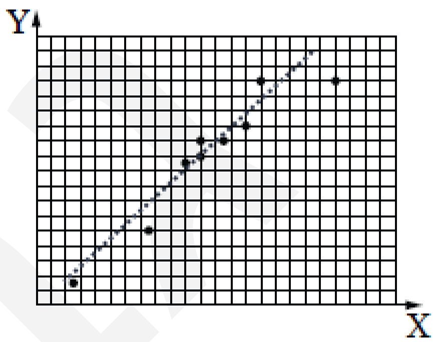
צריכת הסיגריות היומיות לפני הקורס (x)	5	15	20	22	22	25	28	30	40
צריכת הסיגריות היומיות לאחר שבוע מתחילת הקורס (y)	3	10	19	20	22	22	24	30	30

ממוצע הצריכה לפני הקורס הוא: $\bar{x} = \frac{40+30+28+25+22+22+20+15+5}{9} = \frac{207}{9} = 23$

הממוצע לאחר שבוע מתחילת הקורס הוא: $\bar{y} = \frac{30+30+24+22+22+20+19+10+3}{9} = \frac{180}{9} = 20$

תשובה: ממוצע צריכת הסיגריות למשתתף במחקר לפני הקורס הוא 23 סיגריות , $\bar{x} = 23$ **.**
ממוצע צריכת הסיגריות למשתתף לאחר שבוע מתחילת הקורס הוא 20 סיגריות , $\bar{y} = 20$.

ב. נסרטט דיאגרמת פיזור של Y כתלות ב- X (כל משבצת במחברת מייצגת 2 סיגריות ליום).



תשובה: הסרטוט מעל (העשרה - כולל אפשרות לקו הניבוי הלא רגרסיבי, קו ציוני התקן).

ג. ניתן לראות שקיימת מגמה של עלייה, ולכן נצפה לראות מקדם מתאם חיובי.
הנקודות מפוזרות בצורה מהודקת סביב קשר לינארי עולה,
ולכן מקדם המתאם צפוי להיות חיובי חזק (מעל חצי)
ניתן גם לראות שאין קו ישר, שעליו תהיינה כל הנקודות
(למשל, ניתן לראות שיש צריכה ראשונית 22 שעבורה שתי צריכות חדשות שונות,
ושתי צריכות חדשות 22 , שעבורן שתי צריכות ראשוניות שונות),
ולכן מקדם המתאם אינו דטרמיניסטי $(r=1)$ **,**

ומקדם מתאם $r = 0.949$ **נראה מתאים ביותר, כי הנקודות מסודרות מאוד יפה סביב קשר ליניארי עולה.**
תשובה: $r = 0.949$ **הוא מקדם מתאם, שנראה כי מתאים לנתונים.**

ד. נמצא את משוואת קו הרגרסיה לניבוי צריכת הסיגריות היומית לאחר שבוע מתחילת הקורס (y),
על פי צריכת הסיגריות היומית לפני קורס גמילה לעישון (x),
התוצאות שהתקבלו הן: צריכת סיגריות יומית לפני הקורס: $\bar{x} = 23$ **, עם סטיית תקן של** $S_x = 9.226$ **,**
צריכת סיגריות יומית לאחר שבוע מתחילת הקורס: $\bar{y} = 20$ **, עם סטיית תקן של** $S_y = 8.26$ **,**
כאשר מקדם המתאם הוא $r = 0.949$.

נמצא תחילה את שיפוע קו הרגרסיה: $m = r \cdot \frac{s_y}{s_x} = 0.949 \cdot \frac{8.26}{9.226} \approx 0.85$ **.**

נמצא את משוואת קו הרגרסיה, שעובר בנקודת הממוצעים $(23, 20)$ **:**

$$y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$$
$$y - 20 = 0.85(x - 23)$$
$$y - 20 = 0.85x - 19.55$$
$$\boxed{y = 0.85x + 0.45}$$

תשובה: משוואת קו הרגרסיה, לניבוי y **, על פי** x **, היא** $y = 0.85x + 0.45$ **.**

ה. נמצא מהי צריכת הסיגריות המשוערת של אלעד לאחר שבוע מתחילת הקורס (y)
בהתאם לצריכת הסיגריות היומית שלו, 21 **סיגריות ביום.**
נשים לב שנתון של 21 **סיגריות לפני הקורס הוא בתחום של הנתונים שנמדדו,**
ולכן ניתן להעריך את צריכת הסיגריות לאחר שבוע מתחילת הקורס.
נציב $x = 21$ **, במשוואת קו הרגרסיה:** $y = 0.85 \cdot 21 + 0.45 = 18.3 \approx 18$.

<u>דרך פתרון נוספת</u> היא ללא חישוב משוואת קו הרגרסיה.

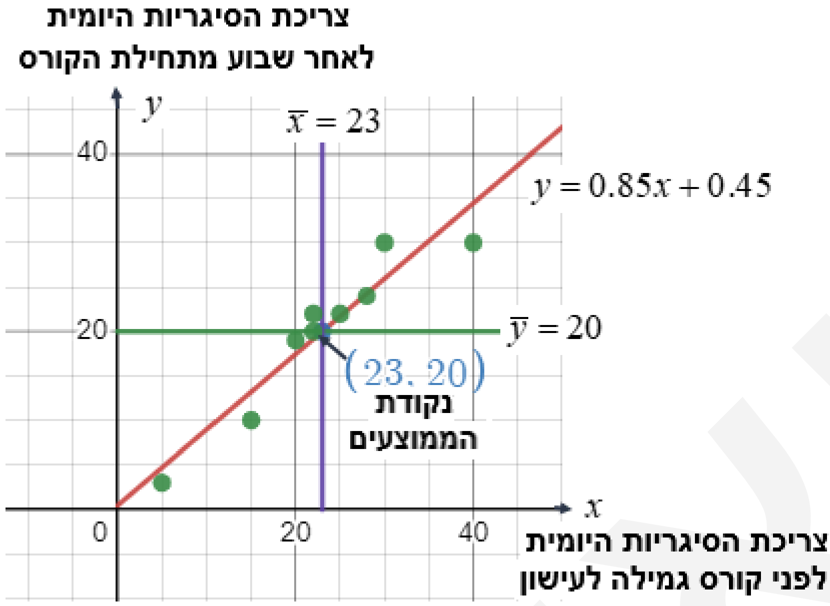
נחשב את ציון התקן של מס' הסיגריות של אלעד לפני הקורס: $z = \frac{x - \bar{x}}{s_x} = \frac{21 - 23}{9.226} = -0.2168$ **.**

נחשב את ציון התקן, לאחר הקורס,
על ידי הכפלת ציון התקן במקדם המתאם: $z = -0.2168 \cdot 0.949 = -0.2057$ **.**

נציב מחדש במשוואה של ציון התקן: $z = \frac{y - \bar{y}}{s_y} \rightarrow -0.2057 = \frac{y - 20}{8.26} \rightarrow y = 18.3$ **.**

תשובה: הניבוי לצריכת הסיגריות היומית של אלעד, לאחר שבוע מתחילת הקורס הוא $18 \approx 18.3$ **סיגריות.**

העשרה



צריכת הסיגריות היומית
לאחר שבוע מתחילת הקורס
y
$\bar{x} = 23$
40
$y = 0.85x + 0.45$
20
$\bar{y} = 20$
(23, 20)
נקודת
הממוצעים
x
0
20
40
צריכת הסיגריות היומית
לפני קורס גמילה לעישון

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-2}$.

(1) בתחום ההגדרה המכנה שונה מאפס

$$x^2-2\neq 0$$
$$x^2\neq 2$$
$$x\neq \pm\sqrt{2}$$

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ **הוא** $x\neq\pm\sqrt{2}$.

(2) האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ **, המאונכות לציר ה-** x **, הן** $x=\sqrt{2}$ **ו-** $x=-\sqrt{2}$.

ב. בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **, אבל המונה חיובי לכל** x **, ולכן אין חיתוך עם ציר ה-** x.

בנקודת חיתוך עם ציר ה- y **מתקיים** $x=0$ **:** $f(0)=\frac{e^{2\cdot 0}}{0^2-2}=-\frac{1}{2}\quad\rightarrow \boxed{(0,-\frac{1}{2})}$

תשובה: שיעור נקודת החיתוך, של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם הצירים, הוא** $(0,-\frac{1}{2})$.

ג. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **, ונקבע את סוגן.**

$$\boxed{f(x)=\frac{e^{2x}}{x^2-2}}$$
$$f'(x)=\frac{2e^{2x}(x^2-2)-2xe^{2x}}{(x^2-2)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{2e^{2x}(x^2-2-x)}{(x^2-2)^2}}$$
$$x^2-x-2=0$$
$$(x-2)(x+1)=0$$
$$x=-1\quad\rightarrow\boxed{(-1,-\frac{1}{e^2})}$$
$$x=2\quad\rightarrow\boxed{(2,\frac{e^4}{2})}$$
$$\left.\begin{matrix}f'(-1.1)>0\\ f'(0)<0\end{matrix}\right\}\boxed{(-1,-\frac{1}{e^2}),\quad \max}$$
$$\left.\begin{matrix}f'(1.9)<0\\ f'(3)>0\end{matrix}\right\}\boxed{(2,\frac{e^4}{2}),\quad \min}$$

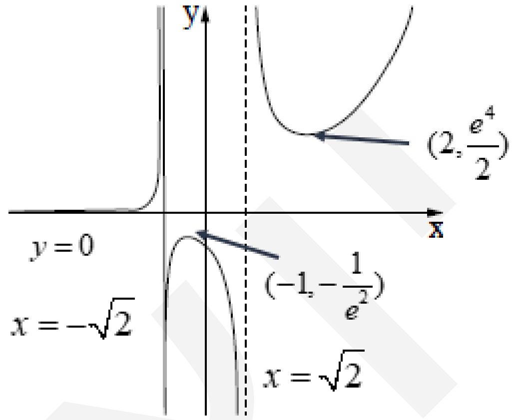
תשובה: שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **הם** $(2,\frac{e^4}{2})$ **מינימום,** $(-1,-\frac{1}{e^2})$ **מקסימום.**

ד. שתי הצבות, מימין ומשמאל, למציאת אסימפטוטות אופקיות, אם ישנן.

כאשר $x \to +\infty$ **, למשל** $f(10) = +4{,}950{,}665 \to +\infty$ **, ואין אסימפטוטה אופקית לימין.**

כאשר $x \to -\infty$ **, למשל** $f(-10) = 2.1 \cdot 10^{-11} \to 0^{+}$ **, והישר** $y = 0$ **אסימפטוטה אופקית לשמאל.**

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 2}$$



תשובה: הסקיצה מעל.

ה. נתונה הפונקציה $g(x) = f(x) + c$.

זו הזזה אנכית, $(+c)$ **יחידות של הפונקציה** $f(x)$,

ללא שינוי בתחום ההגדרה ותחומי עלייה וירידה.

נתון כי ישנם שני ערכים אפשריים של c **, שבעבורם יש לפונקציה** $g(x)$ **נקודת קיצון על הישר** $y = 3$,

ישר שנמצא מתחת לנקודת המינימום של הפונקציה $f(x)$ **ומעל לנקודת המקסימום שלה .**

$(2, \frac{e^4}{2})$ **היא נקודת מינימום של** $f(x)$ **, ועבור** $c = -(\frac{e^4}{2} - 3) = 3 - \frac{e^4}{2}$,

תהייה הזזה אנכית כלפי מטה ונקודת הקיצון של $g(x)$ **תהייה** $(2,3)$.

$(-1, -\frac{1}{e^2})$ **היא נקודת מקסימום של** $f(x)$ **, ועבור** $c = 3 - (-\frac{1}{e^2}) = 3 + \frac{1}{e^2}$,

תהייה הזזה אנכית כלפי מעלה ונקודת הקיצון של $g(x)$ **תהייה** $(-1,3)$.

תשובה: $c = 3 - \frac{e^4}{2}$ **, או** $c = 3 + \frac{1}{e^2}$.

א. נתונה הפונקציה $\boxed{f(x)=\left(\ell n\,x\right)^2-4\cdot\ell n\,x+3}$ **, כאשר** $a>0$ **הוא פרמטר.**

(1) הנקודה $(e^3,0)$ **היא אחת מנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-** x **.**

$$0=\left(\ell n\,e^3\right)^2-a\cdot\ell n\,e^3+3$$
$$0=9-3a+3$$
$$3a=12$$
$$\boxed{a=4}$$

תשובה: $a=4$ **.**

ב. נציב $a=4$ **בפונקציה** $f(x)$ **ונקבל את הפונקציה** $f(x)=\left(\ell n\,x\right)^2-4\cdot\ell n\,x+3$ **.**

בתחום ההגדרה הביטוי שבתוך הפונקציה הלוגריתמית צ"ל חיובי.

תשובה: תחום ההגדרה הוא $x>0$ **.**

ג. בנקודת חיתוך עם ציר ה- x **מתקיים** $y=0$ **:**

$$(\ell n\,x)^2-4\ell n\,x+3=0 \qquad \boxed{\ell n\,x=t}$$
$$t^2-4t+3=0$$
$$t=1\ \rightarrow \ell n\,x=1\ \rightarrow x=e\ \rightarrow \boxed{(e,0)}$$
$$t=3\ \rightarrow \ell n\,x=3\ \rightarrow x=e^3\ \rightarrow \boxed{(e^3,0)}$$

אין חיתוך עם ציר ה- y **, כי** $x>0$ **בתחום ההגדרה.**

תשובה: נקודת החיתוך האחרת, של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם ציר ה-** x **, היא** $(e,0)$ **.**

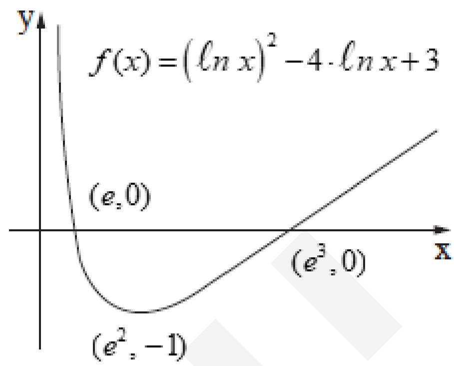
ד. נמצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ **(אם יש כאלה), ונקבע את סוגן.**

$$\boxed{f(x)=(\ell n\,x)^2-4\ell n\,x+3}$$
$$f'(x)=2\ell n\,x\cdot\frac{1}{x}-4\cdot\frac{1}{x}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{2\ell n\,x-4}{x}}$$
$$0=2\ell n\,x-4$$
$$\ell n\,x=2$$
$$x=e^2\ \rightarrow f(e^2)=(\ell n\,e^2)^2-4\ell n\,e^2+3=-1\ \rightarrow \boxed{(e^2,-1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(7)=\frac{-}{+}<0\ \searrow \\ f'(8)=\frac{+}{+}>0\ \nearrow \end{array}\right\}(e^2,-1),\min$$

תשובה: $(e^2,-1)$ **, מינימום.**

ה. נסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.



תשובה: הסקיצה מעל.

ו. נתונה הפונקציה $g(x)=|f(x)|$.

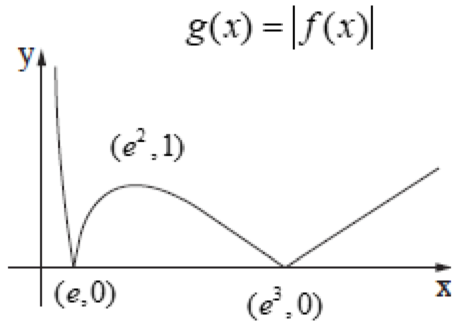
בתחום $e<x<e^3$ מתקיים $f(x)<0$ והגרף של $f(x)$ מתחת לציר ה- x .

בתחום זה $g(x)=-f(x)$, ו"נקפל" את הגרף של $f(x)$ סביב ציר ה- x .

כך ש- $(e^3,0)$, $(e,0)$ תהפוכנה לנקודות מינימום,

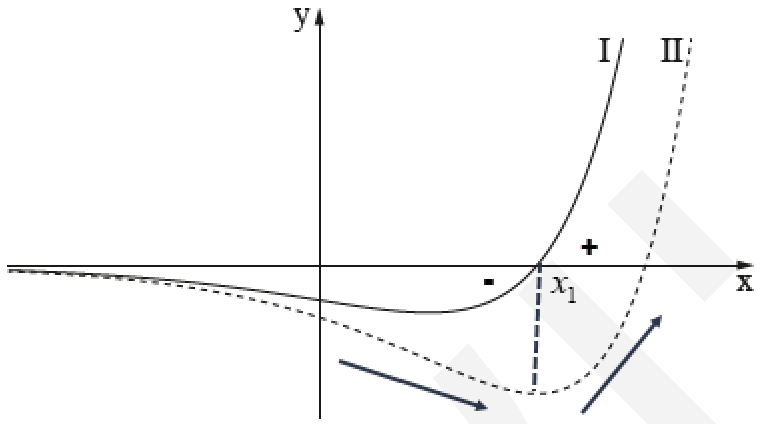
ונקודת המינימום $(e^2,-1)$, תהפוך לנקודת מקסימום $(e^2,1)$.

(הערה, מעבר לתוכנית הלימודים – נשים לב שבנקודות האפס מתקבל מעין "שפיץ",
כי הנגזרת בנקודות אלו לא שווה ל- אפס, ולמעשה בכלל לא מוגדרת)



תשובה: הסקיצה מעל.

א. נשים לב , שעבור $x = x_1$ גרף I עובר משליליות לחיוביות, וגרף II עובר מירידה לעלייה.



לכן גרף I מתאים לגרף הנגזרת $f\,'(x)$ וגרף II מתאים לפונקציה $f(x)$.

תשובה: גרף I מתאים לגרף פונקציית הנגזרת $f\,'(x)$.

ב. נתון: $f(x) = (x-3)\cdot e^x$.

תשובה: תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא כל x .

ג. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

בנקודת החיתוך עם ציר ה- x מתקיים $y=0$.

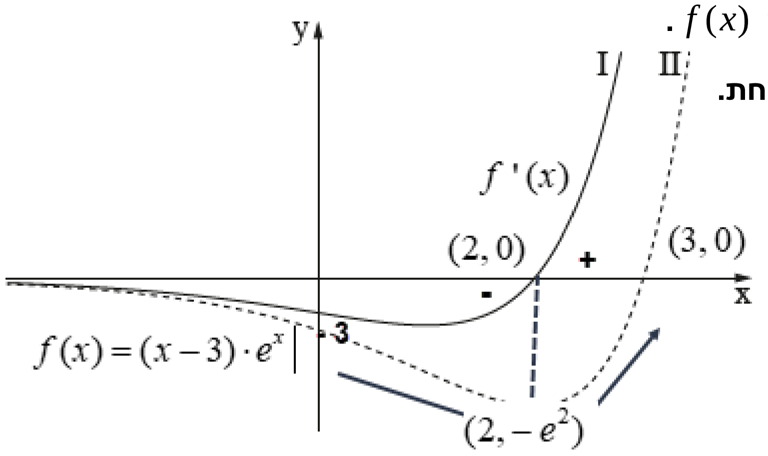
$$(x-3)\cdot e^x = 0$$
$$x-3=0$$
$$x=3 \quad \rightarrow \boxed{(3,0)}$$

בנקודת החיתוך עם ציר ה- y מתקיים $x=0$, $\boxed{(0,-3)} \leftarrow \quad f(0) = (0-3)\cdot e^0 = -3$.

תשובה: $(3,0)$, $(0,-3)$.

ד. נמצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

כזכור $x=x_1$ מינימום, וישנה רק נקודת קיצון אחת.

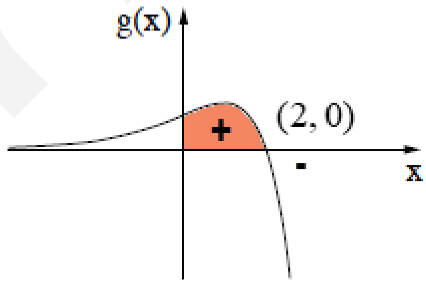


$$\boxed{f(x)=(x-3)\cdot e^x}$$
$$f'(x)=e^x+(x-3)\cdot e^x$$
$$f'(x)=e^x(1+x-3)$$
$$\boxed{f'(x)=e^x(x-2)}$$
$$x-2=0$$
$$x=2$$
$$f(2)=(2-3)\cdot e^2=-e^2$$
$$\boxed{(2,-e^2),\min}$$

תשובה: עבור $f(x)$ עלייה: $x>2$, ירידה $x<2$.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-f'(x)$, כאשר $g(x)$ סימטרית ל $f'(x)$ סביב ציר ה- x,

תחומי החיוביות והשליליות של $g(x)$ מנוגדים לאלו של $f'(x)$, וגם תחומי העלייה והירידה מנוגדים.



תשובה: הסרטוט מעל (כולל סימון שטח עבור סעיף ו).

ו. כיוון ש- $g(x)$ סימטרית ל- $f'(x)$ סביב ציר ה- x,

אז השטח המבוקש, שבין $g(x)$ ל- $f'(x)$ וציר ה- y , שווה לפעמיים השטח המסומן בסעיף ה.

$$S=2\cdot\int_0^2 (g(x)-0)\,dx$$
$$S=2\cdot(-f(x))\Big]_0^2$$
$$\left.\begin{aligned} x=2:&\quad 2\cdot(-f(2))=2\cdot\left[-(-e^2)\right]=2e^2\\ x=0:&\quad 2\cdot(-f(0))=2\cdot\left[-(-3)\right]=6\end{aligned}\right\}$$
$$S=2e^2-6\rightarrow\boxed{S=2e^2-6\approx 8.778}$$

תשובה: השטח המוגבל הוא $2e^2-6\approx 8.778$.